

Η διδασκαλία τῶν λογαρίθμων στὴν τουρκοκρατούμενη Ἐλλάδα σύμφωνα μὲ χειρόγραφο τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας

Μαρία Δ. Χάλκου

Δρ. Μαθηματικός ΕΚΠΑ

Σχολικός Σύμβουλος

Ακαδημία Θεσμών και Πολιτισμῶν

m.chalkou@academy.edu.gr

mchalkou@gmail.com

Περίληψη

Στὸ ἄρθρο αὐτὸ ἐρευνοῦμε ἴστορικὰ στοιχεῖα τὰ ὅποια σχετίζονται μὲ τὴν Παιδεία ἀλλὰ καὶ τὶς κοινωνικές συνθῆκες στὴν Ἐλλάδα κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας. Ἡ μελέτη βασίστηκε στὸν κώδικα 72 τοῦ 18ου αἰ. τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, στὸ 4ο βιβλίο τοῦ ὅποιου περιέχεται ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη, ὅπως αὐτὴ διδασκόταν στοὺς μαθητὲς τῆς Σχολῆς τῆς Δημητσάνας λίγες μόλις δεκαετίες πρὶν τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821¹.

Abstract

In this article concluded are some results of the research related to the Education and the social conditions in Greece during the last years of the turkish rule. The study is based on the codex 72 of the 18th century of the Library of Dēmētsana. In the 4th book of this manuscript, Nikēforos Theotokēs, describes the Theory of Logarithms, as it was teached in the School of Dēmētsana during the last years of the turkish rule.

¹ Ανωνύμου, Μαθηματάριον, Ἐκδοση Μαρία Χάλκου [Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα κατά τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας, σύμφωνα με τον κώδικα 72 τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, Εισαγωγή, Ἐκδοση και Σχόλια], Αθήνα 2009 (έντυπο και ερυβ)

Η Έκπαιδευση στήν Έλλάδα κατά τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς τουρκοκρατίας

Άπο τὰ μέσα τοῦ 18ου αἰ. ἐνῷ στήν Έλλάδα ἡ ἔκπαιδευση ἀναβαθμίζεται καὶ ἐπιρρεάζεται ἀπὸ τὸν Νεοελληνικὸν Διαφωτισμόν χωρὶς βέβαια νὰ φθάνει τὸ ἐπίπεδο τῶν Εύρωπαϊκῶν Ἀκαδημιῶν², τὸ “κοινὸν σχολεῖο” συμπληρώνεται ἀπὸ τὸ “Ἐλληνικὸν σχολεῖο”, ἢ “Σχολή”, ἢ “Φροντιστήριο”, ἢ “Ἐκπαιδευτήριο”, ἢ “Μουσεῖο”, ἢ “Ἀκαδημία”, ἢ “Γυμνάσιο”, ἢ “Λύκειο”. Αύτες οἱ ὄνομασίες σχετίζονται κυρίως μὲ τὶς προσδοκίες τοῦ χορηγοῦ καὶ ὅχι μὲ τὸ παρεχόμενο ἐπίπεδο γνώσεων ἢ σπουδῶν. Τὸ μεσαῖο ἐπίπεδο μόρφωσης ὄνομαζόταν “Ἐγκύλιος Παιδεία”, καὶ δύον ὑπῆρχε ἀνώτερο ἐπίπεδο ἔκει διδάσκονταν ἡ Λογική, ἡ Φιλοσοφία, ἡ Θεολογία, καὶ ἵσως ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ τὰ Μαθηματικὰ γενικώτερα³. Στὶς φυσικομαθηματικὲς Ἐπιστῆμες ὑπερεῖχαν οἱ σχολεῖς (Ἀκαδημίες) Χίου καὶ Κυδωνιῶν⁴. Κάποιες φορὲς δέ, διαχώριζαν τὴ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ καὶ κάποιες ὅχι⁵. Η διδασκαλία ὅμως τῶν Μαθηματικῶν γενικώτερα ἦταν προβληματικὴ λόγῳ ἔλλειψης καταρτισμένων δασκάλων. Οἱ συντηρητικοὶ μάλιστα δάσκαλοι καὶ ἐπιστήμονες δὲν συμπαθοῦσαν τὶς θετικὲς Ἐπιστῆμες, καὶ εἰδικὰ ὅσον ἀφορᾶ στὴ Φυσικὴ καὶ τὰ Μαθηματικὰ τὰ θεωροῦσαν ἄχρηστα καὶ ἐπικίνδυνα διότι ἀπομάκρυναν κατὰ τὴν ἀποψή τους τοὺς ἀνθρώπους ἀπὸ τὸ θεὸν καὶ τὴ Χριστιανικὴ θρησκεία⁶, καὶ στὶς σχολές ποὺ εἶχαν ἔξουσία ἀπαγόρευαν τὴ διδασκαλία τους. Σημειωτέον ὅτι οἱ φυσικὲς καὶ γενικὰ οἱ θετικὲς Ἐπιστῆμες ἐμφανίζονται στὸ πρόγραμμα σπουδῶν ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 18ου αἰ. καὶ μετά⁷, καὶ μάλιστα σύμφωνα μὲ τὸν Α. Πέκιο, ἐνῷ κατὰ τὸν 18ον αἰ. ἐκδόθηκαν 170 συγγράμματα μὲ θρησκευτικὸν χαρακτήρα, μόλις 20 ἐκδόθηκαν μὲ περιεχόμενο ποὺ ἀφοροῦσε ὅλες τὶς ἄλλες ἐπιστῆμες⁸.

² *Ιστορία τῶν Έλλήνων, Ο Έλληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχίᾳ 1453- 1821*, ἐκδ. Δομή, Αθήνα 2006, τόμ. X, σελ. 466.

³ Ο. π., σελ. 475.

⁴ Άξιζει νὰ ἀναφερθεῖ ὅτι ἡ Σχολὴ τῶν Μηλεῶν στὸ Πήλιο ἦταν καὶ αὐτὴ μία ἀπὸ τὶς πρωτοπόρους ποὺ είστηγαν τὴ διδασκαλία τῶν θετικῶν Ἐπιστημῶν στὸ πρόγραμμά της. Βλ. *Πρακτικά 25ον Πανελλήνιον Συνεδρίον Μαθηματικῆς Παιδείας τῆς Έλληνικῆς Μαθηματικῆς Έταιρείας*: Η Μαθηματικὴ Έκπαιδευση καὶ ἡ σύγχρονη πραγματικότητα τοῦ 21ου αἰώνα, Θωμάς Καρανίκας, Βόλος, Νοέμβριος 2008, σελ. 508-523.

⁵ Στεφανίδης Μιχαήλ, *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ελλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Η Εκπαιδευτικὴ Επανάστασις*, Τυπογραφικὴ Έταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Αθῆναι 1926, σελ. 13.

⁶ Ο. π., σελ. 18.

⁷ *Ιστορία τῶν Έλλήνων, Ο Έλληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχίᾳ 1453- 1821*, ἐκδ. Δομή, Αθήνα 2006, τόμ. X, σελ. 480.

⁸ Πέκιος Ἀλέξανδρος, *Πνευματικὴ ἀποψίς τῆς τουρκοκρατουμένης Ἑλλάδος*: ἥτοι περιεκτικὸν διάγραμμα τῆς ἐπὶ τουρκοκρατίας διανοητικῆς τοῦ ἐλληνικοῦ ἔθνους καταστάσεως, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Ζέλλιτς καὶ Υἱῶν, ἐν Κωνσταντινουπόλει 1880, σελ. 102.

Οι συνθῆκες ζωῆς στὴν Πελοπόννησο

Στὴν Πελοπόννησο, τὸ χρονικὸ διάστημα 1770-1780 χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὰ λεγόμενα "Ορλωφικά" (ἐπανάσταση τοῦ Ὄρλωφ), ἔναν πόλεμο ποὺ ρήμαξε καὶ ἐρήμωσε τὴν περιοχή. Σύμφωνα μὲ τοὺς V. Brunet de Presle καὶ A. Blanchet, γύρω στὰ 1772 ἡ Πελοπόννησος κολυμποῦσε στὸ αἷμα, οἱ καλλιέργειες κατεστράφησαν, ὁ πληθυσμὸς τῶν χριστιανῶν μειώθηκε στὸ 1/5, καὶ ὅσοι δὲν εἶχαν τὴ δυνατότητα νὰ πληρώσουν φόρους ἐπωλοῦντο σὰν σκλάβοι στὴν Ἀλγερία καὶ σὲ ἄλλα μέρη⁹. Τὸ 1779 ὁ πληθυσμὸς ὀλόκληρης τῆς Πελοποννήσου ἀνέρχεται - μετὰ τὰ 9 ἔτη λεηλασιῶν ἀπὸ τοὺς Ἀλβανοὺς¹⁰ - σὲ 300.000 κατοίκους¹¹, καὶ στὰ τέλη τοῦ 18ου αἰ. ἡ ἴδια ἡ πόλη τῆς Δημητσάνας εἶχε μόλις 300 οίκογένειες.

Ἡ Σχολὴ τῆς Δημητσάνας

Ἡ Σχολὴ τῆς Δημητσάνας σχετίζεται στενά μὲ τὴ "Μονὴ τοῦ Φιλοσόφου", μοναστήρι ποὺ ἰδρύθηκε στὴ Δημητσάνα τὸ 132 μ. Χ.¹² Ὄταν τὸ 1764 ἔφθασαν στὴ Δημητσάνα οἱ μοναχοὶ Γεράσιμος Γούνης καὶ Ἀσημάκης Λεονάρδος ἢ Ἀγάπιος γιὰ νὰ ἰδρύσουν τὴ Σχολὴ¹³, τὰ χειρόγραφα καὶ τὰ ἔντυπα βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Μονῆς τοῦ Φιλοσόφου μεταφέρθηκαν στὴ Σχολὴ. Κατὰ τὰ Ὁρλωφικὰ ὅταν ἡ Σχολὴ καὶ ἡ Βιβλιοθήκη τῆς καταστράφηκαν¹⁴, ἡ λειτουργία τῆς συνεχίστηκε στὴ Μονὴ Φιλοσόφου¹⁵. Ἐννέα χρόνια ἀργότερα (1779) ἡ Σχολὴ ἐπαναλειτουργεῖ στὸ χῶρο τῆς καὶ τότε ἡ Βιβλιοθήκη τῆς ἐμπλουτίζεται μὲ νέες δωρεές¹⁶.

⁹ V. Brunet de Presle- Alexandre Blanchet, *Grèce depuis la conquête romane jusqu'à nos jours*, pub. F. Didot, Paris 1860, σελ. 390.

¹⁰ Οἱ Τοῦρκοι οἱ ὅποιοι εἶχαν ἐπιστρατεύσει τοὺς Ἀλβανοὺς γιὰ νὰ τιμωρήσουν τὴν ἔξεγερμένη Πελοπόννησο, ὅταν οἱ Ἀλβανοὶ ἔγιναν ἴδιαίτερα ἐπικίνδυνοι ζήτησαν τὴ βοήθεια τῶν κλεφτῶν γιὰ νὰ τοὺς ἀντιμετωπίσουν καὶ νὰ τοὺς ἀπελάσουν τελικά, τὸ 1779. Bλ. Zoël Dalègrie, *Ἐλληνες καὶ Οθωμανοί (1453-1923)*, μετάφρ. Σοφία Μπίνη- Σωτηροπούλου, ἑκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 2006, σελ. 212, καὶ Φιλιππίδης Νικόλαος, *Ἐπίτιμος Ύστορία τοῦ Ἑλληνικοῦ θένοντος 1453-1821*, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Α. Καλαράκη, ἐν Αθήναις² 1900, σελ. 126.

¹¹ Zoël Dalègrie, *Ἐλληνες καὶ Οθωμανοί (1453- 1923)*, μετάφρ. Σοφία Μπίνη- Σωτηροπούλου, ἑκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 2006, σελ. 227.

¹² Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριά στὴν περίοδο τῆς Οθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση*, Τρίπολη 2006, σελ. 22.

¹³ Γριτσόπουλος Ἀναστάσιος, *Σχολὴ Δημητσάνης*, Αθήνα 1962, σελ. 35.

¹⁴ Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριά στὴν περίοδο τῆς Οθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση*, Τρίπολη 2006, σελ. 95.

¹⁵ Γεωργακόπουλος Νίκος, *Η παιδεία στὴν Αρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας*, ἑκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000, σελ. 14.

¹⁶ Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἑλληνικὰ Σχολεῖα στὸ Μοριά στὴν περίοδο τῆς Οθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση*, Τρίπολη 2006, σελ. 95.

Τὸ ἐκπαιδευτικὸ ἔργο τῆς Σχολῆς κρίνεται σπουδαῖο¹⁷. Οἱ ἀπόφοιτοὶ τῆς θεωροῦνταν ἄριστοι γνῶστες τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ Λατίνων συγγραφέων¹⁸, ἡ δὲ διδασκομένη ὥλη μπορεῖ νὰ ἦταν λίγη σὲ ἔκταση ἀλλὰ σύμφωνα μὲ δρισμένες μαρτυρίες ἦταν Πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου¹⁹.

‘Ο Νικηφόρος Θεοτόκης

‘Ο Νικηφόρος Θεοτόκης, ὁ ὀποῖος σύμφωνα μὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὴν ἔρευνα ἦταν ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα 72, ὑπῆρξε ἔνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ἐπιστήμονες ποὺ προσπάθησαν να συνδυάσουν τὶς γνώσεις τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων μὲ τὶς σύγχρονες τῶν Δυτικῶν ἐπιστημόνων. Τὸ γεγονός αὐτὸ δόδηγησε στὴν ἀνάδειξη τῆς δουλειᾶς τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων ὡς τὸ κύριο κριτήριο γιὰ τὴν ἀξιολόγηση τοῦ πολιτισμοῦ τῆς ἐποχῆς του²⁰. ‘Ο Νικηφόρος Θεοτόκης ἦταν ὁ σύνδεσμος τῶν παλαιοτέρων ἐπιστημόνων λογίων μὲ τοὺς δασκάλους τῶν νέων Φυσικῶν ἐπιστημῶν τῆς χρονικῆς περιόδου πρὶν τὴν Ἐπανάσταση, ὁ ὀποῖος ἀνέγραψε στὸ ἐκπαιδευτικὸ Πρόγραμμα τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων ὡς πρωτεύοντα τὴν Φυσικὴ καὶ τὰ Μαθηματικά²¹. Ή νεοεισαχθεῖσα διδασκαλία τῶν δύο αὐτῶν μαθημάτων δὲν ἦταν ἀπλῶς μία προσθήκη νέων γνώσεων στὰ ἀναλυτικὰ προγράμματα τῆς ἐποχῆς του, ἀλλὰ ὑπῆρξε στὴν κυριολεξίᾳ "νέα θέση" γιὰ τὴν Παιδεία γενικώτερα, ἡ δοπία ὡστόσο προκάλεσε σημαντικὲς ἀντιδράσεις²².

‘Ο κώδικας 72 τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας

‘Ο κώδικας 72 εἶναι χαρτῶος καὶ σύμφωνα μὲ τὴν καταλογογράφηση τοῦ κ. Άναστασίου Γριτσοπούλου χρονολογεῖται στὸν 18^ο αἰώνα μ. Χ., οἱ διαστάσεις του εἶναι 0,21x0,166 καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 184 φύλλα ὡς ἔξῆς:

1. (φ. 4α), Γεωμετρία μετὰ σχημάτων.

φ. 29α: Τέλος τοῦ α' βιβλίου αφοθῷ σεπτεμβρίου ιη^η ἡμέρᾳ Τετάρτη ἡρξάμεθα τῆς Γεωμετρίας.

2. (φ. 150α), Πρακτικὴ Ἀριθμητική.

¹⁷ Η Σχολὴ τῆς Δημητσάνας ἦταν μεταξὺ τῶν καλυτέρων Σχολῶν στὴν Ελλάδα. B.L. Howe, Samuel Gridley, *An Historical sketch of the Greek Revolution*, pub. White, Gallaher and White, New York 1828, σελ. 3.

¹⁸ Γεωργακόπουλος Νίκος, *Η παιδεία στὴν Αρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας*, ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000, σελ. 23.

¹⁹ Ο. π., σελ. 134.

²⁰ Issues in the Historiography of Post-Byzantine Science, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer Academic Publishers, vol. 151, 1994. D. Dialetis- E. Nikolaidis, Trends in the Historiography of Science

²¹ Στεφανίδης Μιχαήλ, *Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Η ἐκπαιδευτικὴ Ἐπανάστασις*, Τυπογραφικὴ Έταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Αθῆναι 1926, σελ. 11.

²² Μεγάλη Παιδαγωγικὴ Έγκυκλοπαίδεια, ἐκδ. Ελληνικὰ Γράμματα-Herder, Αθῆναι 1968, τόμ. III, σελ. 129.

Στάχωσις διὰ βύρσης, είς τὸ νῶτον φέρει χρυσᾶ κοσμήματα, αἱ δὲ πινακίδες ἔγχρωμον περικάλλυμα.²³

Σύμφωνα μὲ τὴν καταλογογράφηση τοῦ κ. Γιάννη Καρὰ²⁴ ίσχύουν τὰ κάτωθι:

Οἱ διαστάσεις τοῦ κώδικα 72 τῆς Σχολῆς Δημητσάνης ὁ ὀποῖος χρονολογεῖται στὸ 1779 μ. Χ. εἶναι 0,210x0,165, ὁ δὲ κώδικας ὁ ὀποῖος περιλαμβάνει τὴ Γεωμετρία καὶ τὴν Ἀριθμητικὴν Νικηφόρου Θεοτόκη ἀποτελεῖται ἀπὸ 181 φύλλα ὡς ἔξῆς:

α) φφ. 1α- 3β λευκά.

β) Γεωμετρία (Εύκλειδειος), φφ. 4α- 149α (τὰ "βιβλία", φφ. 4α, 30α, 42α, 63α, 74α, 88α, 109α, καὶ 131α ἐνῶ στὰ φφ. 147α- 149α, ἔξι γεωμετρικὰ σχήματα).

γ) Ἀριθμητικὴ, φφ. 150α- 181α. Ἀρχ. Ἀριθμητικὴ ἔστιν ἡ τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς.....

φ. 159α, βιβλίον 2ον, Περὶ κλασμάτων.....

φ. 164α, βιβλίον 3ον, Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ριζῶν ἔξαγωγῆς.

φ. 168α, βιβλίον 4ον, Περὶ ἴσοδιαφερόντων καὶ λογαρίθμων.

φ. 178β, βιβλίον 5ον, Περὶ διαφόρων μεθόδων εἰς τὴν ἐμπορίαν.....

Ἄπὸ τὴν πραγματοποιηθεῖσα μεταγραφὴν καὶ σχολιασμὸν τοῦ χειρογράφου προέκυψαν τὰ κάτωθι:

Οἱ κώδικας, τοῦ ὀποίου ὁ τίτλος εἶναι "Μαθηματάριον" φέρει τὴ σφραγίδα τῆς Σχολῆς τῆς Δημητσάνης καὶ εἶναι ἀνώνυμος. Τὸ πρῶτο μέρος του, δηλαδὴ αὐτὸ τῆς Γεωμετρίας (φ. 4α- φ. 149β) περιέχει τὸ 1ο βιβλίο στὸ ὀποῖο ὑπάρχουν οἱ βασικοὶ γεωμετρικοὶ δρισμοί (σημείου, εύθείας, γωνίας, κύκλου, τριγώνου, παραλληλογράμμου, κ. ἄ.), καὶ ἀποδεικνύονται 48 προτάσεις. Τὸ 2ο βιβλίο ἀφορᾶ στὰ παραλληλόγραμμα καὶ στὰ ἐμβαδά τους. Αποδεικνύονται 14 προτάσεις καὶ ἐπιλύονται 3 προβλήματα. Τὸ 3ο βιβλίο ἀφορᾶ στὸν κύκλο καὶ περιέχει 37 προτάσεις. Τὸ 4ο βιβλίο περιέχει τὰ ἔγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα σὲ κύκλῳ πολύγωνα, καὶ οἱ σχετικὲς προτάσεις εἶναι 17. Τὸ 5ο βιβλίο λόγους καὶ ἀναλογίες, μὲ 25 προτάσεις καὶ 7 θεωρήματα. Τὸ 6ο βιβλίο περιέχει τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα στὰ ὅποια ἀναφέρονται 33 προτάσεις. Τὸ 11ο βιβλίο, τὸ ὀποῖο ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα, ὡς τὸ "1ο τῶν στερεῶν",

²³ Γριτσόπουλος Τάσος, *Κατάλογος τῶν χειρογράφων κωδίκων τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Σχολῆς Δημητσάνης, ἀνατύπωσις ἐκ τοῦ KB' Τόμου τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Εταιρείας Βυζαντινῶν Σπουδῶν, Τυπογραφεῖον Μυρτίδου, ἐν Αθήναις 1952.*

²⁴ Καράς Γιάννης, *Oἱ ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία, ἐκδ. Ε. I. E.- Βιβλιοπωλεῖο Έστίας, Αθήνα 1992, τόμ. I, Τὰ Μαθηματικά, σελ. 94.*

περιέχει τὰ κεφάλαια τῆς Στερεομετρίας μέχρι καὶ αύτὸν τῶν παραλληλεπιπέδων. Άναφέρονται δὲ 40 σχετικὲς προτάσεις. Τὸ 12ο βιβλίο περιέχει προτάσεις σχετικὲς μὲ τὴν πυραμίδα, τὸν κῶνο, τὸν κύλινδρο, καθὼς καὶ τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα σὲ αὐτὰ τὰ στερεὰ σχῆματα. Οἱ προτάσεις εἰναι 17 καὶ ἀφοροῦν καὶ στὴ θεωρίᾳ τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερο μέρος τοῦ κώδικα (150α-180β) περιέχει ὅλη Ἀριθμητικῆς σχετιζομένη μὲ τὸν ὄρισμὸν τῶν ἀριθμῶν, τὶς πράξεις μεταξὺ αὐτῶν, τὸν "Πυθαγορικὸν Πίνακα", τὶς δοκιμὲς τῶν πράξεων, ὅπου καὶ δλοκληρώνεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα τὸ 1ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς. Στὸ 2ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς περιέχονται τὰ κλάσματα καὶ οἱ πράξεις αὐτῶν, καθὼς καὶ οἱ δεκαδικοὶ μὲ τὶς πράξεις τους. Στὸ 3ο βιβλίο ἀναφέρονται μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ριζῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ συγκεκριμένα τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ριζῶν. Τὸ 4ο βιβλίο περιέχει θέματα σχετικὰ μὲ τὸν λογαρίθμον καὶ τὶς προόδους, καὶ τὸ 5ο βιβλίο ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς, ποὺ ἀφοροῦν κυρίως στὸ ἔμπόριο.

Σημειωτέον ὅτι ἔκτὸς τοῦ κειμένου καὶ τῶν ἀριθμημένων ὑποσημειώσεων στὸ τέλος τῆς κάθε σελίδας, δὲν ὑπάρχουν ἄλλες ὑποσημειώσεις ἢ παρατηρήσεις στὸ πλάι ποὺ νὰ δείχνουν ὅτι στὸ ἀρχικὸ κείμενο ἔγιναν παρεμβολὲς ἀπὸ ἀντιγραφεῖς²⁵.

Ἡ διδασκαλία τῶν λογαρίθμων σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 72

Στὸ 4ο βιβλίο τῆς Ἀριθμητικῆς τοῦ χειρογράφου (οὗς ὄρισμός), ὁ συγγραφέας γράφει: "Ἄλι ἐκ πολλῶν ὅρων συνιστάμεναι ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι σειραὶ ἢ πρόοδοι λέγονται ἀριθμητικαί, (ἐν αἷς ἡ 1,2,3,4,5,6,7 κατὰ σειρὰ φυσικὴ ἀριθμητική), δομοίως καὶ ἐκ πολλῶν γεωμετρικῶν ὅρων, γεωμετρικαῖ". Μολονότι ὁ ὅρος "ἀριθμητικὴ πρόοδος" ἀνάγεται στὸν Διόφαντο²⁶, τὸν ὥποιο τὸν 13^ο αἰ. ἀντέγραφαν καὶ σχολίαζαν μεταξὺ ἄλλων καὶ βυζαντινοὶ λόγιοι²⁷, κάποιοι συγγραφεῖς δὲν ὄνομαζαν αὐτὰ τὰ ἀθροίσματα ἀριθμητικὲς προόδους. Μὲ τέτοιου εἶδους ἀθροίσματα εἶχε ἀσχοληθεῖ ὁ Al-Karagī²⁸ τὸν 6^{ον} αἰ., καὶ ὁ Πέρσης Ἀβικέννας (Avicenne) τὸν 11^{ον} αἰ., ὁ ὥποιος μάλιστα γιὰ τὸν ὑπολογισμό τους ἐφάρμοζε τὴν ἐξῆς μέθοδο²⁹:

$$1+2=3=2+(1/2).2$$

$$1+2+3=6=2.3$$

²⁵ E. Mioni, *Εἰσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία*, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Αθήνα 1994, σελ. 124.

²⁶ Διοφ. Ἀριθμ., σελ. 45.

²⁷ Constantinides, *High. Ed. Byz.*, σελ. 73, 157.

²⁸ Adel Anbouba, *L'Argèbre Al-Badī d'Al-Karagī*, Pub. de l' Univ. Libanaise, Beyrouth 1964, σελ. 34.

²⁹ Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ εὑρίσκονται στὸ ἔργο τοῦ Ἀβικέννα *Dānēsh-Nāma*, τὸ ὥποιο γράφηκε στὰ περσικὰ τὸν 11^ο αἰ. B. Avicenne, *Le livre de science*, Les belles letters, 1986, σελ. 195.

$$1+2+3+4=10=2.4+(1/2).4$$

$$1+2+3+4+5=15=3.5$$

$$1+2+3+4+5+6=21=3.6+(1/2).6^{30}$$

Βιβλίον 4^{ον}

Περὶ ίσοδιαφερόντων καὶ λογαρίθμων ἀριθμοί.

Όρισμοί

1^{ος}: Ἀριθμητικὸς λόγος εἶναι κάποια καθ' ὑπεροχὴ σχέση, καὶ Γεωμετρικὸς λόγος κάποια κατὰ περιοχὴ σχέση.

Σχόλιον

Ο ἀριθμητικὸς λόγος τοῦ 8 καὶ τοῦ 2 εἶναι τὸ 6, ἐνῷ ὁ γεωμετρικὸς λόγος τους εἶναι τὸ 4.

2^{ος}: Ἡ Ἀριθμητικὴ ἀναλογία δύο ἀριθμητικῶν λόγων εἶναι παράθεσις, καὶ ἡ μὲν λέγεται συνεχής, ἡ δὲ διηρημένη ἢ διωρισμένη λέγεται.

Πόρισμα

Δὲν μπορεῖ νὰ συσταθεῖ ἀναλογία ἀριθμητικὴ ἢ γεωμετρικὴ μὲ 3 ἢ λιγότερους ὅρους.

3^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα ἢ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἔχουν τὴν ἔξῆς ἴδιότητα: "Οσο διαφέρει τὸ πρῶτο ἀπὸ τὸ δεύτερο, τόσο διαφέρει καὶ τὸ δεύτερο ἀπὸ τὸ τρίτο, καὶ τὸ τρίτο ἀπὸ τὸ τέταρτο, κ.λπ. Π.χ. 2,5,8, ἢ 3,7,11,15.

4^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀριθμητικῷ λόγῳ ἢ συνεχῶς κατὰ ἀριθμητικὸ λόγο ἔχουν τὴν ἴδιότητα τῶν μεγεθῶν τοῦ 3^{ον} δορισμοῦ, καὶ ἐπιπλέον δὲν μπορεῖ νὰ ἔχουν ἀριθμητικὸ λόγο ἵσο μὲ τὸ 0.

5^{ος}: Τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι ἐν διηρημένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ, ἢ κατὰ διηρημένῳ ἀριθμητικῷ λόγῳ ἀνάλογον, εἶναι αὐτὰ ποὺ τὸ 1^ο διαφέρει ἀπὸ τὸ 2^ο ὅσο τὸ 3^ο ἀπὸ τὸ 4^ο, ὅπως τὰ 3,7,11,15.

6^{ος}: Οἱ ἀριθμητικὲς ἀναλογίες ποὺ ἔχουν πολλοὺς ὅρους λέγονται σειρές, ἢ ἀριθμητικὲς πρόοδοι, καὶ οἱ γεωμετρικὲς ἀναλογίες ποὺ ἔχουν πολλοὺς ὅρους λέγονται γεωμετρικὲς πρόοδοι.

³⁰ Ανωνύμου, Αριθμητική, Ἐκδοση Μαρία Χάλκου [Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Ἐκδοση και Σχόλια], Κέντρο Βυζαντινών Ερευνών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 31.

7^{ος}: Έάν οι όροι της άναλογίες βαίνουν αύξανόμενοι, τότε ή σειρά λέγεται αὔξουσα, δύπως 3,5,7,9,11, έάν δὲ βαίνουν μειούμενοι καταμειούμενη, δύπως π.χ. 18,15,12,9,6.

Θεώρημα 1^{ον}

Έάν η σειρά τῶν μεγεθῶν ποὺ εἶναι σὲ συνεχὴ ἀριθμητικὸ λόγο εἶναι αὔξουσα, τότε ὁ κάθε όρος σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ προηγούμενου του καὶ τῆς διαφορᾶς. Έάν δὲ εἶναι φθίνουσα, ὁ κάθε όρος ίσοςται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐπομένου του καὶ τῆς διαφορᾶς.

Δεῖξις

Ἐπειδὴ η διαφορὰ τοῦ 1^{ον} καὶ τοῦ 2^{ον} εἶναι ἵση μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ 3^{ον} καὶ 4^{ον}, τότε στὴν αὔξουσα σειρὰ ἔάν στὸν πρῶτο προστεθεῖ η διαφορὰ θὰ προκύψει ὁ δεύτερος, κ.λπ. Στὴν μειούμενη δὲ σειρά, ἔάν στὸν τρίτο προστεθεῖ η διαφορὰ θὰ μᾶς δώσει τὸν δεύτερο, κ.λπ.

Πόρισμα

Έάν γνωρίζουμε τὸν πρῶτον όρο μιᾶς σειρᾶς καὶ τὴ διαφορά, τότε μποροῦμε νὰ δημιουργήσουμε στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ἐπ' ἄπειρον.

Θεώρημα 2^{ον}

Έάν η σειρά τῶν ἐν διῃρημένω ἀριθμητικῷ λόγῳ μεγεθῶν εἶναι αὔξουσα (3,6,7,10), τότε ὁ 2^{ος} εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ον} καὶ τῆς διαφορᾶς, καὶ ὁ 4^{ος} εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 3^{ον} καὶ τῆς διαφορᾶς. Έάν εἶναι μειούμενη (24,20,16,12), τότε ὁ 1^{ος} εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Δεῖξις

Απλὴ ἔφαρμογὴ τοῦ 5^{ον} δρισμοῦ.

Θεώρημα 3^{ον}

Έάν τρία μεγέθη εἶναι συνεχῶς κατὰ ἀριθμητικὸν λόγον ἀνάλογα, τότε τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ον} καὶ τοῦ 3^{ον} εἶναι ἵσο μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ δευτέρου.

Δεῖξις

Χρησιμοποιεῖ παραδείγματα γιὰ τὴν αὔξουσα 4,7,10, καὶ τὴ μειούμενη 25,15,5, δύπου $4+10=14=2 \cdot 7$, καὶ $25+5=30=2 \cdot 15$. Βέβαια η περιγραφὴ τοῦ συγγραφέα δοῦγει στὴ σημερινὴ ἀπόδειξη τῆς σχετικῆς πρότασης τοῦ κεφαλαίου

τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ὅπου ἂν συμβολίσουμε μὲν α , β , γ τοὺς τρεῖς διαδοχικοὺς ὅρους μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, καὶ λ τὴ διαφορά, τότε $\beta=\alpha+\lambda$, $\gamma=\alpha+2\lambda$, ἢρα $2.\beta=2(\alpha+\lambda)=2.\alpha+2.\lambda=\alpha+\alpha+2.\lambda=\alpha+\gamma$.

Θεώρημα 4^{ον}

Ἐὰν τέσσερα μεγέθη εἶναι κατὰ διῃρημένω ἀριθμητικῷ λόγῳ, τότε τὸ ἄθροισμα τοῦ 1^{ον} καὶ τοῦ 4^{ον} εἶναι ἵσο μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ 2^{ον} καὶ τοῦ 3^{ον}.

Δεῖξις

Μὲ παραδείγματα ὁ συγγραφέας εἰσηγεῖται κατ' ούσια τὴν ἐξῆς ἀπόδειξην:
Ἐστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τὰ μεγέθη ποὺ εἶναι κατὰ διῃρημένω ἀριθμητικῷ λόγῳ, καὶ ἔστω $\lambda=\beta-\alpha=\delta-\gamma$. Τότε $\alpha+\delta=\alpha+\lambda+\gamma=\beta+\gamma$. Όμοιώς ἀν ἡ ἀναλογία εἶναι μειουμένη.

Πρόβλημα 1^{ον}

Νὰ εὐρεθεῖ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 13.

Κατασκευή

$$9+13=22, \quad 22/2=11.$$

Δεῖξις

Απλὴ ἔφαρμογὴ τοῦ 3^{ον} θεωρήματος.

Πρόβλημα 2^{ον}

Νὰ εὐρεθεῖ ὁ 4^{ος} ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τῶν 8,5,9.

Κατασκευή

$$5+9=14, \quad 14-8=6.$$

Δεῖξις

Σύμφωνα μὲ τὸ 4^ο θεώρημα, ἐὰν συμβολίσουμε μὲν α, β, γ τοὺς δοθέντες ἀριθμούς, καὶ μὲ χ τὸν ζητούμενο, θὰ ἴσχύει ὅτι $\alpha+\chi=\beta+\gamma$, ἢρα $8+\chi=5+9$, ἢ $8+\chi=14$, ἢρα $\chi=6$.

Θεώρημα 5^{ον}

Ἐὰν τέσσερα μεγέθη εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα π.χ. 3,7,5,9, τότε καὶ τὰ 3,5,7,9, καὶ τὰ 7,3,9,5 θὰ εἶναι ἀριθμητικῶς ἀνάλογα. Εὰν δὲ ἡ ἀναλογία εἶναι τεταγμένη (14^{ος} ὀρισμὸς τοῦ 5^{ον} βιβλίου τῆς Γεωμετρίας), ὅπως π.χ. 1,2,3,4, καὶ 2,9,4,11, τότε θὰ εἶναι τεταγμένη καὶ ἡ ἀναλογία 1,9,3,11. Έπισης, ἀν ἡ ἀναλογία

είναι τεταραγμένη, όπως 3,7,5,9, καὶ 7,10,2,5, τὸ ἕδιο τεταραγμένη θὰ είναι καὶ ἡ 3,10,2,9. Ὁ λόγος είναι φανερός, διότι ἡ μεταξύ τους διαφορὰ είναι ἕδια.

Πρόβλημα 3^{ον}

Νὰ εὐρεθεῖ ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 1, καὶ 9.

Κατασκευή

$$1.9=9, \sqrt{9}=3.$$

Δεῖξις

Συμβολίζει τὸν ζητούμενο μὲν χ, δὸποτε $1/\chi=\chi/9$, ἥρα $1.9=\chi^2$, ἥρα $\chi=\sqrt{9}=3$.

Πρόβλημα 4^{ον}

Νὰ εὐρεθεῖ τέταρτος "ἀνὰ γεωμετρικῶς ἀνάλογος" τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 2, 7, 12.

Κατασκευή

$$7.12=84, 84:2=42.$$

Δεῖξις

Ἐὰν χ ὁ ζητούμενος, τότε $2:7=12:\chi$, ἥρα $2\chi=7.12$, ἢ $\chi=42$.

8^{ος} δρισμὸς

Λογάριθμος είναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ δείχνει τὸν διπλασίονα, ἢ τὸν τριπλασίονα, ἢ τὸν τετραπλασίονα, κ.λπ. λόγο.

Σχόλιο

Στὴ γεωμετρικὴ σειρὰ 3, 6, 12, 24, 48, 96,... οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 6,... είναι λογάριθμοι. Ὁ 2 είναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 12, ὁ δόποιος είναι διπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6. Ὁ 3 είναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 24, ὁ δόποιος είναι τριπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6. Ὁ 4 είναι λογάριθμος τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 48, ὁ δόποιος είναι τετραπλασίων τοῦ λόγου τοῦ 3 πρὸς τὸν 6, κ.λπ.

Συνέπειαι

1^ῃ: Οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς 0,1,2,3,4,5,6,7,8,... είναι λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς 1,2,4,8,16,32,64,128,256,...

2^a: Τὸ ἀριθμητικὸ 0 δηλώνει ὅτι εἶναι 0 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 1 ἀποστήματα. Τὸ ἀριθμητικὸ 1 δηλώνει ὅτι εἶναι 1 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 2 ἀποστήματα. Τὸ ἀριθμητικὸ 2 δηλώνει ὅτι εἶναι 2 τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ γεωμετρικοῦ 4 ἀποστήματα, κ.λπ.

3ⁿ: Ἐξηγεῖ πῶς στὴν ἀριθμητικὴ σειρά, τὸ 0 εἶναι ὁ ἔκθέτης τῆς δύναμης $2^0=1$, τὸ 1 εἶναι ἔκθέτης τῆς δύναμης $2^1=2$, τὸ 2 τῆς $2^2=4$, τὸ 3 τῆς $2^3=8$, κ.λπ.

Θεώρημα 6^{ον}

Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι τὸ 0, τότε ὁ λογάριθμος κάθε γινομένου, π.χ τοῦ 8 θὰ εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων 1, καὶ 2 τοῦ πολλαπλασιαστῆ 2 καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου 4.

Δεῖξις

1:2=4:8 (κατὰ τὴν 1^{ην} συνέπειαν τοῦ 6^{ον} δρισμοῦ τοῦ 1^{ον} βιβλίου τῆς Ἀριθμητικῆς), ἃρα ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου 8 εἶναι ὁ τέταρτος τῶν ἴσοδιαφερόντων 0,1,2, δηλαδὴ ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστῆ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἄλλὰ ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστῆ καὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι ἵσος μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ ἄθροισματος τῶν μέσων καὶ τοῦ 1^{ον} σύμφωνα μὲ τὸ 2^ο πρόβλημα. Ὅμως ὁ 1^{ος} εἶναι 0 ἐξ ὑποθέσεως, ἃρα ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου 8 εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἄθροισμα 3 τῶν λογαρίθμων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστῆ.

Πόρισμα 1^{ον}

Τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν εἶναι ἵσο μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Πόρισμα 2^{ον}

Ο λογάριθμος τοῦ τετραγώνου ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι διπλάσιος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Ο λογάριθμος τοῦ κύβου ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι τριπλάσιος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, κ.λπ.

Θεώρημα 7^{ον}

Ο λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἵσος μὲ τὴ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Δεῖξις

Ίσχύει ότι $\delta:\Delta=1:\pi$ (κατά τή 2^η συνέπεια τοῦ 1^{ου} βιβλίου Άριθμητικῆς), ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ τέταρτος ἀριθμητικὸς ὅρος τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρέτη, τοῦ διαιρετέου, καὶ τῆς μονάδας. Ἀλλὰ ὁ 4^{ος} ἀριθμητικὸς εἶναι ἵσος μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων καὶ τοῦ πρώτου (κατά τὸ 2^ο πρόβλημα), ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἵσος μὲ τὸ ἀθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρέτου καὶ τῆς μονάδας μεῖον τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρέτη. Ἀλλὰ ὁ λογάριθμος τῆς μονάδας εἶναι τὸ 0, ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἵσος μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμο τοῦ διαιρέτη.

Πόρισμα 3^{ον}

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν εἶναι ἵση μὲ τὸν λογάριθμο τοῦ πηλίκου αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Σημειώσεις

1^η: Πρῶτος ὁ διδάσκαλος τῆς Γεωμετρίας Βρίγγιος, μὲ τὴν ὀδηγία τοῦ Νεπέρτου συνέταξε τοὺς λογαρίθμους, τοὺς δόποίους ἔλαβε ἀπὸ τὴ γεωμετρικὴ πρόοδο: 1,10,100,1000,10000, μὲ μέθοδο ποὺ θὰ ἀναλύσουμε πιὸ κάτω.

2^η: Οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς 1,10,100,1000,10000 εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς σειρᾶς 0,1,2,3,4.

3^η: Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὐρισκομένων μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 10 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν εὔκολα, διότι δὲν μποροῦμε νὰ βροῦμε γεωμετρικὸν ὅρον μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 10, ἐπειδὴ αὐτὸς θὰ ἔπρεπε (σύμφωνα μὲ τὸ 3^ο πρόβλημα) νὰ ἴσοῦται μὲ τὴν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1.10, ἡ ὧδη ὅμως δὲν εὐρίσκεται μὲ ἀκρίβεια. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν βρίσκουμε ὅτι κατὰ προσέγγιση ἔνας τέτοιος λογάριθμος, ὅπως π.χ. ὁ λογάριθμος τοῦ 9 εἶναι ὁ 0,995424251, καὶ λέμε ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 9,0000000 δηλαδὴ κάποιου ἀριθμοῦ ποὺ μπορεῖ νὰ διαφέρει ἐλάχιστα ἀπὸ τὸν 9.

Μέθοδος εὕρεσης λογαρίθμων

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 9:

Γράφουμε τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 10 μὲ τὴ μορφὴ 1,0000000 καὶ 10,0000000. Βρίσκουμε (3^ο πρόβλημα) τὸν μέσο γεωμετρικὸν 3,1622777 αὐτῶν τῶν δύο ἀριθμῶν. Στὴ συνέχεια βρίσκουμε τὸν μέσον ἀριθμητικὸν 0,50000000 (1^ο πρόβλημα) τῶν 0,0000000 καὶ 1,0000000. Ὁ 0,50000000 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3,1622777. Βρίσκουμε τὸν μέσο γεωμετρικὸν τῶν 3,1622777 καὶ 10,0000000 καὶ τὸν μέσον ἀριθμητικὸν 0,75000000 τῶν 1,0000000 καὶ 0,50000000. Μὲ τὴν ἴδια διαδικασία καταλήγουμε σ' ἔνα μέσο γεωμετρικό, ὁ ὧδης διαφέρει λιγότερο

άπό δεκατημόρια τοῦ μηλλιονίου άπό τὸν 9, δηλαδὴ εἶναι ἵσος μὲ τὸν 9,0000000. Αύτὸς ὁ μέσος γεωμετρικὸς θὰ ἔχει λογάριθμο τὸν ἀντίστοιχο μέσον ἀριθμητικόν, δηλαδὴ τὸν 0,95424251. Υπολογίζοντας ὅμως τὸν λογάριθμο τοῦ 9 μπορεῖ νὰ βρεῖ κάποιος καὶ τὸν λογάριθμο τοῦ 3, τοῦ 81 (2^ο πόρισμα), τοῦ 27 (3^ο πόρισμα), κ.λπ.

Σημείωσις 4^η

Ο λογάριθμος περιέχει τόσες μονάδες ὅσα καὶ τὰ μηδενικὰ τοῦ 10, 100, 1000, κ.λπ.

Συνέπεια

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὐρισκομένων μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 10 εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος, οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν εὐρισκομένων μεταξὺ τοῦ 10 καὶ τοῦ 100 εἶναι μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀλλὰ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 2, κ.λπ.

Πρόβλημα 5^{ον}

Εὕρεση τοῦ λογαρίθμου τοῦ νόθου κλάσματος 9/5.

Κατασκευή

Απὸ τὸν λογάριθμο 0,9542425 τοῦ 9 ἀφαιρεῖ τὸν 0,6989700 ποὺ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 5, καὶ βρίσκει 0,2552725, ποὺ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 9/5.

Δεῖξις

Ο λογάριθμος τοῦ πηλίκου εἶναι ἵσος μὲ τὴ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων ἀριθμητοῦ καὶ παρανομαστοῦ (3^ο πόρισμα).

Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι γνήσιο π.χ τὸ 3/7, τότε ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι "ἀποφατική". Ό συγγραφέας βρίσκει ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 3/7 θὰ εἶναι ἵσος μὲ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸ -0,3679767, τὸν διποτὸν καλεῖ ἀποφατικό καὶ γράφει ὅτι δηλώνεται μὲ τὸ ἀποφατικὸν σημεῖο.

Πρόβλημα 5^{ον}

Μὲ τὴ χρήση τῶν λογαρίθμων νὰ βρεθεῖ ὁ τέταρτος γεωμετρικὸς ἀνάλογος τῶν 4, 68, 3.

Κατασκευή

Προσθέτει τοὺς λογαρίθμους τοῦ 68 καὶ τοῦ 3, καὶ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἀθροίσματός τους ἀφαιρεῖ τὸν λογάριθμο τοῦ 4. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 51, ὁ δύοτος 51 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται μὲ τὴ χρήση τοῦ 2^{ου} προβλήματος καὶ τῆς 1^{ης} συνέπειας αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

Κατὰ τὸν συγγραφέα τοῦ κώδικα 72 οἱ λογάριθμοι εἶναι εὕχρηστοι στὴ Τριγωνομετρία ἀλλὰ καὶ τὴν Ἀστρονομία, ὅπου κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολλὰ ψηφία. Καὶ τοῦτο διότι ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ προσθέσουμε τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, καὶ ἀντὶ τῆς διαίρεσης δύο ἀριθμῶν, νὰ ἀφαιρέσουμε τοὺς ἀντιστοίχους λογαρίθμους τους. Ὅταν βρίσκουμε δὲ κάποιον λογάριθμο ὡς ἀποτέλεσμα ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο λογαρίθμων, τότε ἀναζητοῦμε στοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὸν τὸν λογάριθμο. Οἱ καλύτεροι λογαριθμικοὶ πίνακες κατὰ τὸν Νικηφόρο Θεοτόκη εἶναι αὐτοὶ ποὺ ἔχουν ἐκδοθεῖ ἀπὸ τὸν 'Ούλαη' (Euler).

Συμπεράσματα

Στὸ ἄρθρο αὐτὸν παρατέθηκαν στοιχεῖα, ὅπως αὐτὰ προέκυψαν ἀπὸ τὴν μελέτη τοῦ κώδικα 72 τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Δημητσάνας, σχετιζόμενα μὲ τὴν Παιδεία ἀλλὰ καὶ τὶς συνθῆκες διαβίωσης τῶν κατοίκων στὴν τουρκοκρατούμενη Ἑλλάδα, λίγα μόλις χρόνια πρὶν τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821. Στὴ συνέχεια παρουσιάσαμε τὸ κεφάλαιο τῶν λογαρίθμων, ὅπως αὐτὸν καταγράφεται στὸ χειρόγραφο τοῦ 18ου αἰ. Προσφέραμε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὴ δυνατότητα σύγκρισης τῆς μεθόδου διδασκαλίας τῶν λογαρίθμων κατὰ τὰ τέλη τοῦ 18ου αἰ. μὲ αὐτὴν ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα στη Β' θμια Ἐκπαίδευση, καθὼς καὶ τὴν ἔξαγωγὴ συμπερασμάτων ἐπ' αὐτῶν τῶν δύο μεθόδων.

Βιβλιογραφία

Ιστορίες-Ἐγκυκλοπαίδειες

Ιστορία τῶν Ελλήνων, Ό Ελληνισμὸς ὑπὸ ξένη κυριαρχίᾳ 1453- 1821, ἐκδ. Δομή, Αθήνα²2006, τόμ. X.

Μεγάλη Παιδαγωγικὴ Ἐγκυκλοπαίδεια, ἐκδ. Ἐλληνικὰ Γράμματα-Herder, Αθῆναι 1968, τόμ. III.

Πηγές

Ανωνύμου, Αριθμητική, Εκδοση Μαρία Χάλκου [Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Κέντρο Βυζαντινών Ερευνών Αριστοτελείου Πλανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006.

Ανωνύμου, Μαθηματάριον, Έκδοση Μαρία Χάλκου [Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα κατά τα τελευταία χρόνια της τουρκοκρατίας, σύμφωνα με τον κώδικα 72 του 18ου αι. της Βιβλιοθήκης της Δημητσάνας, Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια], Αθήνα 2009 (έντυπο και ερυθρός)

Adel Anbouba, *L' Argèbre Al-Badī d' Al-Karagī*, Pub. de l' Univ. Libanaise, Beyrouth 1964.

Avicenne, *Le livre de science*, Les belles letters, 1986.

V. Brunet de Presle- Alexandre Blanchet, *Grèce depuis la conquête romane jusqu' à nos jours*, pub. F. Didot, Paris 1860.

Γεωργακόπουλος Νίκος, *Η παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας*, έκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000.

Γεωργακόπουλος Νίκος, *Ἐλληνικὴ Σχολεῖα στὸ Μοριά στὴν περίοδο τῆς Ὀθωμανικῆς κυριαρχίας καὶ τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση*, Τρίπολη 2006.

Γριτσόπουλος Τάσος, *Κατάλογος τῶν χειρογράφων κωδίκων τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Σχολῆς Δημητσάνης*, ἀνατύπωσις ἐκ τοῦ KB' Τόμου τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἐταιρείας Βυζαντινῶν Σπουδῶν, Τυπογραφεῖον Μυρτίδου, ἐν Ἀθήναις 1952.

Γριτσόπουλος Ἀναστάσιος, *Σχολὴ Δημητσάνης*, Αθήνα 1962.

Zoël Dalègre, *Ἐλληνες καὶ Ὀθωμανοί (1453- 1923)*, μετάφρ. Σοφία Μπίνη- Σωτηροπούλου, έκδ. Σ. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 2006.

Issues in the Historiography of Post- Byzantine Science, Boston Studies in the Philosophy of Science, Kluwer Academic Publishers, vol. 151, 1994. D. Dialetis- E. Nikolaidis, Trends in the Historiography of Science.

C. N. Constantinides, *Higher Education in Byzantium in the thirteenth and early fourteenth centuries (1204-1310)*, Cyprus Research Center, Nicosia 1982.

Διοφάντου Αριθμητικά, Έκδ. Ε. Σταμάτη . ΟΕΔΒ, Αθήναι 1963.

Howe, Samuel Gridley, *An Historical sketch of the Greek Revolution*, pub. White, Gallaher and White, New York 1828.

Πρακτικὰ 25ον Πανελλήνιον Συνεδρίον Μαθηματικῆς Παιδείας τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Εταιρείας: 'Η Μαθηματικὴ Ἐκπαίδευση καὶ ἡ σύγχρονη πραγματικότητα τοῦ 21ου αἰώνα, Θωμάς Καρανίκας, Βόλος, Νοέμβριος 2008, σελ. 508-523.

Καράς Γιάννης, *Oι ἐπιστῆμες στὴν τουρκοκρατία*, ἐκδ. Ε. Ι. Ε.- Βιβλιοπωλεῖο Έστιας, τόμ. I, Τὰ Μαθηματικά, Αθήνα 1992.

E. Mioni, *Είσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία*, ἐκδ. MIET, Αθήνα 1994.

Πέκιος Ἀλέξανδρος, Πνευματικὴ ἀποψις τῆς τουρκοκρατουμένης Ἑλλάδος: ἦτοι περιεκτικὸν διάγραμμα τῆς ἐπὶ τουρκοκρατίας διανοητικῆς τοῦ ἐλληνικοῦ ἔθνους καταστάσεως, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Ζέλλιτς καὶ Υἱῶν, ἐν Κωνσταντινούπολει 1880.

Στεφανίδης Μιχαήλ, *Aἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι πρὸ τῆς Ἐπαναστάσεως: Ἡ Ἐκπαιδευτικὴ Ἐπανάστασις*, Τυπογραφικὴ Ἐταιρεία Π. Δ. Σακελλάριος, Αθῆναι 1926.

Φιλιππίδης Νικόλαος, *Ἐπίτιμος Ἰστορία τοῦ Ἑλληνικοῦ ἔθνους 1453-1821*, ἐκ τοῦ Τυπογραφείου Α. Καλαράκη, ἐν Ἀθήναις² 1900.