ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ-ΜΟΝΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΒΑΣΙΚΕΣΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Η έννοια της αλγεβρικής παράστασης

Ξέρουμε ότι το εμβαδό Ε του τραπεζίου με βάσεις Β, β και ύψος υ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}(B + \beta) \cdot \upsilon$$

Η έκφραση $\frac{1}{2}(B + \beta) \cdot \upsilon$, που δηλώνει τις πράξεις οι οποίες πρέπει να γίνουν μεταξύ αριθμών και γραμμάτων, που παριστάνουν αριθμούς, για να βρούμε το εμβαδό του τραπεζίου, λέγεται αλγεβρική παράσταση.

Γενικά κάθε έκφραση που περιέχει αριθμούς ή γράμματα, που παριστάνουν αριθμούς και που συνδέονται με πράξεις, λέγεται **αλγεβρική παράσταση.**

Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι το διάστημα S, που διανύει ένα σώμα κατά την πτώση του, δίνεται από τον τύπο

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και t ο χρόνος πτώσεως του σώματος. Είναι φανερό ότι το t μπορεί να πάρει διάφορες τιμές π.χ. $t = \frac{1}{2}$ sec, t = 2sec κ.τ.λ. Γι' αυτό ονομάζεται **μεταβλητή.** Αντίθετα το g, για ένα συγκεκριμένο τόπο, έχει πάντα την ίδια τιμή. Είναι όπως λέμε μια σταθερά.

Γενικά ένα γράμμα μέσα σε μια αλγεβρική παράσταση, χαρακτηρίζεται ως **μεταβλητή**, όταν μπορεί να πάρει διάφορες τιμές από κάποιο σύνολο αριθμών.

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τα γράμματα με συγκεκριμένους αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις, που σημειώνονται μεταξύ τους, προκύπτει τελικά ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της παράστασης. Π.χ.

η αλγεβρική παράσταση $3x^2 - 5xy$ για $x = 1$ και $y = -2$

έχει αριθμητική τιμή $3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) = 3 + 10 = 13$

Σε μια αλγεβρική παράσταση δεν μπορούμε πάντοτε να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή με οποιεσδήποτε τιμές. Π.χ.

α) Η παράσταση $\frac{5}{\alpha - 2}$ δεν έχει αριθμητική τιμή για $\alpha = 2$ γιατί τότε μηδενίζεται ο παρονομαστής της.

β) Η παράσταση $\sqrt{y+1}$ δεν έχει αριθμητική τιμή π.χ. για $y = -5$, αφού η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Μονώνυμα μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Αλγεβρικές παραστάσεις όπως π.χ. οι

$$-5x, \frac{1}{2}xy, x^2, 2\pi x, (\pi = 3{,}14), \alpha x^{\nu}, 3x^{\nu}y^{\mu} \quad (\alpha \text{ σταθ. } \nu,\mu \text{ φυσικοί αριθμοί}),$$

στις οποίες σημειώνεται μόνο πολλαπλασιασμός λέγονται **μονώνυμα.**

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας, που γράφεται πρώτος, λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου. Π.χ. οι αριθμητικοί παράγοντες, $-5, \frac{1}{2}, 1, 2\pi, \alpha, 3$ είναι οι συντελεστές των παπαραπάνω μονωνύμων. Κάθε μονώνυμο με συντελεστή το 0 είναι το **μηδενικό μονώνυμο** και ισούται με 0.

Όμοια μονώνυμα λέγονται αυτά που διαφέρουν μόνο ως προς τους συντελεστές.

Πράξεις με μονώνυμα.

Επειδή σ' ένα μονώνυμο οι μεταβλητές παριστάνουν αριθμούς, κάνουμε πράξεις μεταξύ μονωνύμων σύμφωνα με τις ιδιότητες που ισχύουν για τα γινόμενα αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $3\alpha x + 4\alpha x = (3+4)\alpha x = 7\alpha x$ (επιμεριστική ιδιότ.)
2. $5x^2y + 2x^3 - 3x^2y - 3x^3 + 2x = 5x^2y - 3x^2y + 2x^3 - 3x^3 + 2x$ (αντιμεταθετική ιδιότ.)
   $= (5x^2y - 3x^2y) + (2x^3 - 3x^3) + 2x$ (προσεταιριστική ιδιότ.)
   $= (5 - 3)x^2y + (2 - 3)x^3 + 2x$ (Επιμεριστική ιδιότ.)
   $= 2x^2y - x^3 + 2x$ (αναγωγή ομοίων όρων)
3. $4\alpha x^3 \cdot 2\alpha x = (4 \cdot 2) \cdot (\alpha \cdot \alpha) \cdot (x^3 \cdot x) = 8\alpha^2x^4$ (Αντιμεταθετική και Προσεταιριστική ιδιότ. στον πολλαπλασιασμό)
4. $(4\alpha x^3 : 2\alpha x) = \frac{4\alpha x^3}{2\alpha x} = \frac{4}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x^3}{x}$ (γινόμενο κλασμάτων)
   $= 2 \cdot 1 \cdot x^{3-1} = 2x^2$

Η διαίρεση δυο μονωνύμων δε μας δίνει πάντοτε μονώνυμο. Π.χ. το πηλίκο της διαίρεσης

$(7x^2y) : (2xy^2)$, όπως ξέρουμε, το παριστάνουμε

$\frac{7x^2y}{2xy^2}$, που μετά τις απλοποιήσεις, γράφεται $\frac{7x}{2y}$.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητή σε παρονομαστή, όπως π.χ. οι

$$2x + \frac{y}{x-1}, \quad \frac{x+y^3}{x}$$

λέγονται **κλασματικές.**

Πολυώνυμα μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι το (αλγεβρικό) άθροισμα μη ομοίων μονωνύμων λέγεται **πολυώνυμο.** Π.χ. πολυώνυμα είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις

$$3x+5,\quad x^3+5x+6,\quad 5x^2y^3+2xy+1,\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma$$

Τα μονώνυμα, που απαρτίζουν ένα πολυώνυμο, λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Οι συντελεστές των μονωνύμων ενός πολυωνύμου λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου. Ένα μονώνυμο μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο με ένα όρο.

Αν σε ένα πολυώνυμο όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν το πολυώνυμο λέγεται μηδενικό και συμβολίζεται με το 0.

Ένα πολυώνυμο σημειώνεται ανάλογα με τις μεταβλητές του $f(x)$, $g(x,y)$ κτλ. Π.χ.

$$f(x)=3x+5,\qquad g(x,y)=3xy^2+5y$$

Πράξεις με πολυώνυμα.

Η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ πολυωνύμων γίνονται όπως οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ αριθμητικών αθροισμάτων. (§ 1.22).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) $(3x^5+2x^3+1)+(-2x^5+2x^3+x+1)=3x^5+2x^3+1-2x^5+2x^3+x+1$

$=(3-2)x^5+(2+2)x^3+x+2$ (αναγωγή ομοίων όρων)

$=x^5+4x^3+x+2$

(ii) $(x^3-4x^2+1)-(4x^3-4x^2+xy^2+1)=x^3-4x^2+1-4x^3+4x^2-xy^2-1$

$=-3x^3-xy^2$

(iii) α) $(2x^2-3x+5)\cdot(-4x^3)=(2x^2)\cdot(-4x^3)+(-3x)\cdot(-4x^3)+5\cdot(-4x^3)$

$=-8x^5+12x^4-20x^3$

β) $(2x^2-3x+2)\cdot(x^2-y^2)=(2x^2-3x+2)x^2+(2x^2-3x+2)(-y^2)$

$=2x^4-3x^3+2x^2-2x^2y^2+3xy^2-2y^2$

(iv) $(9x^4y^3z-6x^3yz-11x^2z):(-3x^2z)=(9x^4y^3z):(-3x^2z)+(-6x^3yz):(-3x^2z)+(-11x^2z):(-3x^2z)$

$=-3x^2y^3+2xy+\dfrac{11}{3}$

Σημείωση*. Απλή υπόμνηση της διαίρεσης πολυωνύμου με πολυώνυμο γίνεται με τα επόμενα παραδείγματα.

i) $(2x^3+7x^2-9x-18):(2x-3)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +7x^2 & -9x & -18 & 2x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +3x^2 & & & x^2+5x+3 \\ \cline{1-2}
 & 10x^2 & -9x & -18 & \\
 & -10x^2 & +15x & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & -18 & \\
 & & -6x & +9 & \\ \cline{3-4}
 & & & -9 &
\end{array}$$

ii) $(x^3-\alpha^3):(x-\alpha)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & -\alpha^3 & x-\alpha \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\alpha x^2 & & & x^2+\alpha x+\alpha^2 \\ \cline{1-2}
 & +\alpha x^2 & & -\alpha^3 & \\
 & -\alpha x^2 & +\alpha^2 x & & \\ \cline{2-4}
 & & +\alpha^2 x & -\alpha^3 & \\
 & & -\alpha^2 x & +\alpha^3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τα πολυώνυμα (i) $x^2 - x$ και (ii) $\alpha x + \alpha y + \beta x^2 + \beta xy$, με την επιμεριστική ιδιότητα να γραφούν ως γινόμενα.

Λύση (i) $x^2 - x = x \cdot x - x \cdot 1 = x(x-1)$

(ii) $\alpha x + \alpha y + \beta x^2 + \beta xy = \alpha(x+y) + \beta x(x+y)$

$= (x+y)(\alpha + \beta x)$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Αξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.

Αν Α, Β, πραγματικοί αριθμοί, ή πολυώνυμα, ακόμη και αλγεβρικές παραστάσεις, τότε διαπιστώνουμε, αν κάνουμε πράξεις, ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (1)$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (2)$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad (3)$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad (4)$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad (5)$$
$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3 \quad (6)$$
$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 \quad (7)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

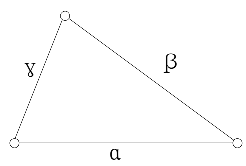
1. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων.

i) $2α^3$-$3α^2$+6α, ii) $\frac{\sqrt{4α^2}}{4}-\frac{α}{2}$, για α = 3

iii) $αβ^2 – α^2β – (αβ)^3$, iv) $(α – β)^2 – \frac{α}{α+β}$, για α= –1, β = 3.

2. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $\sqrt{2α+β^2}-2\cdot(α-γ)\sqrt{γ-β^2}$, για α = $3\cdot 10^2$, β =–5, γ =13^2.

3. Να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση την περίμετρο Τ του διπλανού τριγώνου και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή της για α= $0{,}7\cdot 10^{-1}$, β= $0{,}5\cdot 10^{-1}$, γ= $0{,}4\cdot 10^{-1}$. (Οι τιμές που δίνονται εκφράζουν m).



4. Να γίνουν οι πράξεις.

i) $0{,}2αx^4 – 2{,}3αx^2 + 4αx^2 - αx^4$ ii) $x^2y^3 – x^3y^2 – 2x^2y^3 + 2x^3y^2$

iii) $(–4x^3yω^2)^3\cdot(–3x^3y)\cdotω$ iv) $(90α^5β^4γ):(–20α^5βγ)$

v) $(1-x)(x+2)(x-3)$ vi) $-3x(x^2 -1)+3x^2(x-3)-x+x(1-x)$.

5. Να γίνουν οι πράξεις.

i) $(x^2 -2xy+4y^2)(x+2y)$ ii) $(x^3+2x^2+2x+1)(x^2 -x+1)$

iii) $(6α^3β^2-12α^2β^3-3αβ^4):(-3αβ)$ iv) $(4x^7y^3+8x^6y^4-12x^4y^6):(-2x^4y^3)$

v) $(λ^2-2κ)\cdot 3κ+(λκ+κ^2)(-λ)+(λ+κ)(-2λκ)-(λ+3)\cdot 2κ^2$.

6. Να γίνουν οι πράξεις.

$[7x^2(y-1)-3x(xy+3xy^2)] - [2y(x^2+1)-3x(y^2-xy)] + [7x^2+2y+x(xy+y)]$.

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $Α(x) = x^4-3x^2+1$, $Β(x) = -x+2$, $Γ(x) = x^2-x$.
Να βρείτε τα: i) $Α(x)-Β(x)\cdot Γ(x)$ ii) $Β(x)\cdot [Γ(x) - Α(x)]$.

8. Σε ένα τεχνικό μνημόνιο διαβάζουμε ότι:

α) Το βάρος Β (σε gr) ενός μπρούντζινου δίσκου που έχει διάμετρο δ cm και πάχος 1cm δίνεται από τον τύπο $Β = 6{,}8δ^2$.

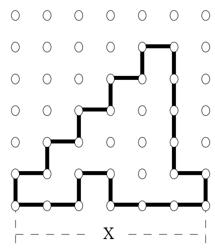
β) Το βάρος Β (σε gr) μιας σφαίρας από μολύβι με διάμετρο δ cm δίνεται από τον τύπο $B = 5{,}91\delta^3$.

Να υπολογίσετε το βάρος ενός μπρούντζινου δίσκου που έχει διάμετρο 19cm με πάχος 1cm και το βάρος μιας μολυβένιας σφαίρας με διάμετρο 6cm.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^4+3x^3-x^2+4x-6$. Να υπολογίσετε το γινόμενο $P(-2) \cdot P(3)$.

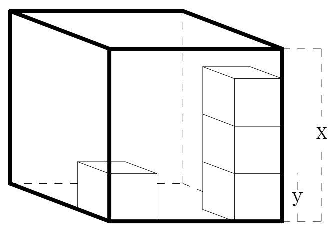
10. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $K(\alpha,\beta)= \alpha^3\beta^2 -2\alpha\beta^3 +4\alpha -3\beta$ για $\alpha= -\frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{2}{3}$.

11. Στο διπλανό σχέδιο οι τελίτσες είναι κορυφές ίσων τετραγώνων. Να βρείτε ένα μονώνυμο με μεταβλητή το x που να παριστάνει την περίμετρο του σχήματος με την έντονη γραμμή.



12. Μέσα σε ένα χάρτινο κουτί σε σχήμα κύβου με ακμή x έχουμε βάλει 4 ξύλινα μικρά κυβάκια, ίσα μεταξύ τους, με ακμή y.

Να βρείτε ένα πολυώνυμο που να παριστάνει τον άδειο χώρο του κουτιού.



13. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(3+x)(x-3) - (3x-1)^2$ ii) $(x^2-1)^3 -(x^3+2x)^2$

iii) $x(2-x)^2 -(x-1)(x^2+x+1) - (x+2)^2$

14. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $(....-....)^2 = ...-6x^4+x^2$ ii) $(.... - xy)(x^2+....) = x^4 - ....$

iii) $(.... + y)^3 = ...+12x^2y+6xy^2+....$ iv) $(xy+....)(.... -xy +....) = ...+1$.

15. Αν $x=-y$, τότε η παράσταση $x^2 - y^2$ ισούται με:

i) $2x$ ii) $2y$ iii) $x-y$ ιv) 0 v) $x+y$ (κύκλωσε τη σωστή απάντηση).

16. α) Παρατηρήστε τις ισότητες:

$2^2 - 1^2 = 3$,

$3^2 - 2^2 = 5$,

$4^2 - 3^2 = 7$,

$5^2 - 4^2 = 9$. Τι συμπέρασμα βγάζετε από αυτές;

β) Μπορείτε να βρείτε τη διαφορά $20000^2-19999^2$, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις ;

γ) Να διατυπώσετε ένα ισχυρισμό (μια εικασία) για τη διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων.

δ) Να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε.

17. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $d^4-16=(d^2+4)(d+2)(d-2)$ ii) $d^6-1=(d^2-d+1)(d^2+d+1)(d-1)(d+1)$

iii) $8\delta^3+1=(2\delta+1)(4\delta^2-2\delta+1)$

18. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ ii) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

iii) $(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2$ iv) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2$

v) $(\upsilon^3+2\omega^2)^2-(\omega^2+2\upsilon^3)^2=3\cdot(\omega^2-\upsilon^3)\cdot(\omega^2+\upsilon^3)$.

19. Να αποδείξετε ότι: Αν $\alpha+\beta=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3=0$.

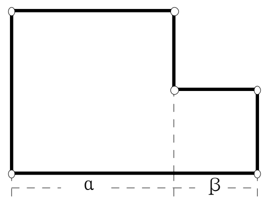
20. Αν α, β θετικοί και $\alpha+\beta=\sqrt{3\alpha\beta}$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$.

21. Αν $\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ και $\beta=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $5\alpha^2$□ $8\alpha\beta+3\beta^2$.

22. Να αποδείξετε ότι: Αν $\alpha+\beta=-1$, τότε $\alpha^3+\beta^3+1=3\alpha\beta$.

23. Αν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=3$ να υπολογίσετε τις αριθμ.τιμές των παραστάσεων:

i) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ ii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$.



24. Το οικόπεδο του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο τετράγωνα με πλευρές α και β αντιστοίχως. Αν γνωρίζετε ότι $\alpha+\beta=49m$ και $\alpha\beta=550m^2$, να βρείτε πόσα m^2 είναι η έκταση ολόκληρου του οικοπέδου.

25. Έστω $x>0$ και $(x+\frac{1}{x})^2=5$. .α) Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων $x+\frac{1}{x}$ και $x^2+\frac{1}{x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}$

26. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε ισχύει α=0 και β=0 ii) Αν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=0$ τότε ισχύει α=0 και β=0.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αν πολλαπλασιάσουμε τα πολυώνυμα x^2+y και $xy-1$, θα βρούμε το πολυώνυμο $x^3y-x^2+xy^2-y$. Έτσι έχουμε: $x^3y-x^2+xy^2-y = (x^2+y)\cdot(xy-1)$, δηλαδή το πολυώνυμο $x^3y-x^2+xy^2-y$ μπορούμε να το γράψουμε ως γινόμενο άλλων πολυωνύμων.

Η μετατροπή ενός πολυωνύμου σε γινόμενο άλλων πολυωνύμων λέγεται **παραγοντοποίηση** του πολυωνύμου.

Το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός πολυωνύμου είναι το αντίστροφο του προβλήματος του πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων.

Τονίζουμε ότι: α) Υπάρχουν πολυώνυμα που δεν παραγοντοποιούνται. β) Η διαδικασία της παραγοντοποίησης θεωρείται ολοκληρωμένη, όταν κανένας από τους παράγοντες του γινομένου που βρήκαμε δε συνεχίζει να παραγοντοποιείται.

Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή μιας αλγεβρικής παράστασης, εφόσον γίνεται, μας διευκολύνει στο να γράφουμε πιο απλά τις αλγεβρικές παραστάσεις, να λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις, να απλοποιούμε αλγεβρικά κλάσματα, να εκτελούμε πιο σύντομα πράξεις και να αποδεικνύουμε διάφορες προτάσεις. Γι' αυτό και είναι μια πολύ χρήσιμη διαδικασία στην Άλγεβρα.

Στο Γυμνάσιο είχαμε μάθει τις σπουδαιότερες περιπτώσεις παραγοντοποίησης, τις οποίες επαναλαμβάνουμε με παραδείγματα.

Παραδείγματα

1..i) $x^3y^3+x^2y^2+xy^2$ ii) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

Λύση:

i) Όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα το xy^2 (είναι οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη). Έτσι, $x^3y^3+x^2y^2+xy^2=xy^2(x^2y+x+1)$.

ii) Η παράσταση έχει κοινούς παράγοντες κατά ομάδες. Έτσι,

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3 = x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x+y)(x^2+y^2).$$

2. i) $x^4 - y^4$ ii) $(x-y)^2 - y^2$.

Λύση:

Εφαρμογή της ταυτότητας «διαφορά δύο τετραγώνων»

i) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$,

ii) $(x-y)^2-y^2 = [(x-y)+y][(x-y) -y] = x(x-y-y) = x(x-2y)$.

3. i) $x^4+2x^2y+y^2$ ii) $8x^3+1$.

Λύση:

i) Εφαρμογή της ταυτότητας «τετράγωνο αθροίσματος».
$x^4+2x^2y+y^2 = (x^2)^2+2x^2y+y^2 = (x^2+y)^2$.

ii) Εφαρμογή της ταυτότητας «άθροισμα κύβων».
$8x^3+1=(2x)^3+1=(2x+1)[(2x)^2-2x\cdot 1+1]=(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

4. i) $x^4-4x^2y+4y^2 - \omega^2$ ii) $x^2+3x-10$ iii) $3d^2 - 2d -1$.

Λύση:

i) $x^4-4x^2y+4y^2-ω^2 = (x^4-4x^2y+4y^2)-ω^2 = (x^2-2y)^2-ω^2 = (x^2-2y+ω)(x^2-2y-ω)$.

ii) $x^2+3x-10 = x^2+5x-2x-10$ (διάσπαση όρου).

$= x(x+5) - 2(x+5) = (x+5)(x-2)$

iii) $3d^2 -2d -1= 3d^2 -3d+d -1= 3d(d -1)+(d -1) = (d -1)(3d+1)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

ι) $3x^3-6x^2y+3xy^2$ ii) x^2-y^2+2x+1

iii) $(x^2-9)^2 - (x+3)^2$ iv) $(3x+2)^2 - (x+5)^2$

v) $x(2x+1)^2 -2x-1$ vi) $3(x^3-x)+2(x^2-1)$.

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $(x-3)(2x-1)-3x(2x-6)-3+x$ ii) $xy+1-x-y$

iii) $5xy-2y-15x+6$ iv) $81(x-1)^2-4(x-5)^2$

v) $x^3-y^3-x^4+xy^3$.

3. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα

$P(x)=x^2+2x-3$, $Q(x)=x^2+x-6$, $F(x)=2x^2-x-1$, $Φ(x)=x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στις πράξεις με κλασματικές παραστάσεις ισχύουν οι γνωστοί κανόνες των πράξεων με αριθμητικά κλάσματα.

Υπενθυμίζουμε ότι:

α) Η μεταβλητή ή οι μεταβλητές σε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της.

β) Για να απλοποιήσουμε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση, πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της.

γ) Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, πρέπει πρώτα να τις μετασχηματίσουμε έτσι, ώστε να έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν φαίνεται ο τρόπος που γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο και με τον οποίο κάνουμε πράξεις στις κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις.

Παραδείγματα

1. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\dfrac{8x^3-2xy^2}{4x^2-4xy+y^2}$.

Λύση:

$8x^3-2xy^2=2x(4x^2-y^2)=2x(2x+y)(2x-y)$ $4x^2-4xy+y^2=(2x)^2-2\cdot 2xy+y^2=(2x-y)^2$	Τρέπουμε σε γινόμενα τους όρους του κλάσματος.

Έτσι:

$\dfrac{8x^3-2xy^2}{4x^2-4xy+y^2}=\dfrac{2x(2x+y)(2x-y)}{(2x\text{-}y)^2}=$ $\dfrac{2x(2x+y)}{(2x\text{-}y)}$	Απλοποιούμε το κλάσμα με το $2x$-y, που είναι ο Μ.Κ.Δ. των όρων του.

2. Να κάνετε τις πράξεις: $\dfrac{2x^2-50}{x^3-27}:\dfrac{x+5}{x-3}$.

Λύση:

$\dfrac{2x^2-50}{x^3-27}:\dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{2x^2-50}{x^3-27}\cdot\dfrac{x-3}{x+5}=$ $\dfrac{(2x^2-50)(x-3)}{(x^3-27)(x+5)}$	Αντιστρέφουμε το 2º κλάσμα και κάνουμε πολ/σμό

Είναι:

$2x^2-50=2(x^2-25)=2(x+5)(x-5)$ $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$	Παραγοντοποίηση

Άρα:

$$\frac{(2x^2-50)(x-3)}{(x^3-27)(x+5)}=\frac{2(x+5)(x-5)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)(x+5)}=\frac{2(x-5)}{x^2+3x+9}.$$

3. Να κάνετε τις πράξεις: $\dfrac{x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{2}{x^2+x}$.

Λύση:

$x^2+2x+1=(x+1)^2$, $2x+2=2(x+1)$, $x^2+x=x(x+1)$	Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές

ΕΚΠ : $2x(x+1)^2$ **Σχηματίζουμε το γινόμενο που αποτελείται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη. <u>Αυτό είναι το ΕΚΠ των παρονομαστών.</u>**

$$\frac{2x\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)^2}=2x\ ,\ \frac{2x\left(x+1\right)^2}{2\left(x+1\right)}=x\left(x+1\right),\ \frac{2x\left(x+1\right)^2}{x\left(x+1\right)}=2\left(x+1\right)$$

Βρίσκουμε τα πηλίκα του γινομένου αυτού με καθένα παρονομαστή.

$$\frac{x}{x^2+2x+1}-\frac{1}{2x+2}+\frac{2}{x^2+x}=\frac{x}{\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x+1\right)}+\frac{2}{x\left(x+1\right)}$$

$$=\frac{2x^2}{2x\left(x+1\right)^2}-\frac{x\left(x+1\right)}{2x\left(x+1\right)^2}+\frac{4\left(x+1\right)}{2x\left(x+1\right)^2}$$

Πολ/ζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκο.

$$=\frac{2x^2-x\left(x+1\right)+4\left(x+1\right)}{2x\left(x+1\right)^2}=\frac{2x^2-x^2-x+4x+4}{2x\left(x+1\right)^2}=\frac{x^2+3x+4}{2x\left(x+1\right)^2}$$

Προσθέτουμε τα ομώνυμα κλάσματα

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

2. Αν $A=x^2+y^2-t^2+2xy$ και $B=x^2-y^2+2yt-t^2$, να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$.

3. Αν $A=\frac{1}{x+1}$ και $B=\frac{1}{x-1}$, να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{xB-A}{xA+B}$.

4. Να κάνετε τις πράξεις: i) $x-\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, ii) $\frac{1}{xy-y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$,

iii) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ iv) $(x^2+2x-1)\cdot\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$

5. Να υπολογίσετε την αριθμ. τιμή της παράστασης: $\frac{3x}{4-x}\cdot\frac{16-x^2}{3x^2}$ για $x=0{,}4$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω η σχέση $x + 3 = 5$ η οποία είναι μια αληθής αριθμητική ισότητα όταν $x = 2$ ή όπως λέμε αληθεύει για $x = 2$. Μια τέτοια ισότητα λέγεται εξίσωση. Η τιμή 2 λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης αυτής.

Γενικά, μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και ζητάμε τις τιμές των μεταβλητών αυτών για τις οποίες αυτή αληθεύει λέγεται **εξίσωση**. Οι μεταβλητές αυτές λέγονται άγνωστοι της εξίσωσης.

Δύο εξισώσεις που έχουν τις ίδιες ρίζες λέγονται **ισοδύναμες**.
Π.χ. οι $x + 3 = 5$ και $2x - 8 = -4$ είναι ισοδύναμες γιατί και οι δύο έχουν μοναδική ρίζα το 2.

Μια εξίσωση που δεν έχει ρίζες λέγεται **αδύνατη** ενώ εκείνη που έχει άπειρες ρίζες ονομάζεται **αόριστη.**
Π.χ. η $0x = 1$ είναι αδύνατη ενώ η $0x = 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό δηλ. είναι αόριστη. Για τις εξισώσεις ισχύουν τα εξής:

(i) *Αν και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό η εξίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική.*
(ii) *Αν και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό διάφορο του 0, η εξίσωση, που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική.*

Όταν βρίσκουμε τις λύσεις μιας εξίσωσης, λέμε ότι λύνουμε την εξίσωση.

Εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Μια εξίσωση λέγεται πρώτου βαθμού όταν έχει ή μπορεί να πάρει, μετά από τις σχετικές πράξεις τη μορφή $\alpha x + \beta = 0$ όπου x ο άγνωστος, α, β, σταθερές. (πραγματικοί αριθμοί).
Τον τρόπο για να λύνουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού μας υποδεικνύουν τα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Να λυθεί η εξίσωση** $3x + \frac{1}{2} = 3 - \frac{x}{3}$ **(1)**

Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες με την (1) εξισώσεις:

$6\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 6\left(3 - \frac{x}{3}\right)$ *(πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών).*

$18x + 3 = 18 - 2x$ *(έγινε απαλοιφή παρανομαστών).*

$18x + 2x = 18 - 3$ *(χωρίσαμε γνωστούς από άγνωστους)*

$20x = 15$ *(κάναμε αναγωγή ομοίων όρων)*

$x = \frac{15}{20}$ ή $x = \frac{3}{4}$ *(Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου)*

Επαλήθευση: *α΄ μέλος:* $3 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

β΄ μέλος: $3 - \frac{3/4}{3} = 3 - \frac{3}{12} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

2. **Να λυθεί η εξίσωση** $\frac{23x - 10}{15} + \frac{2x - 1}{5} = 2x - \frac{x}{15}$

Έχουμε τις ισοδύναμες με την αρχική εξίσωσεις:

$$15\left(\frac{23x - 10}{15} + \frac{2x - 1}{5}\right) = 15\left(2x - \frac{x}{15}\right)$$

$$\begin{aligned} 23x - 10 + 3(2x - 1) &= 30x - x \\ 23x - 10 + 6x - 3 &= 30x - x \\ 23x + 6x - 30x + x &= 10 + 3 \\ 0 \cdot x &= 13 \end{aligned}$$

Από τη τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $0 = 13$ που είναι αδύνατο. Άρα και η αρχική εξίσωση είναι **αδύνατη** δηλαδή δεν έχει ρίζες.

3. **Να λυθεί η εξίσωση** $3(x - 2) + 7x = 2(5x - 3)$

Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες με την αρχική εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 3x - 6 + 7x &= 10x - 6 \\ 3x + 7x - 10x &= 6 - 6 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει για κάθε τιμή του x άρα το ίδιο συμβαίνει και για την αρχική. Επομένως η εξίσωση είναι **αόριστη.**

Κλασματικές εξισώσεις

Μια εξίσωση που ο άγνωστος βρίσκεται και σε παρανομαστή λέγεται **κλασματική εξίσωση.**

Τα επόμενα παραδείγματα μας υποδεικνύουν τον τρόπο για να λύνουμε αυτές τις εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Να λυθεί η εξίσωση** $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{5}$

Για να έχει νόημα το κλάσμα $\dfrac{2}{x-1}$ πρέπει $x - 1 \neq 0$ ή $x \neq 1$

Υποθέτουμε λοιπόν $x \neq 1$ οπότε διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις.

$$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{5}$$

$$3(x-1) = 2 \cdot 5 \qquad [\text{από την ιδιοτ. } (\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma)]$$

$$3x - 3 = 10$$

$$3x = 13$$

$$x = \frac{13}{3}$$

Η ρίζα αυτή είναι δεκτή γιατί δεν μηδενίζει τον παρανομαστή.

2. **Να λυθεί η εξίσωση** $\dfrac{12}{x} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών με τρόπο ανάλογο με εκείνο που μάθαμε για τα αριθμητικά κλάσματα. Έτσι είναι

Ε.Κ.Π.$(x, 3, 6) = 6x$ με $6x \neq 0$ ή $x \neq 0$

Διαδοχικά τώρα έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\frac{12}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{6}$$

$$6x\left(\frac{12}{x} - \frac{1}{3}\right) = 6x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\right)$$

$$72 - 2x = -6 + x$$

$$-2x - x = -72 - 6$$

$$-3x = -78$$

$$x = 26$$

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0, α \neq 0$.

Κάθε εξίσωση με άγνωστο το x που έχει ή μπορεί να πάρει, μετά από τις σχετικές πράξεις, τη μορφή.

$$αx^2 + βx + γ = 0$$

όπου $α$, $β$, $γ$, πραγματικοί αριθμοί με $α \neq 0$, λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού.** Αποδεικνύεται ότι:

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0, α \neq 0$.

- **αν $Δ = β^2 - 4αγ > 0$ έχει δύο λύσεις:**

$$x = \frac{-β + \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α} \text{ ή } x = \frac{-β - \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α}$$

- **αν $Δ = β^2 - 4αγ = 0$ έχει μία μόνο λύση: $x = -\frac{β}{2α}$** ***(ή δύο λύσεις ίσες)***
- **αν $Δ = β^2 - 4αγ < 0$ δεν έχει καμμία λύση (αδύνατη).**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$**

   Έχουμε $Δ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 > 0$

   Συνεπώς $x = \frac{-5 + \sqrt{1}}{4} = -1$ ή $x = \frac{-5 - \sqrt{1}}{4} = -3/2$

2. **Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$**

   Έχουμε $Δ = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

   Συνεπώς $x = -\frac{-6}{2} = 3$ *(μία ρίζα διπλή)*

3. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 5x + 7 = 0$

Έχουμε $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$
Συνεπώς η εξίσωση δεν έχει καμμία λύση (αδύνατη).

4. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = 4$

(α΄ τρόπος). Η εξίσωση $x^2 = 4$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 + 0 \cdot x - 4 = 0$.
Έτσι έχουμε $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$

Συνεπώς $x = \dfrac{0 + \sqrt{16}}{2} = 2$ ή $x = \dfrac{0 - \sqrt{16}}{2} = -2$

(β΄ τρόπος). Διαδοχικά έχουμε τις ισοδύναμες εξισώσεις.

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 &= 2^2 \\ x^2 - 2^2 &= 0 \\ (x+2)(x-2) &= 0 \\ (x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 &= 0) \\ x = 2 \text{ ή } x &= -2 \end{aligned}$$

5. Αν $x > 0$ και $\alpha > 0$ να λυθεί η εξίσωση $x^2 = \alpha^2$

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha^2 \\ x^2 - \alpha^2 &= 0 \\ (x - \alpha)(x + \alpha) &= 0 \\ x + \alpha = 0 \text{ ή } x - \alpha &= 0 \\ x = -\alpha \text{ ή } x &= \alpha \end{aligned}$$

Επειδή όμως $x > 0$ και $\alpha > 0$ η λύση $x = -\alpha$ *απορρίπτεται*, οπότε λύση (*μοναδική*) είναι η $x = \alpha$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$

β) $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$ 0

γ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$

δ) $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$ 0

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2$

β) $\frac{y^2}{3} - \frac{6y + 1}{4} = \frac{y - 2}{6} - 2$

γ) $0,5t^2 - 0,4(t + 2) = 0,7(t - 2)$

δ) $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$

β) $3y^2 - 8y + 5$

γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$

ε) $9y^2 + 12y + 4$

στ) $-\omega^2 + 10\omega - 25$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ-ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ας πάρουμε τη σχέση x - 5 > 0. Αν βάλουμε στη μεταβλητή x την τιμή 6, θα δούμε ότι η σχέση αληθεύει, δηλαδή γίνεται μια σωστή αριθμητική ανισότητα. Το 6 όμως δεν είναι η μοναδική τιμή του x, για την οποία αληθεύει η x-5>0. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του x που είναι μεγαλύτερη από το 5. Δηλαδή η x-5>0 αληθεύει, όταν x>5. Το σύνολο όλων αυτών των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 5, το παριστάνουμε γραφικά πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως στο διπλανό σχέδιο.

Τέτοιες ανισότητες με μια μεταβλητή, στις οποίες ζητάμε τις τιμές της μεταβλητής τους, ώστε να αληθεύουν, λέγονται **ανισώσεις με έναν άγνωστο.**

Ο άγνωστος της ανίσωσης είναι η μεταβλητή της. Το σύνολο των τιμών του αγνώστου για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση λέγεται **σύνολο λύσεων** αυτής και μπορούμε να το γράψουμε με τη μορφή ενός διαστήματος ή να το παραστήσουμε γραφικά στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

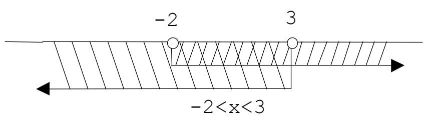
Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης x-5>0 είναι το διάστημα (5,+∞)

Αν σε μια ανίσωση δεν υπάρχουν τιμές του αγνώστου που να την επαληθεύουν τότε λέμε ότι η ανίσωση είναι **αδύνατη.** Π.χ η ανίσωση 0x > 1 είναι αδύνατη.

Ανισώσεις που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμες.**

Η ανίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή αx + β > 0 ή αx + β < 0, όπου x ο άγνωστος και α, β σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από το x), λέγεται ανίσωση α΄ βαθμού με έναν άγνωστο.

Ας πάρουμε τις ανισώσεις x+2>0 και x-3<0. Τα σύνολα λύσεων αυτών είναι αντιστοίχως τα διαστήματα (-2,+∞) και (-∞,3). Παρατηρούμε ότι οι ανισώσεις αυτές έχουν κοινές λύσεις τους αριθμούς που είναι ανάμεσα στο -2 και στο 3. Δηλαδή, το σύνολο των κοινών λύσεων είναι το διάστημα (-2,3). Λέμε τότε ότι οι ανισώσεις **συναληθεύουν** για τις τιμές του x που είναι: -2 < x < 3 (διπλή ανισότητα). Το διπλανό σχήμα δείχνει γραφικά τη **συναλήθευση** των δύο ανισώσεων.



Για να λύσουμε μια ανίσωση, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων και κάνουμε πράξεις, ώστε τελικά να βρούμε μια απλή ανίσωση ισοδύναμη με την αρχική, από την οποία να προκύπτει εύκολα το σύνολο λύσεων.

Η διαδικασία επίλυσης της πρωτοβάθμιας ανίσωσης μοιάζει με αυτή της πρωτοβάθμιας εξίσωσης (απαλοιφή παρονομαστών, χωρισμός γνωστών και άγνωστων όρων, αναγωγή ομοίων όρων, διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου). Κατά την επίλυση των ανισώσεων πρέπει να θυμόμαστε ότι, όταν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός αριθμός και διαιρούμε τα μέλη της με αυτόν, πρέπει να αλλάζουμε φορά στην ανίσωση.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} \geq 2 + \frac{x}{7}$.

ΛΥΣΗ

$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} \geq 2 + \frac{x}{7}$ Απαλοιφή παρονομαστών (Πολ/ζουμε τα μέλη με το 70)

$70\left(\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2}\right) \geq 70\left(2 + \frac{x}{7}\right)$

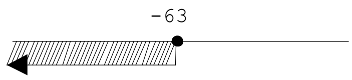
$14(3x-1) - 35(x+1) \geq 140+10x$ Πράξεις

$42x-14-35x-35 \geq 140 +10x$ Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους

$42x-35x-10x \geq 140+14+35$ Αναγωγή ομοίων όρων

$-3x \geq 189$ Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

$x \leq -\frac{189}{3} = -63$.



Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το διάστημα (-∞,-63].

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

i) $3(1\square 2x)\square 5x>2(5\square 6x)$ και ii) $5(2x+3)> \frac{4x-7}{3}$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε τις ανισώσεις i) και ii) και διαδοχικά έχουμε:

i) $3(1 - 2x)- 5x>2(5- 6x)$

$3-6x-5x>10-12x$

$-6x-5x+12x>10-3$

$x>7$

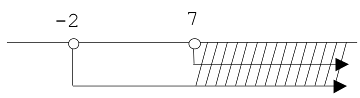
ii) $5(2x+3)> \frac{4x-7}{3}$

$15(2x+3)> 4x-7$ ή $30x+45> 4x-7$

$30x - 4x>- 45-7$ ή $26x>- 52$

$x>- 2$

Το διάστημα που συναληθεύουν είναι το (7,+∞) και αποδίδεται γραφικά με το διπλανό σχήμα.



***ΣΗΜΕΙΩΣΗ*:** Όταν στο διάστημα λύσεων μιας ανίσωσης περιλαμβάνεται και άκρο του διαστήματος, τότε το αντίστοιχο σημείο του άξονα θα έχει «μαύρη τελεία». Σε αντίθετη περίπτωση θα έχει «άσπρη».

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει -1<α<3 και -3<β<1, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: i) α+β, ii) α-β,

iii) 2α+3β.

2. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $4(x+3)-5>2x-7(x+6)$ ii) $x-3 \leq 4(x+2)-5x$

iii) $5(x+4)-3x \leq 2x$.

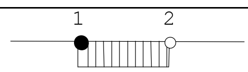
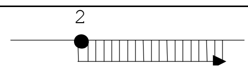
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) 2(α–1) –3(2α+4) –8<5(2α–1) –(3–α) ii) 12β–3(5–2β)≥6(3β–1) –2(1–2β).

4. Να βρείτε το σύνολο λύσεων των ανισώσεων:

i) $\frac{3x-1}{2}-3(2+x)<\frac{x-3}{3}$ ii) $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5}$.

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάστη μα	Ανισότη τα	Γραφική παράστ
$(-\infty,2)$		
$[2,3]$		
	$x>2$	
	$1<x$ $\leq 2,5$	
		
		

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

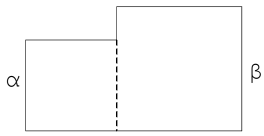
$5(x-2)<\frac{x}{4}$ και $3x+7>\frac{x}{5}-\frac{2x+1}{10}$.

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$2(x+4) - (x+6) \leq 12 - x$ και $2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}\geq 2(1+x)$.

7. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $5x^2 - 45$ και μετά να βρείτε το πρόσημο της αριθμητικής τιμής της για κάθε x που είναι $-3 < x < 3$.

9. Τα μήκη των πλευρών α και β των τετραγώνων του διπλανού σχήματος είναι $1 < α < 2$ και $2 < β < 3$. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδό του σχήματος.



10. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

i) $-6 < x - 2(1+x) < -3$ ii) $x - 1 \leq 2(1-3x) \leq 3-2x$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

Εκτός από τις εξισώσεις με έναν άγνωστο, υπάρχουν και εξισώσεις με δύο ή και με περισσότερους αγνώστους.

Η $x+y=10$ είναι μια εξίσωση που έχει δύο αγνώστους, το x και το y. Αυτή η εξίσωση επαληθεύεται με τις τιμές $x=1$και $y=9$. Γι' αυτό το διατεταγμένο[1] ζεύγος $(x,y)=(1,9)$ λέμε ότι είναι λύση της. Αυτή δεν είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης, γιατί, αν βάλουμε στο x την τιμή 2 και λύσουμε ως προς y, θα βρούμε $y=8$, δηλαδή και το διατεταγμένο ζεύγος $(x,y)=(2,8)$ είναι λύση της εξίσωσης. Έτσι μπορούμε να βρούμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης. Αυτό δε σημαίνει ότι η $x+y=10$ είναι μια ταυτότητα, γιατί η ισότητα αυτή δεν επαληθεύεται για **οποιεσδήποτε** τιμές των μεταβλητών της. Π.χ. το ζεύγος $(x,y)=(1,5)$ δεν την επαληθεύει.

Γενικά: **Η εξίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή $\alpha x+\beta y=\gamma$, όπου x και y άγνωστοι και α,β,γ σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από τα x,y), λέγεται εξίσωση α΄ βαθμού με δύο αγνώστους**[2].

Δύο εξισώσεις της παραπάνω μορφής, για τις οποίες θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις π.χ. $x+2y=1$ και $3x-5y=14$, λέμε ότι αποτελούν ένα **σύστημα α΄ βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** (ή αλλιώς, ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**).

Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις αυτών των εξισώσεων, λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**, ενώ αν όλες οι λύσεις της μιας είναι και λύσεις της άλλης, λέμε ότι είναι **αόριστο**.

Συστήματα που έχουν τις ίδιες λύσεις λέγονται **ισοδύναμα.**

Στο Γυμνάσιο μάθαμε να λύνουμε τέτοια συστήματα και είδαμε ότι αυτά ή θα έχουν μία μόνο λύση ή θα είναι αδύνατα ή θα είναι αόριστα.

Παρακάτω υπενθυμίζουμε τις δυο βασικότερες μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την αλγεβρική επίλυση του πρωτοβάθμιου συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Με τις μεθόδους αυτές μετατρέπουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο και απλούστερο, από το οποίο προκύπτουν εύκολα οι λύσεις.

---

(1) Διατεταγμένο λέγεται το ζεύγος στο οποίο έχουμε ορίσει ποιο στοιχείο του γράφεται πρώτο και ποιο δεύτερο.

(2) Λέγεται και **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους

Μέθοδος της αντικατάστασης	**Λύνουμε τη μια εξίσωση (**την απλούστερη**) ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.**

$x+3y=14$ (1)
$5x+10y=47$ (2)

Λύνουμε την (1) ως προς x. Έχουμε $x=14-3y$

$\begin{cases} x=14-3y \\ 5x+10y=47 \end{cases}$

Αντικαθιστούμε το x με το ίσο του $14-3y$ στην άλλη εξίσωση

$\begin{cases} x=14-3y \\ 5(14-3y)+10y=47 \end{cases}$

Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που είναι α΄ βαθμού με άγνωστο το y. Έχουμε: $70-15y+10y=47$ ή $-5y=47-70$ ή $-5y=-23$ ή $y=\frac{-23}{-5}=4{,}6$

$x=14-3y$
$y=4{,}6$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση.

$\begin{cases} x=14-3\cdot 4{,}6=14-13{,}8=0{,}2 \\ y=4{,}6 \end{cases}$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(0{,}2,\ 4{,}6)$

(Σημείωση: Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που δεν είναι γραμμικά**)**

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών	**Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές ενός αγνώστου, και προσθέτουμε κατά μέλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.**

5 | $x+2y=1$ (1)
2 | $3x-5y=14$ (2)

Πολλ/ζουμε τα μέλη της (1) με το 5 και της (2) με το 2, για να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του y

$$\left|\begin{array}{l} 5(x+2y) = 15 \\ 2(3x-5y) = 2\cdot 14 \end{array}\right.$$

Κάνουμε τις πράξεις (Επιμεριστική ιδιότητα)

$$\left|\begin{array}{l} 5x+10y = 5 \\ 6x-10y = 28 \end{array}\right.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (Ιδιότητα στις ισότητες). Βρίσκουμε: $11x+0y=33$ ή $11x=33$ Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις π.χ. την πρώτη με την $11x=33$

$$\left|\begin{array}{l} 11x = 33 \\ 6x-10y = 28 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=3 \\ 6x-10y = 28 \end{array}\right.$$

Θέτουμε στη δεύτερη όπου x το 3

$$\left|\begin{array}{l} x = 3 \\ 6\cdot 3 - 10y = 28 \end{array}\right.$$

Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που έχει μοναδικό άγνωστο το y. $18-10y=28$ ή $-10y=28-18$ ή $-10y=10$ ή $y=-1$

$$\left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(3,-1)$

(Για να δούμε αν σωστά λύθηκε το σύστημα κάνουμε την επαλήθευση: Η πρώτη εξίσωση δίνει: $3+2(-1)=3-2=1$ και η δεύτερη $3\cdot 3-5(-1)=9+5=14$. Βλέπουμε ότι επαληθεύονται και οι δύο, άρα, η λύση που βρήκαμε είναι σωστή)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνεται η εξίσωση: x-2y=10. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη (x,y) είναι λύσεις της; (Βάλτε + στο πλαίσιο)

(–1,4) ☐ (12,1) ☐ (1,–5) ☐ (–2, –6) ☐ (10,0) ☐ (8,–1) ☐

2. Το ζεύγος (x,y) που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + (x - y)^2 = 0$ είναι:

Α: (1,0) Β: (-1,1) Γ: (0,0) Δ: (0,-1) Ε: (2,2)

3. Το σύστημα

$$\left|\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ 0\alpha + \beta = 1 \end{array}\right.$$

έχει λύση το ζεύγος (α,β) που ισούται με:

Α: (0,1) Β: (1,0) Γ: (0,0) Δ: (1,1) Ε: (1, –1)

5. Να γράψετε μια εξίσωση α′ βαθμού με έναν άγνωστο η οποία να είναι αδύνατη και μια άλλη που να έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

6. Ποια είναι η γνώμη σας για τις λύσεις της κλασματικής εξίσωσης $\frac{2(x-1)}{x-1} = 0$;

7. Ποιές τιμές δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή d στον τύπο $K = \frac{d+1}{d^2 - 4}$;

8. Δίνεται η εξίσωση $x(x–1)(x^2+1)=0$. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή με Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Η εξίσωση είναι αδύνατη. ☐

ii) Ο αριθμός –1 είναι λύση της. ☐

iii) Οι λύσεις της είναι οι αριθμοί 0 και 1. ☐

iv) Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις. ☐

v) Μόνο το 0 είναι λύση της. ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα α και β γνωρίζοντας οτι:

i) $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}$ και $\alpha+\beta=18$ ii) $\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha}{3}$ και $\alpha-\beta=20$.

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 2x+y=7 \\ 4+5y=3x \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} 3x+5y=8 \\ 4x-2y=1 \end{array}\right.$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 3x+y=6 \\ 2(x+1)-(y+1)=3 \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} x-y=3(2-x)+2y \\ 12x-9y=18 \end{array}\right.$ iii) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=1 \\ 4x+6(y-2)=0 \end{array}\right.$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 3(x+7y)=-4 \\ 9(3+x)=5(y+3) \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} 3(\varphi-3\omega)=5(3\omega-\varphi) \\ 2(3\varphi-\omega)=3(4\omega+\varphi)+5 \end{array}\right.$

5. Να λύσετε το σύστημα και να κάνετε επαλήθευση.

$$\left|\begin{array}{l} x-\frac{2x-y}{2}+\frac{1}{4} \\ \frac{2x-1}{6}-\frac{1-y}{2} \end{array}\right.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα: i) $\left| \begin{array}{l} \sqrt{2}x = y \\ x + y = \sqrt{2} + 1 \end{array} \right.$ ii) $\left| \begin{array}{l} x - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{2}x - y = 1 - \sqrt{6} \end{array} \right.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Αν ο Νίκος δώσει 100 δρχ στο Γιώργο, τότε ο Γιώργος θα έχει 3-πλάσια χρήματα από το Νίκο. Αν ο Γιώργος δώσει 200 δρχ στο Νίκο, τότε ο Νίκος θα έχει 2-πλάσια χρήματα από το Γιώργο. Πόσα χρήματα έχει καθένας τους;

ΛΥΣΗ

Ας ονομάσουμε x δρχ τα χρήματα του Νίκου και y δρχ τα χρήματα του Γιώργου. Αν ο Νίκος δώσει τις 100 δρχ , θα του μείνουν x-100 και ο Γιώργος θα έχει y+100. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, θα έχουμε την εξίσωση**: 3(x-100) = y+100**

Αν ο Γιώργος δώσει τις 200 δρχ , θα του μείνουν y-200 και ο Νίκος θα έχει x+200. Σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχουμε την εξίσωση : **x+200 = 2(y-200)**

Οι εξισώσεις που βρήκαμε σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα x και y, που παριστάνουν θετικούς αριθμούς.

$\left| \begin{array}{l} 3(x-100) = y+100 \\ x+200 = 2(y-200) \end{array} \right.$ Κάνουμε τις πράξεις, για να γράψουμε πιο απλά τις εξισώσεις, και λύνουμε τη δεύτερη ως προς x

$\left| \begin{array}{l} 3x-300 = y+100 \\ x+200 = 2y-400 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} 3x-y = 300+100 \\ x = 2y-400-200 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} 3x-y = 400 \\ x = 2y-600 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} 3(2y-600)y=400 \\ x = 2y-600 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} 5y = 220 \\ x = 2y-600 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} y = 440 \\ x = 2y-600 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} y = 440 \\ x = 2 \cdot 440-600=280 \end{array} \right.$

Η λύση του συστήματος είναι (x,y)=(280,440) και είναι δεκτή.

Άρα, ο Νίκος είχε 280 δρχ και ο Γιώργος 440.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ποσότητες των υγρών που περιέχονται σε δυο δοχεία α΄ και β΄, αν γνωρίζουμε ότι: i) Αν αυξηθεί κατά 1 λίτρο το 3-πλάσιο της ποσότητας του α΄, θα βρούμε το 4-πλάσιο της ποσότητας του β΄. ii) Αν μειώσουμε κατά 1 λίτρο το 2-πλάσιο της ποσότητας του β΄, θα βρούμε την ποσότητα του α΄.

ΛΥΣΗ

Έστω x λίτρα η ποσότητα του α΄ και y λίτρα η ποσότητα του β΄. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε τις εξισώσεις: $\mathbf{3x+1 = 4y}$ και $\mathbf{2y}$ □$\mathbf{1 = x}$ όπου x,y είναι θετικοί αριθμοί. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων με τη μέθοδο της αντικατάστασης, αφού η δεύτερη είναι ήδη λυμένη ως προς x.

$$\left|\begin{array}{l} 3x+1=4y \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} 3(2y-1)+1=4y \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} 6y-3+1=4y \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} 6y-4y=3-1 \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} 2y=2 \\ 2y-1=x \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 2y=2 \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} y=1 \\ 2y-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} y=1 \\ 2\cdot 1-1=x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} y=1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Λύση $(x,y)=(1,1)$ δεκτή. Άρα, τα δοχεία έχουν από 1 λίτρο το καθένα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 50 και διαφορά 14.

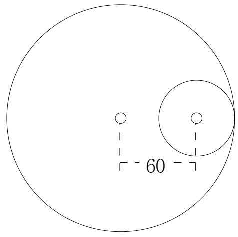
2. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι 16m. Αν το x είναι μεγαλύτερο του y κατά 2m, να βρείτε πόσα μέτρα είναι κάθε διάσταση.

3. Θέλουμε να κόψουμε ένα χάλκινο σύρμα με μήκος 30m σε δύο κομμάτια, ώστε το μήκος του ενός να είναι τα 2/3 του μήκους του άλλου. Τι θα κάνουμε για να βρούμε το σημείο τομής;

4. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που η διαφορά τους είναι 24 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με το μικρότερο δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 3.

5. Οι τρεις τορναδόροι και οι πέντε βοηθοί τους σε ένα μηχανουργείο πληρώνονται με 55125 δρχ την ημέρα. Αν το ημερομίσθιο του βοηθού είναι τα 5/8 του ημερομισθίου του τορναδόρου, πόσο είναι το ημερομίσθιο καθενός; (Οι τορναδόροι πληρώνονται με το ίδιο ημερομίσθιο)

6. Το διπλανό σχήμα δείχνει έναν τροχό και έναν τροχίσκο που συμπλέκονται μεταξύ τους και έχουν απόσταση στους άξονές τους 60 mm. Το διπλάσιο της διαμέτρου του τροχίσκου είναι μικρότερο κατά 40 mm από τη διάμετρο του τροχού. Να υπολογίσετε τις ακτίνες του τροχού και του τροχίσκου.



7. Ένα ορθογώνιο με μήκος x cm και πλάτος y cm έχει περίμετρο 10cm. Αν μεγαλώσουμε το μήκος κατά $y/3$ και μικρήνουμε το πλάτος κατά $x/4$, η περίμετρος αυξάνει κατά 1cm. Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.

8. Ένας έμπορος υφασμάτων, όταν θέλησε να πληρώσει την πρώτη δόση από τις οκτώ του φόρου του στην εφορία, σκέφτηκε πως αν πουλούσε ένα κομμάτι ύφασμα προς 320δρχ το μέτρο, θα του έλειπαν ακόμα 3200δρχ. Αν όμως το πουλούσε προς 400δρχ. το μέτρο, θα του περίσσευαν 2000δρχ. Πόσα μέτρα ήταν το κομμάτι αυτό και πόσος ολόκληρος ο φόρος;

9. Δύο μαθητές Α και Β ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο Ο ενός δρόμου προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 60μέτρα το λεπτό ο Α και 75 μέτρα το λεπτό ο Β. Αν ο Α ξεκίνησε 4 λεπτά νωρίτερα από τον Β, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Α και σε πόση απόσταση από το σημείο Ο.