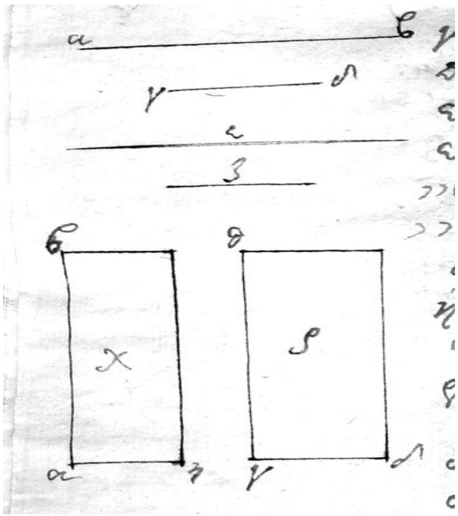
Το κείμενο του 18ου αιώνα μετά τη Μεταγραφή

Πρότασις 16^{η}

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖες ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, ε, ζ ἀνάλογον ὡς αβ:γδ::ε:ζ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ.ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γδ.ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν δὲ αβ.ζ=γδ.ε, ἔσται ὡς αβ:γδ::ε:ζ (σχ. 18).



(Ἡ πρότασις αὕτη προϋτέθητε καὶ δέδεικται ἐν τῷ 5ῳ βιβλίῳ ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλως δειχθήσεται.)

Κατασκευή

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν α, γ, σημείων ταῖς αβ, γδ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ αη, γθ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ χ, ρ, παραλληλόγραμμα.

Δεῖξις τοῦ $1^{ου}$

Ὡς αβ:γδ::ε:ζ, ἀλλ' ἡ μὲν ε=γθ, ἡ δὲ ζ=αη, ἄρα ὡς αβ:γδ::γθ:αη. (98α) Ἀντιπεπόνθασιν ἄρα τῶν χ, ρ παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί, ἄρα ἴσα τὰ χ, ρ παραλληλόγραμμα.

Δεῖξις τοῦ $2^{ου}$

Ἐπεὶ χ=ρ, ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, εἴθουν ἐστὶν ὡς ΑΒ:ΓΔ::ΓΘ:ΑΗ.Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΘ=Ε, ἡ δὲ ΑΗ=Ζ, ὡς ἄρα ΑΒ:ΓΔ::Ε:Ζ.

Συνέπεια

Ἐντεῦθεν δῆλος ὁ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου τῆς καὶ χρυσῆς μεθόδου καλουμένης λόγος, ὅτι γὰρ ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἴσος τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τοῦ γινομένου ἐκ τῶν μέσων διὰ τοῦ $1^{ου}$ διαιρεθέντος δείκνυται οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ:ΓΔ::Ε:Ζ, ἄρα ΑΒ.Ζ=ΓΔ.Ε, ἑκατέρου δὲ τούτων τῶν ἴσων διὰ τοῦ αὐτοῦ ΑΒ διαιρεθέντος ἔσται (αβ/αβ).ζ=(ΓΔ/αβ).Ε. Ἀλλ’ ΑΒ/ΑΒ=1, ἄρα Ζ=(ΓΔ.Ε/αβ), ὁ ἄρα τέταρτος ὅρος ὁ ζ ἴσος τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι, διαιρεθέντος τοῦ γινομένου ἐκ τῶν μέσων ΓΔ.Ε διὰ τοῦ $1^{ου}$ ΑΒ.

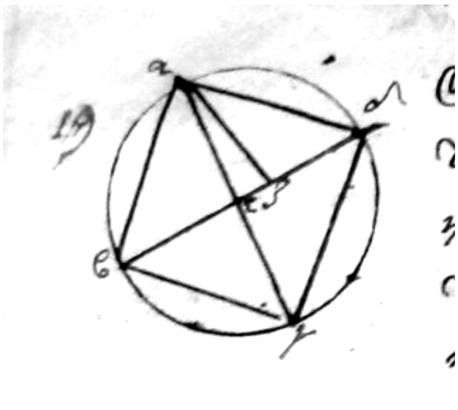
Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τὸ ἑξῆς τοῦ Πτολεμαίου θεώρημα δείκνυται.

Θεώρημα

Παντὸς τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τὸ ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ὀρθογώνιον ΑΓ, (98β) ΒΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ἐκ τῶν ἀντικειμένων τοῦ τετραπλεύρου πλευρῶν, ἤτοι τοῖς ΑΒ.ΔΓ+ΑΔ.ΒΓ.

Κατασκευή

Εἰ οὐκ ἔστιν ἡ ΒΑΓ γωνία ἴση τῇ ΓΑΔ, συνεστάτω ἡ ΒΑΖ ἴση τῇ ΓΑΔ (σχ. 19).



Δεῖξις

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΖ, ΑΓΔ ἡ μὲν γωνία ΑΒΖ=ΑΓΔ[1146], ἡ δὲ ΒΑΖ=ΓΑΔ. Καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΔΓ, ὡς ἄρα ΑΒ:ΒΖ::ΑΓ:ΓΔ, ἄρα ΑΒ.ΓΔ=ΒΖ.ΑΓ. Ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΒΑΖ=ΕΑΔ ἀφαιρεθείσης ἄρα κοινῆς τῆς ΕΑΖ ἔσεται ἡ ΒΑΕ, εἴθουν ΒΑΓ=ΖΑΔ. Ἐν τοῖς τριγώνοις οὖν ΑΖΔ, ΑΒΓ, ἡ μὲν γωνία ΑΓΒ=ΑΔΖ, ἡ δὲ ΖΑΔ=ΒΑΓ, ὡς δέδεικται, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΔ ἴση λοιπῇ τῇ ΑΒΓ ὡς ἄρα ΑΔ:ΔΖ::ΑΓ:ΓΒ, ἄρα ΑΔ.ΓΒ=ΔΖ.ΑΓ. Προσκείσθω τῷ μὲν ΑΒ.ΓΔ, τὸ ΑΔ.ΓΒ, τῷ δὲ ΒΖ.ΑΓ τὸ ΔΖ.ΑΓ, ἔσεται ἄρα

ΑΒ.ΓΔ+ΑΔ.ΓΒ=ΒΖ.ΑΓ+ΔΖ.ΑΓ.
Ἀλλὰ ΒΖ.ΑΓ+ΔΖ.ΑΓ=ΒΖ+ΖΔ.ΑΓ=ΒΔ.ΑΓ.
Ἄρα ΒΔ.ΑΓ=ΑΒ.ΔΓ+ΑΔ.ΒΓ.

Ο Μαθηματικός σχολιασμός

Πρότασις 16^{η}
Θεωρεῖ τὶς εὐθεῖες αβ, γδ, ε, ζ, μὲ αβ:γδ=ε:ζ. Τότε αβ.ζ=γδ.ε. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο.
Κατασκευή
Φέρει τὶς αη=ζ, γθ=ε καθέτους πρὸς τὶς αβ, γδ ἀντιστοίχως. Δεῖξις τοῦ $1^{ου}$
αβ:γδ=ε:ζ, ἢ αβ:γδ=γθ:αη, ἢ χ=ρ, ὅπου χ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου μὲ πλευρὲς αβ, αη, καὶ ρ τοῦ παραλληλογράμμου μὲ πλευρὲς γθ, γδ.
Δεῖξις τοῦ $2^{ου}$
Ἐπειδὴ χ=ρ, ἄρα ΑΒ:ΓΔ=ΓΘ:ΑΗ. Ἀλλὰ ΓΘ=Ε, καὶ ΑΗ=Ζ, ἄρα ΑΒ:ΓΔ=Ε:Ζ

Συνέπεια
Ὁ συγγραφέας γράφει ὅτι "ἐντεῦθεν δῆλον ὁ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου τῆς καὶ χρυσῆς μεθόδου καλουμένης λόγος, ὅτι γὰρ ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἴσος τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τοῦ γινομένου ἐκ τῶν μέσων διὰ τοῦ $1^{ου}$ διαιρεθέντος δείκνυται οὕτως". Διότι, ἀφοῦ ΑΒ:ΓΔ=Ε:Ζ, τότε ΑΒ.Ζ=ΓΔ.Ε, ἢ (αβ/αβ).ζ=(ΓΔ/αβ).Ε. Ἀλλὰ ΑΒ=1, ἄρα Ζ=(ΓΔ.Ε/αβ), ἄρα ὁ τέταρτος ὅρος δηλαδὴ ὁ ζ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ πηλῖκον ΓΔ.Ε/ΑΒ.

Ἀπὸ τὴν πρόταση αὐτὴ προκύπτει τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου:

Θεώρημα
Ἐὰν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναιἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο,τότε ΑΒ.ΔΓ=ΑΔ.ΒΓ.
Κατασκευή
Κατασκευάζει γων ΒΑΖ=γων ΓΑΔ.
Δεῖξις
γων ΑΒΖ=γων ΑΓΔ, γων ΒΑΖ=γων ΓΑΔ, ἄρα γων ΑΖΒ=γων ΑΔΓ, ἄρα ΑΒ:ΒΖ=ΑΓ:ΓΔ, ἄρα ΑΒ.ΓΔ=ΒΖ.ΑΓ. Ἀλλὰ γων ΒΑΖ=γων ΕΑΔ, ὁπότε γων ΒΑΖ-γων ΕΑΖ=γων ΕΑΔ-γων ΕΑΖ, ἢ γων ΒΑΓ=γων ΖΑΔ. Ἀλλὰ ἐπιπλέον ἰσχύει ὅτι γων ΑΓΒ=γων ΑΔΖ, ἄρα καὶ γων ΑΖΔ=γων ΑΒΓ, ἄρα ΑΔ:ΔΖ=ΑΓ:ΓΒ, ἢ ΑΔ.ΓΒ=ΔΖ.ΑΓ, ὁπότε

$AB.\Gamma\Delta+A\Delta.\Gamma B=BZ.A\Gamma+\Delta Z.A\Gamma$. Ὅμως $BZ.A\Gamma+\Delta Z.A\Gamma=(BZ+\Delta Z)A\Gamma=B\Delta.A\Gamma$, ἄρα $B\Delta.A\Gamma=AB.\Delta\Gamma+A\Delta.B\Gamma$.