1^{Ο} ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΥ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗΝ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Η εργασία εκπονήθηκε από τους μαθητές της Α΄Λυκείου
Αντωνιάδου Ζωή
Γκιοιντέσι Σίλβα
Εφραμίδης Δημήτριος
Λιάκος Ευάγγελος
Λιόση Αιμιλία Μαρίνα
Μαυράκη Ξανθία
Πέππα Σοφία
Πέτση Ελένη
Σκληρός Σωτήριος
Τζίτζι Λιονέλ
Τραχιώτης Παναγιώτης
Τσίγκου Βασιλική
Τσίγκου Ισιδώρα
Φίλης Ισίδωρος
Ψωμιάδου Άννα

υπό την επίβλεψη του καθηγητή
Αντωνίου Σαρρή
Μαθηματικού

ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Αφιερώση
Στο σχολείο μας

Ευχαριστίες των μαθητών και του επιβλέψαντος καθηγητή

Ευχαριστούμε την Δρ Χάλκου Μαρία που ευγενώς προσφέρθηκε να μας αποστείλει την διδακτορική διατριβή της πάνω στον βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικα 65, επί του οποίου κυρίως στηρίξαμε την έρευνά μας.

Ευχαριστούμε τον Διευθυντή του σχολείου μας Κο Μπατσιούδη Σωκράτη για τη στήριξη και την ενθάρρυνση που παρείχε στο έργο μας.

Ευχαριστούμε την καθηγήτριά μας Κα Βαραλέξη Αικατερίνη για τη βοήθεια της στη χρήση της βιβλιοθήκης του σχολείου μας

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέχρι σήμερα φοίτησή μας στο σχολείο ήταν ικανή να μας κάνει να ανακαλύπτουμε ερωτηματικά και κενά στη γνώση, την ύπαρξη των οποίων αγνοούσαμε πριν λίγα χρόνια. Μια τέτοια έλλειψη έρχεται να καλύψει η παρούσα εργασία. Η επιθυμία μας για εμβάθυνση στις γνώσεις της ιστορίας μας που αφορούν τα Μαθηματικά οδήγησε στην έρευνα και τη συγγραφή της εργασίας αυτής. Στη διάρκεια των μαθητικών μας χρόνων έχουμε συναντήσει μια πληθώρα μαθηματικών εννοιών τόσο από την αρχαιότητα όσο και από τη σύγχρονη εποχή. Παραδείγματος χάρη:

- Το γνωστό σε όλους μας Πυθαγόρειο θεώρημα, μια έννοια από την αρχαιότητα.
- Το θεώρημα του Θαλή
- Τους μαθηματικούς συμβολισμούς και τις πράξεις μεταξύ φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών, που έχουν τις ρίζες τους στο $19^{ο}$ αιώνα.

Οι διαφορές μεταξύ της Αρχαιότητας και της Νεώτερης εποχής είναι ολοφάνερες και παρατηρούνται κυρίως στους συμβολισμούς. Ενδεικτικά παραθέτουμε τους συμβολοσμούς των Αρχαίων Ελληνικών και των Λατινικών αριθμών ώστε να γίνει πιο εμφανής η διαφορά μεταξύ των τότε και των σημερινών χρησιμοποιούμενων συμβόλων.

Στα Αρχαία ελληνικά ά για τους αριθμούς 1 - 9999 χρησιμοποιούνται τα γράμματα ως εξής:

Α’	1	Ι’	10	Ρ’	100	,Α	1000
Β’	2	Κ’	20	Σ’	200	,Β	2000
Γ’	3	Λ’	30	Τ’	300	,Γ	3000
Δ’	4	Μ’	40	Υ’	400	,Δ	4000
Ε’	5	Ν’	50	Φ’	500	,Ε	5000
ς’	6	Ξ’	60	Χ’	600	,ς	6000
Ζ’	7	Ο’	70	Ψ’	700	,Ζ	7000
Η’	8	Π’	80	Ω’	800	,Η	8000
Θ’	9	‘	90	‘	900	,Θ	9000

Οι Λατινικοί αριθμοί είναι οι εξής:

I	1	II	2
III	3	IV	4
V	5	VI	6

VII	7	VIII	8
IX	9	X	10
XI	11	XIX	19
XX	20	XXX	30
XL	40	L	50

Με τη σύγκριση των παλαιότερων και τωρινών συμβολισμών, που επικρατούν στη μαθηματική κοινότητα από το 1700 μ.Χ. ως σήμερα, παρατηρούμε σημαντικές διαφορές ανάμεσά τους. Από την πορεία της εξέλιξής τους όμως λείπει ένα σημαντικό κομμάτι, αυτό της μακραίωνης περιόδου του Βυζαντίου.

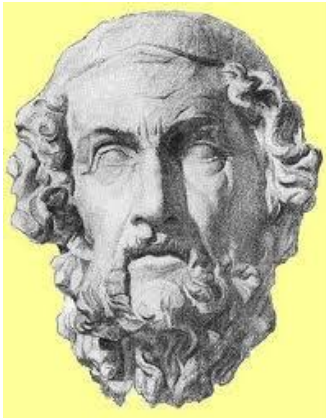
Η παρούσα εργασία αφορά την ερμηνεία των αποριών μας σχετικά με:

- Τους μαθηματικούς συμβολισμούς κατά τις περιόδους του βυζαντίου
- Τις πράξεις που πραγματοποιούνταν
- Το γενικότερο πλαίσιο διδασκαλίας των μαθηματικών και τις θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές στη Βυζαντινή κοινωνία
- Τους επηρεασμούς που δέχτηκαν τα σύγχρονα μαθηματικά από το Βυζάντιο

Η δομή της εργασίας μας γίνεται με ανάπτυξη τεσσάρων κεφαλαίων.στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτικη ανάλυση των Αρχαίων Ελληνοκών Μαθηματικών και της πορείας τους μέχρι τους Ελληνιστικούς χρόνους δηλαδή την Προβυζαντινή, θα λέγαμε, περίοδο. Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μαθηματικοί της Βυζαντινής περιόδου, ο τρόπος δδιδασκαλίας των μαθηματικών της περιόδου αυτής και γίνεται μια σύντομη περιγραφή του βιενναίου ελληνικού φιλολογικού κώδικα 65. Ο βιενναίος ελληνικός φιλολογικός κώδικας 65 είναι η πηγή στην οποία βασιστήκαμε για τη συγγραφή του 3ου κεφαλαίου της εργασίας μας. Το 3ο κεφάλαιο περιέχει παραδείγματα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που υπάρχουν στο κώδικα. Προσπαθήσαμε να επιλέξουμε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα από την τεράστεια συλλογή που υπάρχει σε αυτόν. Επιλύσαμε αρχικά τα παραδείγματα με τη βυζαντινή μέθοδο και στη συνέχεια με τη σημερινή. Στο 4ο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμεράματα της εργασίας μας. Τα συμπεράσματα αυτά αφορούν τόσο το γενικό πλαίσιο των Μαθηματικών της βυζαντινής περιόδου όσο και τα ειδικά συμπεράσματα από την μελέτη των παραδειγμάτων. Θα λέγαμε πως το κεφάλαιο αυτό είναι το «παράθυρο» που άνοιξε στο μυαλό μας από το οποία μπορούμε να δούμε νέα ερωτηματικά που ελπίζουμε να μπορέσουμε να διερευνήσουμε στο μέλλον.

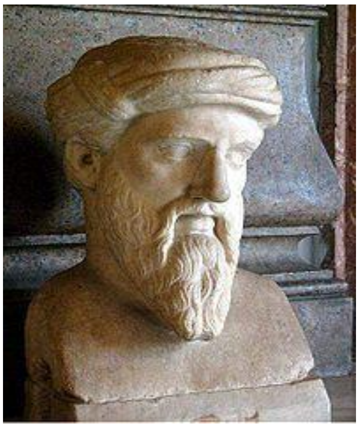
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΠΕΡΙΟΔΟ ΣΤΟΝ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ.

Στον Ελλαδικό χώρο, κατά την προ-βυζαντινή περίοδο αναπτύχθηκε θεαματικά η μαθηματική επιστήμη. Πολλοί μαθηματικοί με τα διάφορα θεωρήματα τους, κατάφεραν να διευκολύνουν τη μεταγενέστερη επίλυση διαφόρων προβλημάτων που βασίζονται σε αυτά. Μάλιστα οι μαθηματικοί αυτοί ήταν καλοί γνώστες της θεωρίας, καθώς έδιναν λύσεις πρωτότυπες και διαφορετικές. Μεταξύ των επιφανέστερων συγκαταλέγονται ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και άλλοι. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην παρούσα εργασία στην Υπατία την Αλεξανδρινή. Ο λόγος της ιδιαίτερης αυτής αναφοράς είναι ότι το μαθηματικό έργο της μαθηματικού Υπατίας λειτούργησε ως καταλυτικός παράγοντας για την βυζαντινή εποχή, καθώς αυτή ήταν αφενός η τελευταία από τους προηγούμενους μαθηματικούς, αφετέρου η πρώτη από τους από τους επόμενους. Στη συνέχεια γίνονται σύντομες αναφορές στους Θαλη, Πυθεγόρα, Διόφαντο και Ευκλείδη ώστε να γίνει πιο κατανοητή η πορεία της επιστήμης των Μαθηματικών μέχρι την Υπατία της οποίας το έργο θα χαρακτηρίζαμε ως «γέφυρα» μεταξύ δυο ιστορικών περιόδων.



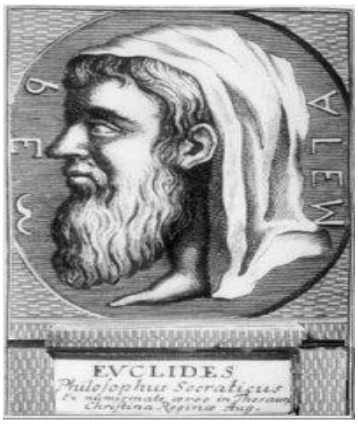
Ο Θαλής ο Μιλήσιος (624-550 π.Χ) Ασχολήθηκε με τη αστρονομία, τα μαθηματικά, τη φυσική και την φιλοσοφία. Η κυριότερη προσφορά του Θαλή στην επιστήμη αυτή ήταν η εισαγωγή της αποδείξεως, γεγονός που έφερε αλλαγή στον τρόπο του «σκέπτεσθαι» μέχρι εκείνη την εποχή.

Ο Πυθαγόρας αποτελούσε έναν μεγάλο Έλληνα μαθηματικό και φιλόσοφο. Γεννήθηκε το 580 π.Χ στη Σάμο και πέθανε γύρω στα 490π.Χ στο Μεταπόντιο της Κάτω Ιταλίας. Ο Πυθαγόρας με το θεώρημά του το γνωστό ως Πυθαγόρειο Θεώρημα, το οποίο είναι απαραίτητο για τη μέτρηση ενός ορθογωνίου τριγώνου απέδειξε πως κάθε τριάδα (χ,ψ,ζ) αριθμών που επαληθεύουν τη σχέση $χ^2+ψ^2= ζ^2$ (υποτείνουσα^2 = πρώτη πλευρά^2 + δεύτερη πλευρά^2), αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, σύμφωνα με τη σχέση του Πυθαγόρα.



Ο αρχαίος μαθηματικός Διόφαντος έδωσε πρώτος αυτός τύπους για τον προσδιορισμό τέτοιων τριάδων πυθαγόρειων αριθμών, που είναι : $χ=μ^2 – 4^2$, $ψ=2μν$ και $ζ=μ^2+ν^2$ όπου μ,ν ακέραιοι αριθμοί και μ>ν. Μια τέτοια τριάδα αποτελούν οι αριθμοί 3,4,5.

Επόμενος στη σειρά έρχεται ο Ευκλείδης ο οποίος γεννήθηκε το 325π.Χ και πέθανε το 265π.Χ. Το πιο γνωστό έργο του



είναι τα «Στοιχεία», που αποτελείται από 13 βιβλία. Εκεί οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και των ακεραίων αριθμών προκύπτουν από ένα σύνολο αξιωμάτων, εμπνέοντας την αξιωματική μέθοδο των μοντέρνων μαθηματικών. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος.

Τελευταία στη σειρά έρχεται η Υπατία, η οποία όπως αναφέρθηκε ήταν η σημαντικότερη για την εποχή της. Η Υπατία γεννήθηκε το 370 και πέθανε περίπου το 415 μ.Χ. υπήρξε Ελληνίδα νεοπλατωνική φιλόσοφος, αστρονόμος και μαθηματικός. Έζησε και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια όπου και δολοφονήθηκε από όχλο φανατικών χριστιανών. Η Υπατία, η φιλόσοφος και μαθηματικός της Αλεξανδρείας δεν είναι γνωστή - όσο ίσως θα έπρεπε- στη χώρα μας. Ήταν μια προσωπικότητα ολοκληρωμένη, γεμάτη ηθικές αρετές θάρρους, δύναμης, δικαιοσύνης, ειλικρίνειας, σεβασμού και αφοσίωσης στα ιδανικά, τις αξίες και τα πιστεύω της. Από τις σπάνιες γυναικείες μορφές, που η ενασχόλησή της με τις κατ’ εξοχήν για την εποχή, ανδρικές

επιστήμες, έπαιξε σημαντικό ρόλο στην πνευματική κληρονομιά της ύστερης αρχαιότητας. Αυτή η πρώτη Ελληνίδα που θέλησε ν’ ακολουθήσει το δρόμο της ανεξαρτησίας ενάντια στις προκαταλήψεις, αρνούμενη υποταγή σε ένα ανδροκρατούμενο κατεστημένο και σε ένα θρησκευτικό φανατισμό, δέχτηκε την ευτέλεια και το διωγμό. Μέσα στη θαρραλέα μοναξιά και με όπλο τις γνώσεις της, αντιστάθηκε επιβάλλοντας τη γυναικεία φωνή ακόμη και μετά τη δολοφονία της. Ως την τελευταία ημέρα, ως την τελευταία ανάσα της, αντιμετώπισε με θάρρος κι επίγνωση ακόμη και τον ίδιο το θάνατό της.

Η Υπατία ήταν κόρη του μαθηματικού και αστρονόμου Θέωνα, έλαβε με τις φροντίδες του πατέρα της την καλύτερη δυνατή εκπαίδευση και ταξίδεψε στην Αθήνα και στην Ιταλία. Στην Αθήνα παρακολούθησε μαθήματα στη νεοπλατωνική σχολή του Πλούταρχου του Νεότερου και της κόρης του Ασκληπιγένειας αλλά μαθήτευσε και κοντά στο Πρόκλο και τον Ιεροκλή. Επιστρέφοντας στην Αλεξάνδρεια, έγινε επικεφαλής της εκεί σχολής των Πλατωνιστών (400 μ.Χ.), δίδαξε φιλοσοφία και μαθηματικά και αποτέλεσε πόλο έλξης για τους διανοούμενους της εποχής. Δυστυχώς παρότι η ίδια η Υπατία υπήρξε πολυγραφότατη κανένα από τα έργα της δεν σώζεται και έχουμε μόνο αναφορές για αυτά. Πολλοί από τους μαθητές της ανήκαν στους ανώτατους κύκλους της αριστοκρατίας της πόλης και έγιναν σημαντικές προσωπικότητες, όπως ο επίσκοπος Κυρήνης Συνέσιος και ο έπαρχος της Αλεξανδρείας Ορέστης. Η ίδια επηρεάστηκε φιλοσοφικά από τους νεοπλατωνικούς Πλωτίνο και Ιάμβλιχο. Σύμφωνα με το λεξικό *Σούδα*, η *Υπατία* έγραψε σχόλια στην *Αριθμητική* του *Διοφάντη του Αλεξανδρέως*, στα *Κωνικά* του *Απολλώνιου* από την *Πέργη* και στον αστρονομικό κανόνα του *Πτολεμαίου*. Αυτά τα έργα χάθηκαν, αλλά οι τίτλοι τους σε συνδυασμό με τις επιστολές του μαθητή της *Συνέσιου*, ο οποίος την συμβουλευόταν για θέματα όπως η κατασκευή ενός αστρολάβου, δείχνουν ότι είχε αφοσιωθεί ιδιαίτερα στην αστρονομία και στα μαθηματικά ενώ η ύπαρξη κάποιων αυστηρά φιλοσοφικών έργων της είναι άγνωστη. Για τη σημασία της στον χώρο του πνεύματος μιλούν με θαυμασμό και πολύ σεβασμό οι επιστολές του *Συνέσιου*, καθώς γνωρίζουμε ότι τα μαθηματικά έργα της *Υπατίας* είχαν μεγάλη δημοτικότητα μεταξύ των επόμενων γενεών των μαθητών της.

Η Υπατία τελικά δολοφονήθηκε από μερίδα πλήθους χριστιανών οι οποίοι πίστευαν ότι ήταν υπαίτια για τη μη συμφιλίωση του επάρχου Ορέστη και του Επισκόπου Αλεξανδρείας Κύριλλου οι οποίοι βρίσκονταν σε διένεξη, παρότι είχε πολλούς χριστιανούς φίλους. Ο φανατισμένος όχλος φέρθηκε απάνθρωπα ακόλουθώντας μια πρακτική που ήταν συνηθισμένη την εποχή εκείνη στην περιοχή και σε άλλες περιπτώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΗΣ ΒΥΖΑΝΤΙΝΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

Γνωρίζουμε ότι εποχές ακμής των μαθηματικών στο Βυζάντιο υπήρξαν ο Ε', ΣΤ', Θ', Ι', ΙΓ' και ΙΔ' αιώνας. Οι μαθηματικοί των πρώτων βυζαντινών χρόνων άκμασαν στην Αλεξάνδρεια. Επί Ιουστινιανού όμως, το κέντρο βάρους μετατοπίστηκε στην Κωνσταντινούπολη και αυτό κυρίως λόγω της εκεί μεγάλης οικοδομικής δραστηριότητας.

2.1.Η ιστορική πορεία των Μαθηματικών κατά τους Βυζαντινούς χρόνους

Το 726 μ.Χ. ενώ το Πανδιδακτήριο της Κωνσταντινούπολης είχε πλέον παρακμάσει συνεχιζόταν η διδασκαλία της λογιστικής και της γεωδαισίας. Με τον όρο γαιωδεσία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη Γεωμετρία με σημαντική όμως διαφοροποιήση καθώς η Γεωδεσία ασχολέιται κυρίως με πρακτικές εφαρμογές σε αντίθεση με τη Γεωμετρία των προηγούμενων χρόνων που θεμελίωσε την έννοια των αποδείξεων και των αξιωμάτων. Με τον όρο Λογιστική θα θεωρούσαμε την άλγεβρα των Βυζαντινών χρόνων όπου και εδώ εμφανίζονται κατ αναλογία με τη Γεωδεσία διαφοροποιήσεις. Η Γεωδαισία εθεωρείτο κλάδος της Λογιστικής. Σημειωτέον, ότι στην αρχαία Ελλάδα ο όρος "αριθμητική" σήμαινε τη σημερινή "θεωρία αριθμών". Στη Λογιστική όμως οι τύποι χρησιμοποιούνταν χωρίς αποδείξεις και οι γνώσεις των μαθηματικών και της μηχανικής μεταδίδονταν από γενιά σε γενιά στα μέλη των ομάδων των οικοδόμων, των εμπόρων και των βιοτεχνών. Αυτό βέβαια δεν σήμαινε κατ' ανάγκην, ότι οι διδάσκαλοι της Λογιστικής αγνοούσαν τα θεωρήματα στα οποία στηρίζονταν οι πρακτικοί κανόνες. Μάλιστα ορισμένοι από αυτούς πρέπει να ήταν καλοί γνώστες της θεωρίας, καθώς έδιναν λύσεις πρωτότυπες και διαφορετικές από τούς συγχρόνους τους.
Επιπλέον είναι γνωστό ότι οι Βυζαντινοί έδειχναν προσήλωση στα αρχαιοελληνικά πρότυπα. Διαφύλαξαν όλα όσα είχαν επιτευχθεί, τα οποία και παρέδωσαν προκειμένου να συνεχισθεί η πρόοδος στις θετικές επιστήμες. Οι Βυζαντινοί όμως δεν διακρίθηκαν για τις γνώσεις τους στη θεωρία αλλά μάλλον για την πρακτική χρήση και εφαρμογή των επιστημονικών γνώσεων στην καθημερινή ζωή.
Κατά τον 9ο αιώνα ο Λέων ο μαθηματικός ήταν αυτός πού επανέφερε την παράδοση της ανώτατης κρατικής εκπαίδευσης και ο Πατριάρχης Φώτιος ο οποίος ήταν λάτρης της αρχαίας ελληνικής παιδείας *"οδήγησε το Βυζάντιο στον αυθεντικό ελληνισμό",* με περιορισμένη όμως την παρουσία των θετικών επιστημών. Σε αυτή την περίοδο, η

παιδεία και η τέχνη είχαν πλέον σκοπό την απόκτηση εκείνης της νοοτροπίας, η οποία θα *"απομάκρυνε τον πολίτη από κάθε τι το ανθρώπινο, ώστε να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή στροφή προς το υπεράνθρωπο"*.

Αργότερα (1008 μ.Χ.) εκδόθηκε μία μαθηματική τετρακτύς αγνώστου συντάκτη, η οποία αν και δεν ήταν υψηλού επιπέδου μας προσέφερε εντούτοις σημαντικές πληροφορίες σχετικά με κάποια είδη κειμένων, τα οποία παραδίδονταν στα πλαίσια της εκπαιδευτικής πορείας πού ακολουθείτο. Μεταξύ όσων παρέλαβε από την αρχαιότητα το Βυζάντιο, περιλαμβάνονταν γνώσεις τεχνολογίας στους τομείς της μηχανικής, της πολεμικής τέχνης, της φαρμακευτικής, και της χημικής τεχνολογίας. Στα αλχημικά κείμενα μάλιστα σώζονται συνταγές πού παραδίδονταν από γενιά σε γενιά στους μεταλλουργούς και στους χρυσοτέχνες, και οι οποίες περιλάμβαναν οδηγίες σχετικά με τη συγκόλληση μετάλλων, τη βαφή, την παρασκευή κραμάτων και τον ποιοτικό τους έλεγχο, ο οποίος γινόταν από κρατικούς υπαλλήλους. από την εποχή των Παλαιολόγων έχουν σωθεί η πραγματεία *"περί χρυσοποιΐας"* τού Νικολάου Βλεμμύδη, και η *"ερμηνεία της επιστήμης της χρυσοχοΐας"* ενός μοναχού Κοσμά. Όσο καλά οι χρυσοτέχνες γνώριζαν ότι δεν υπήρχε μέθοδος μετατροπής αγενούς μετάλλου σε χρυσό, άλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους επαργύρωσης και επιχρύσωσης, με τις οποίες έδιναν όψη αργυρού ή χρυσού σε άλλα μέταλλα ή σε κράματά τους. Επειδή δε τα κράματα των μετάλλων χρησιμοποιούνται τόσο στην αργυροχρυσοχοΐα όσο και τη νομισματοκοπία, είναι αναγκαία η γνώση τρόπων υπολογισμού των αναλογιών, υπό τις οποίες ευρίσκονται τα μέταλλα σε κράματα. Τέτοιου είδους υπολογισμοί και όσοι άλλοι σχετίζονταν με τη σημερινή πρακτική αριθμητική περιλαμβάνονταν στην καλουμένη "Λογιστική".

Από την εποχή πού ο Κωνσταντίνος ο Θ΄ (1042-1055) αναδιοργάνωσε το Πανδιδακτήριο της Κωνσταντινούπολης τα μαθηματικά και η αστρονομία, είναι οι επιστήμες πού καλλιεργήθηκαν εντατικά. Επί της βασιλείας τού Μανουήλ Α΄ Κομνηνού (1143-1180), το Βυζάντιο ήταν πιο προηγμένο σε σχέση με τη Δύση στον τομέα των μαθηματικών.

Περί το 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ο διαχωρισμός των *"εμπορικών"* (πρακτικών) από τα *"ακαδημαϊκά"* (τα διδασκόμενα στις ανώτερες σχολές) μαθηματικά. Μάλιστα από τον 14ο αι. τα πρακτικά μαθηματικά όχι μόνον δεν περιλαμβάνονταν στη διδακτέα ύλη των ανωτάτων σχολών αλλά κατά την άποψη ορισμένων, βρίσκονταν σε συνεχή ανταγωνισμό με την ύλη πού διδασκόταν σ' αυτές, αφού τα πρακτικά μαθηματικά ενδιέφεραν πλήθος ανθρώπων, καθώς εφαρμόζονταν σε προβλήματα καθημερινής ζωής, και ήταν χρήσιμα σε πολλά επαγγέλματα.

Μολονότι οι τελευταίες δεκαετίες πριν την άλωση της Κωνσταντινούπολης θεωρούνται ασήμαντες σε προσφορά στα μαθηματικά, η ύπαρξη μεγάλου πλήθους χειρογράφων δείχνει αυξημένο ενδιαφέρον τόσο για τις τέσσαρες μαθηματικές επιστήμες (αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία, μουσική), όσο και για τη λογιστική και τη γεωδαισία, οι οποίες ήταν κλάδοι των κατ' εξοχήν "*εμπορικών μαθηματικών*" . Η βυζαντινή εποχή, όσον αφορά τα μαθηματικά, τελειώνει με έργα προορισμένα για πρακτική χρήση. Αυτά είναι ως επί το πλείστον βιβλία αριθμητικής, δηλαδή συλλογές προβλημάτων πού αποτελούνται από ποικίλες και επιλεκτικές δημιουργίες κληροδοτημένες από την παράδοση πολλών χρόνων και λαών. Ο προσδιορισμός των επιρροών πού δέχθηκαν οι συγγραφείς αυτών των έργων αποτελεί εξαιρετικά επίπονη διαδικασία, ιδιαιτέρως, όταν στις περισσότερες περιπτώσεις διαπιστώνονται αλληλεπιδράσεις μεταξύ Κινέζων, Περσών, Ινδών, Δυτικών και Βυζαντινών. Αυτές οι συλλογές περιλαμβάνουν εκτός των άλλων και στοιχεία πολύτιμα για την εξέλιξη τού πολιτισμού και της γλώσσας, διότι αναφέρονται σε ζητήματα της καθημερινής ζωής των ανθρώπων της εποχής εκείνης (μετατροπές νομισμάτων, προβλήματα κληρονομιών, φορολογικό καθεστώς, κ.ά.).

2.2. Περίοδοι θετικών επιστημών στο Βυζάντιο

Η πορεία των θετικών επιστημών στο Βυζάντιο θα μπορούσε να διαχωριστέι σε τέσσερις χρονικές περιόδους όπως αναφέρονται στη συνέχεια.

<u>1^{η} περίοδος</u> (από τον 4^{ο} έως τον 6^{ο} αιώνα):

Κατά την περίοδο αυτή παρουσιάζεται, με επίκεντρο την Αθήνα και την Αλεξάνδρεια, μια αναζωογόνηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Οι εκπρόσωποι της περιόδου, οι μη χριστιανοί οπαδοί της Νεοπλατωνικής Σχολής, Πορφύριος, Ιάμβλιχος, Σειρήνος, Πρόκλος, Ευτόκιος, Θέων, Υπατία κ.α., καταμαρτυρούν με τα έργα τους την έντονη καλλιέργεια των μαθηματικών και της αστρονομίας που σημειώνεται στους αιώνες αυτούς.

<u>2^{η} περίοδος</u> (από τον 6^{ο} έως και τον 8^{ο} αιώνα):

Μια μικρή αναλαμπή διαδέχεται την πνευματική έξαρση της 1^{ης} περιόδου. Ο 6^{ος} αιώνας έχει να επιδείξει μέτριους θετικούς επιστήμονες, όπως τον Συνέσιο τον Αλχημιστή, τον Λεόντιο κ.α. Στις αρχές του 7^{ου} αιώνα η επιστημονική κίνηση αντιπροσωπεύεται, όσον αφορά τις θετικές επιστήμες, από τον Στέφανο τον Αλεξανδρέα, τον Στέφανο τον Αθηναίο, τον Θεοφύλακτο Σιμοκάττο κ.α. Γενικά, κατά τον 7^{ο} και 8^{ο} αιώνα παρατηρείται μια διακοπή της πνευματικής ζωής όσον αφορά τις κλασικές σπουδές, ενώ παράλληλα παρουσιάζεται πρόοδος σε άλλους τομείς όπως διοικητικά έργα, νομοθετικό έργο, ανέγερση μεγαλόπρεπων ναών κ.τ.λ.

<u>3^{η} περίοδος</u> (από τον 9^{ο} έως και τον 12^{ο} αιώνα)

Την πνευματική στασιμότητα των αρχών του 9^{ου} αιώνα έρχεται να διαδεχθεί μια αξιόλογη ανάπτυξη των γραμμάτων που φέρει τη σφραγίδα του Αρέθα, του Κωνσταντίνου του Ζ΄ του Πορφυρογέννητου, του Λέοντος του Μαθηματικού, του Μιχαήλ του Εφεσίου, του Σιμεών Σηθ και του Μιχαήλ Ψελλού.

<u>4^{η} περίοδος</u> (από τον 13^{ο} έως και τον 15^{ο} αιώνα)

Η περίοδος αυτή έχει να παρουσιάσει μια εξαιρετική άνθιση ων μαθηματικών, της αστρονομίας, της γεωπονίας και της βοτανικής. Άξιοι εκπρόσωποί της ήταν ο Ισαάκ Αργυρός, ο Μανουήλ Βρυέννιος, ο Νικηφόρος Γρηγοράς, ο Μάξιμος Πλανούδης, ο Γρηγόριος Χιονιάδης κ.α.

2.3.Οι σπουδαιότεροι Βυζαντινοί μαθηματικοί

Ο **Ανθέμιος ο Τραλλιανός** (περ. 474 – πριν το 558) ήταν Έλληνας μηχανικός μαθηματικός και αρχιτέκτονας, καθηγητής της Γεωμετρίας στην Κωνσταντινούπολη. Γεννήθηκε στην πόλη Τράλλεις της Λυδίας, από όπου και η προσωνυμία του. Ο Ανθέμιος συνεργάσθηκε με τον Ισίδωρο τον Μιλήσιο για την κατασκευή του Ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη (532 μ.Χ.), μετά από ανάθεση του αυτοκράτορα Ιουστινιανού, καθώς ο προηγούμενος ναός είχε καταστραφεί στη Στάση του Νίκα.

Ο Ανθέμιος προερχόταν από μια μορφωμένη οικογένεια. Είχε τέσσερις αδελφούς και ο πατέρας τους, ο Στέφανος ο Τραλλιανός, ήταν γιατρός. Από τους αδελφούς του, ο Διόσκουρος ακολούθησε το πατρικό επάγγελμα στις Τράλλεις, ο Αλέξανδρος το ίδιο αλλά στη Ρώμη, όπου έγινε ένας από τους πιο φημισμένους γιατρούς της εποχής του, ο Ολύμπιος ήταν βαθύς γνώστης του Ρωμαϊκού Δικαίου, ενώ ο Μητρόδωρος έγινε διακεκριμένος γραμματικός στην Κωνσταντινούπολη.

Τα τολμηρά σχέδια που κατέστρωσε ο Ανθέμιος για τον ναό της Αγίας Σοφίας επιδεικνύουν τόσο τις γνώσεις του, όσο και την άγνοιά του. Το κορυφαίο σχεδιαστικό του επίτευγμα εδώ αφορά τον τρούλο του ναού, που φαίνεται σαν να αιωρείται στον αιθέρα, πάνω από τα γήινα. Οι δεξιότητές του ως πολιτικού μηχανικού διαφάνηκαν και στην επισκευή των αντιπλημμυρικών έργων του Νταράς

Μία ιστορία που θρυλείται σχετικά με τον Ανθέμιο ίσως ρίχνει κάποιο φως στον χαρακτήρα και τα επιστημονικά ενδιαφέροντά του: Μετά από μία διαμάχη με τον γείτονά του Ζήνωνα, ο Ανθέμιος προσομοίωσε σεισμούς, αστραπές και βροντές στο δώμα, όπου εκείνος φιλοξενούσε τους καλεσμένους του, χρησιμοποιώντας καμπύλους καθρέφτες και ατμό που διοχέτευσε με δερμάτινους σωλήνες κάτω από το δάπεδο.

Ο Ανθέμιος ήταν εξίσου ικανός ως μαθηματικός. Περιέγραψε την κατασκευή της ελλείψεως με νήμα, όπως αναφέρει σχόλιο του Ευτόχιου στις *Κωνικές τομές* του Απολλώνιου, και συνέγραψε πραγματεία πάνω στις κωνικές τομές μία θαυμάσια στους Άραβες μαθηματικούς. Στη διαδικασία δημιουργίας επιφανειών που ανακλούν προς ένα σημείο εστιάζουν α) όλες τις ακτίνες αδιακρίτως διευθύνσεως που περνούν από ένα άλλο σημείο και β) μία δέσμη παράλληλων ακτίνων, ο Ανθέμιος ανακαλύπτει μία ιδιότητα κωνικής τομής που δεν βρίσκεται στο έργο του Απολλώνιου.

Ο Ανθέμιος ως συγγραφέας συνέγραψε σπουδαία έργα μηχανικής, από τα οποία σώζονται μόνο αποσπάσματα, π.χ. ένα τμήμα πραγματείας του εκδόθηκε με τον τίτλο *Περί παραδόξων μηχανημάτω* από τον L. Dupuy το 1777. Ο A. Westermann έδωσε μία αναθεωρημένη έκδοσή του στο έργο του *Παραδοξογράφοι* το 1839. Σε αυτό το έργο ο Ανθέμιος γράφει για την «ελαστική δύναμη» του υδρατμού.

Ο Ισίδωρος ο Μιλήσιος (περ. 6ος αι.) ήταν Έλληνας μαθηματικός, μηχανικός και αρχιτέκτονας. Ως βοηθός του Ανθέμιου από τις Τράλλεις συμμετείχε στην ανοικοδόμηση του ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη, έχοντας μεγάλη συμβολή στην εκπόνηση και υλοποίηση των αρχιτεκτονικών σχεδίων. Πιθανότατα συμμετείχε επίσης στην κατασκευή άλλων έργων επί της αυτοκρατορίας του Ιουστινιανού Α', όπως και στην επίβλεψη αντιπλημμυρικών και οχυρωματικών έργων**.**

Σημαντική ήταν η συμβολή του στα μαθηματικά, κυρίως μέσα από τη διάδοση κειμένων του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Σε αυτόν οφείλεται η συλλογή και η διάδοση των σχολίων του Ευτόκιου πάνω σε έργα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Δημιούργησε μια αξιόλογη συλλογή με έργα του Αρχιμήδη, η οποία ολοκληρώθηκε κατά τον 9ο αι. από τον Λέοντα Συνέθεσε επίσης σύγγραμμα που διαπραγματευόταν το έργο του Ήρωνα *Περί καμαρικών.* Ο ίδιος ήταν δάσκαλος των μαθηματικών, αλλά και ιδρυτής σχολής μηχανικών. Σύμφωνα με τον Ευτόκιο, ο Ισίδωρος ήταν επίσης εφευρέτης οργάνου, σε μορφή διαβήτη, για τη χάραξη παραβολών.

Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (6ος αι. μ.Χ.). Γεωμέτρης και μαθηματικός. Μαθήτευσε κοντά στον Αμμώνιο, στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, στον οποίο αφιέρωσε διάφορα συγγράμματά του, όπως το Περί σφαίρας και κυλίνδρου και το Περί μετρήσεως του κύκλου. Έγραψε υπομνήματα στα τέσσερα πρώτα βιβλία των Κωνικών τομών του Απολλώνιου του Περγαίου, τα οποία είναι αφιερωμένα στον περίφημο αρχιτέκτονα της Αγίας Σοφίας, Ανθέμιο τον Τραλλιανό, και έχουν επιθεωρηθεί από τον Ισίδωρο τον

Μιλήσιο. Επίσης, έγραψε διάφορα μελετήματα σχετικά με τους κανόνες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης καθώς και για την τετραγωνική ρίζα.

Ο **Λέων ο μαθηματικός**: μεγάλος Βυζαντινός λόγιος και «πρύτανης» του Πανδιδακτηρίου της Κωνσταντινουπόλεως Λέων. Ήταν γνωστός στην εποχή του ως Λέων ο φιλόσοφος ή μαθηματικός. Γεννήθηκε κάπου στη Θεσσαλία, γύρω στο 790 μ.Χ. Τη στοιχειώδη εκπαίδευση την έλαβε στην Άνδρο, όπου και πέρασε τα παιδικά του χρόνια. Κατόπιν, σπούδασε γραμματική στην Κωνσταντινούπολη, καθώς και φιλοσοφία. Η μεγάλη του αγάπη όμως ήταν οι θετικές επιστήμες. Γι' αυτό ξαναγύρισε στην Άνδρο και, υπό την καθοδήγηση κάποιου σοφού δασκάλου – μοναχού, άρχισε την αναζήτηση σπάνιων χειρογράφων μαθηματικών και αστρονομίας.

Το έργο του Λέοντος ως μαθηματικού – αστρονόμου αλλά και μηχανικού ήταν πολυτιμότατο. Πρώτος παγκοσμίως εισήγαγε τα γράμματα αντί των αριθμών τόσο στη θεωρητική αριθμητική όσο και στην άλγεβρα (π.χ. στις εξισώσεις) και όχι οι Άραβες όπως νομίζουν πολλοί (οι οποίοι εισήγαγαν ως αριθμητικά σημεία τους ινδικούς αριθμούς που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα). Διέσωσε όλα τα συγγράμματα μεγάλων Ελλήνων επιστημόνων όπως του Απολλώνιου, του Περγαίου, του Θεωνά του Αλεξανδρέως, του μεγάλου Ευκλείδη – με ερμηνευτικά σχόλια του ιδίου, χρησιμοποιημένα κατόπιν κατά κόρον στη Δύση – του Αρχιμήδη και του Πτολεμαίου και φρόντισε για τη μεταφορά πολλών εξ αυτών των έργων στην αυλή του χαλίφη. Επίσης, συνέταξε αστρονομικούς πίνακες και διόρθωσε ένα λάθος του αστρονόμου Πορφύριου σχετικά με την κίνηση των πλανητών. Δυστυχώς από το μεγάλο συγγραφικό του έργο δεν σώζεται τίποτα, με την εξαίρεση των σχολίων του Ευκλείδη, λόγω του χρόνου και, κυρίως, του θρησκευτικού φανατισμού κάποιων εικονολατρών, που μετά τον θρίαμβο της Ορθοδοξίας και την επικράτηση της λατρείας των εικόνων, «εξαφάνισαν» τα έργα του εικονομάχου επιστήμονα, μετά το θάνατό του.

Πιο γνωστό όμως κατέστη για την τελειοποίηση του αρχαίου συστήματος τηλεπικοινωνίας, του οπτικού τηλέγραφου. Ως γνωστόν φρυκτωρικούς πύργους χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι από την αρχαιότητα για να προειδοποιούν για επικείμενες επιδρομές. Οι «*αλυσίδες*», όμως, των φρυκτωριών είχαν μήκος μόνο μερικών δεκάδων χιλιομέτρων. Ο Λέων δημιούργησε μία αλυσίδα μόλις επτά φρυκτωρικών πύργων – σταθμών, μήκους περίπου δύο χιλιάδων χιλιομέτρων από την Κωνσταντινούπολη ως την Ταρσό της Κιλικίας, τους οποίους και έκτισε στις ψηλότερες κορυφές των οροσειρών που μεσολαβούσαν μεταξύ των δύο πόλεων, ώστε η φωτιά τους να είναι ορατή από εκατοντάδες χιλιόμετρα μακριά. Το σύστημα μετέδιδε όχι ένα αλλά δώδεκα διαφορετικά μηνύματα (όπως επιδρομή, νίκη ή ήττα, υποχώρηση του εχθρού, πυρκαγιά, σεισμό ή πλημμύρα κ.α.). αυτό ήταν δυνατό χάρη σε δύο τέλεια συγχρονισμένα μηχανικά ρολόγια (τα πρώτα μηχανικά ρολόγια στην ιστορία!) τοποθετημένα στα δύο άκρα της φρυκτωρικής αλυσίδας, που λειτουργούσαν με βάση μία διαίρεση της ημέρας σε σταθερές ώρες με αντίστοιχα συμφωνημένα 12 μηνύματα. Με το παραπάνω σύστημα, το αυτοκρατορικό επιτελείο στην Κωνσταντινούπολη μπορούσε να πληροφορηθεί για το τι συνέβαινε στο καίριας σημασίας ανατολικό μεθοριακό μέτωπο από μία έως το πολύ έντεκα ώρες! Αυτή η ταχύτητα μετάδοσης μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις ξεπεράστηκε μόλις το 19ο αιώνα με την ανακάλυψη του τηλέγραφου! Δυστυχώς, το σύστημα λειτούργησε για πολύ λίγο γιατί, όταν οι Άραβες κατέλαβαν την Ταρσό μερικές δεκαετίες αργότερα, κατέστρεψαν και το μηχανικό ρολόι της πόλης.

Τέλος, ο Λέων, βαθύς γνώστης της αλεξανδρινής τεχνολογίας, δημιούργησε διάφορα «αυτόματα» μεταλλικά αντικείμενα για τα βυζαντινά ανάκτορα, αξιοποιώντας την υδροστατική και αεροστατική πίεση. Έτσι, κατασκεύασε και τοποθέτησε στην αίθουσα του θρόνου, στον «Χρυσοτρίκλινο» (ανάκτορο του 6ου αι.), έναν επιχρυσωμένο πλάτανο που στα κλαδιά του κουνούσαν τα φτερά τους και κελαηδούσαν χρυσά πουλιά, ενώ στην κορυφή του ένας αυτόματος χρυσός άγγελος έπαιζε σάλπιγγα. Κάτω από το δένδρο ολόχρυσοι αυτόματοι οινοχόοι κερνούσαν κρασί τους καλεσμένους του αυτοκράτορα! Στη μαρμάρινη βάση του θρόνου, ορειχάλκινα επιχρυσωμένα λιοντάρια, όποτε κάποιος πλησίαζε το θρόνο, σηκώνονταν όρθια, άνοιγαν το στόμα και βρυχιόνταν! Παρόμοια μηχανήματα είχε κατασκευάσει ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς για τους Πτολεμαίους, ενώ άλλα αυτόματα προϋπήρχαν στα βυζαντινά ανάκτορα και στην αυλή του Άραβα χαλίφη για τον εντυπωσιασμό των ξένων.

Το πιο εντυπωσιακό επίτευγμα του Λέοντος στον τομέα του αυτοματισμού υπήρξε κατά το «Περί βασιλείου τάξεως», έργο του Κωνσταντίνου ΄Ζ Πορφυρογέννητου (912 – 949) το «μηχανικόν σάρωθρον», δηλαδή μια μηχανική χελώνη που καθάριζε τους δρόμους της Βασιλεύουσας, ίσως χρήσιμη και για τους σύγχρονους οδοκαθαριστές! Όλα αυτά τα εντυπωσιακά μηχανήματα, σύμφωνα με τις πηγές αχρηστεύτηκαν από τους ίδιους τους Βυζαντινούς σε εποχές οικονομικής δυσπραγίας, οπότε είτε τα έλιωναν για να κόψουν χρυσά και χάλκινα νομίσματα, είτε επειδή δεν μπορούσαν να τα συντηρήσουν, τα πετούσαν.

Ο **Μάξιμος Πλανούδης :** Λόγιος μοναχός και συγγραφέας. Γεννήθηκε περί το 1255 στη Νικομήδεια της Βιθυνίας και πέθανε περί το 1305 στην Κωνσταντινούπολη. Ήταν κάτοχος ευρύτατης θεολογικής και φιλολογικής παιδείας, καθώς και συγγραφέας θεολογικών και φιλολογικών έργων. Υπήρξε φορέας και εκφραστής της παλαιολογίας αναγέννησης των κλασσικών ελληνικών σπουδών. Από το 1280 δίδασκε στην Κωνσταντινούπολη στην περίφημη Μονή της Χώρας.

Αξιοσημείωτο είναι ότι έμαθε και λατινικά, σε μια εποχή που ελάχιστοι τα γνώριζαν. Τα χρησιμοποίησε μεταφράζοντας πολλούς Λατίνους, κλασσικούς ή θεολόγους, αλλά και για να γνωρίσει καλύτερα τις απόψεις των Δυτικών και να τις καταπολεμήσει, ως σφοδρός πολέμιος της ένωσης των Εκκλησιών και οπαδός του Ανδρόνικου Β΄ Παλαιολόγου. Η θεολογική του συμβολή συνίσταται σε ειδική πραγματεία εναντίον της προσθήκης του Filioque από τους Λατίνους, σε ένα λόγο περί πίστεως, σε ύμνους, κανόνες, εγκώμια αγίων κ.ά. σημαντικότερη υπήρξε η συμβολή του στην φιλολογία. Έγραψε *Περί γραμματικής* και *Περί συντάξεως*, επιγράμματα και σχόλια σε έργα της ελληνικής γραμματείας.

Ο Πλανούδης σχολίασε επίσης έργα των μαθηματικών Ευκλείδη, Διόφαντου, Πτολεμαίου και του Αρατού. Σχολίασε επίσης έργα γεωγράφων και αστρονόμων. Στο έργο του *Ψηφοφορία κατ' Ινδούς*, εισήγαγε την χρήση των αραβικών-ινδικών αριθμών. Αποτελεί μαθηματική πραγματεία σχετικά με τη χρήση των ινδικών αριθμητικών ψηφίων και του μηδενός και περιλαμβάνει και μέθοδο υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας. Η αλληλογραφία του με τον αστρονόμο Μανουήλ Βρυέννιο, ανέδειξε την ευρύτητα των αστρονομικών του γνώσεων. Αναφέρεται ότι ο Χριστόφορος Κολόμβος, χρησιμοποίησε δικό του χάρτη για τα υπερπόντια ταξίδια του.

2.4.Η Διδακτική των Μαθηματικών τη Βυζαντινή Περίοδο

Τα σχολεία κατά τούς βυζαντινούς χρόνους λειτουργούσαν κυρίως σε χώρους εκκλησιαστικούς. Οι μαθητές έμεναν συνήθως μέσα σε αυτά και έτσι είχαν την δυνατότητα να αναπτύξουν στενές σχέσεις μεταξύ τους, οι οποίες συνέβαλλαν στη δημιουργία κλίματος πού ευνοούσε τις επιστημονικές συζητήσεις και την πολύωρη ενασχόληση με τα γράμματα. Βέβαια, όπως προκύπτει από τον βιενναίο ελλ. φιλ. κώδ. 65 (15ος αι.), φαίνεται να υπήρχαν και μαθητές, οι οποίοι για να σπουδάσουν μετακινούνταν σε άλλη πόλη, όπου κατοικούσαν πολλοί μαζί στον ίδιο χώρο πληρώνοντας ενοίκιο. Σχετικά με το είδος των μαθητών γνωρίζουμε ότι παλαιότερα υπήρχαν μαθητές κάθε ηλικίας, οι οποίοι μπορεί να ήταν κληρικοί, δημόσιοι υπάλληλοι, ακόμα και αξιωματούχοι μαζί με τα παιδιά τους. Η ύπαρξη αυτού τού είδους τού ακροατηρίου καθόριζε ως ένα βαθμό και το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης, η οποία όσον αφορά στα μαθηματικά τις περισσότερες φορές περιλάμβανε όχι μόνο κεφάλαια πρακτικής αριθμητικής και γεωδαισίας, αλλά και άλγεβρας. Επειδή αυτά τα κεφάλαια περιλαμβάνονται στο περιεχόμενο τού βιενναίου ελλ. φιλ. κωδ. 65, τίθενται ερωτήματα σχετικά με τη σύσταση τού ακροατηρίου, στο οποίο απευθυνόταν. Τούτο διότι τα κεφάλαια της λογιστικής και τής γεωδαισίας ήταν χρήσιμα κυρίως σε εμπόρους, χειροτέχνες, διοικητικούς υπαλλήλους, πρωτομάστορες, τοπογράφους, ενώ της άλγεβρας σε μαθητές σχολείου. ενδεικτικά αναφέρουμε τα κεφάλαια της άλγεβρας στα οποία ο συγγραφέας προτείνει λύσεις για τις εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού. Οι λύσεις αυτές είναι εσφαλμένες, αλλά μέχρι το 1615 πού ο Vieta ανακάλυψε τον γενική τους λύση είχαν γίνει πολλές αποτυχημένες απόπειρες προς αυτήν την κατεύθυνση από τούς μαθηματικούς όλων των εποχών. Είναι δε σαφές ότι ένα τέτοιο θέμα καθαρά ερευνητικό δεν θα ήταν δυνατόν να ενδιαφέρει ανθρώπους πού επιζητούσαν πρακτικές γνώσεις, αφού μάλιστα έως σήμερα οι λύσεις των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού διδάσκονται στους μαθητές των τελευταίων τάξεων των Λυκείων.

Παλαιότερα στα σχολεία αυτά ξεκινούσαν συνήθως με ποίηση και ρητορική, και στο τέλος μάθαιναν μαθηματικά, αν και η σειρά δεν ήταν απολύτως καθορισμένη. Βέβαια οι περισσότεροι μαθητές δεν συνέχιζαν τις σπουδές τους στα ανώτερα μαθηματικά, διότι αφ' ενός μεν οι δάσκαλοι ήταν λιγοστοί, αφ' ετέρου δε υπήρχε έλλειψη χειρογράφων βιβλίων. Καθώς η τυπογραφία ανακαλύπτεται προς το τέλος τού 15ου αι. μ.Χ. τα χειρόγραφα αντέγραφαν πολλές φορές οι ίδιοι οι μαθητές. Οι περισσότεροι δάσκαλοι (Πλανούδης, Βρυέννιος, Γεώργιος Παχυμέρης) είχαν δικές τους βιβλιοθήκες αλλά το πλήθος των μαθητών πού δέχονταν ήταν περιορισμένο.

2.5.Ανώτερες και Ανώτατες σχολές στο Βυζάντιο

1. Η Σχολή των Αθηνών: Η Σχολή των Αθηνών θεωρείται το πρώτο συστηματικό Πανεπιστήμιο που ήταν συγκροτημένο κατά τις νεότερες αντιλήψεις. Ιδρύθηκε κατά τα τέλη του 1^{ου} αιώνα. Η πανεπιστημιακή διάθρωση της Σχολής είχε υποστεί μεταρρυθμίσεις από τον Μεγάλο Κωνσταντίνο (311-337). Το Πανεπιστήμιο έκλεισε τις πύλες του κατά το φθινόπωρο του έτους 529, κατόπιν απαγορευτικού διατάγματος του Ιουστινιανού.

2. Το Πανεπιστήμιο της Κωνσταντινουπόλεως: Το Πανεπιστήμιο αυτό ιδρύθηκε, κατά πρότυπο της Σχολής των Αθηνών, στους χρόνους του Μεγάλου Κωνσταντίνου (γύρω στο 320). Έλαβε επίσημο χαρακτήρα από το έτος 425 επί Θεοδοσίου του Β΄, ο οποίος διόρισε 25 καθηγητές. Επί Ιουστινιανού το Πανεπιστήμιο ονομάστηκε ''Οικουμενικόν Διδασκαλειον'' και απέκτησε τα χαρακτηριστικά του κρατικού Πανεπιστημίου. Το

Πανεπιστήμιο της Κωνσταντινουπόλεως κατά την εποχή του Ηράκλειου ονομαζόταν "Πανδιδακτήριον" και είχε τα διδακτήριά του μέσα στον περίβολο του "Ιερού Παλατιού". Έτσι, μέχρι πτώσεως του Βυζαντίου το Πανεπιστήμιο διατηρήθηκε συνεχώς σχεδόν 12 αιώνες και προσέλκυε όχι μόνο τους Έλληνες αλλά και ξένους της Ανατολής, αλλά και φοιτητές από την Δύση.

3. Η Σχολή της Βηρυτού: Λειτούργησε από τον 3^{o} αιώνα μ.Χ. μέχρι το 551.

4. Η Σχολή της Αντιόχειας: Η φιλοσοφική και θεολογική Σχολή της Αντιόχειας ιδρύθηκε τον 3^{o} μ.Χ. αιώνα και λειτούργησε μέχρι το 460.

5. Η Σχολή της Έδεσσας: Στην Έδεσσα της Μεσοποταμίας ιδρύθηκε κατά τον 3^{o} αιώνα φιλοσοφική και θεολογική Σχολή η οποία λειτούργησε μέχρι το 489.

6. Η Σχολή της Περγάμου.

7. Η Σχολή της Αλεξάνδρειας: Κατά την Τρίτη περίοδο της αρχαίας ιστορίας της, που αρχίζει το 325 μ.Χ., εξακολουθεί να λειτουργεί η φιλοσοφική Σχολή της Αλεξάνδρειας. Η λειτουργία της συνεχίζεται μέχρι το 528 που την έκλεισε ο Ιουστινιανός.

8. Η Πατριαρχική Σχολή ή Πατριαρχική Ακαδημία: Η Σχολή αυτή ιδρύθηκε τον 13^{o} αιώνα και λειτουργούσε υπό την εποπτεία του Πατριαρχείου.

9. Η Σχολή της Νίκαιας: Η πανεπιστημιακή μόρφωση του Βυζαντίου συνεχίσθηκε στη Νίκαια, προσωρινή πρωτεύουσα της αυτοκρατορίας, με την ίδρυση, το 1206, της Σχολής της Νίκαιας που λειτούργησε μέχρι το 1261.

10. Η Σχολή της Θεσσαλονίκης: Η Σχολή αυτή ιδρύθηκε το 1330.

11. Η Σχολή του Νικηφόρου Γρηγορά.

12. Η Σχολή του Μυστρά: Ιδρύθηκε το 1390.

13. Η Σχολή της μονής του Προδρόμου.

14. Η Ακαδημία των θετικών επιστημών στην Τραπεζούντα.

15. Η Σχολή της Σμύρνης: Ιδρύθηκε το 13^{o} αιώνα.

16. Η Σχολή της Γάζας.

17. Η Σχολή της Καισάρειας.

18. Η Σχολή της Δαμασκού.

19. Η Σχολή της Εφέσου.

2.6.Ο βιενναίος ελληνικός φιλολογικός . κώδικας. 65

Σημαντικό έργο στον τομέα των μαθηματικών της Βυζαντινής περιόδου είναι ο βιενναίος ελληνικός φιλολογικός . κώδικας. 65 για τον οποίον γίνεται εκτενής αναφορά στη συνέχεια και επί του οποίου στηρίχτηκε ως επί το πλείστον η παρούσα εργασία.

Ο βιενναίος ελλ. φιλ. κωδ. 65 είναι χαρτώος και χρονολογείται στον 15ο αι. αποκτήθηκε από τον Augerius von Busbeck, όταν αυτός ήταν πρεσβευτής τού αυτοκράτορα Φερδινάνδου Α' στην αυλή τού σουλτάνου Σουλεϊμάν Β' (1555-1562 μ.Χ.). Περιέχει ένα βιβλίο αριθμητικής με λυμένα προβλήματα (φ. 11r-126r), τα οποία καλύπτουν ένα ευρύτατο πεδίο θεμάτων κατάλληλων για διδασκαλία τόσο στο σημερινό δημοτικό όσο στο γυμνάσιο και στο λύκειο.

Η τεράστια ποικιλία τον προβλημάτων καθιστά δύσκολο τον καθορισμό τού είδους των μαθητών στους οποίους απευθύνεται. Αν επρόκειτο για ολοκληρωμένο πρόγραμμα διδασκαλίας, τότε ενδεχομένως θα μπορούσε το ακροατήριο να αποτελείτο από μαθητές όλων των τάξεων της σημερινής πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και από άτομα τα οποία προορίζονταν να ακολουθήσουν το επάγγελμα τού κρατικού λειτουργού. εκτός από το είδος των προβλημάτων, εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μαθηματική ορολογία, η οποία χρησιμοποιείται και είναι ως επί το πλείστον άγνωστη στων σύγχρονο μαθηματικό.

Θεωρείται σκόπιμο να αναφερθούν κάποια από αυτά . Μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- Ο συγγραφέας ονομάζει τον αριθμό "*ψήφον*" και ορίζει το μηδέν ως "*ουδέν*"· γράφει ότι το ουδέν *"ουδενός εστί δηλωτικόν",* και το συμβολίζει με το ανεστραμμένο h. Χρησιμοποιεί τον όρο μηλιούρια ή μιλούνια αντί τού ορθού πού είναι μιλλιούνια, προκειμένου να δηλώσει τα εκατομμύρια.
- Για την πράξη τού πολλαπλασιασμού χρησιμοποιεί δύο σχήματα: το "*δίπλευρον*" (τά ψηφία τού πολλαπλασιαστή τοποθετούνται κατακόρυφα), και το "*οικός*" ("*διά τό τετραγωνικώς λαμβάνειν τούς ψήφους*").
- Για τόν πολλαπλασιασμό, πού σήμερα λέμε ότι εκτελούμε χιαστί (όταν π.χ. θέλουμε να κάνουμε δύο κλάσματα ομώνυμα), χρησιμοποιεί την έκφραση "*πολλαπλασιάζω σταυροειδώς*".
- Οι όροι "*επιτρεπτικός αριθμός*" και "*ανυπόστροφος*", χρησιμοποιούνται για να δηλώσει ο συγγραφέας τούς σύνθετους και τούς πρώτους αριθμούς αντίστοιχα. Σημειωτέον, ότι ο όρος πρώτος αριθμός χρησιμοποιείται για να δηλώσει τον αριθμό, ο οποίος έχει ως διαιρέτες μόνο τον εαυτόν του και τη μονάδα, ενώ ο όρος σύνθετος αριθμός δηλώνει τον αριθμό, ο οποίος έχει και άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτόν του και τη μονάδα.
- Οι εκφράσεις "*η διά των τριών μεταχείρισις*" και "*διά τού κανόνος τού διά των τριών*" αντιστοιχούν στη σημερινή μέθοδο των τριών. Μία συνήθης ονομασία αυτού τού

κανόνα ήταν εμπόρων κλεις, η οποία δείχνει τη σημασία του στις εμπορικές συναλλαγές. ο συγγραφέας χρησιμοποιεί πολύ συχνά τη μέθοδο των τριών, και δεν παραλείπει κάθε φορά, να την περιγράφει αναλυτικά.

- Ο όρος "*αφεξαίρεσις*" σημαίνει τη σημερινή αφαίρεση.
- Σχετικά με τις αριθμητικές προόδους επισημαίνουμε, ότι μολονότι ο όρος "αριθμητική πρόοδος" δεν συναντάται στο χειρόγραφο, εντούτοις υπάρχουν προβλήματα υπολογισμού αθροισμάτων αριθμών, οι οποίοι είναι στην πραγματικότητα όροι αριθμητικής προόδου .
- Ο όρος "*φυσική ρίζα*" χρησιμοποιείται για την ακεραία ρίζα (π.χ. την $\sqrt{16}$), και "*νόθος ρίζα*" για αυτή πού δεν δίνει ακέραιο αποτέλεσμα (π.χ. την $\sqrt{30}$).
- Ο όρος "*εφίμικτος ρίζα*" χρησιμοποιείται για να δηλώσει το άθροισμα των ριζών δύο αριθμών. Σημειωτέον, ότι σήμερα δεν χρησιμοποιούνται αντίστοιχοι ορισμοί. Αξίζει να αναφέρουμε, ότι ο συγγραφέας δίνει αξιόλογες μεθόδους υπολογισμού ριζών δεύτερης και τρίτης τάξης.
- Στις εξισώσεις πρώτου έως και τετάρτου βαθμού ο συγγραφέας ονομάζει "*αριθμόν*" κάθε πραγματικό αριθμό και "*πράγμα*" τον άγνωστο χ.
- Οι όροι "*τζένσο*"," *κούβον*", και "*κάδρον*" χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν την δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβο) και τετάρτη δύναμη τού αγνώστου χ αντίστοιχα.
- Οι γενικές λύσεις για τις εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι δείχνουν την προσπάθεια πού κατέβαλλαν τότε για την εύρεση γενικής λύσης. Σημειώνουμε, ότι ο σημερινός όρος ισότητα δύο μελών εμφανίζεται στο χειρόγραφο, ως ομοιότητα.
- "*Ρομβοειδές*" ονομάζεται κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Σήμερα βέβαια αυτός ο όρος δεν χρησιμοποιείται· εμείς ονομάζουμε ρόμβο το παραλληλόγραμμο, το οποίο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ονομάζονται τετράγωνα. Δεν υπάρχουν δε οι όροι τού ισοσκελούς και τού ισοπλεύρου τριγώνου· όποτε ο συγγραφέας αναφέρεται σε αυτά τα αποκαλεί τρίγωνα με δύο ή με τρείς ίσες πλευρές. Παρατηρούμε, ότι σε ορισμένα προβλήματα τού χειρόγραφου μας χρησιμοποιείται ο όρος ύψος τριγώνου για να δηλώσει τη διχοτόμο της γωνίας πού κείται απέναντι από τη βάση του.
- Ο όρος" *μηνικόν κέρδος*" αναφέρεται σε προβλήματα τόκου και σημαίνει το κέρδος ενός μηνός. ο όρος "*ενιαυτός*" δηλώνει την χρονική διάρκεια ενός έτους. Λείπει εντελώς ο σημερινός όρος επιτόκιο, ο οποίος δηλώνει το ετήσιο κέρδος των 100 νομισματικών μονάδων.

- ο όρος "*φίνον*" (πρβλ. affinage) αναφέρεται στο καθαρότατο ασήμι των 12 ουγγιών, και φίνον μάλαγμαν στον χρυσό των 24 καρατίων. όταν όμως πρόκειται για παρασκευή ασημιού μικρότερης καθαρότητας χρησιμοποιείται ο όρος επιβολή χαλκώματος, ενώ για την παρασκευή καθαροτέρου μετάλλου ο όρος " *λογαρίζω*".
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται ως "*κανών της σκάδρας*", και διευκρινίζεται από τον συγγραφέα ότι "*σκάδρα*" σημαίνει τετράγωνο.
- ο όρος "*άρριζον τζάκισμα κορυφής*" αναφέρεται σε κάποιον αριθμό, τού οποίου ζητείται η τετραγωνική ρίζα, και ο οποίος είναι κλασματικός με άρριζον (κατά τον συγγραφέα δεν μπορείς να υπολογίσεις τη ρίζα) παρανομαστή, όπως π.χ. 3/8, 7/14, κ.λπ. ο όρος ασχημάτιστον ή άτμητον τζάκισμα χρησιμοποιείται για κλάσματα (π.χ. 13/14, 7/16), τα οποία -όπως εξηγεί ο συγγραφέας- δεν μπορούν να λάβουν μετά από απλοποίηση μία από τις ακόλουθες μορφές: 1/2 ή 1/3 ή 1/4. Σύμφωνα με τον συγγραφέα η ρίζα αυτών των κλασμάτων δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί.
- Στο κεφάλαιο της στερεομετρίας δεν αναφέρονται καν οι όροι παράπλευρη επιφάνεια ή ολική επιφάνεια στερεού, και όταν ο συγγραφέας ζητεί την εύρεση τού περιεχομένου τού στερεού αυτό σημαίνει τον υπολογισμό τού όγκου του.
- Στο χειρόγραφό του βιενναίου ελληνικού φιλολογικού . κώδικα. 65 χρησιμοποιείται πολύ συχνά ο όρος απόδειξη, όταν πρόκειται για απλή επαλήθευση της ορθότητας των πράξεων και όχι για κάποια διαδικασία, η οποία σχετίζεται με τη θεωρία. Συχνά μάλιστα αυτή η επαλήθευση πραγματοποιείται με την ανάπτυξη μίας διαφορετικής μεθόδου επίλυσης τού ιδίου προβλήματος.

Το κείμενο του βιενναίου ελληνικού φιλολογικού κώδικα 65 συγκρινόμενο με τη γλώσσα των βυζαντινών κειμένων της εποχής αλλά και με την σημερινή παρουσιάζει, όπως θα περίμενε κανείς, ομοιότητες και σημαντικές διαφορές. Έτσι ορισμένοι όροι, όπως αυτός τού τριγώνου ή της ρίζας παραμένουν αναλλοίωτοι. Οι περισσότεροι όμως δεν χρησιμοποιούνται πλέον σήμερα, ενώ κάποιοι άλλοι θεωρούνται λανθασμένοι. Π.χ. σήμερα θα ήταν σοβαρό λάθος να ονομάζαμε τετράγωνο ένα τυχόν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο· το ίδιο θα ίσχυε και αν ζητούσαμε τον υπολογισμό τού ύψους ενός τριγώνου εννοώντας τη διχοτόμο της γωνίας πού είναι απέναντι από τη βάση του.

Τα Βυζαντινά κείμενα διακρίνονται για την αρμονία και τον ρυθμό τους πού βασίζονται στη συμμετρική σχέση τονιζόμενων συλλαβών και συλλαβικών ενοτήτων. Τούτο ισχύει και για τον βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικα. 65 . Διαβάζοντάς το έχει κανείς την αίσθηση, ότι ο συγγραφέας του επιδιώκει να το κάνει να μοιάσει με ποίημα. Πιστεύουμε, ότι η σκοπιμότητα είναι αφενός μεν αισθητική, διότι ο ρυθμός προσδίδει κάλλος, αφετέρου δε παιδαγωγική, διότι τα ανωτέρω χαρακτηριστικά τού λόγου "ποιούσιν ευσχήμονα τήν ψυχήν" αυτών πού ακούσουν. εξ άλλου, αναφερόμενοι και στην ψυχολογία των μαθηματικών, σύμφωνα με σχετικές έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι ο μαθητής αφομοιώνει ευκολότερα την ύλη υπό μορφή ποιήματος, η οποία χαρακτηρίζεται από μία μετρική, ένα ρυθμό. Επειδή η γλωσσοπλαστική τάση των Βυζαντινών έχει δημιουργήσει ένα τεράστιο λεξικογραφικό θησαυρό, για τον οποίο γνωρίζουμε πολύ λίγα (σε κείμενα ρητορικά, ιστοριογραφικά, νομικά, μαθηματικά), και η κλασικίζουσα γλώσσα αναμιγνύεται με την απλούστερη των Ευαγγελίων και τη δημώδη, χωρίς να υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ τους, οι ίδιοι οι συγγραφείς (π.χ. Μιχαήλ Ψελλός, Θεόδωρος Πρόδρομος) παρουσιάζουν διαφορετικές γλωσσικές τάσεις. Βέβαια υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας σύμφωνα με τον οποίο, ό,τι έχει γραφεί από υποτιθέμενους αγράμματους είναι δημώδες. Αυτό όμως κατά τον Ν. Τωμαδάκη δεν μπορεί να είναι απόλυτο και τούτο διότι συνήθως νόθευαν τον αττικισμό με την κοινή γλώσσα, η οποία είχε πάρει πολλά στοιχεία από την λατινική, αλλά και αυτή η κοινή ακόμα νοθευόταν από δημώδεις τύπους. όμως τα πράγματα φαίνεται να περιπλέκονται περισσότερο αφού ακόμα και η μεσαιωνική δημώδης νοθεύεται συχνά από τύπους λογιότερους και η νεοελληνική δημώδης αναμειγνύεται με στοιχεία συντηρητικότερα.

Από τον 12° αι. μ.Χ. η παιδεία είχε ως σκοπό να γράφουν οι νέοι την αττική διάλεκτο, αλλά δεν πρέπει να παραγνωρίζουμε το γεγονός ότι ο Βυζαντινός, όταν γράφει περί διδακτικών θεμάτων, αγωνίζεται να διακριθεί ακόμα και με το ύφος της γραφής, ιδιαίτερα μάλιστα όταν καταγίνεται με προβλήματα. η συγγραφή διδακτικών θεμάτων συγκρίνεται με αυτήν των δοκιμίων πού εκθέτουν επιστημονικές γνώσεις με την κατάλληλη εκλαϊκευτική μορφή. Οι Βυζαντινοί συγγραφείς κατείχαν την τέχνη να διδάσκουν λαμβάνοντας υπόψη τους το επίπεδο μόρφωσης τού μαθητού καθώς και τον ευρύτερο κύκλο των ενδιαφερόντων του, και προσπαθώντας να κάνουν ζωντανή την διδασκαλία τους την εμπλούτιζαν και με πνευματώδεις παρατηρήσεις ακόμα. επί των Παλαιολόγων η ροπή προς την καθαρεύουσα φθάνει στο αποκορύφωμα και έτσι μεγαλώνει τί χάσμα μεταξύ καθομιλουμένης και γραφομένης. επιπλέον δεν πρέπει να αγνοηθεί το ότι οι Βυζαντινοί έπρεπε σε πολλά ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά) να εκφράσουν πλήθος νέων ιδεών και έτσι ήταν πρακτικά αδύνατο να περιορισθούν στο κλασσικό λεξιλόγιο.

Όσον αφορά στον βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικα. 65 η χρησιμοποιούμενη γλώσσα δείχνει την προσπάθεια πού κατέβαλλαν κάποιοι Βυζαντινοί για να γράφουν στην επιθυμητή αττική διάλεκτο, ίσως τεχνητή και εξεζητημένη, ίσως ακόμη και πολύ διαφορετική από την καθομιλουμένη. Όμως, βάσει της χρησιμοποιούμενης επιστημονικής ορολογίας, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η γλώσσα τού χειρογράφου ως λογία, με εμφανή όμως τη λατινική επιρροή. Βέβαια η λατινική επιρροή αποδεικνύεται και από ορισμένες μεθόδους, τις οποίες χρησιμοποιεί ο συγγραφέας. αναφέρουμε ως παράδειγμα τη μέθοδο της ταβλέττας (τολέττας), την οποία χρησιμοποιεί σε προβλήματα εμπορικών συναλλαγών.

Σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων παρατηρούμε ότι κάποιες από αυτές, όπως π.χ. της δοκιμής τού πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της πρόσθεσης πολλών αριθμών, σήμερα είναι άγνωστες. Μάλιστα αξίζει να αναφέρουμε, ότι σε καμία βαθμίδα της εκπαίδευσης δεν διδάσκεται σήμερα η μέθοδο δοκιμής αθροισμάτων πολλών προσθετέων. Το ίδιο συμβαίνει και με τις ρίζες τρίτης τάξης δηλαδή, δεν διδάσκεται πλέον ο τρόπος υπολογισμού τους.

Η σύγκριση της μαθηματικής ορολογίας και των μεθόδων εκείνης της εποχής με τις αντίστοιχες σημερινές αποδεικνύει, ότι στο πέρασμα τού χρόνου άλλοι μεν τρόποι επίλυσης και επιστημονικοί όροι εξαφανίζονται, άλλοι δε εξελίσσονται, ενώ άλλοι παραμένουν ίδιοι. Αυτά τα στοιχεία είναι σημαντικά, διότι βοηθούν στο να σχηματίσουμε μία καλύτερη εικόνα της εξέλιξης των μεθόδων διδακτικής των μαθηματικών, όσον αφορά στην επινόηση μεθόδων επίλυσης προβλημάτων και τρόπων διδασκαλίας για την κατά τί δυνατόν καλύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται μαθηματικά προβλήματα που περιέχονται στον βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικα 65 . Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι η παρακάτω:

- Παράθεση του μαθηματικού προβλήματος και επίλυση του, σύμφωνα με τον βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικα 65
- Επίλυση του ίδιου προβλήματος σύμφωνα με τις σύγχρονες διδασκόμενες μεθόδους

Τα παραδείγματα που αναπτύχθηκαν και επιλύθηκαν παρατίθενται αναλυτικά στη συνέχεια

3.1 Περί του πως εστί τίς άν μερισθής έχει διαμερίσαι τά ιγ πρός τό γενέσθαι τών ιγ ο διαμερισμός ε, καί νά εναπομείνωσιν καί δ τζάκισμα.

Έστω ότι ζητείς πώς εστί ειδέναι τίς άν μερισθής έχει διαμερίσαι τά ιγ πρός γενέσθαι τών ιγ ο διαμερισμός ε καί νά εναπομείνωσιν καί δ τζάκισμα.

Έχεις δέ τούτο ειδέναι ούτος: Πάντοτε άφελε άπερ ζητείς απομείναι, εξ ων ζητείς διαμερίσαι, τουτέστι άφελε τά δ εκ τών ιγ καί απομένοσιν θ. Ζήτει ποσάκις έχεις προσθήναι τά ιγ είς τά θ ώστε γενέσθαι ο αριθμός τούτων ομού, είς ε μεριζόμενος μή έχων τζάκισμα· άπερ ε είπομεν πρός τό γενέσθαι τών ιγ ο διαμερισμός ε·β-ίς ούν ιγ γίγνονται κς. Ένωσον τά κς μετά τών θ καί γίγνονται ομού λε. Μέρισον τά λε μετά τών ε καί γίγνεται ο τούτων διαμερισμός ζ. Πρόσθες επί τών λε ών εμέρισας, τά δ άπερ ζητείς απομείνε καί γίνονται ομού λθ. Καί τά μέν λθ εστί τά ιγ, τά δέ ζ εστί ό μερισθής όν ζητείς.

Μέρισον νύν τά λθ ού μετά τών ζ αλλά μετά τών ιγ, καί γίνεται ο τούτων διαμερισμός γ. Μέρισον τόν ένα διαμερισμόν μετά τού ετέρου, τουτέστι τά ζ μετά τών γ καί γίνεται ο έκ τών δύο διαμερισμών διαμερισμός, β α/γ. Εστί δέ καί ο μερισθής όν ζητείς τών ιγ, τά β α/γ, άπερ β α/γ εστί τά ζ. Τά ιγ δέ εστί τά λθ, καθώς είπομεν.

Μέρισον γάρ τά ιγ άπερ εστί τρίτα λθ, μετά τών ζ/γ ών ποιούσιν τά β α/γ καί γίνεται ο τούτων διαμερισμός ε καί απομένει καί δ τζάκισμα ως εζήτησας.

Οι παραπάνω αριθμοί είναι οι εξής :

ιγ = 13 , ε = 5 , δ = 4 , θ = 9 , κς = 26 , λε = 35 , λθ = 39 , ζ=7 , γ = 3 , β α/γ = 2 1/3 , ζ/γ = 7/3

<u>Με τι πρέπει νά διαιρίσουμε τό 13 ώστε νά έχουμε πηλίκον 5 καί "τζάκισμα"4.</u>

Ακολουθεί τήν εξής πορεία πράξεων: 13-4=9, 13*2=26, 26+9=35, 35/5=7, 35+4=39. Καί γράφει χαρακτηριστικά, πώς τά μέν 39 είναι τά 13, τά δέ 7 είναι ο μερισθής, όν ζητείς. Οπότε 39/13=3, καί 7/3= 2 1/3 ο ζητούμενος μερισθής. Δηλαδή τά 39/3 άν διαιρεθούν με τά 7/3 είναι σαν νά διαιρούμε τά 39 με τά 7, οπότε έχουμε πηλίκον 5 καί υπόλοιπο 4.

Παρατηρούμε πώς κατ᾽ ουσίαν επιλύει τήν εξίσωση 13*3=5*3χ+4, ἢ 13=5*χ+4/3, τό οποίο γιά εμάς σημαίνει πώς διαιρούμε τό 13 μέ τό 2 1/3 προκειμένου νά έχουμε πηλίκον 5 καί υπόλοιπο 4/3. Ίσως γι' αυτόν τον λόγο νά χρησιμοποιεί τον όρο ″τζάκισμα 4″, καί όχι ″υπόλοιπο 4″. Η σκέψη του είναι λοιπόν νά βρεί κάποιο πολλαπλάσιο του 13, ώστε άν τό διαιρέσει με τό 5, νά έχει υπόλοιπο 4. Σ' αυτό τό σημείο πρέπει νά σημειωθεί πώς στήν ταυτότητα τής διαίρεσης:

κ*13=5*κχ+4, μέ κ ακέραιο, τό 5 μπορεί νά είναι πηλίκον ή καί διαιρέτης.

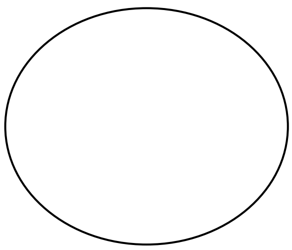
Στην σημερινή εποχή αυτό το πρόβλημα θα το λύναμε με τον εξής τρόπο:

$$13\times 3 = 5\times 3x + 4 \Rightarrow$$
$$39 = 15x + 4 \Rightarrow$$
$$\frac{35}{15} = x \Rightarrow$$
$$x = \frac{7}{3}$$

3.2.Περί του πως εστί εκ της περιμέτρου του κύκλου ειδέναι την τούτου διάμετρον .

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, βυζαντινά σύμβολα

Έστω κύκλος τις όστις εστί ή τούτου πιθαμών κβ. Ζητείς δε ειδέναι και την τούτου διάμετρον . Δεί ουν πρώτον γιγνώσκειν ότι παντός κύκλου περίμετρος , τριπλάσιον λόγον και α/ζ έχει εκ της διαμέτρου αυτού. Ποίησον ουν έβδομα (30) ακέραια γ και α/ζ. Τα δε γ και α/ζ γίγνονται κβ έβδομα . Ποίησον και τας σπιθαμάς της περιμέτρου έβδομα ζ-κις ουν κβ γίγνονται ρνδ έβδομα. Μέρισον τά ρνδ έδβομα μετά των κβ εβδόμων και γίνεται ο τούτων διαμερισμός ζ. Εστί δε η διάμετρος του κύκλου σπιθαμών ζ , όστις κύκλος έχει περίμετρον σπιθαμών κβ.



α

αεδ

ββ

ζ

Ωσαύτως δε και παντός κύκλου ζητών ειδέναι διάμετρον , ποίησον την του ζητουμένου κύκλου περίμετρον , έβδομα , και μέρισον τα γενόμενα έβδομα πάντοτε μετά των κβ εβδόμων ών ποιούσιν τα (35) γ και α/ζ . Και όσος γένηται ο τούτων διαμερισμός , τοσούτων σπιθαμών εστί η του ζητούμενου κύκλου διάμετρος.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Μαθ. Σχ. Του κεφ. 167.(ρξζ).Εύρεση της διαμέτρου κύκλου από την περίμετρον αυτού.

Θεωρεί την περίμετρο ίση με 22 σπιθαμές , και διαιρεί με την διάμετρο λέγοντας , ότι αυτή η διαίρεση δίνει πάντα 3 1/7=22/7. Κατά συνέπεια η διάμετρος θα είναι ίση με 22/(22/7)=7 σπιθαμές . Προφανώς το 3 1/7 αντιπροσωπεύει τον αριθμό π, δηλαδή αποτελεί μια προσέγγιση του π=3,14159...

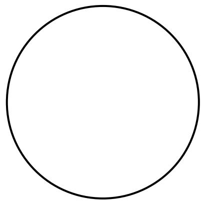
Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Το πρόβλημα μας ζητάει να βρούμε μέσα από την περίμετρο την διάμετρο του κύκλου .

Έστω κύκλος Ορ

$L=2\pi\rho$

$L=\pi\delta$



3.3. Περί του τι εστί ρίζα αριθμού και τι εστί κορυφή, και πως εστί ειδέναι από μεν της ρίζης την κορυφήν, από δε της κορυφής την ρίζαν.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, Βυζαντινά σύμβολα

(20) Κορυφή μεν εστί πας τις πολλαπλασιασμός από τινος αριθμού εις εαυτόν πολλαπλασιαζομένου. Ρίζα δε εστί ο αριθμός, ο την κορυφήν πολλαπλασιάσας, ι-κις γαρ ι γίνονται ρ, και τα μεν ρ εστί κορυφή των ι, τα δε ι εστί ρίζα των ρ. Ωσαύτως και ια-κις ια γίνονται ρκα. Και τα μεν ρκα εστί κορυφή των ια, τα δε ια εστί ρίζα των ρκα. Ωσαύτως δε και πας τις έτερος αριθμός, κ’ αν τε ακέραιος εστί, κ’ αν τε έχη και α/β ή α/γ ή α/δ ή και όσον έλαττο μέρος έχεις ειπείν, εις εαυτόν πολλαπλασιαζόμενος, ο μεν εξ αυτού γενόμενος πολλαπλασιασμός κορυφή εστί του δι’ οθ γέγονε πολλαπλασιαζόμενος μείζων. Ρίζα δε εστί ο πολλαπλασιάζων αριθμός την αυξηνθείσαν κορυφήν, ανάλογης προς το της ρίζης μέγεθος.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Μαθ. Σχ. Του κεφ. 120. (ρκ). Τι εστί ρίζα αριθμού και τι εστί κορυφή;'Κορυφή εστί πας τις πολλαπλασιασμός από τινος αριθμού εις εαυτόν πολλαπλασιαζομένου'. 'Ρίζα δε εστί ο αριθμός ο την κορυφήν πολλαπλασιάσας'.

Δηλαδή για τον συγγραφέα η κορυφή είναι το τετράγωνο ενός αριθμού, και η ρίζα είναι κάποιος άλλος αριθμός, ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του δίνει τον αρχικόν αριθμό.

Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

$X^2 = \chi * \chi$

Π.χ. $2^2 = 2 * 2$, $4^2 = 4 * 4$

3.4.Περί του πως εστί ειδέναι αριθμούς τινας δύο τοιούτου μεγέθους ώστε είναι το α/δ(=1/4) μέρος του ενός ώσπερ το α/γ(=1/3) του ετέρου, και ότι όση αν γένηται η τούτων ποσότης ενωθέντων των δυο αριθμών, τοσαύτη γενέσθαι και πολλαπλασιασθέντων των δύο.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, βυζαντινά σύμβολα

Έστω ότι ζητείς πως εστί ειδέναι αριθμούς τινας δυο τοιούτον μεγέθους ώστε είναι το α/δ του ενός ώσπερ το α/γ του ετέρου, και ότι όση αν γένηται η τούτων ποσότης ενωθέντων των δύο αριθμών, τοσαύτη γενέσθαι η τούτων ποσότης και πολλαπλασιασθέντων των δύο αριθμών.

Έχεις δε και τουτου ειδέναι δια της μεταχειρίσεως του πράγματος(=μέθοδος των τριων με αγνωστο χ εξισωσης). (35) Και πρωτον μεν ευρε ένα αριθμό ώστε είναι το α/δ αυτού μέρος ώσπερ το α/γ του ετέρου, ως τα δ και γ. Το γαρ α/δ των δ όπερ εστί α, εστί α/γ μέρος των γ. Μέρισον δε τα δ δια των γ και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α και α/γ. Επεί ουν το μεν α/δ μέρος των δ όπερ εστί α, εστί α/γ μέρος (79v)(1) των γ, τα δε δ προς τα γ εστί α και α/γ, λεγέσθω ο μεν εις αριθμός πραγμα α, ο δε έτερος πραγμα α και α/γ ενός πράγματος.

Πολλαπλάσιασόν δε το α πραγμα μετά του ενός πράγματος και το α/γ πραγμα ουν α μετά ενός πράγματος και α/γ πολλαπλασιαζόμενον, άπαξ α και α/γ πολλαπλασιάζει τζένσον(=τετράγωνο του χ) α και α/γ ενός τζένσου. Έχεις ουν τζένσον α και α/γ ενός τζένσου. Ο δε κανών των τζένσων και των πραγμάτων λέγει, ως όταν τα πράγματα εισί όμοια των τζένσων, να ενώσης τα πράγματα και να μερίσης ταυτα δια των τζένσων, και ο εξελθών διαμερισμός εστί ο έλαττος αριθμός ον ζητείς.

Όδε λέγει ο κανών(5) τοιούτον εστί. Ένωσον το α πράγμα μετά του ενός πράγματος και α/γ, ων είπομεν ότι ο μεν εις αριθμός εστί πραγμα α, ο δε έτερος πραγμα α και α/γ.

γίνονται ομου πράγματα β και α/γ ενός πράγματος. Μέρισον δε τα β πράγματα και α/γ άπερ τρίτα ζ(=7), μετά του ενός τζένσου και α/γ άπερ τρίτα δ, και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α και γ/δ. Και ιδού ο έλαττος αριθμός εστί α και γ/δ.

Επεί δε ζητείς ειδέναι και τον ετέρον αριθμόν, λαβέ το α/γ του α και γ/δ όπερ εστί ζ/ιβ(=7/12), καθ' ον λόγον είπομεν το α/γ του ενός έστω ώσπερ το α/δ του ετέρου. Έχεις ουν ειδέναι τον τοιουτον αριθμόν ουτως:

$ζ^γ$ γ/δ

δ

α και γ/δ

Διπλασιάσον τα ζ/ιβ δ-κις(τετράκις, επί 4) ουν ζ/ιβ γίνονται κη/ιβ άπερ εστί (10) β και δ/ιβ, τουτέστι β και α/γ. Το δε α/δ των β και α/γ εστί ζ/ιβ άπερ ζ/ιβ εστί α/γ μέρος του ενός και γ/δ. Και ο μεν εις αριθμόν εστί α και γ/δ, ταυτόν δ' επειν α και θ/ιβ(=9/12), ο δε έτερος εστί β και δ/ιβ. Ένωσον το α και θ/ιβ μετά των β και δ/ιβ και γίνονται ομου δ και α/ιβ. Πολλαπλασιάσον δε τα α και θ/ιβ μετά των β και δ/ιβ και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός πάλιν δ και α.ιβ, καθώς ούτως εζήτησας ίνα οι δύο αριθμοί έσται το α/δ του ενός ώσπερ το α/γ του ετέρου, και όση αν γένηται, η τούτων ποσότης ενωθέντων των δυο αριθμών, τοσάυτη γενέσθαι η τούτων ποσότης και πολλαπλασιασθέντων των δυο αριθμών. Ους τινας αριθμούς ευρες δια της προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως του πράγματος, το α/δ και β α/γ.

Γίνεται δε τουτο δι' ομοίας μεταχειρίσεως του αυτού κανόνος(15) προχειρεστέρως. Μέρισον τα δ δια του γ καθώς ούτως και πρότερον εποίησας, και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α α/γ. Πρόσθες και α πάντοτε και γίνονται ομού β και α/γ. Εστί δε ο μείζων αριθμός β και α/γ, ταυτόν δ' επειν β δ/ιβ.

Μέρισον δε τα β α/γ άπερ εστί τρίτα ζ, μετά του α/γ άπερ εστί τρίτα δ, και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α γ/δ, ταυτόν δ' επειν α θ/ιβ. Εστί δε ο έλαττος αριθμός α θ /ιβ. Το γαρ α/δ των β δ/ιβ άπερ εστί ζ/ιβ εστί α/γ του α θ/ιβ. Ένωσον τον ένα αριθμόν μετά του ετέρου τουτέστι τα β και δ/ιβ μετά του α και θ/ιβ και γίνονται ομού δ α/ιβ. Πολλαπλασίασον τα β και δ/ιβ μετά του α και θ/ιβ και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός πάλιν δ α/ιβ ως εζήτησας.

Έτερον τούτου όμοιον.

Έστω ότι ζητείς πως έστι ειδέναι(20) αριθμός τινας δύο τοιούτον μεγέθους ώστε είναι το α/ε μέρος του ενός ώσπερ το α/δ του ετέρου, ενωθέντες δε οι δύο αριθμοί, γένεσθαι η τούτων ποσότης τοσαύτη όση και πολλαπλασιασθέντες οι δυο αριθμοί.

Έχεις ουν και τούτο ειδέναι σια της πρώτης ,μεταχειρίσεως ης εποίησας των πραγμάτων και τζένσων. Επεί δε αυτή η μεταχείρισις δεδήλωκεν ημιν κανόναν προχειρέστερον, ποίησαν τούτο δια του προχερεστέρου κανόνος και ευρήσης καλώς το ζητούμενον.

Επεί ουν ζητείς δύο τινας αριθμούς ώστε είναι το α/ε μέρος του ενός ώσπερ το α/δ μέρος του ετέρου, μέρισον τα ε δια των δ και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α α/δ. Προσθές α και γίνονται β α/δ. Εστί δε ο μείζων αριθμός β α/δ, ταυτόν δ' επειν β ε/κ(= 5/20). Μέρισον δε τα β α/δ άπερ εστί (25) τέταρτα θ, μετά του διαμερισμού ου είπομεν α α/δ μέρος εστί τέταρτα ε και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α δ/ε, ταυτόν δ' επειν α ις/κ. Εστί δε ο έλαττος αριθμός α ις/κ(=16/20).

$θ^{δ}$ δ/ε

ε

α δ/ε

Το γαρ α/ε των β και ε/κ όπερ εστί θ/κ εστί α/δ του ις/κ. Ένωσον τον ένα αριθμόν μετά του ετέρου τουτέστι τα β και ε/κ μετά του α και ις/κ και γίνονται ομού δ και α/κ. Πολλαπλασίασον τα β και ε/κ μετά του α και ις/κ, και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός πάλιν δ και α/κ καθώς ούτως εζήτησας.

Ωσαύτως δε και παν έτερον τούτων όμοιον ζήτημαν δια της ομοίας ταύτης προχείρου μεταχειρίσεως, έχεις ειδέναι καλώς το ζητούμενον.

Μαθ. σχ. του κεφ. 143(ρμγ). Περιγραφή του συστήματος χ. (1/4)=ψ(1/3) και χ+ψ=χ.ψ και της λύσης του.

Λύση-Σύγχρονη μεθοδολογια,συγχρονά σύμβολα. Σήμερα, αντικαθιστώντας το χ από την πρώτη εξίσωση στην δεύτερη, θα είχαμε:

4/3+ψ=$ψ^2$ (4/3), οπότε ψ. (7/3)=$ψ^2$. 4/3, δηλαδή ψ.(4ψ -7)=0, από όπου προκύπτει ότι ψ=0, η ψ=7/4, και συνεπώς χ=0,η χ=7/3.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα. Ο συγγραφέας ακολουθεί την εξής μέθοδο: Γράφει ,πως το 4 και το 3 είναι δύο αριθμοί επιθυμητοί αφού το ¼ του 4 κάνει 1 και το 1/3 του 3 πάλι κάνει 1. Κατόπιν γράφει 4/3=1 1/3,και λέει:

Έστω ο ένας πράγμα 1, προφανώς εννοώντας χ. Και ο άλλος τότε θα είναι 1 1/3 του πράγματος, δηλαδή σύμφωνα με τον ορισμό του πράγματος χ+χ/3, και έχει: χ(χ+χ/3)=$χ^2$ +$χ^2$/3. Αυτά δεν τα γράφει, αλλά προκύπτουν από την περιγραφή που κάνει, γιατί γράφει συγκεκριμένα, πως ΄΄πραγμα εν πολλαπλασιάζεις μετά ενός πράγματος και έχεις τζένσον εν΄΄, κ.λ.π. Καταλήγει λοιπόν στην λεπτομερή περιγραφή της εξίσωσης

$\chi^2 + \chi^2/3 = \chi + (1\ 1/3).\chi = (2\ 1/3).\ \chi$.

Σε αυτό το σημείο αναφέρει τον κανόνα των τζένσων και των πραγμάτων, σύμφωνα με τον οποίο: ΄΄Όταν τα πράγματα εισί όμοια των τζένσων, και ο εξελθών διαμερισμός εστί ο έλαττος αριθμός ον ζητείς ΄΄. Έχει λοιπόν χ^2. (4/3)=χ. (7/3), κ.λ.π.

Παρατηρούμε βέβαια πώς και σ' αυτήν την εξίσωση δεν αναφέρει καθόλου την μηδενική λύση.

Προτείνει κατόπιν, για το ίδιο πρόβλημα μία ΄΄προχειροτέραν μεταχείρισιν ΄΄, η οποία είναι ουσιαστικά η σύγχρονη μέθοδος της επίλυσης του ανωτέρω συστήματος.

3.5. Περί του πώς εστί ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί ,αλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι , πολλαπλασιάσωσι α ακέραιον , και ο μεν έστω έλλατω , ο δε εχέτο γ πλείω του ελάττονος .

Έστω ότι ζητείς ειδέναι τίνες αν οι δύο αριθμοί αλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι, Πολλαπλασιάσαι έχωσιν α ακέραιον , οι δε δύο αριθμοί οι πολλαπλασιάζοντες Το α, ο μεν έστω έλαττο , ο δε εχέτω γ πλείω του ελάττονος. Έχεις δε και τούτοειδέναι δια της μεταχειρίσεως του πράγματος. Λεγέσθω γαρ ο μεν εις αριθμός , πράγμα α ,ο δε έτερος μείζων αριθμός λεγέσθω Και αυτός πράγμα α όπερ έχει γ πλείω του ετέρου ελάττονος πράγματος .Πολλαπλασίασον δε το α πράγμα μετά του ενός πράγματος του έχοντος και γ πλείω .Το α ουν πράγμα μετά του ενός πράγματος πολλα(20)πλασιαζόμενον ,α άπαξ α πολλαπλασιάζει τζένσον α ,ως και επί του πρώτου ζητήματος ούτως είπομεν ,απομένοσιν δε και γ πράγματα . κράτει ουν παρά σαυτώ τζένσον α και γ πράγματα .Ζητείς δε πολλαπλασιάσαι δι αυτών α ακέραιον αριθμόν.Ο δε κανών των πραγμάτων λέγει , ως όταν τα τζενσα και τα πράγματα εισί όμοια του αριθμού ου ζητείς , να ποιήσης τα πράγματα τζένσα ,τουτέστι να μερίσης τα πράγματα μετά των τζένσων , και εξερχόμενα πάλιν εισί πράγματα. Έπειτα να διαμερίσης τον εξελθόντα διαμερισμόν των πραγμάτων εις δύο ,και να πολλαπλασιάσης τα ήμιση πράγματα εις εαυτά ,και να ενώσης τον γεγονότα πολλαπλασιασμόν των ημίσεων πράγματων μετά του αριθμού ου ζητείς. Και όση εστί η ρίζα ομού του όλου σώματος των τοιούτων , ελάττω των ημίσεων πραγμάτων ,εστί ο ζητούμενος αριθμός .Ο δε λέγει ο κανών τοιούτων εστί τζένσον α και γ πράγματα, εισί όμοια του αριθμού ου νυν ζητείς πολλαπλασιάσε , α ακέραιον .Κράττει ουν ιδίως το α τζένσον . Μέρισον δε τα γ πράγματαδια του ενός τζένσου και γίνεται ο τούτον διαμερισμόν πάλι γ πράγματα ως το πρότερον .Μέρισον ταύτα εις δύο και γίνεται το ήμιση τούτον, πράγμα α α/β .Πολλαπλασίασον το α α/β πράγμα εις εαυτό.α α/β-κις α α/β γίνονται β α/δ . Ένωσον ταύτα μετά του α αριθμού ου ζητείς πολλαπλασιάσαι οι δύο αριθμοί α ακέραιον,και γίνονται ομού γ α/δ .Η δε ρίζα των γ α/δ ελάττω του ημίσεως των γ πραγμάτων όπερ εστί α α/β,εστί ο έλαττος αριθμός . Ο δε έτερος μείζων ,εστί τοσούτος ,(30) έχει δε έτι και γ πλείω. Δι' αυτόν γαρ των δύο αριθμών πολλαπλασιάζεται α ακέραιον .Γίνεται δε τούτο δι' ομοίας μεταχειρίσεως του αυτού κανόνος προχειρεστέως . Λάβε τα ήμιση των γ ων είπομεν ότι έχει ο μείζων αριθμός πλείω, άπερ εστί α α/β. Πολλαπλασίασον δε το α α/β εις εαυτό α α/β –κις ουν α α/β εστί β α/δ. Πρόσθες και όπερ ζητείς ίνα οι δύο αριθμοί πολλαπλασιάσωσιν α ακέραιον ,και γίνονται ομού γ α/δ .Η δε ρίζα των γ α/δ ,ελάττω α α/β όπερ εστί το ήμιση των γ ,εστί ο εις έλαττος αριθμός . Ο δε μείζων εστί ο αυτός και έτι γ πλείω. Δι' αυτών γαρ των δύο αριθμών πολλαπλασιάζεται ο α ακέραιον.Η δε απόδειξις εστί αυτή .Ηρίζα των γ α/δ εστί α η/ι βραχύ τι πλείω α γαρ και η/ι πολλαπλασιάζοσιν γ και βδ/αυυ άπερ εστί γ α/δ έγγιστα .Άφελε ουν α α/β εκ της ρίζης των γ και α/δ (35) ήτις εστί ως είπομεν α η/ι βραχύ τι πλείω και απομένοσιν γ/ι βραχύ τι πλείω .Εστί δε ο μεν έλαττος αριθμός γ/ι βραχύ τι πλείω ,ο δε μείζων γ και γ/ι βραχύ τι πλείω .Δι' αυτών γαρ τα γ και γ/ι γινονται δέκατα λγ .Πολλαπλασίασον τα λγ δέκατα του μείζονος αριθμού ,μετα των γ/ι (78v)(1) του ελάττονος γ-ις ουν λγ γίνονται $_{7}$θ. Πρόσθες α δια το έχειν τα γ/ι και γ γ/ι βραχύ τι πλείω όπερ ου προσέθηκας και γίνονται ομου ρ .Πολλαπλασίασον δε τα κάτωθεν ι μετά των κάτωθεν ι ι-κις ουν ι γίνονται ρ.

γ και γ/αυ γ/αυ <u>αυυ</u>

_____________αυυ

γγ

θθ γ

Μέρισον τα ρ μετα των ρ και γίνεται ο τούτων διαμερισμός α ακέραιον .Και ιδού γ/ι βραχύ τι πλείω ,μετά των γ γ/ι βραχύ τι πλείω πολλαπλασιαζόμενα πολλαπλασιάζοσιν α ακέραιον ως εζήτησας .Έχει δε και ο μείζψν αριθμός γ (5) Έτερον τούτου όμοιον. Έστω ότι ζητείς ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί ,ο μεν ον έλαττον,ο δε έχων ς πλείω του ελάττονος ,αλλήλων πολλαπλασιαζόμενοι ,πολλαπλασιάσαι έχοσιν κζ .Έχεις δε και τούτο ειδέναι δια της πρώτης μεταχειρίσεως του ενός πράγματος και του ετέρου του έχοντος και ς πλείω καθώς ούτως εποιήσας πρότερον δια του τζένσου και των πραγμάτων .Έπει δε αυτή η μεταχειρίσεως δεδήλωκεν ημίν κανόνα προχειρέστερον ,ποίησον τούτο δια του προχειρέστερου κανόνος και ευρέσης καλώς το ζητούμενον.Λαβέ τα ήμιση των ς.Ο μεν γαρ εστί τις αριθμός άγνωστος ,ο δε τοσούτος και έτι πλείω ς.Τα δε ήμιση των ς εστί γ.Πολλαπλασίασον δε τα γ εις εαυτά γ-ις ουν γ γίνονται θ.Πρόσθες και τα κζ άπερ (10) ζητείς πολλαπλασιάσε οι δύο αριθμοί και γίνονται ομού λς.Ζητεί την ρίζαν των λς ήτις εστί ς .Και ο μεν έλαττος εστί η ρίζα των λς τουτέστι ς ,αφαιρεθέντων των ημίσεων των ς των περισσευόντων ως εζήτησας .Τουτέστι ο έλαττος αριμός εστι γ ,ο δε μείζων αριθμός εστί θ.Πολλαπλασίασον γαρ τα γ μετά των θ και γίνονται θ-κις γ, κζ .Και ιδού ως εζήτησας ,ο μεν έλαττος αριθμός εστί γ ,ο δε μείζων εστί γκαι ς πλείω ,τουτέστι θ, άπερ γ και θ αμφότερα πολλαπλασιαζόμενα ,πολλαπλασιάζοσιν κζ ως εζήτησας .Ωσαύτος δε και παν έτερον τούτων όμοιον ζήτημαν δια της ομοίας ταύτης προχείρου μεταχειρίσεως ,έχεις ειδέναι καλώς το ζητούμενον.

Οι παραπάνω αριθμοί είναι οι εξής:

α=1,β=2,γ=3,δ=4,α/β=1/2,α/δ=1/4,θ=9,ς=6,κζ=27,λς=36,γ/ι=3/10,ρ=90,λγ=33,η/ι=8/10,λ =30,ι=10

Μαθ. σχ. του κεφ. 141.(ρμα).Να ευρεθούν δύο αριθμοί .οι οποίοι να διαφέρουν κατά 3 ,και πολλαπλασιαζόμενοι να δίνουν 1

Η διατύπωση του συγγραφέα είναι η εξής: ‘ο μεν έστω έλαττο ,ο δε έχετω 3 πλείω του ελάττονος ’.Αναφέρεται στην επίλυση της εξίσωσης: $\chi(\chi+3)=1$, ή $\chi^2+3\chi=1$,την οποία και επιλύει με την εφαρμογή του κανόνα των πραγμάτων. Σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα ‘όταν τα τζένσα και τα πράγματα εισί όμοια του αριθμού ου ζητείς ,να ποιήσης τα πράγματα τζένσα ,τουτέστι να μερίσης τα πράγματα μετα των τζένσων ,και τα εξαρχόμενα πάλιν εισί πράγματα Έπειτα να διαμερίσης τον εξαλθόντα διαμερισμόν των πραγμάτων εις δύο, και να πολλαπλασιάσης τα ήμιση πράγματα εις εαυτά ,και να ενώσης τον γεγονότα πολλαπλασιασμόν των ημίσεων πραγμάτων μετά του αριθμού ου ζητείς .Και όση εστί η ρίζα ομού του όλου σώματος των τοιούτων,ελάττω των ημίσεων πραγμάτων ,εστί ο ζητούμενος αριθμός.’ Ακολουθώντας πιστά τον ‘κανόνα των πραγμάτων’,οι πράξεις μας θα είναι οι εξής: 3/1,3/2,9/4+1,και η ρίζα του 13/4 ελαττώμενη κατά 3/2 μας δίνει τον ζητούμενο αρθμό.

Σήμερα χρησιμοποιώντας τον τύπο εύρεσης λύσεων για την δευτεροβάθμια εξίσωση θα καταλήγαμε σε δύο ριζες:

$\chi^2+3\chi=1 \Rightarrow \chi^2+3\chi-1=0 \Rightarrow \alpha=1,\beta=3,\gamma=-1 \Rightarrow \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta=9+4 \Rightarrow \boxed{\Delta=13}$

$\chi_1=-\beta+v_{\Delta}/2\alpha=\boxed{-3+v_{13}/2}$

$\chi_1=-\beta-v_{\Delta}/2\alpha=\boxed{-3-v_{13}/2}$

3.6.Περί του πως εστί ειδέναι μεικτήν ρίζαν δύο τινών αριθμών και τίνες αν εισί οι δύο αριθμοί οί την εφίμεικτον ρίζαν έχοντες .

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, Βυζαντινά σύμβολα

Εστω ότι ζητείς ειδέναι ως έν ταυτώ μεικτήν ρίζαν δύο τινών αριθμών προς αλλήλους πολλαπλασιαζομένων . Και πρωτον μεν δει τούτον ειδέναι ότι ό εκ των δύο αριθμών γενόμενος πολλαπλασιασμός χρή είναι τοιούτος ώστε έχειν ρίζαν φυσικήν και ού νόθον . Και γάρ πας τις αριθμός έχει ρίζαν την δυναμένην πολλαπλασιάσαι την ζη (5) τουμένην κορυφήν . Ενταυτα δε, φυσικήν ρίζαν λέγομεν την ακεραίαν ρίζαν την μη έχουσαν τζάκισμα. Νόθον δε ρίζαν λέγομεν την δυναμένην άνευ τζακίσματος πολλαπλασιάσαι την ταύτης κορυφήν.

Φυσικάς γάρ και ακεραίας ρίζας έχοσιν τα ις και κε και λς και μθ και ξδ και εξής ομοίως δ-κις γάρ δ γίνονται ις και ε-κις ε γίνονται κε και ς-κις ς γίνονταιλς και η-κις η γίνονται ξδ και εξής ομοίως. Νόθας δε ρίζας ενταυτα λέγομεν έχειν τα λ και μβ και εξής ομοίως ε-κις γαρ ού ε αλλά ς , γίνονται λ, τα δε ε μετά των ς εστί ανόμοια . Ωσάυτως και ς-κις ζ γίνονται μβ , τα δε ς μετά των ζ εστί ανόμοια .

Εστω τοίνυν ότι ζητείς (10) ειδέναι την εφίμεικτον ρίζαν των δύο αριθμών των πολλαπλασιαζόντων τα ξδ. Εχεις δε ταύτην ειδέναι ούτως . Ζήτει την ρίζαν των ξδ ήτις εστί η η-κις γαρ η γίνονται ξδ. Διπλασίασον την ρίζαν των ξδ, τουτέστι τα η και γίνονται ις . Και ιδού ο μείζων αριθμός δι' ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται , εστί ις . Μέρισον τα ξδ μετά των ις και γίνεται ό τούτων διαμερισμός δ δ-κις γαρ ις ξδ γίνονται. Και ιδού ο έλαττος αριθμός δι ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται εστί δ. Πολλαπλασίασον γαρ τα ις μετά των δ, ις-κις ούν δ γίνονται ξδ . Μη ειδώς δε τινές αν δύο αριθμοί έχοσιν πολλαπλασιασαι ξδ , διά μονής της (15) ρίζης των ξδ ήτις εστί τα η , εύρες ότι εστί τα ις και δ δί αυτών γαρ πολλαπλασιάζονται ξδ. Διπλασίασον πάλιν την ρίζαν των ξδ ήτις εστί τα η και γίνονται ις. Πρόσθες τα ις και δ δι' ών πολλαπλασιάζονται τα ξδ και γίνονται ομου λς.

Και άλλως: Τετραπλασίασον την ρίζαν των ξδ ήτις εστί τα η δ-κις ούν η γίνονται λβ. Πρόσθες και τον ελάττονα αριθμόν δι' ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται , τουτέστι τα δ , και γίνονται ομού πάλιν λς . Όση δε εστί ή πρίζα των λς, τοσαύτη εστί και η εφίμεικτος ρίζα των ις και δ,ς.(20) Τα γάρ ις έχοσιν ρίζαν δ, τα δε δ έχοσιν ρίζαν β δ-κις γαρ δ γίνονται ις και δίς τα β γίνονται δ. Ένωσον δε την ρίζαν των ις και δ , τουτέστι τα δ και β και γίνονται ομού ς .

Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ις και δ των πολλαπλασιαζόντων τα ξδ , εστί ς , καθώς δια της ρίζης των λς δήλη ημίν γίνεται ,εύρες ούν δια μόνης της ρίζης των ξδ , ήτις εστί τα η, και τους δύο αριθμούς τους πολλαπλασιάζοντας τα ξδ , και την τούτων εφίμεικτον ρίζαν.

Εστω δε ότι είδας ούσαν με εφίμεικτον ρίζαν δύο τινών αριθμών τα ς.

Ζητείς δε ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί έχωσιν την εφίμεικτον ρίζαν των ς.

Πολλαπλασίασον τα ς εις εαυτά ς-κις ούν ς γίνονται λς. Ζήτει (25) τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λς δ-κις ούν ι γινονται μ. Τα δε μ εστί υπέρ τα λς δ-κις δε θ γίνονται λς. Και ιδού ουδέ τα λς εστί ελλειπή δ-κις δε η γίνονται λβ, καθώς ούν είπομεν τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λς εύραμεν ότι τα η τετραπλασιαζόμενα , δ-κις η γίνονται λβ. Μέχρι ούν των λς λείπονται δ. Και ιδού ο έλαττος αριθμός δι' ου και εφίμεικτος ρίζα των γίνεται, εστί δ.

Τετραπλασίασον ταύτα δ-κις ούν γίνονται ις. Εστί δε ο μείζων αριθμός δι' ού η εφίμεικτος ρίζα των ς γίνεται ις. Των μεν γάρ δ η ρίζα εστί β, των ις δε η ρίζα εστί δ. Ομού δε η εφίμεικτος (30) ρίζα των δύο τούτων αριθμών εστί ς.

Και ιδού από μόνης της εφιμείκτου ρίζης των δύο μη ειδότων αριθμών, εύρες ότι ο μεν έλαττος αριθμός εστί δ , ο δε μείζων ις , αί δε δύο τούτων ρίζαι ομού εστί ς.

Έτερον τούτου όμοιον . Έστω ότι ζητείς ειδέναι ως εν ταυτω , εφίμεικτον ρίζαν δύο τινων αριθμών των πολλαπλασιαζόντων μθ.

Ζήτει την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ ζ-κις γάρ ζ γίνονται μθ. Διπλασίασον την ρίζαν των μθ, τουτέστι τα ζ και γίνονται ιδ. Ο μείζων ούν αριθμός δι ού τα μθ πολλαπλασιάζονται εστί ιδ. Μέρισον τα μθ μετά των ιδ και γίνεται ο τούτων διαμερισμός γ α/β ιδ-κις γαρ γ α/β γίνονται μθ. Ο έλαττος ούν αριθμός δι' ού τα μθ πολλαπλασιάζονται εστί γ α/β. Πολλαπλασίασον γάρ (35) τα ιδ μετά των γ α/β ιδ-κις γάρ γ α/β γίνονται μθ ως είπομεν.Διπλασίασον την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ γίνονται ιδ. Πρόσθες και τα ιδ και γ α/β δι' ών πολλαπλασιάζονται τα μθ και γίνονται ομού λα α/β.

Και άλλως : Τετραπλασίασον την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ δ-κις (74r) (1) ούν ζ γίνονται κη . Πρόσθες και τον ελάττονα αριθμό δι' ου τα μθ πολλαπλασιάζονται , τουτέστι τα γ α/β και γίνονται ομού πάλιν λα α/β. Οση δε εστί ρίζα των λα α/β τοσάυτη εστί και η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β, των πολλαπλασιαζόντων τα μθ. Η δε ρίζα των λα α/β εστί ε και ιθ/λα. Τεχνικώς γαρ ταύτα πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιαζόσιν κορυφήν λα και δηε/θζα,άπερ εστί λα α/β έγγιστα.

Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β , εστί ε και ιθ/λα. Των γαρ ιδ ή ρίζα εστί γ και κγ/λα, των δε γ και α/β η ρίζα εστί α και κζ/λα. Ενωσον (5) τα ακέραια και τα τζακίσματα και γίνονται ομού ε και ιθ/λα. Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β , εστί ε και ιθ/λα , καθώς δια της ρίζης των λα α/β δήλη ημίν γέγονε, μη ειδώς ούν τίνες αν δύο αριθμοί , πολλαπλασιάσαι έχοσιν μθ , και τις εστί ή εφίμεικτος τούτων ρίζα δια μόνης της ρίζης των μθ ήτις εστί ζ , εύρες και τους δύο αριθμούς και την τούτων εφίμεικτον ρίζαν.

Εστω δε ότι είδας ούσαν μεν εφίμεικτον ρίζαν δύο τινων αριθμών τα ε και ιθ/λα . Ζητείς δε ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί έχωσιν την εφίμεικτον ρίζαν των ε και ιθ/λα.

Πολλαπλασίασον τα ε και ιθ/λα εις εαυτα τεχνικώς ούν τα ε και ιθ/λα , μετά των ε και ιθ/λα πολλαπλασιαζόμενα, πολλά (10)πλασιάζοσιν λα και α/β έγγιστα . Ζήτει τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος , εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λα α/β δ-κις ουν ζ γίνονται κη , λείπονται και γ και α/β μέχρι των λα και α/β. Ο έλαττος ουν αριθμός δι' ου ή εφίμεικτος ρίζα των ε και ιθ/λα γίνεται , εστί γ και α/β. Τετραπλασίασον τα γ και α/β δ-κις ουν γ α/β γίνονται ιδ. Ο μείζων ουν αριθμός δι' ου ή εφίμεικτος ρίζα των ε και ιθ/λα γίνεται , εστί ιδ.

Από μόνης ουν της εφιμείκτου ρίζης των δύο μη ειδότων αριθμών, εύρες ότι ο μεν ελάττω αριθμός εστί γ α/β , ο δε μείζων εστί ιδ. Ομού δε αί δύο τούτων ρίζαι , εστί ε και ιθ/λα.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Μαθ .σχ. του κεφ. 128. (ρκη). Εφίμεικτος ρίζα δύο αριθμών.

Παρατηρούμε, πως δεν ορίζει εξ αρχής τι είναι εφίμεικτος ρίζα δύο αριθμών .

Αυτό το κάνει αργότερα κατά την διάρκεια διαδικασίας εύρεσης συγκεκριμένης εφιμείκτου ρίζας δυο αριθμών , η οποία είναι το άθροισμα των ριζων δύο αριθμών.

Εξηγεί δε, πως αναγκα'ια συνθήκη είναι , ο πολλαπλασιασμός των δύο δεδομένων αριθμών να έχει ρίζα φυσική και όχι νόθο.

Φυσική ρίζα ονομάζει την ακεραία ρίζα , και νόθο '' την δυναμένη άνευ τζακίσματος πολλαπλασιάσαι την ταύτης κορυφήν'', π.χ η ρίζα του 12 είναι νόθος, όπως ήδη έχει εξηγήσει στο κεφ.. ριθ', γιατί 3.4=12, δηλαδή πρόκειται για σώμα (εμβαδόν) παραλληλογράμμου και όχι τετραγώνου , με πλευρές 3 και 4 . Επίσης αναφέρει ότι οι αριθμοί 30,42 έχουν νόθους ρίζες , γιατί 5.6=30 και 6.7=42.

Στη συνέχεια θέτει ως πρόβλημα την εύρεση της εφιμείκτου ρίζας των αριθμών που έχουν γινόμενο 64.

Βρίσκει την ρίζα του 64 που είναι το 8. 8.2=16, 64/16=4 , και λέει πως ο ένας αριθμός είναι ο 16 , και ο άλλος ο 4. Αυτό στηρίζεται σήμερα στο ότι ισχύει πάντα η ισότητα $\alpha/(2\sqrt{\alpha})= \sqrt{\alpha}/2$, με α=64.

Χρησιμοποιεί και έναν άλλο τρόπο σύμφωνα με το οποίο , αφού βρει την ρίζα του 64 που είναι το 8 , κάνει τις εξής πράξεις :

8.4=32, 32+4=36 , ρίζα του 36 το 6 , και καταλήγει , πως όση είναι η ρίζα του 36 , τόση είναι και η εφίμεικτος ρίζα των 16 και 4 , δηλαδή 4+2=6. Ετσι λοιπόν καταλαβαίνει ο αναγνώστης πως όταν μιλα για εφίμεικτο ρίζα δύο αριθμών ,εννοεί το άθροισμα των ριζών αυτών των αριθμών.

Εξετάζει κατόπιν το αντίστροφο πρόβλημα , όπου γνωρίζει πως η εφίμεικτος ρίζα δυο αριθμών είναι το 6, και ζητεί τους αριθμούς αυτούς.

6.6=36 , 4.8=32, και παρατηρεί πως ο αριθμός 8 είναι ''ελλιπως εγγυτέρω των 36'' , πολλαπλασιαζόμενος με το 4.

Στη συνέχεια θεωρεί τη διαφορά 36-32=4 και αυτό το 4 είναι για τον συγγραφέα '' ο έλαττος αριθμός'' από τους ζητούμενους .

Θα μπορούσε να προκύψει μία πιθανή εξήγηση αυτής της μεθοδολογίας από τη λύση του συστήματος.

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=6$, $\sqrt{\alpha}.\ \sqrt{\beta}=\chi$, οπότε $\omega^2-6\omega+\chi=0$, όπου $\omega=\sqrt{\beta}$, ή $\sqrt{\alpha}$. Αν επιλύσουμε την εξίσωση ως προς ω , η διακρίνουσα θα είναι ίση με 36-4.χ , και επειδή πρέπει να είναι θετική και να έχη και ρίζα ακέραια , προκύπτει πως το χ είναι ίσο με 5,ή με 8.

Στη συνέχεια ,με το γνωστό τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε , πως η μία λύση είναι το ζευγος (α,β) =(4,16) και η άλλη το ζευγος (α,β)=(1,25).

Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Εφαρμόζουμε τον τύπο:

$\alpha/(2\sqrt{\alpha})= \sqrt{\alpha}/2$

για α=144, $144/(2\sqrt{144})= \sqrt{144}/2$, 144/ (2*12)= 12/2, 144/24=12/2, 6=6

και με τη βυζαντινή μεθοδολογία η ρίζα του 144 είναι το 12. 12*3= 36, 144/36=4.

Ο ένας αριθμός είναι ο 36 και ο άλλος ο 4.

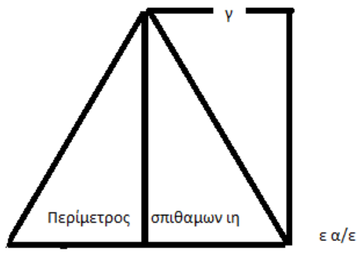
Αυτό σήμερα αποδεικνύεται από την παραπάνω ισότητα.

3.7.. Υπολογισμός εμβαδού πλαγίου παραλληλογράμμου όταν δίδονται οι δύο άνισες πλευρές αυτού.

Βρίσκει το ύψος παραλληλογράμου χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώριμα, οπότε η μέγεθος του δύναται να σχολιασθεί ως ίδια με την σημερίνη μέθοδο.

(25) σιζ' Περί του πως εστί ειδέναι, ισοπλεύρου τριγώνου σχήματος εμβαδόν πόσου εστί χωρητικών.

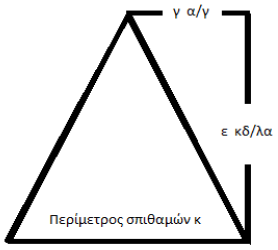
Έστω ισόπλευρον τρίγωνον, εκάστη τούτου πλευρά σπιθαμών ς, ομού δε και η τούτου περίμετρος σπιθαμών ιη. Ζητείς δε τετραγωνίσαι το εμβαδόν τούτου και ειδέναι πόσου εστί χωρητικόν. Έχεις δε και τούτο ειδέναι ούτος:



Ένωσον τας τρεις τούτου πλευράς. Τρίς ουν ς-κις γίνονται ιη. Λαβέ το ήμισυ όπερ εστί θ. Άφελε ουν εκ των θ την μιαν τούτου πλευράν ήτις εστί σπιθαμών ς, και απομένοσιν γ. Πολλαπλασίασον και ταύτα μετά των γ. γ-ίς ουν θ γίνονται κζ. Πολλαπλασίασον και ταύτα μετά των γ. Γ-ίς ουν κζ γίνονται πα. Πολλαπλασίασον και ταύτα μετά (30) των τριών. γ-ίς ουν πα γίνονται σμγ. Ζήτει την ρίζαν των σμγ ήτις εστί ιε και ζ/ιβ βραχύ τι πλείω. Εστί δε χωρητικών το εμβαδόν του ισοπλεύρου τούτου τριγώνου σχήματος, σπιθαμών τετραγώνων ιε και ζ/ιβ μιας σπιθαμής βραχύ τι πλείω, ως δηλούται δια της ρίζης των σμγ.

Και άλλως: Ζήτει από της άνωθεν γωνίας μέχρι του μέσου της εγκαρσίου πλευράς των ς σπιθαμών, πόσαι σπιθαμαί εισί. Έχεις δε ταύτας ειδέναι διά του κανόνος της σκάδρας. Πολλαπλασίασον την αποκλίνουσαν μιάν τούτου πλευράν εις εαυτή. ς-κις ουν ς γίνονται λ. Πολλαπλασίασον και το ήμισυ της εγκαρσίου πλευράς των ς σπιθαμών εις εαυτό. γ-ίς ουν γ γίνονται θ. Άφελε τα θ εκ των λς και απομένοσιν κζ. Ζήτει την ρίζαν των κζ ήτις εστί ε και α/ε μιας σπιθαμής βραχύ τι ελλάτω. Εστί δε (35) και η κάθετος ευθεία γραμμή ήν εποίησας, σπιθαμών ε και α/ε μιας σπιθαμής βραχύ τι ελλάτω, ως δηλούται διά της ρίζης των κζ. Λαβέ δε το ήμισυ της εγκαρσίου πλευράς των ς σπιθαμών, όπερ εστί σπιθαμαί γ, και πολλαπλασίασον ταύτας τας γ σπιθαμάς του πλάτους, προς τας ε και α/ε βραχύ τι ελλάτω, γίνονται ιε και γ/ε μιας σπιθαμής βραχύ τι ελλάτω. Τα δε γ/ε βραχύ τι ελάττω, εστί ζ/ιβ έγγιστα. Και ιδού και ούτως εύρες ότι το εμβαδόν του ισοπλεύρου τούτου τριγώνου σχήματος, εστί χωρητικόν, σπιθαμών τετραγώνων ιε και ζ/ιβ μιας σπιθαμής βραχύ τι ελλάτω.

Έτερον τούτου όμοιον, Έστω ισόπλευρον τρίγωνον, εκάστην τούτου πλευρά σπιθαμών ςκαι β/γ μιας σπιθαμής, ομού δε η τούτου περίμετρος σπιθαμών κ. Ζητείς δε τετραγωνίσαι το εμβαδόν τούτουκαι ειδέναι πόσου εστί χωρητικόν



Ένωσον και τας τρεις τούτου πλευράς. γ-ίς ου ς και β/γ γίνονται ομού . Λαβέ το ήμισυ των κ, ταυτόν δ΄ειπείν (5) της τούτου περιμέτρου το ήμισυ όπερ εστί ι. Άφελε ουν εκ των ι την μίαν τούτου πλευράν ήτις εστί σπιθαμών ς και β/γ και απομένοσιν γ και α/γ. Πολλαπλασίασον τα γκαι α/γ μετά των ι. Ι-κις ουν γ και α/γ γίνονται λγ και α/γ μιας σπιθαμής. Πολλαπλασίασον και ταύτα μετά των γ και α/γ. γ δε και α/γ μετά των λγ και α/γ τεχνικώς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρια και α/θ μιας σπιθαμής. Πολλαπλασίασον και ταύτα μετά των γ και α/γ Τα δε γ και α/γ μετά των ρια και α/θ τεχνικώς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσι το και γ/η μιας σπιθαμής. Ζήτει την ρίζαν τούτων ήτις εστί ιθ και ι/μα μιας σπιθαμής βραχύ τι πλείω. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν του ισοπλεύρου τούτου τριγώνου σχήματος, (10) σπιθαμών τετραγώνων ιθ και ι/μ μιας σπιθαμής βραχύ τι πλείω, τουτέστι σπιθαμών ιθ και α/δ έγγιστα μιας σπιθαμής, ως δηλούται διά της ρίζης των το και γ/η μιας σπιθαμής.Και άλλος: Ζήτει από της άνωθεν γωνίας μέχρι του μέσου της εγκαρσίου πλευράς των ς σπιθαμών και β/γ μιας σπιθαμής, πόσαι σπιθαμαί εισί. Έχεις δε ταύτας ειδέναι διά του κανόνος της σκάδρας. Πολλαπλασίασον την αποκλίνουσαν μίαν τούτου πλευρά εις εαυτή, ήτις εστί σπιθαμών ς και β/γ μιας σπιθαμής. Τα δε ς και β/γ εις εαυτά τεχνικώς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσι μδ και δ/θ μιας σπιθαμής. Πολλαπλασίασον και το ήμισυ της εγκαρσίου πλευράς των ς και β/γ εις εαυτό, όπερ ήμισυ εστί γ και α/γ. Τα δε γ και α/γ εις εαυτά τεχνικώς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσι ια και α/θ μιας σπιθαμής. Άφελε ταύτα τα ια και α/θ εκ των μδ και δ/θ και απομένοσιν λγ και γ/θ, (15) τουτέστι λγ και α/γ μιας σπιθαμής. Ζήτει την ρίζαν των λγ και α/γ ήτις εστί σπιθαμών ε και κδ/λα μιας σπιθαμής βραχύ τι ελάττω. Εστί δε από της άνωθεν γωνίας μέχρι του μέσου της εγκαρσίου πλευράς, σπιθαμαί ε και κδ/λα μιας σπιθαμής βραχύ τι ελάττω, ως δηλούται διά της ρίζης των λγ και α/γ. Λαβέ δε το ήμισυ της εγκαρσίου πλευράς των ς και β/γ όπερ ήμισυ εστί γ και α/γ, και πολλαπλασίασον ταύτας τας τρεις σπιθαμάς και α/γ του πλάτους, προς τας ε και κδ/λα του ύψους, και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός ιθ και α/δ έγγιστα μιας σπιθαμής. Εύρες δε και ούτως ότι το εμβαδόν του ισοπλεύρου τούτου τριγώνου σχήματος εστί χωρητικόν σπιθαμών τετραγώνων ιθ και α/δ έγγιστα μιας σπιθαμής. Ωσαύτως δε και παντός ετέρου ισοπλεύρου τριγώνου εμβαδόν, διά των δύο τούτων μεταχειρίσεων έχεις ειδέναι πόσου εστί χωρητικόν.

Οι παραπάνω αριθμοί είναι οι εξής:

ιη=18,

ς=6,λς=36,θ=9,πα=81,κζ=27,σμγ=243,ιε=15,ζ/ιβ=7/12,ιγ/μα=13/41,γ/θ==3/9,β/γ=2/3,α/γ =1/3,ε=5,α/δ=1/4,ι/θ=19,κδ/δα=24/41,δ/θ=4/9,μδ=44,λγ=33,α/ε=1/5,γ=3

3.8. Υπολογισμός εμβαδού ισόπλευρου τριγώνου πλευράς ίσης με 6 σπιθαμές.

ΛΥΣΗ ΤΟΥ 216:Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον εξής τρόπο:

6.3=18, 18/2=9, 9-6=3,3.9=27, 27.3=81, 81.3=243, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με την ρίζα του 243, η οποία είναι ίση με 15 7/12 κατά προσέγγιση.

Κατά τον σύγχρονο τρόπο επίλυσης του προβλήματος υπολογίζεται το ύψος με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Κατόπιν το ύψος αντικαθίσταται στον τύπο: Ε=β.υ/2, ο οποίος δίνει το εμβαδόν τριγώνου βάσεως β και ύψους υ.Όσον δε αφορά εις την πρώτη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού την οποία χρησιμοποιεί ο συγγραφέας, παρατηρώντας την σειρά των πράξεων του βλέπουμε πως η παράσταση ρίζα[(3α/2-α)^3(3α/2)],είναι για τον συγγραφέα, ίση με το ζητούμενο εμβαδόν.Εκτελώντας τις πράξεις όμως η ανωτέρω παράσταση διαμορφώνεται ως εξής: (3α/2-α) ρίζα (9α^2/4-3α^2/2)=(3α^2/4)=(α/2)(α ρίζα 3)/2=α^2 ρίζα 3/4. Βλέπουμε λοιπόν πως ούτως η άλλως καταλήγουμε στον τύπο, τον οποίο χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α, και ο οποίος είναι απλούστερος από τον προτεινόμενο στην ΕλλΒιενΜαθΠραγμ.

Ο ΣΥΝΧΡΟΝΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ

ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΝΟΥΜΕ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

$α^2=β^2+γ^2$

$6^2=β^2+3^2$

$36=β^2+9$

$β^2=36-9$

$β^2=25$

β=5

Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου παίρνουμε τον τύπο:Ετρι=1/2.β.υ

$E_{τρι}=1/2.6.5=1/2.30=15cm^2$

3.9 Περί του πως έστι ποιήσαι τα ι αριθμός τίνας δύο τοιούτου μεγέθους, ώστε πολλαπλασιάσας έκαστον μέρος των δύο αριθμών εις αυτό, και ενώσας το δύο πολλαπλασιαζόμενα μέρη αυτών γενέσθαι ομού ξ.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, Βυζαντινά σύμβολα

Έστω ότι ζητείς πως εστί ποιήσαι τα ι αριθμούς τίνας δύο τοιούτου μεγέθους ώστε πολλαπλασιάσας έκαστον μέρος των δύο αριθμόν εις αυτό, και ενώσας τα δύο πολλαπλασιαζόμενα μέρη αυτών, γενέσθαι ομού ξ. Έχεις δε και τούτο ειδέναι δια της μεταχειρίσεως του πράγματος.

Λεγέσθω γαρ ο μεν εις αριθμός πράγμα εν, ο δε έταιρος ι παρά πράγμα α, όπερ αφήλες εκ των ι. Πολλαπλασιαζόμενα δε τα δύο ταύτα μέρη διηρημένα και εννούμενα τα δύο εξ αυτών πολλαπλασιαζόμενα μέρη, ζητείς είναι ξ.

Πολλαπλασίασον δε το α πράγμα μετά του ενός πράγματος, και γίνεται ο τούτον πολλαπλασιασμός τζένσον α, καθώς είπομεν πράγμα α μετά ενός πράγματος πολλαπλασιάζει τζένσον α. Κράτει ουν παρά σεαυτώ τζένσον α. Πολλαπλασίοσαν δε τα ι παρά πράγμα α είς εαυτά, τουτέστιν μετά το ι παρά πράγμα α. Παν γαρ το εις αυτό πολλαπλασιαζόμενον, μετά ομοίου σχήματος πολλαπλασιάζεται, ι ουν παρά πράγμα α όπερ λείπεται, μετά το ι παρά πράγμα α όπερ λείπεται, πολλαπλασιαζόμενα γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός ρ παρά πράγματα κ άπερ λείπονται εκ των ρ, και έχωσιν έτι πλείω και τζένσον α. ι- κις γαρ ι γίνονται ρ. Και οι μεν επολλαπλασιάζοντο ι μετά των ι, εγένετο αν ο τούτων πολλαπλασιασμός ρ. Επεί δε πολλαπλασιάζονται ι παρά πράγμα α όπερ λείπεται, μετά των ι παρά πράγμα α όπερ λείπεται, ι-κις ι παρά πράγμα α όπερ λείπεται, γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός ρ παρά πράγματα ι. Ωσαύτως και τα έταιρα ι-κις ι παρά πράγμα α (20) όπερ λείπεται, γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός ρ παρά πράγματα ι, άπερ λείπονται εκ των ρ. Το δε α πράγμα μετά του ενός πράγματος πολλαπλασιάζει τζένσον α. Και ιδού ι παρά πράγμα α, μετά των ι παρά πράγμα α πολλαπλασιαζόμενα, ταυτόν δ' ειπείν ι παρά πράγμα α εις εαυτά πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρ παρά πράγματα κ άπερ λείπονται εκ των ρ, και έτι πλείω τζένσον α, δι' ην αιτίαν είπομεν ένωσον και το α τζένσον, όπερ είπομεν παρά σεαυτώ κρατείν, και έχεις αριθμόν ρ παρά πράγματα κ και έτι πλείω τζένσα β.

Ζητείς ουν ποιήσαι ξ. Αριθμοί ουν ρ παρά πράγματα κ άπερ λείπονται εκ των ρ και έτι πλείω τζένσα β, εστί όμοια του αριθμού των ξ ον ζητείς ποιήσαι. Και ο μεν εις αριθμόν ον ζητείς έξομοι (25) ούται τα ξ, ο δε έτερος τα ρ παρά πράγματα κ, και έτι πλείω τζένσα β.

Εξίσασαι ουν τα δύο τούτων μέρη ως και επί των προγενεσθέρων ζητημάτων είπομεν, και ποίησον ίνα εκάτερον των δύο μερών μη έχειν τι μέρος ελλιπές, αλλά το ελλιπές λαβών, επί το έτερον πρόσθες και ποίησον δύο άνισους αριθμούς μη έχων έκαστον μέρος ελλιπές. Τουτέστι λαβέ τα κ πράγματα άπερ είπομεν ότι λείπονται εκ των αριθμών των ρ και πρόσθες ταύτα επί το έτερον μέρος του αριθμού των ξ, και γίνεται το μεν εν μέρος αριθμός ξ και έτι πλείω πράγματα κ άπερ προσεθήκας, το δε έτερον απομένει αριθμός ρ και τζένσα β.Και επέι έκαστον μέρος έχει αριθμόν, το μεν ξ το δε ρ, άφελε το εν μέρος εκ του ετέρου τουτέστι τα ξ εκ των ρ και απομένοσιν μ. και το μεν εν μέρος το έχον τα ρ απομένει αριθμός μ και τζένσα β, το δε έτερον μέρος το έχον τα ξ τον αριθμόν, διευθάρησαν το ξ αριθμός και εναπέμεινεν αυτώ έχειν μόνον τα κ πράγματα.Ο δε κανών των πραγμάτων λέγει, ως όταν τα τζένσα και οι αριθμοί εισί όμοιοι των πραγμάτων, να φέρεις τον αριθμόν και τα πράγματα εις τζένσα, τουτέστι να μερίσης ταύτα δια των τζένσων. Έπειτα να μερίσης είς μέρη δύο το διαμερισμόν των πραγμάτων, και να πολλαπλασιάσεις τα ημίση πράγματα εις εαυτά, και να αφελής εκ τον γεγονότα πολλαπλασιασμόν των ημίσεων πραγμάτων, τον γεγονότα μερισμόν των αριθμών, και να αφελής την ρίζαν του εναπομένοντος, εκ των (35) ημίσεων πραγμάτων. Και ο γενόμενος αριθμός εστί το έλαττο μέρος όπερ ζητείς ποιήσαι. Το δε έτερον μείζον μέρος εστί τα ήμιση των πραγμάτων προστεθείσης της ρίζης του εναπομείναντος. Όδε λέγει ο κανών τοιούτον εστί.

Μέρισον τα μ τον αριθμόν όπερ είπομεν ότι το εν μέρος εστί αριθμός μ, (81v)(1) μετά των β τζένσων, και γίνεται ο τούτων διαμερισμός κ. Κράτει ουν ιδίως παρά σεαυτόν αριθμόν κ, μέρισος και τα κ πράγματα, άπερ είπομεν ότι το έτερο μέρος έχει πράγματα κ, μετά των β τζένσων, και γίνεται ο τούτων διαμερισμός πράγματα ι. Μέρισον τα ι πράγματα εις δύο μέρη και λάβε τα ημίοση άπερ εστί ε. Πολλαπλασίασον ταύτα είς εαυτά, ε-κις ουν ε γίνινται κε.

Άφελε τα κ τον αριθμόν ον κρατείν ιδίως παρά σεαυτόν είπομεν, εκ των κε και απομένοσιν ε. Η δε ρίζα των ε εστί β και δ/ιε βραχύ τι ελάττω. Εστί δε ο μεν έλαττος αριθμός τα ήμιση των ι άπερ εστί ε, (5) ελάττω της ρίζης των ε ων απέμειναν εκ των κε, ήτις ρίζα εστί β και δ/ιε βραχύ τι ελάττω. Τουτέστι ο έλαττος αριθμός εστί β και ια/ιε, ο δε έτερος μείζων αριθμός εστί τα ήμιση των ι άπερ εστί ε, και έτι πλείω η ρίζα των ε ων απέμειναν εν των κε, ήτις ρίζα εστί β και δ/ιε βραχύ τι ελάττω. Τουτέστι ο μείζων αριθμός εστί ζ και δ/ιε.

Ένωσον γαρ τα β και ια/ιε μετά των ζ και δ/ιε και γίνονται ομού ι. Πολλαπλασίασον δε τα β και ια/ιε εις εαυτά και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός ζ και ρς/σκε.

Πολλαπλασίασον και τα ζ και δ/ιε εις εαυτά και γίνεται ο τούτων πολλαπλασιασμός νβ και ρα/σκε. Ένωσον τα ακέραια και γίνονται ομού νθ. Ένωσον και τα τζακίσματα και γίνονται ομού σπζ/σκε άπερ εστί ακέραιον α και ξβ/ σκε. Ένωσον δε τα νθ μετά του α και ξβ/σκε και γίνονται ομού ξ και ξβ/σκε.

Ει ουν και εγένετο ο τούτων πολλαπλασιασμός πλείω των ξ, το παρόν τζάκισμα ξβ/σκε, το αίτιον εστί ότι τα β και δ/ιε ουκέστι εξ όλου αληθής ρίζα των ε, πολλαπλασιάζοσιν γαρ τα β και δ/ιε, ε και α/σκε. Το δε α όπερ περισσεύει εκ των ε, ποεί την ρίζαν των ε νοάσθαι ολιγοτέραν είναι των β και δ/ιε. Ημείς δε μετά των β και ια/ιε και μετά των ζ και δ/ιε, άπερ αμφότερα εστί πλείω της αληθείας, πολλαπλασιάσαντες διηρημένως τα δύο μέρη αυτών, και ενώσαντες τα πολλαπλασιαζόμενα μέρη, ουκ εγένοντο εξ όλου ξ, αλλ’ εγένοντο ξ και ξβ/σκε δι’ ης αιτίας είπομεν.

Γίνεται δε τούτο δι΄ομοίας μεταχειρίσεως του αυτού κανόνος, προχειρεστέρως. Λαβέ τα ήμιση των ι άπερ εστί ε και πολλαπλασίασον ταύτα εις εαυτά, ε-κις ουν ε γίνονται κε. Μέρισόν δε τα ξ άπερ ζητείς ποιήσαι οι δύο άνω θέντες πολλαπλασιασμοί, εις μέρη δύο και λάβε τα ήμιση των ξ άπερ εστί λ. Άφελε δε τα κε εκ των λ και απομένοσιν ε. Το εν ουν μέρος εστί τα ημίση των ι άπερ εστί ε, ελάττω της ρίζης των ε ων απέμειναν εκ των λ. Το δε έτερον μέρος εστί τα ήμιση των ι άπερ εστί ε και έτι πλείω η ρίζα των ε ων απέμειναν εκ των λ. Τουτέστι το μεν εν μέρος εστί και β και ια/ιε βραχύ τι ελάττω, το δε έτερον εστί ζ και δ/ιε βραχύ τι ελάττω. Πολλαπλασιάσας γαρ ταύτα διηρημένως και ενώσας τους δύο γεγονότας πολλαπλασιασμούς, γίνονται ομού ξ και ξβ/σκε δι’ ην αιτίαν είπομεν.

Έτερον τούτου όμοιον.

Έστω ότι ζητείς πως εστί ποιήσαι τα κ, αριθμούς τίνας δύο τοιούτου μεγέθους ώστε πολλαπλασιάσθαι έκαστον μέρος των δύο αριθμών διηρημένως εις εαυτό, και ενώσας τα δύο πολλαπλασιαζόμενα μέρη αυτών, γενέσθαι ομού σίη. Έχεις δε και τούτο ειδέναι δια της μεταχειρίσεως του΄πράγματος και του αριθμού και των τζένσων ης εποιήσας πρότερον. Επεί δε αυτή η μεταχείρισης δεδήλωκεν ημίν κανόναν προχειρέστερον, ποίησαν τούτο δια του προχειρεστέρου κανόνος, και ευρήσης καλώς το ζητούμενον.

Λαβέ τα ήμιση των κ άπερ εστί ι και πολλαπλασίασον ταύτα εις εαυτά, ι-κις ουν ι γίνονται ρ. Λαβέ δε τα ημίση των σήι άπερ εστί ρθ και απομένοσιν θ. Η δε ρίζα των θ εστί γ. Άφελε γ εκ των ι άπερ εστί τα ημίση των κ και απομένοσιν ζ. Πρόσθες γ εί των ι και γίνονται ιγ. Και ο μεν ελάττων αριθμός εστί ζ, ο δε μείζων εστί ιγ. Ομού δε οι δύο γίνονται κ.

Πολλαπλασίασον τα ζ εις εαυτά, (25) ζ-κις ουν ζ γίνονται μθ. Πολλαπλασίασον και τα ιγ εις εαυτά, ιγ-κις ουν ιγ γίνονται ρξθ. Ένωσον τα μθ μετά των ρξθ και γίνονται ομού σίη ως εζήτησας.

Ωσαύτως δε και παν έτερον τούτων όμοιον ζήτημαν δια της ομοίας ταύτης προχείρου μεταχειρίσεως, έχεις ειδέναι καλώς το ζητούμενον.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Ερμηνεία συμβόλων:

ι= 10

ξ= 60

πράγμα: άγνωστος της εξίσωσης

άφελε: αφαίρεσε

τζένσον: τετράγωνο ενός αριθμού

ρ=100

κ=20

ε=5

α=1

β=2

δ/ιε= 4/15

ια/ιε= 11/15

ζ=7

νβ=52

ρα/σκε= 101/ 225

σπζ/σκε= 287/ 225

ξβ/σκε= 62/225

τζάκισμα: κλάσμα

ε-κις: πεντάκις, επί 5

ι-κις: δεκάκις, επί 10

κε= 25

λ=30

ζ-κις: εφτάκις, επί 7

ρξθ= 169

Από την περιγραφή των πράξεων προκύπτει το σύστημα :

$\chi+\psi= 10,\ \chi^2+\psi^2= 60$

Σχετικά με τη λύση, αντικαθιστά το ζ από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη, περιγράφοντας την ισότητα:

$(10- ψ)^2+ ψ^{2=}$ 60, από την οποία προκύπτει δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ψ, και την επιλύει χρησιμοποιώντας τον κανόνα των πραγμάτων, ο οποίος έχει ήδη αναφερθεί.

Κατά την επίλυση αντικαθιστά τη ρίζα του 5 με 4/15, και βρίσκει για τον έναν άγνωστο του συστήματος 2 11/15, και για τον άλλο 7 4/15. Υψώνοντας τον καθένα στο τετράγωνο, και προσθέτοντας τους αριθμούς που προκύπτουν, βρίσκει 60 62/225. Εξηγεί πως το περίσευμα οφείλεται στο γεγονός ότι για τη ρίζα του 5 έχει δοθεί μεγαλύτερη προσεγγιστική τιμή από την πραγματική.

Για το ίδιο σύστημα αναφέρει πως λύνεται και «δια της μεταχειρίσεως του αυτού κανόνος προχειρεστέρως», και κάνει τις εξής πράξεις:

10/2=5, 5*5=25, 60/2=30, 30-25=5, οπότε οι τιμές των αγνώστων θα είναι 5- √5, και 5+ √5.

Προσπαθώντας να εξηγήσουμε αυτή τη μέθοδο, οδηγούμαστε στις εξής πράξεις:

$(χ+ψ)/2= 5$, οπότε $(χ+ψ)^2/4= 25$. Επίσης $(χ^2 + ψ^2)/2=30$, και $30-25= (χ^2+ψ^2)/2- (χ+ψ)^2/4= (χ^2+ψ^2)/4- χ*ψ/2= 5$, ή χψ=20, οπότε προκύπτει η εξίσωση $χ^2- 10χ + 20= 0$, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς 5-√5 και 5+√5.

Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Από την περιγραφή των πράξεων προκύπτει το σύστημα:

$Χ+ψ =10$, $χ^2+ ψ^2= 60$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς χ προκύπτει χ= 10-ψ

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη και προκύπτει $(10-ψ)^2+ ψ^2 = 60$, που καταλήγει στη δευτεροβάθμια εξίσωση $ψ^2-10ψ +20 =0$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της διακρίνουσας

α= 1, β= -10, γ= 20

$Δ= β^2- 4αγ= (-10)^2- 4*1 *20= 100-80=20$, $(\sqrt{20}= \sqrt{4*5}= \sqrt{4} * \sqrt{5}= 2\sqrt{5})$

$Ψ_1= (-β -\sqrt{Δ})/2α= (10 -\sqrt{20})/2= 10/2 - (2\sqrt{5})/2= 5- \sqrt{5}$

$Ψ_2= (-β +\sqrt{Δ})/2α= (10 +\sqrt{20})/2= 10/2 +(2\sqrt{5})/2= 5+ \sqrt{5}$

Άρα για $ψ_1$, $χ= 10- 5 + \sqrt{5}= 5 + \sqrt{5}$

Και για $ψ_2$, $χ= 10 + 5 - \sqrt{5}= 15 -\sqrt{5}$

3.10. Περί του πως εστί ένωσε δυο τζακίσματα, τουτέστι β/γ και γ/δ και ειδέναι πόσα γίνονται ενούμενα τα δύο μέρη αυτών.

Έστω ότι εκ δύο τινών διαμερισμών εναπέμειναν τζακίσματα δύο τό μέν β/γ το δέ γ/δ. Ζητείς δέ ένωσε ταύτα και ειδέναι, πόσα ακέραια γίνονται τα δύο μέρη αυτών ενωθέντων.Έχεις δέ τούτο ειδέναι ούτως:Πολλαπλασίον τάς δύο κάτωθεν ψήφους,τουτέστι τά γ και δ (20) τρίς ούν δ γίνονται ιβ, και εστί ταύτα εν σώμα των δύο

μερών, δί αυτών γάρ τών ιβ λαμβάνονται τά β/γ και γ/δ. Λαβέ γάρ τά β/γ τών ιβ άπερ εστί η, λαβέ καί τά γ/δ των ιβ απέρ εστί θ, ενωσόν δε τά η μετά τών θ καί γίνονται ομού ιζ μετά τού σώματος τών ιβ καί οσάκις χωρώσι τά ιβ πρός τά ιζ, τόσ' άν ακέραια γίνονται.

2/3 3/4
12*2/3=8 12*3/4=9
8+9=17
17/12

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΛΥΣΗ

2/3+3/4=
8/12+9/12=
17/12

Μαθ.σχ. τού κεφ. 43. (μγ).Πρόσθεση κλασμάτων

Την πρόσθεση όπως λέει, την χρειάζεται για να υπολογίσει πόσο κάνουν δύο υπόλοιπα μαζί.

Για την πρόσθεση του β/γ και του γ/δ, πολλαπλασιάζει το γ με το δ και στην συνέχεια πολλαπλασιάζει το β με δ και το γ με το γ,προσθέτει τα αποτελέσματα και βρίσκει ιζ/ιβ το οποίο είναι α και ε/ιβ .

Στη συνέχεια αναφέρει παράδειγμα με το Φ,όπου από δύο διαφορετικούς διαμερισμούς προκύπτουν κλάσματα ίσα με το β /γ και γ/δ ενός τουρνεσίου. Εδώ πρέπει να σημειωθεί

πως ενώ δίνει την πληροφορία ότι το α ΙΙ ισοδυναμεί με κ | και α | με δ τουρνέσια, εντούτοις κάνει την υπόθεση ότι κάθε Φ έστω ότι χρήζεις ΙΙ το οποίο σημαίνει | ρκ.

Τα β /γ των ρκ | είναι π |, δηλαδή || δ.

Τα γ/δ των ρκ | είναι '7 |, δηλαδή || δ και ι |.

Προσθέτει και έχει || κ και | ι.

Κάθε όμως Φ έστω ότι χρήζει || ς, άρα έχει α Φ και || β και | ι, δηλαδή ε/ιβ των ς || που χρήζει το Φ.

Βέβαια αναρωτιέται κανείς γιατί άραγε να χρησιμοποιεί αυτόν τον πολύπλοκο τρόπο, όταν ήδη έχει εξηγήσει τα β /γ και τα γ/δ αν προισθεθούν δίνουν α και ε/ιβ.

3.11 .Περί του πωλούντος τον ιππόν αυτού σεσοφισμένος και μη θέλων εξείπειν το τίμημα αυτού,αλλά δι' αινιγμάτων αινιττόμενος την τιμήν τούτου,πόση τις εστί. Μαθ.σχολ. του κεφ. 63. (ξγ).πώληση ίππου.

Ο πωλητης λεει, εχω ις ιφ. Εαν απο τα δικα σου Φ μου δωσεις η και ακομα α/γ των δικων σου Φ εγω θα εχω πληρωθει παιρνοντας ολα οσα θελω.

Ο αγοραζων λεει, Εαν μου δωσεις α/δ απο τα δικα σου ις Φ, μαζι με τα β/γ των Φ που εχω εγω, θα εχω οσα μου ζητεις.

Ο συγγραφεασ ακολουθει την εξησ μεθοδο...

1) Υποθετει οτι ο αγοραστης εχει 24 Φ, οποτε (1/3).24= 8, 8+8=16 οπου 16 Φ εχει ο πωλητης.

4+(2/3).24= 4+16=20, οπου 20 Φ εχει ο αγοραστης.

2) Υποθετει οτι ο αγοραστης εχει 27 Φ, οποτε (1/3).27=9,9+8=17 οπου 17 Φ εχει ο πωλητης.

4+(2/3).27=22, οπου 22 Φ εχει ο αγοραζων .

24-20=4, 27-22 =5, 5-4=1

Πολλαπλασιαζει σταυροειδως τα κλασματα 4/24 κ 5/27 και αφαιρει 120-108=12, 12/1=12 οπου 12 ειναι τα Φ που εχει ο αγοραστης.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΕΦ. 1-5 (Α-Ε).</u>

Ο συγγραφεας του χειρογραφου μας χρησιμοποιει το δεκαδικο αριθμητικο συστημα θεσεως, το οποιο οι βυζαντινοι παρελαβαν απο τους Περσες οχι κατευθειαν, αλλα με την μεσολαβηση των Λατινων 100 χρονια πριν απο την χρονολογια συγγραφης της Ελλβιενμαθπραγμ.(κεφ.2). Η μεσολαβηση αυτη οφειλοταν στισ εμπορικεσ συναλλαγες, οι οποιες υπηρχαν μεταξυ των δυο λαων. Στην "Πτολεμαικη Συνταξη" το μηδεν ονομαζεται "ουδεν" και συμβολιζεται με το 0. Στο χειρογραφο γινεται χρηση των συμβολων α,β,γ,δ,ε,ζ,ς,η,θ, για τους αριθμους απο ανεστραμμενο h (ч).

Η μια χιλιαδα συμβολιζεται με .α, οι δυο χιλιαδες .β κ.τ.λ. Οι 10.000 ονομαζονται μυριαδες, και οι δε 100 μυριαδες (δλδ το δικο του εκατομμυριο) μιλλιουνι. Επισης τα σημερινα δισεκατομμυρια ονομαζονται λεγεωνες.

3.12 Περί τού πώς εστί ειδέναι δι' ετέρας μεταχειρίσεως δύο τινων ένριζων μή ειδότων αριθμών εκάστην ρίζαν καί τινες άν ώσι οι δύο μή ειδότες αριθμοί, οι πολλαπλασιάζοντες κορυφήν ένριζον.

Λύση- Βυζαντινή λύση, βυζαντινά σύμβολα

Έστω ότι δύο τινες ένριζοι αριθμοί επολλαπλασίασαν ρμδ.Ζητείς δέ ειδέναι τίνες άν δύο αριθμοί ένριζοι έχωσιν πολλαπλασιάσαι τά ρμδ,καί τίς εστί ή ρίζα τών δύο μή ειδότων ένριζων αριθμών τών πολλαπλασιαζόντων τά ρμδ.Καί π΄ρωτον μέν δεί τούτο ειδέναι, ότι πάντες δύο αριθμοί ένριζοι, πρός αλλήλων πολλά-πλα(5)σιαζόμενοι, ο εξ αυτών γενόμενος πολλαπλασιασμός,ένριζος ευρεθήσεται.

Ζήτει τοίνουν τήν ρίζαν τών ρμδ ήτις εστί ιβ.Ζητεί δέ τίνες άν δύο αριθμοί, πολλαπλασιάσαι ιβ, γ-ίς γάρ δ γίνονται ιβ.Η ρίζα ούν τού ελάττονος αριθμού δι' ού τά ρμδ πολλαπλασιάζονται εστί δ γ-ίς γάρ γ γίνονται θ καί δ-κίς ις γίνονται ρμδ.

Καί ιδού από μόνης τής ρίζης τών ρμδ ήτις εστί ιβ, εύρες τούς δύο ένριζους αριθμούς τούς πολλαπλασιάζοντας τά ρμδ τον μέν έλλατω, τά δ,τόν δέ μείζων, τά λς.Εύρες δέ καί τάς ρίζας αυτών πρό τού (15) ειδέναι αυτούς τών μέν δ τά β, τών δέ λς τά ς.

Ζητεί δέ τίνες άν έτεροι δύο αριθμοί έχωσιν πολλαπλασιάσαι τά ιβ άπερ εστλι η ρίζα τών ρμδ η δέ καί α α/β πολλαπλασιάζοσιν ιβ, η-κις γάρ α α/β γίνονται ιβ.Καί η μέν τού μείζονος αριθμού ρίζα δι' ού τά ρμδ πολλαπλασιάζονται, εστί τά η, τού δέ ελάττοντος αριθμού η ρίζα δι 'ού τά ρμδ πολλαπλασιάζονται, εστί τό α α/β η-κις γάρ η γίνονται ξδ καί α α/β-κίς α α/β γίνονται β α/δ, ξδ-κις δέ β α/δ γίνονται ρμδ.

Καί ιδού από μόνης τής ρίζης τών ρμδ ήτις εστί ιβ εύρες καί ετέρους δύο ένριζους αριθμούς τούς πολλαπλασιάζοντες ρμδ, τόν μέν μείζων τά λδ, τόν δέ έλλαττω τά β α/δ. Εύρες δέ καί τάς ρίζας αυτών πρό (20) τού ειδέναι αυτούς.Τών μέν ξδ τά η, τών δέ β α/δ τό α α/β. Ωσαύτως δέ καί πάντα έτερον αριθμόν τόν έχοντα ρίζαν ακεραίαν, διά τής ομοίας ταύτης μεταχειρίσεως έχεις ειδέναι όσοι άν αριθμοί ενρίζοι, πολλαπλασιάσαι, έχωσιν τόν ένριζον αριθμόν όνπερ άν έχης ζητών, καί τίς εστί εκάστου ρίζα, τών δύο ενρίζων αριθμών τών πολλαπλασιαζόντωντήν ένριζον κορυφήν.

Άλλος τρόπος:Γιά τόν ίδιο αριθμό, δηλαδή γιά τόν 144, κάνει τώρα τό εξής:

Βρίσκει τήν ρίζα τού 144 πού είναι τό 12, καί τό 12 τό κάνει γινόμενο τού 3.4, τό οποίο υψώνει στό τετράγωνο καί έχει 9.16= 144, δηλαδή οι ζητούμενοι αριθμοί είναι τό 9 καί τό 16. Προφανώς στηρίζεται στό ότι τό γινόμενο τών ριζών δύο αριθμών είναι ίσο μέ τήν ρίζα τού γινομένου αυτών.

Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στο παραπάνω κείμενο είναι οι εξής αριθμοί:

- ρμδ ---> 144
- ιβ ---> 12
- γ ---> 3

- δ ---> 4
- ις ---> 16
- θ ---> 9
- β ---> 2
- λς ---> 36
- ς ---> 6
- α * α/β = 1* 1/2 = 1/2
- β*α/δ = 4 * 1/4 = 1/2
- ξδ ---> 64
- λδ ---> 34
- η ---> 8

Άλλος τρόπος:Γιά τόν ίδιο αριθμό, δηλαδή γιά τόν 144, κάνει τώρα τό εξής:

Βρίσκει τήν ρίζα τού 144 πού είναι τό 12, καί τό 12 τό κάνει γινόμενο τού 3.4, τό οποίο υψώνει στό τετράγωνο καί έχει 9.16= 144, δηλαδή οι ζητούμενοι αριθμοί είναι τό 9 καί τό 16. Προφανώς στηρίζεται στό ότι τό γινόμενο τών ριζών δύο αριθμών είναι ίσο μέ τήν ρίζα τού γινομένου αυτών.

Δοκιμάζει επίσης μέ τόν ίδιο τρόπο τόν συνδιασμό 2,6 αφού 2.6= 12, οπότε λέει πώς οι ζητούμενοι αριθμοί είναι τό 4 καί τό 36.

Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

$\sqrt{144}= 12$

$\sqrt{144}=3*4$

$(\sqrt{144})^2= 3^2*4^2$

144= 9*16

144=144

Άλλη λύση :

144 - 1 = 143

143 - 3 = 140

140 - 5 = 135

135 - 7 = 128

128 - 9 = 119

119 - 11 = 108

108 - 13 = 95

95 - 15 = 80

80 - 17 = 63

63 - 19 = 44

44 - 21 = 23

23 - 23 = 0

Μετράμε τον αριθμό των μονών αριθμών που αφαιρείται ότι είναι το 12, αυτή είναι και η ρίζα του 144.

3.13 Περί του πως εστί ειδέναι μεικτήν ρίζαν δύο τινών αριθμών και τίνες αν εισί οι δύο αριθμοί οί την εφίμεικτον ρίζαν έχοντες .

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, Βυζαντινά σύμβολα

Εστω ότι ζητείς ειδέναι ως έν ταυτώ μεικτήν ρίζαν δύο τινών αριθμών προς αλλήλους πολλαπλασιαζομένων . Και πρωτον μεν δει τούτον ειδέναι ότι ό εκ των δύο αριθμών γενόμενος πολλαπλασιασμός χρή είναι τοιούτος ώστε έχειν ρίζαν φυσικήν και ού νόθον . Και γάρ πας τις αριθμός έχει ρίζαν την δυναμένην πολλαπλασιάσαι την ζη (5) τουμένην κορυφήν . Ενταυτα δε, φυσικήν ρίζαν λέγομεν την ακεραίαν ρίζαν την μη έχουσαν τζάκισμα. Νόθον δε ρίζαν λέγομεν την δυναμένην άνευ τζακίσματος πολλαπλασιάσαι την ταύτης κορυφήν.

Φυσικάς γάρ και ακεραίας ρίζας έχοσιν τα ις και κε και λς και μθ και ξδ και εξής ομοίως δ-κις γάρ δ γίνονται ις και ε-κις ε γίνονται κε και ς-κις ς γίνονταιλς και η-κις η γίνονται ξδ και εξής ομοίως. Νόθας δε ρίζας ενταυτα λέγομεν έχειν τα λ και μβ και εξής ομοίως ε-κις γαρ ού ε αλλά ς , γίνονται λ, τα δε ε μετά των ς εστί ανόμοια . Ωσάυτως και ς-κις ζ γίνονται μβ , τα δε ς μετά των ζ εστί ανόμοια .

Εστω τοίνυν ότι ζητείς (10) ειδέναι την εφίμεικτον ρίζαν των δύο αριθμών των πολλαπλασιαζόντων τα ξδ. Εχεις δε ταύτην ειδέναι ούτως . Ζήτει την ρίζαν των ξδ ήτις εστί η η-κις γαρ η γίνονται ξδ. Διπλασίασον την ρίζαν των ξδ, τουτέστι τα η και γίνονται ις . Και ιδού ο μείζων αριθμός δι’ ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται , εστί ις . Μέρισον τα ξδ μετά των ις και γίνεται ό τούτων διαμερισμός δ δ-κις γαρ ις ξδ γίνονται. Και ιδού ο έλαττος αριθμός δι ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται εστί δ. Πολλαπλασίασον γαρ τα ις μετά των δ, ις-κις ούν δ γίνονται ξδ . Μη ειδώς δε τινές αν δύο αριθμοί έχοσιν πολλαπλασιασαι ξδ , διά μονής της (15) ρίζης των ξδ ήτις εστί τα η , εύρες ότι εστί τα ις και δ δί αυτών γαρ πολλαπλασιάζονται ξδ. Διπλασίασον πάλιν την ρίζαν των ξδ ήτις εστί τα η και γίνονται ις. Πρόσθες τα ις και δ δι' ών πολλαπλασιάζονται τα ξδ και γίνονται ομου λς.

Και άλλως: Τετραπλασίασον την ρίζαν των ξδ ήτις εστί τα η δ-κις ούν η γίνονται λβ. Πρόσθες και τον ελάττονα αριθμόν δι' ού τα ξδ πολλαπλασιάζονται , τουτέστι τα δ , και γίνονται ομού πάλιν λς . Όση δε εστί ή πρίζα των λς, τοσαύτη εστί και η εφίμεικτος ρίζα των ις και δ,ς.(20) Τα γάρ ις έχοσιν ρίζαν δ, τα δε δ έχοσιν ρίζαν β δ-κις γαρ δ γίνονται ις και δίς τα β γίνονται δ. Ένωσον δε την ρίζαν των ις και δ , τουτέστι τα δ και β και γίνονται ομού ς .

Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ις και δ των πολλαπλασιαζόντων τα ξδ , εστί ς , καθώς δια της ρίζης των λς δήλη ημίν γίνεται ,εύρες ούν δια μόνης της ρίζης των ξδ , ήτις εστί τα η, και τους δύο αριθμούς τους πολλαπλασιάζοντας τα ξδ , και την τούτων εφίμεικτον ρίζαν.

Εστω δε ότι είδας ούσαν με εφίμεικτον ρίζαν δύο τινών αριθμών τα ς.

Ζητείς δε ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί έχωσιν την εφίμεικτον ρίζαν των ς.

Πολλαπλασίασον τα ς εις εαυτά ς-κις ούν ς γίνονται λς. Ζήτει (25) τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λς δ-κις ούν ι γινονται μ. Τα δε μ εστί υπέρ τα λς δ-κις δε θ γίνονται λς. Και ιδού ουδέ τα λς εστί ελλειπή δ-κις δε η γίνονται λβ, καθώς ούν είπομεν τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λς εύραμεν ότι τα η τετραπλασιαζόμενα , δ-κις η γίνονται λβ. Μέχρι ούν των λς λείπονται δ.

Και ιδού ο έλαττος αριθμός δι' ου και εφίμεικτος ρίζα των γίνεται, εστί δ.

Τετραπλασίασον ταύτα δ-κις ούν γίνονται ις. Εστί δε ο μείζων αριθμός δι' ού η εφίμεικτος ρίζα των ς γίνεται ις. Των μεν γάρ δ η ρίζα εστί β, των ις δε η ρίζα εστί δ. Ομού δε η εφίμεικτος (30) ρίζα των δύο τούτων αριθμών εστί ς.

Και ιδού από μόνης της εφιμείκτου ρίζης των δύο μη ειδότων αριθμών, εύρες ότι ο μεν έλαττος αριθμός εστί δ , ο δε μείζων ις , αί δε δύο τούτων ρίζαι ομού εστί ς.

Έτερον τούτου όμοιον . Έστω ότι ζητείς ειδέναι ως εν ταυτω , εφίμεικτον ρίζαν δύο τινων αριθμών των πολλαπλασιαζόντων μθ.

Ζήτει την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ ζ-κις γάρ ζ γίνονται μθ. Διπλασίασον την ρίζαν των μθ, τουτέστι τα ζ και γίνονται ιδ. Ο μείζων ούν αριθμός δι ού τα μθ πολλαπλασιάζονται εστί ιδ. Μέρισον τα μθ μετά των ιδ και γίνεται ο τούτων διαμερισμός γ α/β ιδ-κις γαρ γ α/β γίνονται μθ. Ο έλαττος ούν αριθμός δι' ού τα μθ πολλαπλασιάζονται εστί γ α/β. Πολλαπλασίασον γάρ (35) τα ιδ μετά των γ α/β ιδ-κις γάρ γ α/β γίνονται μθ ως είπομεν.Διπλασίασον την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ γίνονται ιδ. Πρόσθες και τα ιδ και γ α/β δι' ών πολλαπλασιάζονται τα μθ και γίνονται ομού λα α/β.

Και άλλως : Τετραπλασίασον την ρίζαν των μθ ήτις εστί ζ δ-κις (74r) (1) ούν ζ γίνονται κη . Πρόσθες και τον ελάττονα αριθμό δι' ου τα μθ πολλαπλασιάζονται , τουτέστι τα γ α/β και γίνονται ομού πάλιν λα α/β. Οση δε εστί ρίζα των λα α/β τοσάυτη εστί και η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β, των πολλαπλασιαζόντων τα μθ. Η δε ρίζα των λα α/β εστί ε και ιθ/λα. Τεχνικώς γαρ ταύτα πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιαζόσιν κορυφήν λα και δηε/θζα,άπερ εστί λα α/β έγγιστα.

Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β , εστί ε και ιθ/λα. Των γαρ ιδ ή ρίζα εστί γ και κγ/λα, των δε γ και α/β η ρίζα εστί α και κζ/λα. Ενωσον (5) τα ακέραια και τα τζακίσματα και γίνονται ομού ε και ιθ/λα. Και ιδού η εφίμεικτος ρίζα των ιδ και γ α/β , εστί ε και ιθ/λα , καθώς δια της ρίζης των λα α/β δήλη ημίν γέγονε, μη ειδώς ούν τίνες αν δύο αριθμοί , πολλαπλασιάσαι έχοσιν μθ , και τις εστί ή εφίμεικτος τούτων ρίζα δια μόνης της ρίζης των μθ ήτις εστί ζ , εύρες και τους δύο αριθμούς και την τούτων εφίμεικτον ρίζαν.

Εστω δε ότι είδας ούσαν μεν εφίμεικτον ρίζαν δύο τινων αριθμών τα ε και ιθ/λα . Ζητείς δε ειδέναι τίνες αν δύο αριθμοί έχωσιν την εφίμεικτον ρίζαν των ε και ιθ/λα.

Πολλαπλασίασον τα ε και ιθ/λα εις εαυτα τεχνικώς ούν τα ε και ιθ/λα , μετά των ε και ιθ/λα πολλαπλασιαζόμενα, πολλά (10)πλασιάζοσιν λα και α/β έγγιστα . Ζήτει τις αν αριθμός τετραπλασιαζόμενος , εστί ελλειπώς εγγυτέρω των λα α/β δ-κις ουν ζ γίνονται κη , λείπονται και γ και α/β μέχρι των λα και α/β. Ο έλαττος ουν αριθμός δι' ου ή εφίμεικτος ρίζα των ε και ιθ/λα γίνεται , εστί γ και α/β. Τετραπλασίασον τα γ και α/β δ-κις ουν γ α/β γίνονται ιδ. Ο μείζων ουν αριθμός δι' ου ή εφίμεικτος ρίζα των ε και ιθ/λα γίνεται , εστί ιδ.

Από μόνης ουν της εφιμείκτου ρίζης των δύο μη ειδότων αριθμών, εύρες ότι ο μεν ελάττω αριθμός εστί γ α/β , ο δε μείζων εστί ιδ. Ομού δε αί δύο τούτων ρίζαι , εστί ε και ιθ/λα.

Λύση- Βυζαντινή μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Μαθ .σχ. του κεφ. 128. (ρκη). Εφίμεικτος ρίζα δύο αριθμών**.**

Παρατηρούμε, πως δεν ορίζει εξ αρχής τι είναι εφίμεικτος ρίζα δύο αριθμών .

Αυτό το κάνει αργότερα κατά την διάρκεια διαδικασίας εύρεσης συγκεκριμένης εφιμείκτου ρίζας δυο αριθμών , η οποία είναι το άθροισμα των ριζων δύο αριθμών.

Εξηγεί δε, πως αναγκα'ια συνθήκη είναι , ο πολλαπλασιασμός των δύο δεδομένων αριθμών να έχει ρίζα φυσική και όχι νόθο.

Φυσική ρίζα ονομάζει την ακεραία ρίζα , και νόθο '' την δυναμένη άνευ τζακίσματος πολλαπλασιάσαι την ταύτης κορυφήν'', π.χ η ρίζα του 12 είναι νόθος, όπως ήδη έχει εξηγήσει στο κεφ.. ριθ', γιατί 3.4=12, δηλαδή πρόκειται για σώμα (εμβαδόν) παραλληλογράμμου και όχι τετραγώνου , με πλευρές 3 και 4 . Επίσης αναφέρει ότι οι αριθμοί 30,42 έχουν νόθους ρίζες , γιατί 5.6=30 και 6.7=42.

Στη συνέχεια θέτει ως πρόβλημα την εύρεση της εφιμείκτου ρίζας των αριθμών που έχουν γινόμενο 64.

Βρίσκει την ρίζα του 64 που είναι το 8. 8.2=16, 64/16=4 , και λέει πως ο ένας αριθμός είναι ο 16 , και ο άλλος ο 4. Αυτό στηρίζεται σήμερα στο ότι ισχύει πάντα η ισότητα $\alpha/(2\sqrt{\alpha})= \sqrt{\alpha}/2$, με α=64.

Χρησιμοποιεί και έναν άλλο τρόπο σύμφωνα με το οποίο , αφού βρει την ρίζα του 64 που είναι το 8 , κάνει τις εξής πράξεις :

8.4=32, 32+4=36 , ρίζα του 36 το 6 , και καταλήγει , πως όση είναι η ρίζα του 36 , τόση είναι και η εφίμεικτος ρίζα των 16 και 4 , δηλαδή 4+2=6. Ετσι λοιπόν καταλαβαίνει ο αναγνώστης πως όταν μιλα για εφίμεικτο ρίζα δύο αριθμών ,εννοεί το άθροισμα των ριζών αυτών των αριθμών.

Εξετάζει κατόπιν το αντίστροφο πρόβλημα , όπου γνωρίζει πως η εφίμεικτος ρίζα δυο αριθμών είναι το 6, και ζητεί τους αριθμούς αυτούς.

6.6=36 , 4.8=32, και παρατηρεί πως ο αριθμός 8 είναι ‘’ελλιπως εγγυτέρω των 36’’ , πολλαπλασιαζόμενος με το 4.

Στη συνέχεια θεωρεί τη διαφορά 36-32=4 και αυτό το 4 είναι για τον συγγραφέα ‘’ ο έλαττος αριθμός’’ από τους ζητούμενους .

Θα μπορούσε να προκύψει μία πιθανή εξήγηση αυτής της μεθοδολογίας από τη λύση του συστήματος.

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=6$, $\sqrt{\alpha}.\ \sqrt{\beta}=\chi$, οπότε $\omega^2-6\omega+\chi=0$, όπου $\omega=\sqrt{\beta}$, ή $\sqrt{\alpha}$. Αν επιλύσουμε την εξίσωση ως προς ω , η διακρίνουσα θα είναι ίση με 36-4.χ , και επειδή πρέπει να είναι θετική και να έχη και ρίζα ακέραια , προκύπτει πως το χ είναι ίσο με 5,ή με 8.

Στη συνέχεια ,με το γνωστό τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε , πως η μία λύση είναι το ζευγος (α,β) =(4,16) και η άλλη το ζευγος (α,β)=(1,25).

Δεχόμαστε, λοιπόν, ότι η διακρίνουσα $36-4\chi>0$ $\quad 4\chi<36 \rightarrow \chi<36/4 \rightarrow \chi<9$

Για χ=0 ισχύει, ότι: ω= 6(+ ή -) 6/2 = 0 ή 6.

Επομένως $\sqrt{\alpha}=0, \sqrt{\beta}=6 \rightarrow \beta=36$.

Λύση- Σύγχρονη μεθοδολογία, σύγχρονα σύμβολα

Εφαρμόζουμε τον τύπο

$\alpha/(2\sqrt{\alpha})= \sqrt{\alpha}/2$ ο οποίος αποδεικνύεται ως εξής :

$\alpha/2\sqrt{\alpha} = \alpha\sqrt{\alpha}/2(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha\sqrt{\alpha}/2\alpha = \sqrt{\alpha}/2$

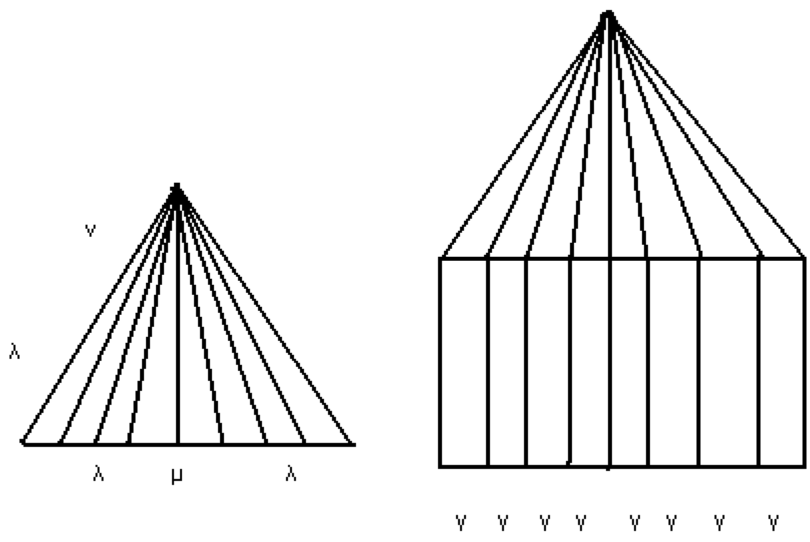
για α=144, 144/(2√144)= √144/2, 144/ (2*12)= 12/2, 144/24=12/2, 6=6

και με τη βυζαντινή μεθοδολογία η ρίζα του 144 είναι το 12. 12*3= 36, 144/36=4.

Ο ένας αριθμός είναι ο 36 και ο άλλος ο 4.Αυτό σήμερα αποδεικνύεται από την παραπάνω ισότητα.

3.14 Περί του πώς εστί ειδέναι πόσων σπιθαμών πανίν, έσται σοι χρεία προς το ποιήσαι σκηνήν όσου αν μεγέθους βούλη.

Έστω ότι ζητείς ποίησε σκηνήν ήτις τέντα κοινώς πέφηκε καλείσθαι. Ουκ εστί το σχήμα ταύτης ανάλογον ,δηλοί δ’ όμως ει κ’αν τε το βουλόμενον.



Έστω δέ, ου διηρημένη, αλλ’ έν σώμα ούσα από της (20) γης μέχρι της ταύτης κορυφής .Έστω δέ ο στύλος εφ’ού η δηλωθείσα σκηνή κρέμεται, σπιθαμών μ. Έστω δέ και πανίν όπερ εστί κατά πλάτος σπιθαμών γ. Ζητείς δέ ειδέναι πόσων σπιθαμών πανίν τοιούτου πλάτους, έσται σοί χρεία, προς(25)τό ποιήσαι τοιούτου μεγέθους σκηνήν, ού είπομεν. Χρή ούν τούτο πρώτον ειδέναι, πόσων σπιθαμών εστί η του κατά γης ταύτης χείλους διάμετρος και περίμετρος .Έχεις δέ ταύτην ειδέναι δια του κανόνος της σκάδρας. Πολλαπλασιάσον γαρ τας μ σπιθαμάς του στύλου εις εαυτάς μ-κις ουν μ γίνονται αχ. Πολλαπλασίασον εις εαυτάς και τας ν σπιθαμάς τας από της γης χείλους ταύτης, μέχρι της του στύλου κορυφής· ν-κις ουν ν γίνονται βφ. Άφελε τα αχ εκ των βφ, και απομένοσιν

. Ζήτει την ρίζα των ήτις εστί λ· λ-κις γαρ λ, γίνονται. Εστί δε από της ρίζης (30) του στύλου μέχρι του κατά γης χείλους της σκηνής, σπιθαμαί λ.

Ωσαύτως και από του ετέρου μέρους της σκηνής, σπιθαμαί λ. Ομού δε η όλη διάμετρος του κατά γης χείλου ταύτης, σπιθαμών ξ. Εί μεν ουν οίδας το από του χείλους της σκηνής, μέχρι της του στύλου κορυφής δίαστημα πόσων σπιθαμών εστί, το δε από του χείλους επίπεδον μέχρι της ρίζης του στύλου ουκ οίδας, έχεις ειδέναι τούτο δι' ου τρόπου είπομεν. Εί δε το ανάπαλιν, οίδας μεν τον στύλον όντα καθ' ύψος σπιθαμών μ, οίδας δε και από της ρίζης του στύλου, μέχρι του κατά γης χείλους της σκηνής διάστημα σπιθαμών λ, το δε από του χείλους της σκηνής μέχρι του στύλου κορυφής ουκ οίδας πόσων σπιθαμών εστί, μ-κις μ γίνονται αχ, (35) λ-κις δε λ γίνονται. Ένωσον τα αχ μετά των και γίνονται ομού βφ. Ζήτει την ρίζαν τούτων ήτις εστί ν · ν-κις γαρ ν, βφ γίνονται. Εστί δε από του χείλους της σκηνής, μεχρί της του στύλου κορυφής, σπιθαμαί ν. Ειδώς ουν το ύψος και το πλάτος της σκηνής, τουτέστι ύψος μεν (113r) (1) σπιθαμών μ, πλάτος δε της διαμέτρου του χείλους, σπιθαμών ξ, ζήτει και την κατά γης χείλους περίμετρον ,πόσων σπιθαμών εστί. Τριπλασίασον τας ξ σπιθαμάς της διαμέτρου· γ-ις ουν ξ γίνονται ρπ. Λαβέ και το έβδομον μέρος των ξ όπερ εστί η και δ/ζ. Ένωσον και ταύτα μετά των ρπ και γίνονται ομού ρπη και δ/ζ μιας σπιθαμής. Επεί δε το μεν κάτωθεν χείλος της σκηνής, έχει περίμετρον σπιθαμών ρπη και δ/ζ μιας σπιθαμής, η δε κορυφή της σκηνής, είς ουδέν καταλείγουσα ουδόλως έχει περίμετρον, (5) λαβέ το εξ αναλόγου του ουδενός της κορυφής, και των ρπη και δ/ζ του χείλους, τουτέστι το ήμισυ των ρπη και δ/ζ όπερ εστί ҁδ και β/ζ. Αφαιρουμένων γαρ ҁδ και β/ζ εκ των ρπη και δ/ζ, απομένοσιν και ҁδ και β/ζ. Προστιθεμένων δε ҁδ και β/ζ επί του ουδενός της κορυφής, πάλιν γίνονται ҁδ και β/ζ. Εστί δε το έξ αναλόγου του χείλους και της κορυφής, σπιθαμών τετραγώνων ҁδ και β/ζ μιας σπιθαμής, τουτέστι περί το μέσον του χείλους και της κορυφής της σκηνής, εστί η περίμετρος ταύτης, σπιθαμών ҁδ και β/ζ μιας σπιθαμής. Πολλαπλασίασον ταύτας προς τας ν σπιθαμάς τας από του χείλους μέχρι της κορυφής· ν-κις δε ҁδ και β/ζ γίνονται δψιε και β/ζ. Τοσούται ούν σπιθαμαί τετράγωναι πανίν, έσται σοι χρεία, προς το ποιήσαι τοιούτου μεγέθους σκηνήν ου είπομεν. (10) Επεί δε το του πανίου πλάτος, εστί σπιθαμών γ ως είπομεν, μέρισον τας δψιε σπιθαμάς και β/ζ, μετά των γ σπιθαμών του πλάτους και γίνεται ο τούτων διαμερισμός αφοα και ις/κα.

αaα

εβδομα αβεγς ις/κα

γγυυζ

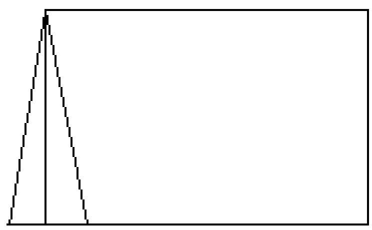
βαααα

βββ

αφοα καί ις/κα

Έσται σοί δέ χρεία, πανίν κατά μήκος σπιθαμών αφοα καί ις/κα μίας σπιθαμής, προς το ποιήσαι τιοούτου μεγέθους σκηνήν, όπερ πανίν, κατά πλάτος εστί σπιθαμών γ. Εάν δέ διηρημένη εστί η σκηνή, καθώς νύν μάλιστα πέφυκε γίνεσθαι, καί ούτως διά τής παρούσης μεταχειρίσεως έχεις ειδέναι καλώς τό ζητούμενον, διηρημένως μέν, το όρθιον ταύτης από τής γής αναφερόμενον, διηρημένως δέ, καί τό τής κορυφής μέρος, καθώς καί επί τού παρόντος ζητήματος δεδηλώκαμεν.

Μή μόνον δέ τοιούτου σχήματος σκηνήν, αλλά καί οικοειδή σκηνήν, διά τής παρούσης μεταχειρίσεως, ειδέναι έχεις πόσων σπιθαμών πανίν έσται σοί χρεία, ποιήσαι



ταύτη**.**

Τό από τού στύλου μήκος μέχρι τής ετέρας άκρης, σπιθαμών ιδ. Τά δύο μέρη ταύτης εστί σπιθαμών τετραγώνων σπ. Πανίν κατά μήκος, τά δύο μέρη σπιθαμών τετραγώνων ͵γγ καί α/γ. Έστω γάρ ο μέν στύλος ταύτης σπιθαμών η, από δέ τής ρίζης του στύλου μέχρι του κατά γής χείλους ταύτης έστω σπιθαμαί ς· η-κις ουν η γίνονται ξδ, ς-κις δέ ς γίνονται λς. Ένωσον τά ξδ καί λς καί γίνονται ομού ρ. Ζήτει τήν ρίζαν τών ρ ήτις εστί ι· (20) ι-κις γάρ ι, ρ γίνονται. Εστί δέ τό μήκος τού πανίου, από τού κατά γής χείλους μέχρι τής κορυφής τού στύλου, σπιθαμών ι, καθώς δηλούται διά τής ρίζης τών ρ. Έστω δέ τό μήκος τής σκηνής σπιθαμών ιδ. Πολλαπλασίασόν δε τό μήκος τών ιδ σπιθαμών τής σκηνής, πρός τό μήκος τών ι σπιθαμών τού πανίου· ι-κις ούν ιδ γίνονται ρμ. Εστί δέ τό έν μέρος της σκηνής σπιθαμών τετραγώνων ρμ. Ωσαύτως (25)και το έτερον μέρος σπιθαμών τετραγώνων ρμ. Ομού δε τά δύο μέρη σπιθαμών σπ. Μέρισον ταύτας τάς σπ σπιθαμάς, μετά του πλάτους των γ σπιθαμών του πανίου, και γίνεται ο τούτων διαμερίσμος ϟγ και α/γ. Έσται σοί δε χρεία πανίν κατά μήκος, σπιθαμών ϟγ και α/γ μιάς σπιθαμής, πρός το ποιήσαι τοιούτου μεγέθους οικοειδή σκηνήν, όπερ πανίν κατά πλάτος εστί σπιθαμών γ. Τώ τρόπω δε τούτω, διά του πλάτους και μήκους του οίκου, και του αφατικού οξυγωνού ύψους, του επ'αύτου περιδωμένης της στέγης, έχεις ειδέναι πόσα κεράμια ή πλάκας μολύβδης έχοσιν καλύψαι την όλην στέγην του ζητουμένου οίκου ούπερ αν έχης ζητών, καθ'όν τρόπον και επί της παρούσης οικοειδούς σκηνής εύραμεν σπιθαμάς τετραγώνους (30) σπ, πανίν δε κατά μήκος σπιθαμών ϟγ και α/γ.

Οι παραπάνω μαθηματικοί συμβολισμοί είναι οι εξής.

μ=40,ν=50,γ=3,αχ=160,βφ=502,σανπι=900,λ=30,ξ=60,ρπ=180,η=8,δ/ζ=4/7,

ρπη=188,ϟδ=94,β/ζ=2/7,δψιε=4715,αφοα=1571,ις/κα=16/21,ααα=111,

αβεγς=12536,γγυυζ=33447,βαααα=21111,βββ=222,ιδ=14,σπ=280,

ϟγ=93,α/γ=1/3,ξδ=64,ς=6,λς=16,ρ=100,ι=10,ρμ=140,κις=δεκακις.

Υπολογισμός εμβαδού παράπλευρης επιφάνειας κωνικής σκηνής ύψους 40 σπιθαμών και παράπλευρης ακμής 50 σπιθαμών, όταν το ύφασμα το οποίο καλύπτει την παράπλευρη επιφάνεια έχη πλάτος 3 σπιθαμές.

Ο συγγραφέας χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώριμα βρίσκει την ακτίνας της βάσης ίση με 30. Για τον υπολογισμό της περιμέτρου της βάσης ακολουθεί την εξής διαδικασία: 3.60+60/7=188 4/7.

Κατόπιν χρησιμοποιεί την εξής ενδιαφέρουσα διατύπωση: ''Τοκάτω μέρος της σκηνής έχει περίμετρο 188 4/7 σπιθαμές, το δε άνω έχει περίμετρο ίση με το μηδέν, συνεπώς το εξ αναλόγου των δυο περιμέτρων είναι (188 4/7)/2 = 94 2/7''. Ακολούθως πολλαπλασιάζει το 94 2/4 με το 50 και βρίσκει ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 4715 2/7 τετραγωνικές σπιθαμές. Διαπιστώνουμε ότι έχει χρησιμοποιήσει τον γνωστό τύπο σύμφωνα με τον οποίον ισχύει πώς το συγκεκριμένο εμβαδόν είναι ίσο με την ημιπερίμετρο της βάσεως επί την παράπλευρη ακμή. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και ο υπολογισμός της περιμέτρου του κύκλου όπου θα γράφαμε: Π=2.π.30=60.π. Για τον συγγραφέα όμως, γνωρίζουμε ότι το π είναι ίσο με 3 1/7. Τέλος για να υπολογίσει το συνολικό ύφασμα το οποίο θα χρειασθεί, διαιρεί το 4715 2/7 με το 3.

Η σύγχρονη λύση του προβλήματος είναι:

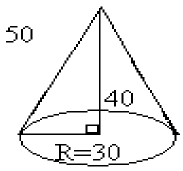
Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκει την ακτίνα της βάσης ίση με 30, με τον εξής τρόπο: $50^2= 40^2+12^2=R^{2=}50^2–40^2=(50–40)(50+40)=10.90=900^x= 30$

Για τον υπολογισμό της περιμέτρου της βάσης επιλύει με:

L = 3.60+60/7=188 4/7

2.3,14.30

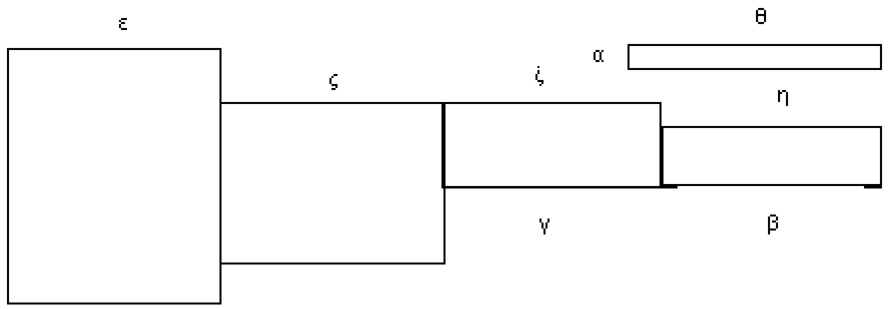
=2(3+0,14).30



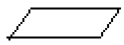
3.60+60.0,14=3.60+60/7

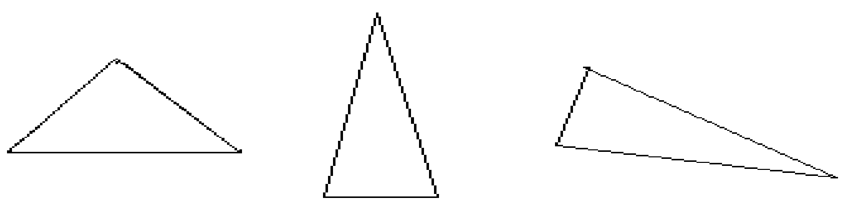
Το κάτω μέρος της σκηνής έχει περίμετρο 188 4/7 το εξ αναλόγου των δυο περιμέτρων είναι (188 4/7)/2=94 2/7 .Το πολλαπλασιάζει με 50 και βρίσκει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας που είναι 4715 2/7 Ο συγγραφέας γνωρίζει ότι το π =3 1/7 ,ενώ εμείς σήμερα με την πράξη θα κάναμε π =2.π.30 =60.π.Για να υπολογίσει το συνολικό ύφασμα που θα χρειαστεί διαιρεί το 4715 2/7 με το 3.

3.15 Περί του πως εστί ειδέναι εμβαδόν τετραγώνου ισοπλεύρου ορθογώνου και παραλληλογράμμου, ποσού εστί χωρητικόν. Έστω σχήμαν τετράγωνον ισόπλευρον ορθογώνιον, εκάστη τούτου περίμετρος σπιθαμών κ. Ζητείς δε ειδέναι το εμβαδόν τούτου πόσου εστί χωρητικόν. Έχεις δε τούτο ειδέναι ούτως:



Πολλαπλασίασον προς αλλήλας τας δύο τούτων πλευράς (15)τουτέστι ε μετά των ε. ε-κις ουν ε γίνονται κε. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν του ισοπλεύρου ορθογωνού σχήματος κε. Έστω δε και παραλληλόγραμμον ουκ ισόπλευρον μεν, ορθογώνιόν δε,(20) όπερ αι μεν δύο τούτου εγκάρσιαι πλευραί εστί ανά σπιθαμών ς, ε δε δύο όρθιαι ανά σπιθαμών δ, ομού δε η τούτου περίμετρος σπιθαμών κ. Ζητείς δε ειδέναι το εμβαδόν τούτου πόσου εστί χωρητικόν. Πολλαπλασίασον προς αλλήλας και τας δύο τούτου πλευράς, την όρθιον και εγκάρσιον δ-κις ουν ς γίνονται κδ. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου τούτου σπιθαμών τετραγώνων κδ. Έστω δε και παραλληλόγραμμον τετράγωνον ουκ ισόπλευρον μέν, ορθογώνιόν δε, όπερ αι μέν δύο τούτου εγκάσιαι πλευραί, εστί ανά σπιθαμών ζ, αι δε δύο όρθιαι ανά σπιθαμών γ, ομού δε η τούτου περίμετρος σπιθαμών κ . Ζητείς δε ειδέναι το εμβαδόν τούτου πόσου εστί χωρητικόν. Πλλαπλασίασον προς αλλήλας και τας δύο τούτου πλευράς, την όρθιον και την εγκάρσιον γ-ις ουν ζ γίνονται (25) κα. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου τούτου, σπιθαμών τετραγώνων κα. Έστω δε και

παραλληλόγραμμον τετράγωνον, ουκ ισόπλευρον μέν, ορθογώνιον δε, όπερ αι μέν δύο τούτου εγκάρσιαι πλευραί εστί ανά σπιθαμών η, αι δε δύο όρθιαι ανά σπιθαμών β, ομού δε η τούτου περίμετρος σπιθαμών κ. Ζητείς δε ειδέναι το εμβαδόν τούτουπόσου εστί χωρητικόν. Πολλαπλασίασον προς αλλήλας και τας δύο τούτου πλευράς, την όρθιον και εγκάρσιον β-ίς ουν η γίνονται ις. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου τούτου σπιθαμών τετραγώνων ις. Έστω δε παραλληλόγραμμον τετράγωνον ουκ ισόπλευρον μέν, ορθογώνιόν δε, όπερ αι μέν δύο τούτου εγκάσιαι πλευραί, εστί ανά σπιθαμών θ, αι δε δύο όρθιαι ανά σπιθαμής α, ομού δε η τούτου περίμετρος σπιθαμών κ. Ζητείς δε ειδέναι το εμβαδόν τούτου πόσου εστί χωρητικόν. Πολλαπλασίασον προς αλλήλας και τας δύο τούτου πλευράς, την όρθιον και εγκάρσιον άπαξ ουν θμ πάλιν εστί θ. Εστί δε χωρητικόν το εμβαδόν **του** παραλληλογράμμου τούτου σπιθαμών τετραγώνων θ. Παν ουν τετράγωνον, τετράπλευρον λέγεται. Πολύπλευρόν δε το υπό πλειόνων η τεσσάρων ευθειών περιεχόμενον. Κοινώς δε πάν σχήμαν το υπό ευθειών γραμμών περιεχόμενον ευθύγραμμον λέγεται. Των δε τετράπλευρον σχημάτων, τετράγωνον μέν κυρίως εστί, ο ισόπλευρόν τε εστί και ορθογώνιον, ως το πρώτον. Ετερόμηκές δ' εστί, ο ορθογώ(35)νιον μέν, ουκ ισόπλευρόν δε, ως το δεύτερον και τα λοιπά. Ρόμβος δε ο ισόπλευρόν μέν, ουκ ορθογώνιον δε, ως το παρόν  εστί ισόπλευρον μέν, ουκ ορθογώνιόν δε. Ρονβοειδές δε, το τας απεναντίας, πλευράς τε και γωνίας, ίσας αλλήλαις έχον, ο ούτε (106r)(1) ισόπλευρον εστί, ούτε ορθογώνιον, ως το παρόν  Ει γαρ παραλληλόγραμμον εισί ο τε ρόμβος και το ρομβοειδές, αλλ'ουκ ορθογώνιον, τα δε παρά ταύτα τετράγονα, τραπέζια λέγονται. Δει δε και τούτο ειδέναι, τίποτε εισί παράλληλοι ευθείαι γραμμαί παράλληλοι ουν ευθείαι γραμμαί εισί αίτινες εν τω αυτώ επίπεδω ούσαι, και εκβαλλόμεναι εις άπειρον, εφ'εκάτερα τα μέρη, επί μηδ'έτερα συμπίπτουσιν αλλήλων. Παραλληλόγραμον δε εστί σχήμαν ευθύγραμμον, τας απεναντίον πλευράς τε και γωνίας(5)ίσας αλλήλων έχον. Εστί δε αυτών, τα μεν ορθογώνια, τα δε ουκ ορθογώνια, ως τα εκτιθέμενα πάντα τετράγωνα, εστί παραλληλόγραμμα, ορθογώνια τετράπλευρα, το μεν πρώτον, ισόπλευρον ορθογώνιον, τα δε λοιπά εισί ετερομηκές ορθογώνια. Παραλληλόγραμον μέν ουκ ορθογώνιον δε εστί, ο ρόμβος και το ρομβοειδές άπερ προείπομεν. Τρίγωνον δε ισόπλευρον εστί το τας τρεις ίσας έχον πλευράς ισοσκελές δε το τας δυο μόνον ίσας έχον πλευράς. Σκαλινόν δε το τας τρεις ανίσους έχον πλευράς ως τα παρόντα:



Μαθ. Σχ. Του Κεφ. 213. (σιγ). Υπολογίζονται εμβαδά τετραγώνου και ορθογώνιων παραλληλογράμμον ,με την υπόθεση ότι όλα τα σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο η οποία είναι ίση με 20 σπιθαμές.

Θέλει να τονίσει με αυτήν την συγκριτική διαδικασία, πως από όλα αυτά τα σχήματα το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο, ακολουθεί δε το παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαστάσεις διαφέρουν κατά 2 μονάδες(μ=6,π=4)στην συνέχεια εκείνο του οποίου οι διαστάσεις διαφέρουν κατά 4 μονάδες (μ=7,π=3),μετα κατ5ά 6 και τέλος, το μικρότερο εμβαδόν το έχει το παραλληλόγραμμο με μ=9,π=1. Υπενθιμίζει πως ο κύκλος με περίμετρο 20 σπιθαμών έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από του τετραγώνου και ίσο με 31 9/11.Σε αυτό το κςφάλαιο ορίζονται επίσης και τα άλλα σχήματα όπως αυτό του ρόμβου και του ρομβοειδούς.Παρατηρούμε πως το ρομβοειδές του συγγραφέα είναι το πλάγιο παραλληλόγραμμο. Ακολούθως ορίζονται το τραπέζιο, οι παράλληλες ευθείες , το ισόπλευρο τρίγωνο , το ισοσκελές και το σκαληνό. Ο τρόπος ορισμού των ανωτέρω σχημάτων και εννοιών είναι κατ'ουσίαν ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιούμε σήμερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η εκπόνηση της διερευνητικής αυτής εργασίας μας έκανε να εξάγουμε συμπεράσματα τόσο για το γενικότερο πλαίσιο της Βυζαντινής εποχής σε ότι αφορά τα μαθηματικά όσο και για τις ειδικότερες διαφορές στα επιμέρους προβλήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε.

Διαπιστώσαμε ότι τα μαθηματικά στο Βυζάντιο είναι βασισμένα στα μαθηματικά της κλασσικής αρχαιότητας.

Ο έμμετρος λόγος που χρησιμοποιείται στο βιενναίο ελληνικό φιλολογικό κώδικο 65 αναδεικνύει τη χρήση του μέτρου για παιδαγωγικούς σκοπούς μια αντίληψη που παραμένει από τα Ομηρικά χρόνια και υιοθετείται ακόμα και σήμερα για μαθητές μικρής ηλικίας.

Ανακαλύπτονται μαθηματικοί όροι που έχουν χαθεί με τα χρόνια ή χρησιμοποιούνται υποδηλώνοντας άλλες εννοιες όπως για παράδειγμα η αφαιξέρεσις η οποία δεν υπάρχει ως εννοια και το ρομβωειδές το οποίο εχρησιμοποιείτο για κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο ενώ σήμερα ο όρος ρόμβος εννοεί μόνο το παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές ίσες.

Ο αριθμος π το 3,14 χρησιμοποιείται ως 22/7 στους υπολογισμούς κύκλων.

Επιλύονταν προβλήματα όπως αυτό με την τιμή του αλόγου που εμφανίζεται ως γρίφος.

Η διακρίνουσα είναι μια μέθοδος επίλυσης μαθηματικών – πρακτικών προβλημάτων που ταλανίζουν τους ανθρώπους από τη βυζαντινή έως και τη σύγχρονη εποχή.

Τα συστήματα ακεραίων αριθμών ήταν ευρέως διαδεδομένα από τη βυζαντινή περίοδο για την εύρεση του ζητουμένου.

Η πιο σημαντική διαπίστωση είναι ότι τα Μαθηματικά στο βυζάντιο χρησιμοποιούνται για να επιλύουν καθημερίνα πρακτικά προβλήματα.

Οι Βυζαντινοί δεν ασχολήθηκαν με την απόδειξη όπως οι Αρχαίοι Έλληνες.

Τα αξιώματα τα θεωρήματα και γενικές οι έννοιες των Μαθηματικών της Αρχαίας Ελλάδος διατηρούνται και παραδίδονται στους νεότερους μέσα από τις εφαρμογές που έγιναν στη Βυζαντινή περίοδο.

Έλυναν προβλήματα εξισώσεων χρησιμοποιώντας ακέραιους αριθμούς.

ΠΗΓΕΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μαρία Δ. Χάλκου, Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια, εκδόσεις Κέντρου Βυζαντινών Ερευνών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006. ISBN: 960-7856-19-8.

Μαρία Δ. Χάλκου, *Ιστορία Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά στο Βυζάντιο,* Λογιστική, *εκδ. Παύλος, Αθήνα* 2007. ISBN: 978-960-8258-22-8.

Μαρία Δ. Χάλκου, Τα Προβλήματα της Γεωμετρίας στο Βυζάντιο, *Γεωδαισία*, εκδ. Επικαιρότητα, Αθήνα 2006. ISBN: 960-250-498-0.

Μαρία Δ. Χάλκου, Ιστορία Μαθηματικών, Τα Προβλήματα της Γεωμετρίας στο Βυζάντιο, *Γεωδαισία*, εκδ. Παύλος, Αθήνα 2007. ISBN: 978-960-8258-21-1.

ΔΙΑΔΥΚΤΙΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

http://blogs.sch.gr/mchalkou-p/

http://el.wikipedia.org/wiki

http://geo-s.blogspot.com/2009/02/10.html

http://imjuby.blogspot.com/2011/02/blog-post_17.html

http://users.sch.gr/theoj/etwin/diofantos/diofan_bio.htm

http://gym-nikif.dra.sch.gr/drastiriotites/diagonismoi/thalis/index.htm