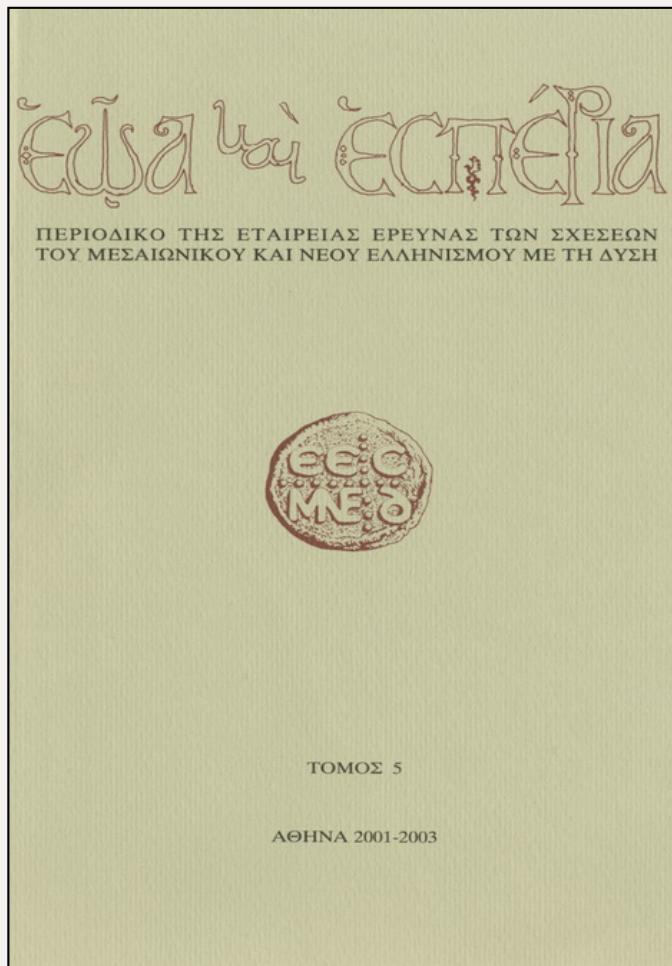


## Ἐῶα καὶ Ἐσπέρια

Τομ. 5, 2003



Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ  
ΣΤΟ BYZANTIO KATA TON BIENNAIO ΕΛΛ. ΦΙΛ.  
ΚΩΔ. 65 (φ. IIr-126r)

ΧΑΛΚΟΥ ΜΑΡΙΑ  
[10.12681/eoaesperia.61](http://10.12681/eoaesperia.61)

Copyright © 2003



### To cite this article:

ΧΑΛΚΟΥ (2003). Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΠΑ ΤΗΣ ΣΤΟ BYZANTIO KATA TON BIENNAIO ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. IIr-126r). *Ἐῶα καὶ Ἐσπέρια*, 5, 51-62.

**Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ Η ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ  
ΣΤΟ BYZANTIO KATA TON BIENNAIO ΕΛΛ. ΦΙΛ. ΚΩΔ. 65 (φ. 11r-126r)**

Γνωρίζουμε ότι ἐποχές ἀκμῆς τῶν μαθηματικῶν στὸ Βυζάντιο ὑπῆρξαν ὁ Ε', ΣΤ', Θ', Γ', ΙΓ' καὶ ΙΔ' αἰώνας<sup>1</sup>. Οἱ μαθηματικοὶ τῶν πρώτων Βυζαντινῶν χρόνων ἥκμασαν στὴν Ἀλεξάνδρεια. Ἐπὶ Ιουστινιανοῦ ὅμως, λόγῳ τῆς μεγάλης τότε οἰκοδομικῆς δραστηριότητας τὸ κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στὴν Κωνσταντινούπολη<sup>2</sup>. Τὸ 726 μ.Χ. ἐνῷ τὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης εἶχε πλέον παρακμάσει δίδασκαν ἀκόμα λογιστικὴ καὶ γεωδαισία<sup>3</sup>, ἢ δόπια θεωρεῖτο αλάδος τῆς λογιστικῆς<sup>4</sup>. Σημειωτέον, ὅτι στὴν ἀρχαίᾳ Ἑλλά-

- 
1. H. HUNGER, Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner, München 1978, σὲ Ἑλληνικὴ μετάφραση: H. HUNGER, Βυζαντινὴ Λογοτεχνία, Ἡ λόγια κοσμική γραμματεία τῶν Βυζαντινῶν, τ. Γ', Μαθηματικά καὶ Ἀστρονομία, Φυσικές Ἐπιστῆμες, Ιατρική, Πολεμική Τέχνη, Νομική Φύλολογία, Μουσική, μτφρ. Γ.Χ. ΜΑΚΡΗΣ, ΙΩΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ-ΑΓΟΡΑΣΤΟΥ, Τ. ΚΟΛΙΑ, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗ, ΣΠ. ΤΡΩΙΑΝΟΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΟΥ, (Μορφωτικό Ἰδρυμα Ἐθνικῆς Τραπέζης) Ἀθήνα 1994 (στὸ ἔξῆς: H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία), σ. 19. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ΙΓ' καὶ στὶς ἀρχές τοῦ ΙΔ' αἱ ἡ Κωνσταντινούπολη ἤταν τὸ κέντρο τῶν ἀνωτέρων ἐπιστημῶν. Βλ. C.N. CONSTANTINIDES, Higher Education in Byzantium, Nicosia 1982 (στὸ ἔξης: CONSTANTINIDES, Higher Education), σ. 108.
  2. "Ο. π., σ. 26.
  3. Γεωδαισία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς σώμασι μεγεθῶν καὶ σχημάτων διαιρετικὴ καὶ συνθετικὴ. Λαμβάνει τὰ σχήματα οὐ τέλεια οὐδὲ ἀπηρκυβαμένα τῷ σωματικὴν ὄλην ὑποβεβλῆσθαι, καθώσπερ καὶ ἡ λογιστική μετρεῖ γοῦν καὶ σωρὸν ὁς κῶνον καὶ φρέατα περιφερῆ ὡς κυλινδρικὰ σχήματα... χοήται δέ, ὡς ἡ γεωμετρία τῇ ἀριθμητικῇ, οὕτως καὶ αὕτη τῇ λογιστικῇ... ὥσπερ ὁ γεωμέτρης τὰς λογικὰς εὐθείας μεταχειρίζεται, οὕτως ὁ γεωδαιτης ταῖς αἰσθηταῖς προσχορήται... Πόσα μέρη μαθηματικῆς; Τῆς μὲν τηματέρας καὶ πρώτης ὀλοσχεδέστερα μέρη δύο, ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία, τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ ἀσχολούμένης ἐξ, λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, ἀστρονομική. HERONIS ALEXANDRINI, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Stutgard 1976, τ. Δ', σ. 100, 164. Βλ. καὶ εἰς: The Cambridge Medieval History, v. IV : The Byzantine Empire, part II: Government, church and civilization, ed. J.M. HUSSEY, Cambridge 1967, σὲ Ἑλληνικὴ μετάφραση: Πανεπιστήμιο τοῦ Καίμπριτζ. Ἡ Ιστορία τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας, τ. Α'-Β', μτφρ. ΝΤΟΥΝΤΟΥ ΣΑΟΥΛ, Πρόλογος Γ. Καραγιαννόπουλος, ἔκδ. Μέλισσα, Ἀθήνα 1979 στὸ: τ. Β', κεφ. XXVIII· K. VOGEL, Ἡ Βυζαντινὴ ἐπιστήμη, (στὸ ἔξης: VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη), σ. 808.
  4. Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὀνομάζόταν ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἑλληνες λογιστικὴ, καὶ δέν ἀνῆκε στὶς μαθηματικές ἐπιστῆμες. Τὸ ἴδιο ἵσχε καὶ στὸ Βυζάντιο μὲ τὴ μόνη διαφορὰ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἐκτιμοῦσαν ἰδιαιτέρως τὴ λογιστική, ἐπειδὴ ἐφαρμοζόταν σὲ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς. Βλ. E. STAMATHES, Κριτικὴ βυζαντινοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς, Ἀθήνα 1965, (στὸ ἔξης: STAMATHES, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ.), σ. 12.

δα δύος «άριθμητική» σήμαινε τή σημερινή «θεωρία αριθμῶν». Στή λογιστική ὅμως οἱ τύποι χρησιμοποιοῦνταν χωρὶς ἀποδεῖξεις καὶ οἱ γνώσεις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς μηχανικῆς μεταδίδονταν ἀπὸ γενιὰ σὲ γενιὰ στὰ μέλη τῶν ὁμάδων τῶν οἰκοδόμων, τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν<sup>5</sup>. Αὐτὸ βέβαια δέν σήμαινε κατ' ἀνάγκην, ὅτι οἱ διδάσκαλοι τῆς λογιστικῆς ἀγνοοῦσαν τὰ θεωρήματα στὰ ὅποια στηρίζονταν οἱ πρακτικοὶ κανόνες. Μάλιστα ὄρισμένοι ἀπὸ αὐτοὺς πρέπει νὰ ἦταν καλοὶ γνῶστες τῆς θεωρίας, καθὼς ἔδιναν λύσεις πρωτότυπες καὶ διαφορετικὲς ἀπὸ τοὺς συγχρόνους τους. Ἐπιπλέον εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔδειχναν προσήλωση στὰ ἀρχαιοελληνικὰ πρότυπα. Διαφύλαξαν ὅλα ὅσα εἶχαν ἐπιτευχθεῖ, τὰ ὅποια καὶ παρέδωσαν προκειμένου νὰ συνεχισθεῖ ἡ πρόοδος στὶς θετικὲς ἐπιστῆμες. Οἱ Βυζαντινοὶ ὅμως δὲν διακρίθηκαν γιὰ τὶς γνώσεις τους στὴ θεωρία ἀλλὰ μάλλον γιὰ τὴν πρακτικὴ χρήση καὶ ἐφαρμογὴ τῶν ἐπιστημονικῶν γνώσεων στὴν καθημερινὴ ζωὴ<sup>6</sup>.

Κατὰ τὸν 9ο αἰ. ὁ Λέων ὁ μαθηματικὸς ἦταν αὐτὸς ποὺ ἐπανέφερε τὴν παράδοση τῆς ἀνώτατης κρατικῆς ἐκπαίδευσης καὶ ὁ Πατριάρχης Φότιος ὁ ὅποιος ἦταν λάτρης τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς παιδείας «ὅδηγησε τὸ Βυζάντιο στὸν αὐθεντικὸ ἐλληνισμό», μὲ περιορισμένη ὅμως τὴν παρουσία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν<sup>7</sup>. Σ' αὐτὴ τὴν περίοδο, ἡ παιδεία καὶ ἡ τέχνη εἶχαν πλέον σκοπό τὴν ἀπόκτηση ἐκείνης τῆς νοοτροπίας, ἡ ὅποια θὰ «ἀπομάκρυνε τὸν πολίτη ἀπὸ κάθε τὶ τὸ ἀνθρώπινο, ὥστε νὰ πραγματοποιηθεῖ ἡ ἐπιθυμητὴ στροφὴ πρὸς τὸ ὑπεράνθρωπο»<sup>8</sup>.

Ἄργοτερα (1008 μ.Χ.) ἐκδόθηκε μία μαθηματικὴ τετρακτὺς ἀγνώστου συντάκτη, ἡ ὅποια ἀν καὶ δὲν ἦταν ὑψηλοῦ ἐπιπέδου μᾶς προσέφερε ἐντούτοις σημαντικὲς πληροφορίες σχετικὰ μὲ κάποια εἰδη κειμένων, τὰ ὅποια παραδίδονταν στὰ πλαίσια τῆς ἐκπαιδευτικῆς πορείας ποὺ ἀκολουθεῖτο<sup>9</sup>. Μεταξὺ ὅσων παρέλαβε ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τὸ Βυζάντιο, περιλαμβάνονταν

5. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 808, 809.

6. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία, σ. 14, 17, 18, 19.

7. P. LEMERLE, Le premier humanisme byzantin, Notes et remarques sur enseignement et culture à Byzance des origines au Xe siècle, Paris 1971, σὲ ἐλληνικὴ μετάφραση: P. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινός Οὐμανισμός, μτφρ. MAPIA ΝΥΣΤΑΖΟΠΟΥΛΟΥ-ΠΕΛΕΚΙΔΟΥ, (Μορφωτικό "Ιδρυμα Ἐθνικῆς Τραπέζης") Αθήνα 1985, (στὸ Ἑξῆς: LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός), σ. 280, 281.

8. Ὁ.π., σ. 285. Ἡ ἀρχαία ἐλληνικὴ παιδεία ἀποτελοῦσε ἔνα μέσον γιὰ νὰ κατανοηθεῖ καλύτερα ἡ ὑπαρξὴ τοῦ Χριστοῦ, ὁ ὅποιος ἦταν πλέον τὸ κέντρο τοῦ κόσμου. Οἱ ἔννοιες «Χριστιανισμός» καὶ «Παιδεία τοῦ Χριστοῦ» ἦταν ταυτόσημες. Ὁ Πλάτων διδασκόταν καὶ ἦταν ἀρεστός, διότι ἀπομάκρυνε τὸ μυαλὸ ἀπὸ τὰ ὑλικὰ καὶ τὴν πραγματικότητα τῶν αἰσθήσεων καὶ ὁδηγοῦσε τὸν ἀνθρώπο σὲ κόσμους ὃπου κατοικοῦν οἱ ἐκλεκτοὶ νόες τῆς ἀνθρώπινης φυλῆς. W. JEAGER. Early Christianity and Greek Paideia, Harvard 1961, σ. 12, 46.

9. H. HUNGER, Βυζ. Λογοτεχνία σ. 39.

γνώσεις τεχνολογίας στοὺς τομεῖς τῆς μηχανικῆς, τῆς πολεμικῆς τέχνης, τῆς φαρμακευτικῆς, καὶ τῆς χημικῆς τεχνολογίας<sup>10</sup>. Στὰ ἀλχημικὰ κείμενα μάλιστα σώζονται συνταγὲς ποὺ παραδίδονταν ἀπὸ γενιὰ σὲ γενιὰ στοὺς μεταλλουργοὺς καὶ στοὺς χρυσοτεχνίτες, καὶ οἱ ὄποιες περιλαμβαναν ὅδηγίες σχετικὰ μὲ τὴ συγκόλληση μετάλλων, τὴ βαφή, τὴν παρασκευὴν κραμάτων καὶ τὸν ποιοτικὸν τους ἔλεγχο, ὁ ὄποιος γινόταν ἀπὸ κρατικοὺς ὑπαλλήλους<sup>11</sup>. Ἀπὸ τὴν ἐποχὴν τῶν Παλαιολόγων ἔχουν σωθεῖ ἡ πραγματεία περὶ χρυσοποιίας τοῦ Νικολάου Βλεμμύδη, καὶ ἡ ἐρμηνεία τῆς ἐπιστήμης τῆς χρυσοχοΐας ἐνὸς μοναχοῦ Κοσμᾶ<sup>12</sup>. “Οσο καλὰ οἱ χρυσοτεχνίτες γνώριζαν ὅτι δὲν ὑπῆρχε μέθοδος μετατροπῆς ἀγενοῦς μετάλλου σὲ χρυσό, ἄλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους ἐπαργύρωσης καὶ ἐπιχρύσωσης, μὲ τὶς ὄποιες ἔδιναν ὅψη ἀργυροῦ ἢ χρυσοῦ σὲ ἄλλα μέταλλα ἢ σὲ κράματά τους. Ἐπειδὴ δὲ τὰ κράματα τῶν μετάλλων χρησιμοποιοῦνται τόσο στὴν ἀργυροχρυσοχοΐα ὅσο καὶ τὴ νομισματοκοπία, εἶναι ἀναγκαία ἡ γνώση τρόπων ὑπολογισμοῦ τῶν ἀναλογιῶν, ὑπὸ τὶς ὄποιες εὑρίσκονται τὰ μέταλλα σὲ κράματα. Τέτοιου εἰδούς ὑπολογισμοὶ καὶ ὅσοι ἄλλοι σχετίζονταν μὲ τὴ σημερινὴ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ περιλαμβάνονταν στὴν καλούμενη λογιστική.

Τὰ μαθηματικὰ καὶ ἡ ἀστρονομία, ἀπὸ τὴν ἐποχὴν ποὺ ὁ Κωνσταντῖνος ὁ Θ' (1042-1055)<sup>13</sup> ἀναδιοργάνωσε τὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης, εἶναι οἱ ἐπιστήμες ποὺ καλλιεργήθηκαν ἐντατικά<sup>14</sup>.

Ἐπὶ τῆς βασιλείας τοῦ Μανουὴλ Α' Κομνηνοῦ (1143-1180), τὸ Βυζάντιο ἥταν πιὸ προηγμένο σὲ σχέση μὲ τὴ Δύση στὸν τομέα τῶν μαθηματικῶν<sup>15</sup>. Περὶ τὸ 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ὁ διαχωρισμὸς τῶν ἐμπορικῶν (πρακτικῶν)<sup>16</sup> ἀπὸ τὰ ἀκαδημαϊκὰ (τὰ διδασκόμενα στὶς ἀνώτερες σχολὲς) μαθηματικά.

- 
10. Δημιουργικὸς ἀρχιτέκνων καὶ μηχανικὸς θεωρεῖτο ἐκεῖνος, ὁ ὄποιος ἔχοντας ἐντρυφήσει στὶς τέσσερεις μαθηματικὲς ἐπιστῆμες (ἀριθμητική, γεωμετρία, μουσική, ἀστρονομία), μποροῦσε παραλλῆλα νὰ ἀσκεῖ μὲ ἐπιτυχίᾳ τὴν τέχνη τοῦ μεταλλουργοῦ, τοῦ χτίστη, τοῦ μαραγκοῦ, τοῦ ζωγράφου. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 827.
  11. Ὁ.π., σ. 828.
  12. Ὁ.π., σ. 826
  13. ‘Υπάρχουν ἐνδείξεις, ὅτι ὁ Κωνσταντίνος ὁ Θ' Μονομάχος ἥταν αὐτὸς ποὺ εἰσήγαγε τὴν τεχνικὴ ἐκπαίδευση γιὰ νὰ ἐνισχύσει τὴν ἀνερχόμενη τότε τάξη τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν περιορίζοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὴν ἔξουσία τῆς ἀριστοκρατίας· βλ. ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ ΧΟΝΔΡΙΔΟΥ, ‘Ο Κωνσταντίνος Θ' Μονομάχος καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῆς τεχνικῆς ἐκπαίδευσης, Α΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Έλλάδος καὶ Κύπρου (25-27 Σεπτεμβρίου 1998), (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ιωάννινα 1999, σ. 151.
  14. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 807.
  15. Ὁ.π., σ. 811.
  16. Κατὰ τὸν Μ. Βασίλειο: Ἡ ἀνθρώπινη σοφία εἶναι ἡ ἐμπειρικὴ γνώση τῶν πραγμάτων τῆς ζωῆς σύμφωνα μὲ τὴν ὄποια ἀποκαλοῦμε σοφοὺς τοὺς γνῶστες καθεμαῖς ἀπὸ τὶς ὁφέλιμες τέχνες. B.

Μάλιστα ἀπὸ τὸν 14ο αἰ. τὰ πρακτικὰ μαθηματικὰ ὅχι μόνον δὲν περιλαμβάνονταν στὴ διδακτέα ὑλὴ τῶν ἀνωτάτων σχολῶν<sup>17</sup> ἀλλὰ κατὰ τὴν ἄποψη δρισμένων, βρίσκονταν σὲ συνεχὴ ἀνταγωνισμὸ μὲ τὴν ὑλὴ ποὺ διδασκόταν σ' αὐτές<sup>18</sup>, ἀφοῦ τὰ πρακτικὰ μαθηματικὰ ἐνδιέφεραν πλῆθος ἀνθρώπων, καθὼς ἐφαρμόζονταν σὲ προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς, καὶ ἦταν χρήσιμα σὲ πολλὰ ἐπαγγέλματα.

Μολονότι οἱ τελευταῖς δεκαετίες πρὶν τὴν ἄλωση τῆς Κωνσταντινούπολης θεωροῦνται ἀσήμαντες σὲ προσφορὰ στὰ μαθηματικά, ἡ ὑπαρξη μεγάλου πλήθους χειρογράφων<sup>19</sup> δείχνει αὐξημένο ἐνδιαφέρον τόσο γιὰ τὶς τέσσαρες μαθηματικὲς ἐπιστῆμες (ἀριθμητική, γεωμετρία, ἀστρονομία, μουσική), ὅσο καὶ γιὰ τὴ λογιστικὴ καὶ τὴ γεωδαισία, οἱ δοποῖες ἦταν κλάδοι τῶν κατ' ἔξοχὴν ἐμπορικῶν μαθηματικῶν<sup>20</sup>.

Ἡ βυζαντινὴ ἐποχὴ τελειώνει μὲ ἔργα προορισμένα γιὰ πρακτικὴ χρήση. Αὐτὰ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον βιβλία ἀριθμητικῆς, δηλαδὴ συλλογὲς προβλημάτων ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ποικίλες καὶ ἐπιλεκτικὲς δημιουργίες κληροδοτημένες ἀπὸ τὴν παράδοση πολλῶν χρόνων καὶ λαῶν. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἐπιρροῶν ποὺ δέχθηκαν οἱ συγγραφεῖς αὐτῶν τῶν ἔργων ἀποτελεῖ ἔξαιρετικὰ ἐπίτονη διαδικασία, ἴδιατέρως, ὅταν στὶς περισσότερες περιπτώσεις διαπιστώνονται ἀλληλεπιδράσεις μεταξὺ Κινέζων, Περσῶν, Ἰνδῶν, Δυτικῶν καὶ Βυζαντινῶν. Αὐτὲς οἱ συλλογὲς περιλαμβάνουν ἐκτὸς τῶν ἄλλων καὶ στοιχεῖα πολύτιμα γιὰ τὴν ἐξέλιξη τοῦ πολιτισμοῦ καὶ τῆς γλώσσας, διότι ἀναφέρονται σὲ ζητήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῶν ἀνθρώπων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης (μετατροπὲς νομισμάτων, προβλήματα κληρονομιῶν, φροντίδες καθεστῶς, κ.ἄ.)<sup>21</sup>.

Τὰ σχολεῖα κατὰ τοὺς βυζαντινὸς χρόνους λειτουργοῦσαν κυρίως σὲ χώρους ἐκκλησιαστικούς. Οἱ μαθητὲς ἔμεναν συνήθως μέσα σὲ αὐτὰ<sup>22</sup> καὶ ἔτσι εἶχαν τὴν δυνατότητα νὰ ἀναπτύξουν στενὲς σχέσεις μεταξὺ τους, οἱ δοποῖες συνέβαλλαν στὴ δημιουργία κλίματος ποὺ εύνοοῦσε τὶς ἐπιστημονικὲς συζητήσεις<sup>23</sup> καὶ τὴν πολύωρη ἐνασχόληση μὲ τὰ ρράμματα<sup>24</sup>. Βέβαια,

ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Βασιλείου Καισαρείας τοῦ Μεγάλου Ἀπαντα τὰ ἔργα, 7 (‘Ομιλίαι καὶ Λόγοι), Θεσσαλονίκη 1973 (στὸ ἔξῆς: ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἀπαντα), σ. 369.

17. CALINGER, A contextual history of Mathematics to Euler, Prentice Hall 1999, σ. 357, 363.

18. C. B. BOYER - UT.C. MERZBACH, Ἡ Ιστορία τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1997, σ.284.

19. VOGEL, Ἡ βυζαντινὴ ἐπιστήμη, σ. 814.

20. Ὁ.π., σ. 814.

21. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ., σ. 4, 15.

22. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

23. Ὁ Βασίλειος ὁ Μέγας στὶς Ἐπιστολὲς του πρὸς τοὺς Νέους γράφει ὅτι διὰ τῆς μαθήσεως θὰ κατατηθεῖ ἡ ἀρετὴ, καὶ τοὺς προτρέπει νὰ μὴ δέχονται ἄκριτα ὅλα ὃσα οἱ δάσκαλοι τοὺς διδάσκουν. ΨΕΥΤΟΓΚΑΣ, Μ. Βασιλείου Ἀπαντα, σ. 369.

24. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 160.

ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν βιενναῖο ἔλλ. φιλ. κώδ. 65 (15ος αἰ.).<sup>25</sup> φαίνεται νὰ ὑπῆρχαν καὶ μαθητές, οἱ ὅποιοι γιὰ νὰ σπουδάσουν μετακινοῦνταν σὲ ἄλλη πόλη, ὅπου κατοικοῦσαν πολλοὶ μαζὶ στὸν ἴδιο χῶρο πληρώνοντας ἐνοίκιο.

Σχετικὰ μὲ τὸ εἶδος τῶν μαθητῶν γνωρίζουμε ὅτι παλαιότερα ὑπῆρχαν μαθητὲς κάθε ἡλικίας, οἱ ὅποιοι μπορεῖ νὰ ἥταν κληρικοί, δημόσιοι ὑπάλληλοι, ἀκόμα καὶ ἀξιωματοῦχοι μαζὶ μὲ τὰ παιδιὰ τους.<sup>26</sup> Η ὑπαρξη ἀυτοῦ τοῦ εἴδους τοῦ ἀκροατηρίου καθόριζε ὡς ἔνα βαθμὸ καὶ τὸ περιεχόμενο τῆς διδακτέας ὑλῆς, ἡ ὅποια ὅσον ἀφορᾶ στὰ μαθηματικὰ τὶς περισσότερες φορὲς περιλαμβανε ὅχι μόνο κεφάλαια πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωδαισίας, ἀλλὰ καὶ ἄλγεβρας. Ἐπειδὴ ἀντὰ τὰ κεφάλαια περιλαμβάνονται στὸ περιεχόμενο τοῦ βιενναίου ἔλλ. φιλ. κώδ. 65, τίθενται ἐρωτήματα σχετικὰ μὲ τὴ σύσταση τοῦ ἀκροατηρίου, στὸ ὅποιο ἀπευθυνόταν. Τοῦτο διότι τὰ κεφάλαια τῆς λογιστικῆς καὶ τῆς γεωδαισίας ἥταν χρήσιμα κυρίως σὲ ἐμπόρους, χειροτέχνες, διοικητικοὺς ὑπαλλήλους, πρωτομάστορες, τοπογράφους, ἐνῷ τῆς ἄλγεβρας σὲ μαθητὲς σχολείου. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρουμε τὰ κεφάλαια τῆς ἄλγεβρας στὰ ὅποια ὁ συγγραφέας προτείνει λύσεις γιὰ τὶς ἔξισώσεις 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ. Οἱ λύσεις αὐτὲς εἶναι ἐσφαλμένες, ἀλλὰ μέχρι τὸ 1615 ποὺ ὁ Vieta ἀνακάλυψε τὴν γενικὴ τους λύση<sup>27</sup> εἶχαν γίνει πολλὲς ἀποτυχημένες ἀπόπειρες πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνση ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς ὅλων τῶν ἐποχῶν. Εἶναι δὲ σαφὲς ὅτι ἔνα τέτοιο θέμα καθαρὰ ἐρευνητικὸ δὲν θὰ ἥταν δυνατὸν νὰ ἐνδιαφέρει ἀνθρώπους ποὺ ἐπιζητοῦσαν πρακτικές γνώσεις, ἀφοῦ μάλιστα ἔως σήμερα οἱ λύσεις τῶν ἔξισώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ διάσκονται στοὺς μαθητὲς τῶν τελευταίων τάξεων τῶν Λυκείων.

Παλαιότερα στὰ σχολεῖα αὐτὰ ἔκεινοῦσαν συνήθως μὲ ποίηση καὶ οητορική, καὶ στὸ τέλος μάθαιναν μαθηματικά, ἀν καὶ ἡ σειρὰ δὲν ἥταν ἀπολύτως καθορισμένη. Βέβαια οἱ περισσότεροι μαθητὲς δὲν συνέχιζαν τὶς σπουδές τους στὰ ἀνώτερα μαθηματικά, διότι ἀφ' ἐνὸς μὲν οἱ δάσκαλοι ἥταν λιγοστοί, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπῆρχε ἔλλειψη χειρογράφων βιβλίων<sup>28</sup>. Καθώς ἡ τυπογραφία ἀνακαλύπτεται πρὸς τὸ τέλος τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. τὰ χειρόγραφα ἀντέγραφαν πολλὲς φορὲς οἱ ἴδιοι οἱ μαθητές. Οἱ περισσότεροι δάσκαλοι (Πλανούδης, Βρυέννιος, Παχυμέρης) εἶχαν δικές τους βιβλιοθῆκες ἀλλὰ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν ποὺ δέχονταν ἥταν περιορισμένο<sup>29</sup>.

- 
- 25. Ἡ μεταγραφὴ καὶ ἡ μελέτη τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου αὐτοῦ τοῦ χειρογράφου ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς ὑπὸ ἐκπόνηση διδακτορικῆς διατριβῆς μου.
  - 26. Συνήθως τὸ κράτος ἀναλάμβανε τὴν μόρφωση τῶν λειτουργῶν του, καὶ ἡ ἐκκλησία τῶν κληρικῶν της. LEMERLE, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὐμανισμός, σ. 52, 229.
  - 27. D.E. SMITH, History of Mathematics, τ. B', Dover/New York 1958, σ. 465.
  - 28. CONSTANTINIDES, Higher Education, σ. 155.
  - 29. "Ο.π., σ. 157.

‘Ο βιενναῖος ἔλλ. φιλ. κώδ. 65 εἶναι χαρτῶν καὶ χρονολογεῖται στὸν 15ο αἰ. Ἀποκτήθηκε ἀπὸ τὸν Augerius von Busbeck, ὅταν αὐτὸς ἦταν πρεσβευτὴς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α' στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμᾶν Β' (1555-1562 μ.Χ.)<sup>30</sup>. Περιέχει ἔνα βιβλίο ἀριθμητικῆς μὲ λυμένα προβλήματα (φ. 11r-126r), τὰ δόποια καλύπτουν ἔνα εὐρύτατο πεδίο θεμάτων κατάλληλων γιὰ διδασκαλία τόσο στὸ σημερινὸ δημοτικὸ ὅσο στὸ γυμνάσιο καὶ στὸ λύκειο. Ἡ τεράστια ποικιλία τῶν προβλημάτων καθιστᾶ δύσκολο τὸν καθορισμὸ τοῦ εἰδους τῶν μαθητῶν στὸν δόποιος ἀπευθύνεται. Ἐν ἐπρόκειτο γιὰ δλοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας, τότε κατὰ τὴν ἄποψή μας θὰ μποροῦσε τὸ ἀκροατήριο νὰ ἀποτελεῖτο ἀπὸ μαθητὲς ὅλων τῶν τάξεων τῆς σημερινῆς πρωτοβάθμιας καὶ δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ἄτομα τὰ δόποια προορίζονταν νὰ ἀκολουθήσουν τὸ ἐπάγγελμα τοῦ κρατικοῦ λειτουργοῦ. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν προβλημάτων, ἔξαιρετικὸ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καὶ ἡ μαθηματικὴ δογλογία, ἡ δόποια χρησιμοποιεῖται καὶ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἄγνωστη στὸν σύγχρονο μαθηματικό. Μερικὰ παραδείγματα εἶναι τὰ ἔξης:

‘Ο συγγραφέας ὀνομάζει τὸν ἀριθμὸ ψῆφον καὶ δοίξει τὸ μηδὲν ὡς οὐδέν· γράφει δὲ τὸ οὐδὲν οὐδὲνὸς ἐστὶ δηλωτικόν, καὶ τὸ συμβολίζει μὲ τὸ ἀνεστραμένο h. Χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο μηλιούρια ἢ μιλούνια ἀντὶ τοῦ ὁρθοῦ ποὺ εἶναι μιλλιούρια, προκειμένου νὰ δηλώσει τὰ ἐκατομμύρια. Γιὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιεῖ δύο σχήματα: τὸ δίπλενδον (τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστῆ τοποθετοῦνται κατακόρυφα), καὶ τὸ οίκος (διὰ τὸ τετραγωνικῶς λαμβάνειν τὸν ψήφον). Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμό, ποὺ σήμερα λέμε δὲ ἐκτελοῦμε χιαστὶ (ὅταν π.χ. θέλουμε νὰ κάνουμε δύο κλάσματα διμόνυμα), χρησιμοποιεῖ τὴν ἐκφραση πολλαπλασιάζω σταυροειδῶς. Οἱ ὅροι ἐπιστρεπτικὸς ἀριθμὸς καὶ ἀνυπόστροφος, χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσει ὁ συγγραφέας τοὺς σύνθετους καὶ τους πρώτους ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα. Σημειώτεον, δὲ ὁ ὅρος πρῶτος ἀριθμὸς χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸν ἀριθμό, ὁ δόποιος ἔχει ὡς διαιρέτες μόνο τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴ μονάδα, ἐνῶ ὁ ὅρος σύνθετος ἀριθμὸς δηλώνει τὸν ἀριθμό, ὁ δόποιος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτες ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴ μονάδα.

Οἱ ἐκφράσεις ἡ διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις καὶ διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν ἀντίστοιχοῦν στὴ σημερινὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Μία συνήθης ὀνομασία αὐτοῦ τοῦ κανόνα ἦταν ἐμπόρων κλείς, ἡ δόποια δείχνει τὴ σημασία του στὶς ἐμπορικὲς συναλλαγές. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεῖ πολὺ συχνὰ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, καὶ δὲν παραλείπει κάθε φορά, νὰ τὴν περιγράφει ἀναλυτικά.

30. ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Κριτικὴ βυζ. βιβλίου Ἀριθμ., σ. 5.

‘Ο ὅρος ἀφεξαίρεσις σημαίνει τὴ σημερινὴ ἀφαίρεση.

Σχετικά μὲ τὶς ἀριθμητικὲς προόδους ἐπισημαίνουμε, ὅτι μολονότι ὁ ὅρος ἀριθμητικὴ πρόοδος δὲν συναντᾶται στὸ χειρόγραφο, ἐντούτοις ὑπάρχουν προβλήματα ὑπολογισμοῦ ἀθροισμάτων ἀριθμῶν, οἵ διοῖτο εἶναι στὴν πραγματικότητα ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου<sup>31</sup>.

‘Ο ὅρος φυσικὴ φίξα χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν ἀκεραία φίξα (π.χ. τὴν  $\sqrt{16}$ ), καὶ νόθος φίξα γιὰ αὐτὴ ποὺ δὲν δίνει ἀκέραιο ἀποτέλεσμα (π.χ. τὴν  $\sqrt{30}$ ). ‘Ο ὅρος ἐφύμικτος φίξα χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ἀθροισμα τῶν φίξῶν δύο ἀριθμῶν. Σημειωτέον, ὅτι σήμερα δὲν χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχοι ὅρισμοι. Ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι ὁ συγγραφέας δίνει ἀξιόλογες μεθόδους ὑπολογισμοῦ φίξῶν δεύτερης καὶ τρίτης τάξης, τὶς διόπεις σχολιαζουμε ἐκτενῶς στὴ διδακτορικὴ διατριβή<sup>32</sup>.

Στὶς ἔξισώσεις πρώτου ἔως καὶ τετάρτου βαθμοῦ ὁ συγγραφέας ὀνομάζει ἀριθμὸν κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸ καὶ πρᾶγμα τὸν ἄγνωστο χ. Οἱ ὅροι τζένσο, κοῦβον, καὶ κάρδον χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσουν τὴν δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβο) καὶ τετάρτη δύναμη τοῦ ἀγνώστου χ ἀντίστοιχα. Οἱ γενικὲς λύσεις γιὰ τὶς ἔξισώσεις τρίτου καὶ τέταρτου βαθμοῦ παρουσιάζουν ἴδιαίτερο ἐνδιαφέρον, διότι δείχνουν τὴν προσπάθεια ποὺ κατέβαλλαν τότε γιὰ τὴν εὔρεση γενικῆς λύσης. Σημειώνουμε, ὅτι ὁ σημερινὸς ὅρος ἰσότητα δύο μελῶν ἐμφανίζεται στὸ χειρόγραφο, ὡς ὅμοιότητα.

*Ρομβοειδὲς*<sup>33</sup> ὀνομάζεται κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Σήμερα βέβαια αὐτὸς ὁ ὅρος δὲν χρησιμοποιεῖται ἐμεῖς ὀνομάζουμε ρόμβο τὸ παραλληλόγραμμο, τὸ δόποιο ἔχει δύο διαδοχικὲς πλευρὲς ἵσες. Τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ὀνομάζονται τετράγωνα. Δὲν ὑπάρχουν δὲ οἱ ὅροι τοῦ ἰσοσκελοῦς καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· ὅποτε ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ αὐτὰ τὰ ἀποκαλεῖ τρίγωνα μὲ δύο ἥ μὲ τρεῖς ἵσες πλευρές. Παρατηροῦμε, ὅτι σέ δρισμένα προβλήματα τοῦ χειρόγραφου μας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος ὕψος τριγώνου γιὰ νὰ δηλώσει τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ κεῖται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

‘Ο ὅρος μηνικὸν κέρδος ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τόκου καὶ σημαίνει τὸ κέρδος ἐνὸς μηνός. ‘Ο ὅρος ἐνιαυτὸς δηλώνει τὴν χρονικὴ διάρκεια ἐνὸς

- 
31. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, διαίρεσης, ἀναλογῶν καὶ προόδων σὲ βιενναῖο κώδικα τοῦ 15ου αἰ., *Β' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Έλλάδος καὶ Κύπρου* (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Αθῆνα 2000, σ. 172.
  32. ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ, Περὶ φίξῶν, *Γ' Συνάντηση Βυζαντινολόγων Έλλάδος καὶ Κύπρου* (22-24 Σεπτεμβρίου 2000) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ρέθυμνο 2002, σ. 90-93.
  33. ‘Ο Παχυμέρος ὁρίζει ως ρομβοειδὲς τὸ παρασεσαλευμένον ἐτερόμηχες, τὸ καὶ τὰς πλευρᾶς καὶ τὰς γωνίας ἔχον ἀνίσους (δὲν πρόκειται ἀριθμὸς περὶ ρόμβου). Βλ. P. TANNERY, *Quadrivium de Georges Pachymère*, Città del Vaticano 1940, σ. 203.

ἔτους. Λείπει ἐντελῶς ὁ σημερινὸς ὅρος ἐπιτόκιο, ὁ ὅποιος δηλώνει τὸ ἐτήσιο κέρδος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων.

Ο ὅρος φίνον (πρβλ. *affinage*) ἀναφέρεται στὸ καθαρότατο ἀσῆμι τῶν 12 οὐγγιῶν, καὶ φίνον μάλαγμαν στὸν χρυσὸ τῶν 24 καρατίων. “Οταν ὅμως πρόκειται γιὰ παρασκευὴ ἀσημιοῦ μικρότερης καθαρότητας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος ἐπιβολὴ χαλκώματος, ἐνῷ γιὰ τὴν παρασκευὴ καθαροτέρου μετάλλου ὁ ὅρος λογαρίζω<sup>34</sup>.

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἀναφέρεται ὡς κανὼν τῆς σκάδρας, καὶ διευκρινίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὅτι σκάδρα σημαίνει τετράγωνο.

Ο ὅρος ἄρριξον τζάκισμα κορυφῆς ἀναφέρεται σὲ κάποιον ἀριθμό, τοῦ ὅποιου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ ὁ ὅποιος εἶναι κλασματικὸς μὲ ἄρριξον (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲν μπορεῖς νὰ ὑπολογίσεις τὴν ρίζα) παρανομαστή, ὅπως π.χ. 3/8, 7/14, κ.λπ. Ο ὅρος ἀσχημάτιστον ἡ ἄτμητον τζάκισμα χρησιμοποιεῖται γιὰ κλάσματα (π.χ. 13/14, 7/16), τὰ ὅποια –ὅπως ἔξηγει ὁ συγγραφέας– δὲν μποροῦν νὰ λάβουν μετὰ ἀπὸ ἀπλοποίηση μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες μορφές: 1/2 ἢ 1/3 ἢ 1/4. Σύμφωνα μὲ τὸν συγγραφέα ἡ ρίζα αὐτῶν τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθεῖ.

Στὸ κεφάλαιο τῆς στερεομετρίας δὲν ἀναφέρονται κανὸν οἱ ὅροι παράπλευρη ἐπιφάνεια ἡ ὄλικὴ ἐπιφάνεια στερεοῦ, καὶ ὅταν ὁ συγγραφέας ζητεῖ τὴν εὑρεση τοῦ περιεχομένου τοῦ στερεοῦ αὐτὸν σημαίνει τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ δύγκου του.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ χειρόγραφὸ μας χρησιμοποιεῖται πολὺ συχνὰ ὁ ὅρος ἀπόδειξη, ὅταν πρόκειται γιὰ ἀπλὴ ἐπαλήθευση τῆς ὀρθότητας τῶν πράξεων καὶ ὅχι γιὰ κάποια διαδικασία, ἡ ὅποια σχετίζεται μὲ τὴ θεωρία. Συχνὰ μάλιστα αὐτὴ ἡ ἐπαλήθευση πραγματοποιεῖται μὲ τὴν ἀνάπτυξη μίας διαφορετικῆς μεθόδου ἐπίλυσης τοῦ ἴδιου προβλήματος.

Ἡ ὁρολογία, ἡ ὅποια χρησιμοποιεῖται στὸ χειρόγραφό μας ἀξιολογήθηκε προσεκτικά, καθὼς τὸ κείμενο εἶναι ἔξαιρετικὰ ἀνορθόγραφο καὶ ἡ γλῶσσα του ἔπρεπε νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴ γλῶσσα τῶν βυζαντινῶν κειμένων τῆς ἐποχῆς. Ἡ ὁρολογία συγκρινόμενη μὲ τὴν σημερινὴν, παρουσιάζει, ὅπως θὰ περίμενε κανείς, δύμοιότητες ἀλλὰ καὶ σημαντικὲς διαφορές. Ἔτσι ὁρισμένοι ὅροι, ὅπως αὐτὸς τοῦ τριγώνου ἡ τῆς ρίζας παραμένουν ἀναλλοίωτοι· οἱ περισσότεροι δύμως δὲν χρησιμοποιοῦνται πλέον σήμερα, ἐνῷ κάποιοι ἄλλοι θεωροῦνται λανθασμένοι. Π.χ. σήμερα θὰ ἥταν σοβαρὸ λάθος νὰ ὀνομάζαμε τε-

34. Οἱ χρυσοεψηταὶ ἔξελαγάφιζαν τίκοντες τὸν χρυσὸν εἰς μικρὰ δστράκινα σκεύη. Βλ. Φ. ΚΟΥΚΟΥΛΕΣ, Βυζαντινῶν βίος καὶ πολιτισμός, τ. Β', Αθήνα 1948, σ. 228. Περὶ τοῦ λαγαρῖσαι τὸ χρυσόν: βλ. Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. BERTHELOT, τ. Β', Paris 1888, κεφ. 5, σ. 322, 333.

τράγωνο ἔνα τυχὸν δρθιγώνιο παραλληλόγραμμο· τὸ ὕδιο θὰ ἵσχε καὶ ἀν ξητούσαμε τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὑψους ἐνὸς τριγώνου ἐννοώντας τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση του.

Τὰ Βυζαντινὰ κείμενα διακρίνονται γιὰ τὴν ἀρμονία καὶ τὸν ρυθμό τους ποὺ βασίζονται στὴ συμμετρικὴ σχέση τονιζόμενων συλλαβῶν καὶ συλλαβικῶν ἐνοτήτων<sup>35</sup>. Τοῦτο ἵσχει καὶ γιὰ τὸ χειρόγραφό μας. Διαβάζοντάς το ἔχει κανεὶς τὴν αἰσθηση, ὅτι ὁ συγγραφέας του ἐπιδιώκει νὰ τὸ κάνει νὰ μοιάσει μὲ ποίημα. Πιστεύουμε, ὅτι ἡ σκοπιμότητα εἶναι ἀφενὸς μὲν ἀισθητικὴ, διότι ὁ ρυθμὸς προσδίδει κάλλος, ἀφετέρου δὲ παιδαγωγικὴ, διότι τὰ ἀνωτέρῳ χαρακτηριστικὰ τοῦ λόγου ποιοῦσιν εὐσχήμονα τὴν ψυχὴν αὐτῶν ποὺ ἀκούουν<sup>36</sup>. Ἐξ’ ἄλλου, ἀναφερόμενοι καὶ στὴν ψυχολογία τῶν μαθηματικῶν, σύμφωνα μὲ σχετικὲς ἔρευνες ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ μαθητὴς ἀφομοιώνει εὐκολώτερα τὴν ὑλὴ ὑπὸ μορφὴ ποιήματος, ἡ ὥποια χαρακτηρίζεται ἀπὸ μία μετρικὴ, ἔνα ρυθμό<sup>37</sup>.

Ἐπειδὴ ἡ γλωσσοπλαστικὴ τάση τῶν Βυζαντινῶν ἔχει δημιουργήσει ἔνα τεράστιο λεξικογραφικὸ θησαυρό, γιὰ τὸν ὅποιο γνωρίζουμε πολὺ λίγα (σὲ κείμενα ρητορικά, ἴστοριογραφικά, νομικά, μαθηματικά), καὶ ἡ κλασσικήσουσα γλῶσσα ἀναμιγνύεται μὲ τὴν ἀπλούστερη τῶν Εὐαγγελίων καὶ τὴ δημώδη, χωρὶς νὰ ὑπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ τους, οἱ ὕδιοι οἱ συγγραφεῖς (π.χ. Μιχαὴλ Ψελλός, Θεόδωρος Πρόδορος) παρουσιάζουν διαφορετικὲς γλωσσικὲς τάσεις<sup>38</sup>. Βέβαια ὑπάρχει κάποιος γενικὸς κανόνας σύμφωνα μὲ τὸν ὅποιο, ὅτι ἔχει γραφεῖ ἀπὸ ὑποτιθέμενους ἀγράμματους εἶναι δημῶδες<sup>39</sup>. Αὐτὸ δῆμως κατὰ τὸν Ν. Τωμαδάκη δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἀπόλυτο. Καὶ τοῦτο διότι συνήθως νόθευαν τὸν ἀττικισμὸ μὲ τὴν κοινὴ γλώσσα, ἡ ὥποια εἶχε πάρει πολλὰ στοιχεῖα ἀπὸ τὴν λατινική, ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ κοινὴ ἀκόμα νοθεύοταν ἀπὸ δημώδεις τύπους. Ὁμως τὰ πράγματα φαίνεται νὰ περιπλέκονται περισσότερο ἀφοῦ ἀκόμα καὶ ἡ μεσαιωνικὴ δημώδης νοθεύεται συχνὰ ἀπὸ

- 
35. Γ. ΗΛΙΟΥΔΗΣ, ‘Ο ρυθμὸς καὶ ἡ ἀρμονία τοῦ λόγου σὲ λειτουργικὰ καὶ ὑμνογραφικὰ κείμενα τῶν Βυζαντινῶν, Α’ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου (25-27 Σεπτεμβρίου 1998) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ιωάννινα 1999, σ. 150.
36. “Ο.π., σ. 150.
37. Σύμφωνα μὲ τὴ μορφολογικὴ θεωρία ἡ ἀναγνώριση σημαντικῶν σχέσεων μεταξὺ τῆς παλαιᾶς καὶ τῆς νέας κατάστασης μάθησης ἔναια θεμελιώδης γιὰ τὴ μεταβίβαση τῆς μάθησης. Αὐτὸ συμβαίνει ἀκόμα καὶ ἀν ἔνας ἰδιαίτερος ρυθμὸς ἐπαναλαμβάνεται, παρὰ τὸ ὅτι οἱ στίχοι διαφέρουν κατὰ μῆκος καὶ δὲν ἔχουν καμία λέξη κοινή. Π. ΓΕΩΡΓΟΥΣΗΣ, Παιδαγωγικὴ Ψυχολογία, Ἀθήνα 1981, σ. 378.
38. Θ. ΔΕΤΟΡΑΚΗΣ, Προβλήματα τῆς βυζαντινῆς λεξικογραφίας, Β’ Συνάντηση Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου (24-26 Σεπτεμβρίου 1999) (περὶληψη ἀνακοίνωσης), Ἀθήνα 2000, σ. 153.
39. Ν. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Κλείς τῆς βυζαντινῆς Φιλολογίας, Θεσσαλονίκη 1963, σ. 27.

τύπους λογιώτερους καὶ ἡ νεοελληνικὴ δημώδης ἀναμειγνύεται μὲ στοιχεῖα συντηρητικώτερα<sup>40</sup>.

Ἄπὸ τὸν 12ο αἰ. μ.Χ. ἡ παιδεία εἶχε ώς σκοπὸν νὰ γράφουν οἱ νέοι τὴν ἀττικὴ διάλεκτο<sup>41</sup>, ἀλλὰ δὲν πρόπει νὰ παραγγωρίζουμε τὸ γεγονός ὅτι ὁ Βυζαντινός, ὅταν γράφει περὶ διδακτικῶν θεμάτων, ἀγωνίζεται νὰ διακριθεῖ ἀκόμα καὶ μὲ τὸ ὑφος τῆς γραφῆς, ἵδιαίτερα μάλιστα ὅταν καταγίνεται μὲ προβλήματα<sup>42</sup>. Ἡ συγγραφὴ διδακτικῶν θεμάτων συγκρίνεται μὲ αὐτὴν τῶν δοκιμίων ποὺ ἐκθέτουν ἐπιστημονικὲς γνώσεις μὲ τὴν κατάλληλη ἐκλαϊκευτικὴ μορφή. Οἱ Βυζαντινοὶ συγγραφεῖς κατεῖχαν τὴν τέχνη νὰ διδάσκουν λαμβάνοντας ὑπόψη τους τὸ ἐπίπεδο μόρφωσης τοῦ μαθητοῦ καθὼς καὶ τὸν εὐρύτερο κύκλο τῶν ἐνδιαφερόντων του, καὶ προσπαθώντας νὰ κάνουν ζωντανὴ τὴν διδασκαλία τους τὴν ἐμπλούτιξαν καὶ μὲ πνευματώδεις παρατηρήσεις ἀκόμα<sup>43</sup>. Ἐπὶ τῶν Παλαιολόγων ἡ ζωτικὴ πρόσωπη τὴν καθαρεύουσα φθάνει στὸ ἀποκορύφωμα καὶ ἔτσι μεγαλώνει τὸ χάσμα μεταξὺ καθομιλουμένης καὶ γραφομένης. Ἐπιπλέον δὲν πρόπει νὰ ἀγνοηθεῖ τὸ ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔπρεπε σὲ πολλὰ ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά) νὰ ἐκφράσουν πλῆθος νέων ἰδεῶν καὶ ἔτσι ἦταν πρακτικὰ ἀδύνατο νὰ περιορισθοῦν στὸ κλασσικὸ λεξιλόγιο<sup>44</sup>.

“Οσον ἀφορᾶ στὸ χειρόγραφό μας ἡ χρησιμοποιούμενη γλῶσσα δείχνει τὴν προσπάθεια ποὺ κατέβαλλαν κάποιοι βυζαντινοὶ γιὰ νὰ γράφουν στὴν ἐπιθυμητὴ ἀττικὴ διάλεκτο, ἵσως τεχνητὴ καὶ ἔξεζητημένη, ἵσως ἀκόμη καὶ πολὺ διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν καθομιλουμένην. “Ομως, βάσει τῆς χρησιμοποιούμενης ἐπιστημονικῆς δρολογίας, θὰ μπορούσαμε νὰ χαρακτηρίσουμε τὴ γλῶσσα τοῦ χειρογράφου μας ώς λογία, μὲ ἐμφανῆ ὅμως τὴ λατινικὴ ἐπιρροή. Βέβαια ἡ λατινικὴ ἐπιρροὴ ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ δρισμένες μεθόδους, τὶς ὅποιες χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας. Ἀναφέρουμε ώς παράδειγμα τὴ μέθοδο τῆς ταβλέττας (τολέττας)<sup>45</sup>, τὴν ὅποια χρησιμοποιεῖ σὲ προβλήματα ἐμπορικῶν συναλλαγῶν.

- 
- 40. Ἐκεῖνο ποὺ μπορεῖ νὰ συμβαίνει εἶναι καὶ τὸ ἀντίστροφο, δηλαδὴ ἔνας λόγιος νὰ χρησιμοποιεῖ τὴν δημώδη γραφὴ καὶ κάποιος ποὺ θεωρεῖται ἀγράμματος τὴν λογία, ἡ ἀκόμα κάποιος μορφωμένος νὰ κάνει σύνθετη λογίας καὶ δημώδους γραφῆς, Ὁ.Π. (σημ. 39), σ. 27.
  - 41. ΑΓΝΗ ΒΑΣΙΛΙΚΟΠΟΥΛΟΥ-ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ, Ἡ ἀναγέννηση τῶν γραμμάτων κατὰ τὸν 12ο αἰ. στὸ Βυζάντιο καὶ ὁ Ὄμηρος, Ἀθήνα 1971, σ. 54.
  - 42. N. ΤΩΜΑΔΑΚΗΣ, Βυζαντινὴ ἐπιστολογραφία, Ἀθήνα 1969, σ. 319.
  - 43. Ὅ.Π., σ. 320.
  - 44. K. KRUMBACHER, Geschichte der byzantinischen Litteratur, München 1897, σὲ Ἑλλ. μετάφρ. Γ. ΣΩΤΗΡΙΑΔΟΥ. Ἰστορία τῆς βυζαντινῆς Λογοτεχνίας, τόμος Α', ἐν Ἀθήναις 1897 [ἀνατύπωση 1974], σ. 51.
  - 45. Ἡ λέξη tolette εἶναι τὸ ὑποκοριστικὸ τῆς λέξης tola ἢ tavola, ἡ ὅποια στὴ βενετικὴ διάλεκτο σημαίνει τράπεζα. G. LORIA. Ἰστορία τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθήνα 1971, τ. Β', σ. 352.

Σχετικά μὲ τὶς μεθόδους ἐπίλυσης προβλημάτων παρατηροῦμε ὅτι κάποιες ἀπὸ αὐτές, ὅπως π.χ. τῆς δοκιμῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαιρεσῆς καὶ τῆς πρόσθεσῆς πολλῶν ἀριθμῶν, σήμερα εἶναι ἄγνωστες. Μάλιστα ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι σὲ καμία βαθμίδα τῆς ἐκπαίδευσης δὲν διδάσκουμε σήμερα μέθοδο δοκιμῆς ἀθροισμάτων πολλῶν προσθετέων. Τὸ ἵδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὶς φίλα τριών τάξης<sup>46</sup>: δηλαδὴ, δὲν διδάσκεται πλέον ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τους.

Ἡ σύγκριση τῆς μαθητικῆς δρολογίας καὶ τῶν μεθόδων ἐκείνης τῆς ἐποχῆς μὲ τὶς ἀντίστοιχες σημερινὲς ἀποδεικνύει, ὅτι στὸ πέρασμα τοῦ χρόνου ἄλλοι μὲν τρόποι ἐπίλυσης καὶ ἐπιστημονικοὶ ὅροι ἔξαφανίζονται, ἄλλοι δὲ ἔξελισσονται, ἐνῷ ἄλλοι παραμένουν ἴδιοι. Αὐτὰ τὰ στοιχεῖα εἶναι σημαντικά, διότι βιοηθοῦν στὸ νὰ σχηματίσουμε μία καλύτερη εἰκόνα τῆς ἐξέλιξης τῶν μεθόδων διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν, δσον ἀφορᾶ στὴν ἐπινόηση μεθόδων ἐπίλυσης προβλημάτων καὶ τρόπων διδασκαλίας γιὰ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν καλύτερη κατανόησή τους ἀπὸ τοὺς μαθητές.

46. Ὡς φίλα τριών τάξης π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 8 ὁρίζουμε τὸν ἀριθμὸ 2, διότι ἰσχύει ἡ ἴσοτητα  $2^3 = 8$ .

## SUMMARY

### MATHEMATICAL EDUCATION AND TERMINOLOGY IN BYZANTIUM ACCORDING TO COD. VIND. PHIL. GR. 65 (15<sup>TH</sup> C.)

In this article we present some few results of our study on the mathematical content of the unpublished part (f. 11r-126r) of Cod. Vind. Phil. gr. 65 (the other part has been published by H. Hunger and K. Vogel), which is the subject of our Dr. thesis (to be submitted). This 15th century Byzantine MS includes the solution of problems of practical arithmetic, geometry and algebra, the roots of which can be traced back to antiquity. Most of them are related to practical human needs and therefore they could be used not only by practical men like merchants, metal workers, builders and other people but also by state employers to calculate taxes. The mathematical terminology used in this MS has been strongly influenced by latin works; nevertheless its comparison with modern Greek mathematical terminology reveals –apart from some differences– many identities and similarities showing the continuity of Greek mathematical tradition through the centuries.

MARIA CHALKOU