ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ

Διδάκτωρ Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2007

ISBN: 978-960-8258-21-1

ΜΑΡΙΑ ΧΑΛΚΟΥ
Διδάκτωρ Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΥΛΟΣ
ΑΘΗΝΑ 2007

Ἀφιερώνεται

στοὺς, Χρῆστο, Ἠλία, Δημήτρη καὶ Ἑλένη.

Κάθε γνήσιο αντίτυπο
φέρει την υπογραφή της συγγραφέως

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ἔχω ἀναρωτηθεῖ πολλὲς φορές, ἂν θὰ ἦταν ποτὲ δυνατὸν νὰ ὁλοκληρωνόταν ἕνα τέτοιο ἔργο, δηλαδὴ αὐτὸ τῆς μεταγραφῆς ἑνὸς ὀγκώδους χειρογράφου τοῦ 15ου αἰ. ἀλλὰ καὶ τῆς φιλολογικῆς ἐπεξεργασίας του, καθὼς καὶ τοῦ μαθηματικοῦ σχολιασμοῦ τῶν χιλίων καὶ πλέον προβλημάτων του, χωρὶς τὴν κυρία Μάρω Παπαθανασίου, Ἐπίκουρη Καθηγήτρια τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν. Ἡ ἀμέριστη ἐπιστημονικὴ καὶ ἠθικὴ συμπαράσταση, καθοδήγηση καὶ ἐνθάρρυνση ποὺ σταθερὰ ἐπὶ σειρὰ ἐτῶν μοῦ παρεῖχε ξεπέρασαν κατὰ πολὺ τὶς προβλεπόμενες ἀρετὲς καὶ ὑποχρεώσεις τῆς ἐπιβλέπουσας Καθηγήτριας, δημιουργώντας ἕνα πρότυπο τὸ ὁποῖο δύσκολα μπορεῖ νὰ ξεπεραστεῖ, ἀπ' ὅτι μπορῶ νὰ φανταστῶ. Τῆς ἀπευθύνω ἀπὸ καρδιᾶς θερμότατες εὐχαριστίες.

Δὲν εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ λησμονήσω καὶ τὴν τεράστια προσφορὰ τοῦ Dr. phil. Παντελῆ Καρέλου, ὁ ὁποῖος μοῦ πρότεινε νὰ ἀσχοληθῶ μὲ τὸν Βιενναῖο Ἑλληνικὸ φιλολογικὸ κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ. καὶ μοῦ ὑπέδειξε κατευθύνσεις πολύτιμες γιὰ τὴ διεξαγωγὴ τῆς ἔρευνας καὶ τὴν ἀξιοποίηση τῶν συμπερασμάτων ἀπὸ αὐτή. Ὁ Dr. phil. Παντελῆς Καρέλος ἂν καὶ διαμένει μόνιμα στὴ Γερμανία, ἦταν πάντοτε διαθέσιμος καὶ πρόθυμος νὰ θυσιάσει τὸν χρόνο του ὅποτε χρειάστηκα τὴν καθοδήγησή του.

Εὐχαριστῶ θερμὰ καὶ τὸν κ. Γιάννη Ἀραχωβίτη, Ἀναπληρωτὴ Καθηγητὴ τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ὄχι μόνον γιὰ τὴν ἐπιστημονικὴ καὶ ἠθικὴ συμπαράστασή του κατὰ τὴ διάρκεια τῶν μεταπτυχιακῶν σπουδῶν μου στὴ Διδακτικὴ τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν ἐκπόνηση τῆς διδακτορικῆς μου διατριβῆς. Τοῦ ὀφείλω πάρα πολλά.

Εὐχαριστῶ ἐπίσης θερμὰ τὸν Καθηγητὴ τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, κ. Σταῦρο Παπασταυρίδη, γιὰ τὴν ἐπιμονή του ὁρισμένα συμπεράσματα τῆς μελέτης μου νὰ τύχουν δημοσιεύσεως σὲ ξένο περιοδικὸ διεθνοῦς κύρους. Τὸν εὐχαριστῶ, γιατὶ μοῦ ἔδειξε, πῶς οἱ στόχοι πρέπει νὰ ἀφοροῦν στὴν πρόοδο, καὶ ὅτι οἱ δυσκολίες εἶναι σχεδὸν πάντα προσωρινές.

Εὐχαριστῶ μέσα ἀπὸ τὴν καρδιὰ μου, τὸν κ. Διονύσιο Λάππα, Ἀναπληρωτὴ Καθηγητὴ τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, γιὰ τὶς ἰδέες του σχετικὰ μὲ τοὺς στόχους τῆς συγγραφῆς αὐτοῦ τοῦ βιβλίου. Ἀκόμα εὐχαριστῶ θερμὰ τὸν Διευθυντὴ τοῦ Παλαιογραφικοῦ Ἀρχείου τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος, κ. Ἀγαμέμνονα Τσελίκα, γιὰ τὰ μαθήματα παλαιογραφίας καὶ τὴν προθυμία του νὰ μοῦ λύσει κάθε ἀπορία σχετικὴ μὲ τὸ χειρόγραφό μου.

Ὀφείλω ἐπίσης νὰ εὐχαριστήσω τοὺς κ.κ. Κωνσταντίνο Μανάφη, Φώτιο Δημητρακόπουλο καὶ Ταξιάρχη Κόλλια, Καθηγητὰς τοῦ Τμήματος Βυζαντινῆς Φιλολογίας τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, γιὰ τὸ ἐνδιαφέρον τους, ἀλλὰ καὶ γιὰ τὴν ἐκτίμηση μὲ τὴν ὁποία περιέβαλαν τὴ δουλειά μου. Οἱ ὑποδείξεις τους ἦταν καὶ εἶναι πάντοτε πολύτιμες.

Τέλος, εὐχαριστῶ μὲ ὅλη μου τὴν καρδιὰ τὸν σύζυγό μου, μαθηματικὸ κύριο Χρῆστο Πύλια, ὁ ὁποῖος ὅλα αὐτὰ τὰ χρόνια ὄχι μόνον παρακολουθοῦσε τὴν πορεία τῆς ἐρευνητικῆς μελέτης μου, ἀλλὰ καὶ συμμετεῖχε ἐνθέρμως στοὺς προβληματισμούς μου. Ἰδιαιτέρως δὲ εὐχαριστῶ τὰ παιδιὰ μου Ἠλία, Δημήτρη καὶ Ἑλένη γιὰ τὴν ὑπομονή, τὴν κατανόηση καὶ τὴν στήριξή τους, καὶ τοὺς γονεῖς μου Δημήτρη καὶ Ἑλένη Χάλκου γιὰ τὸ ἐμπνευσμένο παράδειγμα ποὺ μοῦ προσέφεραν, τὸ ὁποῖο ἦταν γιὰ μένα τὸ ἔναυσμα γιὰ κάθε καλὸ, καὶ ταυτόχρονα πολύτιμη ἠθικὴ ὑποστήριξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἤδη ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Ἀριστοτέλη ἡ γεωδαισία ἀποτελοῦσε ξεχωριστὸν κλάδο ἀπὸ τὴ γεωμετρία. Κατὰ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα δέ:

«Πόσα μέρη μαθηματικῆς; Τῆς μὲν τιμιωτέρας καὶ πρώτης ὁλοσχερέστερα μέρη δύο, ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία, τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ ἀσχολουμένης ἕξ, λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, ἀστρονομική. Γεωδαισία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς σώμασι μεγεθῶν καὶ σχημάτων διαιρετικὴ καὶ συνθετική. Λαμβάνει τὰ σχήματα οὐ τέλεια οὐδ' ἀπηκριβωμένα τῷ σωματικὴν ὕλην ὑποβεβλῆσθαι, καθώσπερ καὶ ἡ λογιστικὴ μετρεῖ γοῦν καὶ σωρὸν ὡς κῶνον καὶ φρέατα περιφερῆ ὡς κυλινδρικὰ σχήματα ... χρῆται δέ, ὡς ἡ γεωμετρία τῇ ἀριθμητικῇ, οὕτω καὶ αὕτη τῇ λογιστικῇ ... ὥσπερ καὶ ὁ γεωμέτρης τὰς λογικὰς εὐθείας μεταχειρίζεται, οὕτω ὁ γεωδαίτης ταῖς αἰσθηταῖς προσχρῆται»[1].

Στὴν προσπάθεια νὰ βρεθοῦν πληροφορίες σχετικὰ μὲ τὴν διδασκαλία τῆς γεωδαισίας κατὰ τοὺς βυζαντινοὺς χρόνους, διαπιστώνει κανεὶς πὼς οἱ σχετικὲς βιβλιογραφικὲς πηγές, ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι λιγοστὲς δὲν ἀναφέρονται συχνὰ σὲ συγκεκριμένα μαθηματικὰ προβλήματα. Οἱ πληροφορίες ποὺ παρέχονται εἶναι γενικὲς καὶ ἀφοροῦν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον στὸν ὁρισμὸ καὶ τὴν περιγραφὴ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ποὺ ἐδιδάσκοντο ἀπὸ τὸν 3ο-15ο αἰ. μ.Χ.

1. Heronis Alexandrini, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Teubner Stutgard 1976, τόμ. IV, σελ. 100, 164.

Στὸ βιβλίο αὐτὸ θὰ ἐπιχειρήσω μία ἀναλυτικὴ περιγραφὴ γεωμετρικῶν προβλημάτων ποὺ ἀπασχολοῦσαν κάποιους μαθηματικοὺς τῆς ἐποχῆς τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. καὶ ὄχι μόνο, ὥστε νὰ ἔχει ὁ ἀναγνώστης τὴ δυνατότητα νὰ μελετήσει τόσο τὸ εἶδος αὐτῶν, ὅσο καὶ τὶς μεθόδους ἐπίλυσής τους. Σὰν βασικὴ πηγὴ ἔχω χρησιμοποιήσει τὸν Ἑλληνικὸ Βιενναῖο φιλολογικὸ κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ. (φ. 11α- 126α).[2] (Codex Vindobonensis phil. gr. 65). Ὀφείλω νὰ πῶ δέ, ὅτι κατὰ τὴ μελέτη τοῦ κώδικα[3] ἦταν ἰδιαίτερα συναρπαστικὲς οἱ στιγμές, ὅπου κατανοοῦσα τὴ μέθοδο τοῦ ἀνωνύμου συγγραφέα γιὰ κάποιο πρόβλημα. Τοῦτο δὲν ἦταν πάντοτε εὔκολο, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, ὅτι τότε δὲν χρησιμοποιοῦντο σύμβολα καὶ οἱ τύποι καὶ οἱ λύσεις δίνονταν περιγραφικά. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ βρῶ γιὰ κάθε μέθοδο τὴν ἀντίστοιχη σημερινή, τὴν ὁρολογία της καὶ τοὺς μαθηματικοὺς τύπους, καὶ κατόπιν νὰ ἐξετάσω τὴν προέλευση καὶ τὴν ἐξέλιξή της ἕως σήμερα. Ἡ δὲ πραγματοποιηθεῖσα σύγκριση τῶν μεθόδων τοῦ χειρογράφου μὲ αὐτὲς ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα στὴ διδασκαλία παρομοίων προβλημάτων, τόσο στὴν πρωτοβάθμια ὅσο καὶ τὴ δευτεροβάθμια ἐκπαίδευση, βοήθησε, ὅπως ἦταν ἀναμενόμενο, στὴν ἐκτίμηση τῆς διαχρονικότητας τῶν διδακτικῶν μαθηματικῶν μεθόδων.

Ὁ συγγραφέας καὶ ἡ προέλευση τοῦ κώδικα 65 εἶναι

2. Ὁ κώδικας μετεγράφηκε καὶ σχολιάσθηκε ἀπὸ ἐμένα φιλολογικά, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὸ μαθηματικὸ περιεχόμενό του, στὰ πλαίσια ἐκπόνησης διατριβῆς γιὰ τὴν ἀπόκτηση διδακτορικοῦ διπλώματος ἀπὸ τὸ Μαθηματικὸ Τμῆμα τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.
3. Κώδικας σημαίνει τὰ φύλλα (ἢ τὰ τεύχη) τὰ ὁποῖα δὲν ἑνώνονται σὲ ρολό, ἀλλὰ εἶναι τοποθετημένα ἁπλωτὰ ἀνάμεσα σὲ πινακίδες ἀπὸ ξύλο ἢ κάποιο ἄλλο ὑλικό· θεωρεῖται ὡς προδρομικὴ μορφὴ τοῦ σημερινοῦ βιβλίου. Ἐμφανίζεται τὸν 2ο αἰ. μ.Χ. καὶ λόγῳ τῆς εὐχρηστίας του ἀντικαθιστᾶ τὸν κύλινδρο. Τὴν ἴδια περίπου ἐποχή, ἡ περγαμηνὴ (δέρμα συνήθως μοσχαριοῦ ἢ ἀρνιοῦ) ὡς ὑλικὸ γραφῆς ἀντικαθιστᾶ τὸν πάπυρο. Ὁ κώδικας ἀποτελεῖται ἀπὸ συνενωμένα τεύχη, καὶ κάθε τεῦχος ἀπὸ ἕνα (μεταβλητὸ) ἀριθμὸ φύλλων διπλωμένων στὰ δύο. Βλ. Mioni, Εἰσ. Ἑλλ. Παλ., σελ.46, 49.

ἄγνωστα. Τὸν κώδικα αὐτόν ἀπέκτησε ὁ Augerius von Busbeck, ὅταν ἦταν πρεσβευτὴς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α΄ στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμὰν Β΄ τοῦ Μεγαλοπρεποῦς (1555-1562 μ.Χ.)[4]. Τὰ φύλλα 126β-140α περιέχουν ἕνα βιβλίο Ἀριθμητικῆς μὲ λυμένα προβλήματα, τὸ ὁποῖο ἐξέδωσαν τὸ 1963 οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel. Τὸ μεγαλύτερο μέρος τοῦ κώδικα (11α-126α) περιέχει ἕνα ἀνώνυμο βιβλίο Ἀριθμητικῆς, τῆς ὁποίας τὸ προοίμιο καὶ τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια ἐξέδωσε ὁ J. L. Heiberg τὸ 1899[5]. Ἐπισημαίνω, ὅτι ἀπὸ τὸν κώδικα λείπουν τὰ φ. 140β, 141α, 141β, 142α. Ἐπίσης τὰ φ. 142(;)β καὶ 143α ἔχουν διαγραφεῖ, καὶ ἀκολουθοῦν τὰ φ. 143β-160β, στὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται κάποια προβλήματα ποὺ ἔχουν ἤδη ἐπιλυθεῖ ἀπὸ τὸν συγγραφέα στὰ φ. 11α-126α. Σημειωτέον, ὅτι ὁ γραφικὸς χαρακτήρας τῶν φ. 143β-160β εἶναι ἴδιος μὲ αὐτὸν τῶν φ. 11α-126α.

Τὸ χειρόγραφο εἶναι γραμμένο σὲ μικρογράμματη γραφή[6], ἡ ὁποία ἦταν σὲ χρήση ἀπὸ τὸν 9ον αἰ. μ.Χ.[7] Ἐπειδὴ τὰ χειρόγραφα ἦταν πολὺ ἀκριβά ἡ ἀντιγραφὴ γινόταν πιθανότατα ἀπὸ μαθητὲς καὶ ὁ τελικός ἔλεγχος ἀπὸ τὸν διδάσκοντα, ὁ ὁποῖος προσέθετε πολλὲς ὑποσημειώσεις καὶ ἐπεξηγήσεις, ποὺ ἀφοροῦσαν συνήθως σὲ παλαιότερες μεθόδους διδασκαλίας[8].

Ἀφοῦ λοιπὸν στὸ περιθώριο πολλῶν σελίδων τοῦ χειρογράφου ἐμφανίζονται περιγραφὲς ἄλλων μεθόδων ἢ ἐπεξηγήσεις τῶν μεθόδων τοῦ χειρογράφου, εἶναι φανερό, ὅτι μετὰ τὴ γραφή του τὸ χειρόγραφο ἔγινε ἀντικείμενο περαιτέρω μελέτης καὶ

4. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 5.
5. Hunger, Βυζ. Λογ., σελ. 65.
6. Mioni, Εἰσ. Ἑλλ. Παλ., σελ. 77.
7. Τὸ παλαιότερο χειρόγραφο σὲ μικρογράμματη γραφὴ εἶναι τὸ Σύνταγμα τεσσάρων μαθημάτων (Τετραβάγγελο), τὸ ὁποῖο γράφηκε το 835 μ.Χ. Τὸ χαρτὶ ἐμφανίζεται στὸ Βυζάντιο τὸ 1052 μ.Χ. Βλ. Lemerle, Βυζ. Οὑμ., σελ. 102-104.
8. Constantinides, High. Ed. Byz., σελ. 147. Γνωρίζουμε ὅμως, ὅτι καὶ οἱ ἀντιγραφεῖς ἔκαναν διορθώσεις μετὰ ἀπὸ ἀντιβολὴ τοῦ τελικοῦ κειμένου πρὸς τὸ ἀρχικό. Βλ. Mioni, Εἰσ. Ἑλλ. Παλ., σελ. 107.

βελτιώσεων ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν συγγραφέα, χωρὶς νὰ ἀποκλείεται βέβαια καὶ ἡ παρέμβαση κάποιων μεταγενέστερων μελετητῶν τοῦ χειρογράφου[9].

Σημειωτέον ὅτι μὲ τὸν ὅρο «βιβλίο ἀριθμητικῆς» ἐννοοῦμε βιβλίο ποὺ περιέχει προβλήματα σημερινῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, ἄλγεβρας, ἀλλὰ καὶ γεωμετρίας, καλύπτοντας μεγάλο μέρος τῆς διδακτέας ὕλης τῶν τάξεων τῶν σημερινῶν Δημοτικῶν, Γυμνασίων καὶ Λυκείων.

Ἔκρινα χρήσιμο νὰ γίνει στὴν ἀρχὴ μία συνοπτικὴ ἀναφορὰ στὴν ὁρολογία ποὺ χρησιμοποιεῖται στὸν κώδικα 65, καθὼς καὶ περιγραφὴ τῶν νομισμάτων, τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν ποὺ ἀναφέρονται σ' αὐτόν.

Ἀκολούθως, τὸ περιεχόμενο τοῦ κώδικα ἔχει χωρισθεῖ σὲ ἑνότητες, βάσει τοῦ εἴδους τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων ποὺ περιέχονται σ' αὐτές. Γίνεται δὲ μία σύντομη περιγραφὴ τοῦ περιεχομένου τῆς κάθε ἑνότητας, γιὰ νὰ ἀκολουθήσει στὴ συνέχεια ὁ μαθηματικὸς σχολιασμὸς τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων. Στὸν μαθηματικὸ σχολιασμὸ περιλαμβάνεται ἀναφορὰ στὴν προέλευση τῶν μεθόδων ἐπίλυσης τῶν προβλημάτων, καθὼς καὶ ἡ ἐξέλιξή τους ἕως σήμερα, καὶ στὴν ἀναλυτικὴ παρουσίαση τῶν προβλημάτων ἐξηγοῦνται οἱ μέθοδοι τοῦ ἀνωνύμου συγγραφέα καὶ συγκρίνονται μὲ τὶς ἀντίστοιχες σύγχρονες μεθόδους ἐπίλυσης, ποὺ χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὴ διδασκαλία παρομοίων προβλημάτων στὴν δευτεροβάθμια ἐκπαίδευση. Τέλος παρατίθενται οἱ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων σύμφωνα μὲ τὸν κώδικα 65, ὅπως αὐτὲς διαμορφώνονται μετὰ τὴ μεταγραφή τους. Θεώρησα χρήσιμο δὲ νὰ συμπεριλάβω σ' αὐτὸ τὸ βιβλίο καὶ κάποια κεφάλαια τὰ ὁποῖα ἐπέλεξα ἀπὸ τὸ μεταγραμμένο κείμενο τοῦ 15ου αἰ., καὶ τὰ ὁποῖα θὰ βρεῖ ὁ

9. Οἱ παρεμβολὲς γίνονταν καὶ ἀπὸ ἀναγνῶστες ἢ ἀντιγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι ἤθελαν νὰ ἐπεξηγήσουν κάποιο θεμα. Βλ. Mioni, Εἰσ. Ἑλλ. Παλ., σελ. 124.

ἀναγνώστης ἀμέσως μετὰ τὶς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων στὸ τέλος τοῦ βιβλίου, πρὶν ἀπὸ τὴ βιβλιογραφία.

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΟΥ

Οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel, οἱ ὁποῖοι ἐξέδωσαν τὰ φ. 126β-140α, θεωροῦν πιθανὴ χρονολογία συγγραφῆς τους τὸ διάστημα 1430-1453 μ.Χ.[10] Ὁ ἰσχυρισμός τους, ὅτι ὁ κώδικας δὲν πρέπει νὰ γράφηκε μετὰ τὴν ἅλωση τῆς Κωνσταντινούπολης, βασίζεται στὸ ὅτι ὁ συγγραφέας ἀναφέρει τὴ Θεσσαλονίκη (προβλήματα 30, 31) καὶ κάνει συγκρίσεις μεταξὺ τουρκικῶν καὶ ἑλληνικῶν μεθόδων πολλαπλασιασμοῦ. Ἡ Θεσαλονίκη δὲ, ὡς γνωστόν, ἀπὸ τὸ 1432 μ.Χ. τελοῦσε ὑπὸ τουρκικὴ κατοχή.

Ἡ χρονολόγησή τους αὐτὴ εἶναι συμβιβαστὴ μὲ μία ἀκριβὴ χρονολογικὴ ἀναφορὰ ἡ ὁποία περιέχεται στὸ δικό μας μέρος, παρὰ τὴ διαφορὰ γραφικοῦ χαρακτῆρα μεταξὺ τῶν δύο μερῶν τοῦ κώδικα. Πρόκειται γιὰ τὸ πρόβλημα ὑπολογισμοῦ τῶν ἡμερῶν ἀπὸ τὴ γέννηση τοῦ Χριστοῦ ἕως «σήμερα» ὅπου «εὑρισκόμαστε» στὸ ἔτος 1436 μ.Χ. (κεφ. 12). Ἐπομένως εἶναι πολὺ πιθανὸν τὸ χειρόγραφο νὰ γράφηκε τὸ 1436 μ.Χ.

Παρατηροῦμε ὅμως, ὅτι στὸ πρῶτο μέρος τοῦ κώδικα (φ. 11α-126α) δὲν γίνεται χρήση τουρκικῆς ὁρολογίας, ἀλλὰ λατινικῆς. Μία πιθανὴ ἑρμηνεία εἶναι, τὸ πρῶτο μέρος τοῦ κώδικα νὰ γράφηκε πράγματι τὸ 1436 μ.Χ., χωρὶς ὁ συγγραφέας νὰ ἔχη ἐπιρρεασθεῖ ἀπὸ τὴν ἅλωση τῆς Θεσσαλονίκης ἀπὸ τοὺς Τούρκους, καὶ τὸ δεύτερο μέρος (φ. 126β-140α) νὰ γράφηκε ἀπὸ ἄλλον συγγραφέα, τὴν ἴδια περίπου χρονολογία ἢ λίγο

10. Hunger-Vogel, Byz. Rechenb., σελ. 9.

ἀργότερα, ἴσως πρὶν τὴν ἅλωση τῆς Κωνσταντινούπολης, ἂν καὶ δὲν ὑπάρχουν κατὰ τὴν ἄποψή μας ἐπαρκῆ στοιχεῖα βάσει τῶν ὁποίων νὰ ἀποκλείεται τοῦτο νὰ συνέβη καὶ λίγο μετὰ τὴν ἅλωση. Βέβαια στὴν περίπτωση αὐτὴ τίθεται τὸ ἐρώτημα, ἂν εἶναι δυνατόν, ἕνας γραφέας νὰ ἔγραψε τὸ πρῶτο μέρος τοῦ κώδικα ἕως καὶ τὸ φύλλο 126α, ἄλλος γραφέας νὰ ἔγραψε τὰ φ. 126β-140α, καὶ νὰ ἐπανῆλθε ὁ πρῶτος γραφέας συμπληρώνοντας καὶ ἐπεξηγώντας τὴν ὕλη του στὰ φύλλα 143β-160β. Μία πιθανὴ ἐξήγηση εἶναι, τὰ δύο μέρη νὰ ἀποτελοῦσαν ἀρχικῶς δύο ξεχωριστὲς ἐργασίες, τὶς ὁποῖες κάποιος συνένωσε καὶ δημιούργησε τὸν κώδικα. Ἡ ἄποψη αὐτὴ ἐνισχύεται καὶ ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ἐνῶ ἀπὸ τὰ φ. 11α-126α λείπουν τὰ κεφάλαια 185-201[11], ἡ ἀρίθμηση τῶν φύλλων δὲν παρουσιάζει ἀσυνέχεια. Αὐτὸ σημαίνει, ὅτι μολονότι ἔλειπαν κάποια φύλλα, ὁ κώδικας δέθηκε μὲ ὅσα φύλλα σώζονταν, καὶ ἡ ἀρίθμησή τους ἔγινε κατὰ συνεχῆ τρόπο.

Κατὰ τὴν ἄποψή μου, ὁλόκληρο τὸ πρῶτο μέρος τοῦ κώδικα (μαζὶ μὲ τὶς ἐπεξηγήσεις τῶν φ. 143β-160β) περιέχει τὴν πνευματικὴ ἐργασία ἑνὸς ἀτόμου, γιὰ τοὺς ἑξῆς δύο βασικοὺς λόγους: α) Διαπραγματεύεται προβλήματα καθημερινῆς ζωῆς καὶ ἄλλα ποὺ ἔχουν καθαρὰ θεωρητικὸ χαρακτήρα καὶ ἀπευθύνονται προφανῶς σὲ μαθητὲς σχολείου: π.χ. ὁ κατὰ Νικόμαχον[12] ὁρισμὸς τοῦ τελείου ἀριθμοῦ, καὶ ὁ ὁρισμὸς καὶ ὁ τρόπος κατασκευῆς τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς εὑρίσκουμε ὅμως στὰ πρῶτα ἕνδεκα φύλλα τοῦ κώδικα

11. Σημειωτέον, ὅτι τὰ κεφάλαια αὐτὰ ἀναφέρονται σὲ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν σχέση μὲ τὴν πολεμικὴ καὶ πολιορκητικὴ τέχνη. Συνεπῶς ἡ ἀφαίρεσή τους δείχνει τὴν σπουδαιότητα ποὺ εἶχαν κατὰ τὴν ἐποχὴ ἐκείνη.
12. Τὴν Ἀριθμητικὴ τοῦ Νικομάχου σχολίασε καὶ ὁ Ἰσαὰκ Ἀργυρός, ἕνας ἀπὸ τοὺς τελευταίους Βυζαντινοὺς μαθηματικούς. Βλ. Tannery, Hist. sc. hell, σελ. 370.Ἕνα ἀπὸ τὰ πρῶτα βιβλία, τὰ ὁποῖα διδάσκονταν στὰ Ἑλληνόπουλα μετὰ τὴν ἅλωση, ἦταν ἡ Ἀριθμητικὴ τοῦ Νικομάχου. Βλ. Ν. Γεωργακόπουλου, Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας, ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000, σελ. 132.

(ἔχουν ἐκδοθεῖ ἀπὸ τὸν H. Hunger), ὅπου διδάσκεται ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρῶτα μὲ τὴ μέθοδο τοῦ διπλεύρου, καὶ κατόπιν καθαρῶς νοητικά. Ὅμως, ἀναλυτικὴ περιγραφὴ τῶν δύο ἀνωτέρων μεθόδων, συνοδευομένη ἀπὸ πολλὰ παραδείγματα, γίνεται στὸ χειρόγραφό μας (φ. 11α-126α).

Ἀντιθέτως, ἡ θεωρητικὴ διδασκαλία ἀπουσιάζει ἀπὸ τὸ ἤδη ἐκδοθὲν δεύτερο μέρος τοῦ κώδικα, τοῦ ὁποίου τὰ προβλήματα ἀναφέρονται ἀποκλειστικῶς σὲ πρακτικὰ θέματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς[13] καὶ παρέχουν μία καλὴν εἰκόνα τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς καὶ τῶν συναλλαγῶν ποὺ ἐλάμβαναν χώραν κατὰ τὰ τελευταῖα χρόνια τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας.

β) Στὸ δεύτερο μέρος χρησιμοποιοῦνται διαφορετικὲς μονάδες μέτρησης ἀπὸ αὐτὲς τοῦ πρώτου μέρους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρω τὴ χρήση τῆς μονάδας βάρους «κοιλόν»[14], ἀντὶ τῆς παλαιότερης μονάδας δηλ. τοῦ «μοδίου», ἡ ὁποία εἶναι μονάδα μέτρησης δημητριακῶν[15] καὶ χρησιμοποιεῖται συστηματικῶς στὸ πρῶτο μέρος.

Συνοψίζοντας, θεωρῶ ὅτι τὸ μὲν πρῶτο μέρος, ποὺ περιλαμβάνει τὰ φ. 1α-10β, τὸ προοίμιο καὶ τὰ κεφ. 1, 2, τὰ ὁποῖα ἐξέδωσε ὁ J. L. Heiberg, ὅσο καὶ τὰ φύλλα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ περιεχόμενο τῆς δικῆς μου μελέτης (φ. 11α-126α), εἶναι ἔργο ἑνὸς συγγραφέα καὶ γράφηκε τὸ ἔτος 1436 μ.Χ., ἐνῷ τὸ δεύτερο μέρος (φ. 126β-140α), τὸ ὁποῖο ἐξέδωσαν οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel, εἶναι ἔργο ἄλλου συγγραφέα καὶ πιθανώτατα γράφηκε μετὰ τὸ 1436. Ἐπίσης, τὸ πρῶτο μέρος φαίνεται νὰ ἀποτελεῖ διδακτέα ὕλη καὶ γιὰ μαθητὲς σχολείου, ἐνῷ τὸ δεύτερο μέρος ἀπευθύνεται σὲ ὅσους ἐνδιαφέρονται γιὰ τὸ ἐμπόριο καὶ τὶς

13. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 4.
14. Τὸ κοιλὸν ἦταν μέτρο χωρητικότητας γιὰ τὴ μέτρηση δημητριακῶν· ἰσοδυναμοῦσε πρὸς 24 ὀκάδες. Ἡ ἀρχαιότερη ὀνομασία του ἦταν «μέδιμνος», καὶ ἰσοδυναμοῦσε πρὸς 52 λίτρες. Βλ. Ἰ. Σταματάκου, Λεξικὸν τῆς Νέας Ἑλληνικῆς γλώσσης, ἐκδ. Φοῖνιξ, Ἀθήνα 1971, τόμ. ΙΙ, σελ. 1671, 1893.
15. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 13.

παντὸς εἴδους συναλλαγές· περιλαμβάνει ἐπίσης συλλογὲς αἰνιγμάτων καὶ γρίφων —ἰδιαίτερα ἀγαπητῶν τὴν ἐποχὴ ἐκείνη. Στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἐνισχύουν αὐτὴ τὴν ἄποψη ἐκθέτω ἀναλυτικῶς στὸ μέρος τῆς κριτικῆς τῶν ἑνοτήτων τοῦ χειρογράφου ἀπὸ μαθηματικῆς καὶ διδακτικῆς ἀπόψεως.

ΓΛΩΣΣΑ - ΣΥΝΤΑΞΗ
ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Γιὰ τὴν ἔκδοση τοῦ χειρογράφου (φ. 11α-126α) ἔγινε ἀρχικῶς πιστὴ μεταγραφὴ τοῦ κειμένου του, τὸ ὁποῖο εἶναι ἐξαιρετικὰ ἀνορθόγραφο. Σὲ δεύτερη φάση ἔγιναν ὅλες οἱ ἀπαραίτητες ὀρθογραφικὲς διορθώσεις μόνο στὰ σημεῖα ὅπου δὲν ἐπηρεαζόταν τὸ φωνητικὸ ἄκουσμα τῶν λέξεων. Π.χ. Ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ τὴ λέξη «μερισθής», γιὰ νὰ δηλώση τὸν διαιρέτη κάποιου ἀριθμοῦ καὶ ὄχι τὸν διαιρετέο, ποὺ εἶναι ὁ «μερισθείς». Ἑπομένως τὸ σωστὸ θὰ ἦταν, νὰ γράφαμε «μεριστὴς» (αὐτὸς ποὺ διαιρεῖ), ἀλλὰ τέτοιου εἴδους ἐπέμβαση θεωρήθηκε ἀνεπίτρεπτη, ἀφοῦ θὰ ἀλλοίωνε τὸ φωνητικὸ ἄκουσμα τῆς λέξης. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὴ λέξη «πραγματευθής», ὁ ὁποῖος δηλώνει τὸν ἔμπορο, δηλαδὴ τὸν πραματευτή, καὶ ἡ ὁποία ἀφέθηκε ὡς εἶχε στὸ πρωτότυπο κείμενο.

Ἡ γλῶσσα καὶ τὸ ὕφος διατηροῦνται σὲ ὅλο τὸ κείμενο. Τοῦτο ἐνισχύει τὴν ἄποψη ὅτι γράφηκε ἀπὸ τὸ ἴδιο πρόσωπο. Βέβαια ὑπάρχουν ὁρισμένες λέξεις, ὅπως τὰ κοῦβα, οἱ ὁποῖες ἐμφανίζονται γραμμένες κατὰ δύο ἢ καὶ τρεῖς διαφορετικοὺς τρόπους ἀκόμα καὶ στὸ ἴδιο κεφάλαιο[16]. Αὐτὸ ὅμως ἴσως νὰ ὀφείλεται σὲ κάποια σχετικὴ ἀδιαφορία τοῦ συγγραφέα.

---

16. Ἡ λέξη «μιλλιούνια» ἐμφανίζεται καὶ ὡς «μηλούρια», «μηλούνια», τὸ «μηλιούνιν» ἀντὶ «μιλλιούνι» (φ. 17β).

Ἡ ἐπίδραση τῆς Δύσης εἶναι ἐμφανέστατη, καθὼς χρησιμοποιοῦνται λέξεις καὶ ὅροι λατινικοί. Π.χ. ὁ ἄγνωστος χ ὀνομάζεται «πρᾶγμα», καὶ τὸ τετράγωνό του καλεῖται «τζένσο». Γνωρίζουμε ὅμως, ὅτι ὁ Jordanus Nemorarius (περ. 1225 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος ὑπῆρξε σύγχρονος τοῦ Φιμπονάτσι (Leonardo Pisano ἢ Fibonacci) χρησιμοποιοῦσε τοὺς ὅρους «πρᾶγμα» (res), «τετράγωνο» (census ἢ zensus), «κύβος» (cubus)[17]. Βέβαια ἡ λατινικὴ ἐπιρροὴ ὁμολογεῖται ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν συγγραφέα, ὁ ὁποῖος γράφει σὲ πολλὰ σημεῖα «ὡς παρὰ Λατίνοις μανθάνομεν», καὶ ἀπὸ προβλήματα σχετικὰ μὲ ταξίδια πλοίων πρὸς καὶ ἀπὸ τὴ Ρώμη καὶ τὴ Φλωρεντία (Φλωρέντζα).

Μολονότι ἡ προέλευση τοῦ χειρογράφου εἶναι ἄγνωστη, ὅπως καὶ ἡ ταυτότητα τοῦ συγγραφέα της, ἐπισημαίνουμε κάποιες ἐκφράσεις πιθανὸν κυπριακές: Π.χ. «τὸ βηλάριν τὴν τζόχαν» ἀντὶ «τὸ βηλάρι»[18], τὸ ὁποῖο εἶναι εἶδος λεπτοῦ ἑλληνικοῦ ὑφάσματος. Χρησιμοποιεῖται ἐπίσης «τὸ καντάριν» ἢ «τοκηντήριν» ἀντὶ τῆς λέξεως «καντάρι», γιὰ νὰ δηλώσει τὸν ἀρχαῖο στατῆρα μὲ τὸν ὁποῖον ζυγίζονταν εἴδη μεγάλου βάρους[19]. Τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὴ λέξη «βουτζὶν» ἢ «βουτζίον», τῆς ὁποίας ὁ ὀρθὸς τύπος εἶναι «βουτσίον» καὶ χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ξύλινο βαρέλι ποὺ περιέχει κρασί[20].

Γενικῶς ὡς πρὸς τὴ γλώσσα τοῦ χειρογράφου, μολονότι ἐμφανίζεται κάποια ἐπίδραση ἀπὸ τὴ γλώσσα τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῶν ἐμπόρων (κρεοπωλῶν, λαχανοπωλῶν, κ.λπ.)[21], δὲν πρέπει νὰ βιαστοῦμε νὰ ἀποδώσουμε ἀγραμματοσύνη σὲ κάποιον δάσκαλο κρίνοντας ἀπὸ τὰ ὀρθογραφικὰ λάθη τοῦ

17. Ὁ ὅρος «zensus» σημαίνει «διατίμηση φόρου». Βλ. Smith, Hist. Math., τόμ. II, σελ. 427
18. Ἰ. Σταματάκου, Λεξικὸ τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσας, 1971, τόμ. I, σελ. 794
19. Κουκουλέ, Βυζ. βίος, Ἀθήνα 1948, τόμ. XIII, σελ. 191, 251.
20. ὅ. π., σελ. 188.
21. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ.15

χειρογράφου, καὶ ἀπὸ κάποιες ἰδιαιτερότητες στὴ γραμματικὴ καὶ τὴ σύνταξη[22].

Κάποιες φορὲς δημιουργεῖται ἡ ἐντύπωση, ὅτι αὐτὸς ποὺ ἔγραψε τὸ χειρόγραφο γράφει ὅπως ἀκούει[23], (π.χ. «ἠθούτως» ἀντὶ «εἶθ' οὕτως», ἢ «τοκηντήρι» ἀντὶ «τὸ κηντήρι»). Ὅπως ὅμως ἐπισημαίνουν καὶ οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel στὴν ἔκδοση τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ κώδικα, ὁ συγγραφέας ἐκείνου τοῦ ἔργου, ἐνῷ γράφει ὅπως ἀκούει, ἐν τούτοις διατηρεῖ τὴ δοτικὴ[24], ἀναμειγνύει καθαρεύουσα μὲ δημοτική, καὶ χρησιμοποιεῖ πολλὲς ξένες λέξεις[25].

Παρ' ὅλα αὐτά, διαβάζοντας τὸ χειρόγραφό μας ἔχει κανεὶς τὴν αἴσθηση ὅτι ὁ συγγραφέας ἐπιδιώκει μιὰ ἁρμονία καὶ ἕνα ρυθμὸ στὸ κείμενό του.

Τὸ πιθανότερο εἶναι, ἡ γλώσσα τοῦ χειρογράφου μας νὰ ἀντανακλᾶ μία προσπάθεια ἀπομίμησης τῆς ἀττικῆς διαλέκτου, ἴσως τεχνητῆς καὶ ἐξεζητημένης, ἀκόμα καὶ διαφορετικῆς ἀπὸ τὴν καθομιλουμένη. Δηλαδή, φαίνεται παρακινδυνευμένο τὸ συμπέρασμα, ἡ γλώσσα τοῦ χειρογράφου νὰ εἶναι καὶ ἡ γλώσσα τῶν ἁπλῶν ἀνθρώπων, διότι ἀπὸ τὸν 12ον αἰ. μ.Χ. ἡ «λογικὴ παιδεία» εἶχε ὡς σκοπὸ νὰ γράφουν οἱ νέοι τὴν ἀττικὴ διάλεκτο[26], ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ παραγνωρίζουμε τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Βυζαντινὸς λόγιος ὅταν γράφει περὶ διδακτικῶν θεμάτων

---

22. Ὁ συγγραφέας πολλὲς φορὲς γράφει «ἥτις» ἀντὶ «ὅστις» (14β), «ἄρξου» ἀντὶ «ἄρχου» (17β) ἢ ἄρξαι· «ὧν προέθηκας» ἀντὶ « ἃ προέθηκας» (16α)· «ὥστε πολλαπλασιάσας ... καὶ ἑνῶσον» ἀντὶ ἑνώσας (κεφ.147)· «πόσων καράτων ἦν» ἀντὶ «πόσων καράτων εἶναι» (κεφ.113)· «ἐμπόσαις» ἀντὶ «ἐν πόσαις» (κεφ.70)· «διπλάζονται» ἀντὶ «διπλασιάζονται» (κεφ.99)· «δηλῶσι» ἀντὶ «δηλοῦσι» (23β).
23. Πρέπει νὰ εἴμαστε ἰδιαίτερα ἐπιφυλακτικοὶ σχετικὰ μὲ τὴν ὑπόθεση, ὅτι τὸ κείμενο γράφηκε καθ' ὑπαγόρευση, διότι τοῦτο δὲν συνηθιζόταν κατὰ τὴν Βυζαντινὴ ἐποχή. Βλ. Mioni, Εἰσ. Ἑλλ. Παλ., σελ. 99.
24. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 5.
25. ὅ. π., σελ. 7.
26. Ἁγνῆς Βασιλικοπούλου-Ἰωαννίδου, Ἡ ἀναγέννηση τῶν γραμμάτων κατὰ τὸν 12ον αἰ. στὸ Βυζάντιο καὶ ὁ Ὅμηρος, Ἀθήνα 1971, σελ. 54.

ἀγωνίζεται νὰ διακριθεῖ ἀκόμα καὶ μὲ τὸ ὕφος τῆς γραφῆς, ἰδιαίτερα μάλιστα ὅταν καταγίνεται μὲ προβλήματα[27].

Ἡ συγγραφὴ διδακτικῶν θεμάτων συγκρίνεται μὲ αὐτὴ τῶν δοκιμίων ποὺ ἐκθέτουν ἐπιστημονικὲς γνώσεις σὲ κατάλληλη ἐκλαϊκευτικὴ μορφή. Οἱ Βυζαντινοὶ συγγραφεῖς κατεῖχαν τὴν τέχνη νὰ διδάσκουν λαμβάνοντας ὑπόψιν τους τὸ ἐπίπεδο μόρφωσης τοῦ μαθητοῦ, καθὼς καὶ τὸν εὐρύτερο κύκλο τῶν ἐνδιαφερόντων του, καὶ προσπαθώντας νὰ κάνουν ζωντανὴ τὴ διδασκαλία τους, τὴν ἐμπλούτιζαν καὶ μὲ πνευματώδεις παρατηρήσεις ἀκόμα[28]. Τὴν ἐποχὴ τῶν Παλαιολόγων ἡ ροπὴ πρὸς τὴν καθαρεύουσα φθάνει στὸ ἀποκορύφωμα, καὶ μεγαλώνει τὸ χάσμα μεταξὺ καθομιλουμένης καὶ γραφομένης.

Ἐπιπλέον δὲν πρέπει νὰ ἀγνοηθεῖ τὸ γεγονός, ὅτι οἱ Βυζαντινοὶ ἔπρεπε σὲ πολλὰ ζητήματα (πολιτικά, στρατιωτικά), νὰ ἐκφράσουν πλῆθος νέων ἰδεῶν καὶ ἔτσι ἦταν πρακτικῶς ἀδύνατο νὰ περιορισθοῦν στὸ κλασσικὸ λεξιλόγιο[29].

Συνοψίζοντας, ἔχω κάθε λόγο νὰ ἰσχυρισθῶ ὅτι στὸ χειρόγραφο χρησιμοποιεῖται γλώσσα ἀττικίζουσα μὲ ἐπιστημονικοὺς ὅρους. Ἂν τὸ ἔχει γράψει ὁ διδάσκων, τότε δὲν φαίνεται νὰ δίνει ἰδιαίτερη σημασία στὴν ὀρθογραφία, καθὼς ἑστιάζει τὸ ἐνδιαφέρον του στὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο θὰ διδάξει καλύτερα τὰ θέματα, τὰ ὁποῖα ἐκθέτει. Ἡ ποιητικὴ χροιὰ ποὺ διαφαίνεται στὸ κείμενο καθιστᾶ εὐκολότερη τὴ μελέτη καὶ προδιαθέτει τὸν ἀναγνώστη νὰ τὴ συνεχίσει περαιτέρω. Ἡ διδακτική ἱκανότητα τοῦ διδάσκοντα, στὴν ὁποία θὰ ἀναφερθοῦμε ἐκτενέστερα κατὰ τὸν μαθηματικὸ σχολιασμό, καὶ οἱ μεθοδολογικές του γνώσεις, μᾶς ὁδηγοῦν στὸ συμπέρασμα, ὅτι πρόκειται γιὰ κάποιο λόγιο.

Ἀκόμα πιστεύουμε, ὅτι καὶ ἡ γλώσσα μπορεῖ νὰ ἔχει σὲ

27. Τωμαδάκη, Βυζ. ἐπιστ., σελ. 319.
28. ὅ. π., σελ. 320.
29. Krumbacher, Ἱστ. Βυζ. Λογ., σελ. 51

ὁρισμένα σημεῖα σκοπίμως ἐκλαϊκευθεῖ[30], προκειμένου ὁ συγγραφέας νὰ ἐπιτύχει τὸν στόχο του, δηλαδὴ νὰ γίνουν πλήρως κατανοητὰ τὰ πρὸς διαπραγμάτευση ζητήματα.

Λαμβάνοντας σοβαρὰ ὑπόψιν τὶς συνθῆκες ποὺ ἐπικρατοῦσαν ἐκείνη τὴν ἐποχή[31], ἴσως ἀντιληφθοῦμε καλύτερα ποιές ἦταν οἱ προτεραιότητες καὶ τὰ οὐσιαστικὰ θέματα ποὺ ἀπασχολοῦσαν τότε ἐκείνους τοὺς δασκάλους.

Εἶναι ὅμως πολὺ σημαντικό, ὅτι ἀκόμα καὶ τότε ἡ παλαιὰ ἐκπαιδευτικὴ παράδοση δὲν εἶχε χαθεῖ, ἀφοῦ καὶ οἱ κλάδοι τῆς μαθηματικῆς τετρακτύος διδάσκονταν ἀπὸ ἰδιῶτες δασκάλους[32].

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρω κάποια στοιχεῖα τῆς ἐπιστημονικῆς ὁρολογίας ποὺ χρησιμοποιεῖται στὸ χειρόγραφο, ἡ πλήρης ἀνάλυση τῶν ὁποίων γίνεται στὸν μαθηματικὸ σχολιασμὸ τῶν ἀντιστοίχων κεφαλαίων.

Κατ' ἀρχὴν ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου ὁρίζει τὸ μηδὲν ὡς «οὐδέν»· γράφει, ὅτι «οὐδενὸς ἐστὶ δηλωτικόν», καὶ τὸ συμβολίζει μὲ ἀνεστραμένο h (14α). Στὸ φ. 15α χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο «μηλιούρια» ἢ «μιλούνια» ἀντὶ τοῦ ὀρθοῦ «μιλλιούνια», γιὰ νὰ δηλώσει τὰ ἑκατομμύρια. Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ

30. Ὁ δημώδης λόγος - ἰδιαίτερα στὴν ἐπιστολογραφία - εἰσέρχεται πολὺ ἀργὰ (διὰ τοῦ Ἰ. Βρυεννίου καὶ τοῦ Βησσαρίωνος) κατὰ τὴν τελευταία 50-ετία τῆς ζωῆς τοῦ Βυζαντίου. Βλ. Τωμαδάκη, Βυζ. Ἐπιστ., σελ. 140.

31. Κατὰ τὸν Pero Tafur, κατὰ τὴ χρονικὴ περίοδο 1437-1438, στὸ παλάτι καὶ στοὺς δρόμους τῆς Πόλης ἡ δυστυχία ἦταν ἐμφανέστατη στὸν λαό. Ἔβλεπε κανεὶς παντοῦ φτώχεια, θλίψη καὶ ἄθλιες συνθῆκες διαβίωσης. Στὴν Κωνσταντινούπολη ὑπῆρχε βέβαια μεγάλη ἐμπορικὴ κίνηση, ἀλλὰ τὸν κύριο ρόλο κατεῖχαν ξένοι, οἱ ὁποῖοι κινοῦνταν μὲ πλήρη ἐλευθερία ἐνῷ οἱ Βυζαντινοὶ κατάντησαν ἁπλοὶ θεατές. Βλ. Zakythinos, Crise mon., σελ. 37-39.

32. Ἕνας δάσκαλος τῆς τετρακτύος ὑπῆρξε καὶ ὁ Ἰ. Βρυέννιος (1340-1430). Βλ. Hunger, Βυζ. Λογ., σελ. 62.

χρησιμοποιεῖ δύο σχήματα: τὸ «δίπλευρον» (15α), καὶ τὸ «οἰκὸς ἢ οἶκος» (διὰ τὸ τετραγωνικῶς λαμβάνειν τοὺς ψήφους) (18α).

Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμό, ποὺ σήμερα λέμε ὅτι ἐκτελοῦμε «χιαστί», χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση «πολλαπλασιάζω σταυροειδῶς» (18α). Οἱ ὅροι «ἐπιστρεπτικὸς ἀριθμὸς» καὶ «ἀνυπόστροφος» χρησιμοποιοῦνται ἀπὸ τὸν συγγραφέα γιὰ νὰ δηλώσει τοὺς σύνθετους καὶ τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα (κεφ. 39).

Οἱ ἐκφράσεις «ἡ διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις» καὶ «διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν» (κεφ. 53) ἀντιστοιχοῦν στὴ σημερινὴ «μέθοδο τῶν τριῶν».

Ὁ ὅρος «ἀφεξαίρεσις» (κεφ. 102) σημαίνει τὴ σημερινὴ «ἀφαίρεση».

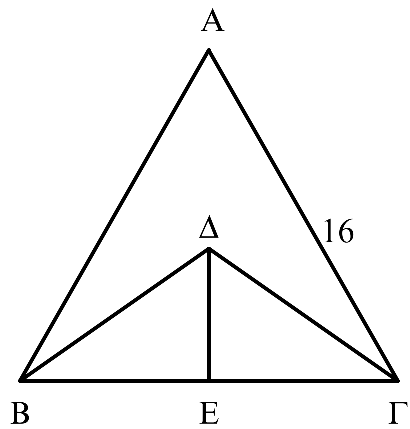
Ὁ ὅρος «φυσικὴ ρίζα» (κεφ. 128) σημαίνει τὴν ἀκεραία ρίζα (π.χ. τὴ $\sqrt{16}$), καὶ «νόθος ρίζα» αὐτὴ ποὺ δὲν δίνει ἀκέραιο ἀποτέλεσμα (π.χ. τὴν $\sqrt{30}$). Ἐνῶ ὁ ὅρος «ἐφίμικτος ρίζα» χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ δηλώσει τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν.

Στὶς ἐξισώσεις πρώτου ἕως καὶ τετάρτου βαθμοῦ (κεφ. 137) ὁ συγγραφέας ὀνομάζει «ἀριθμὸν» κάθε πραγματικὸν ἀριθμό καὶ «πρᾶγμα» τὸν ἄγνωστο. Οἱ ὅροι «τζένσο», «κοῦβον», καὶ «κάδρον» χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ δηλώσουν τὴ δευτέρα (τετράγωνο), τρίτη (κύβον) καὶ τετάρτη δύναμη τοῦ ἀγνώστου ἀντιστοίχως.

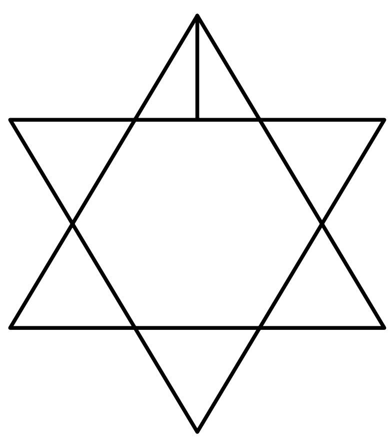
Ὁ «ρόμβος» εἶναι γιὰ τὸν συγγραφέα, τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες, καὶ «ρομβοειδὲς»[33] κάθε πλάγιο παραλληλόγραμμο (κεφ. 213). Μὲ τὸν ὅρο «ἐλλιπὲς» ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐννοεῖ τὸ μὴ κυρτὸ τετράπλευρο

33. Κατὰ τὸν Γ. Παχυμέρη, «ρομβοειδὲς τὸ παρασεσαλευμένον ἑτερόμηκες, τὸ καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἔχον ἀνίσους» (δὲν πρόκειται ἀκριβῶς περὶ ρόμβου). Βλ. P. Tannery, Quadrivium de Georges Pachymère, Città del Vaticano Biblioteca Apostolica Vaticana 1940, σελ. 203.

τὸ ὁποῖο προκύπτει, ἂν ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο πλευρᾶς 16 σπιθαμῶν ἀφαιρέσουμε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΔΒΓ ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα.



Τὸ «ἑξάγωνο σχῆμα» συντίθεται ἀπὸ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα.



Ὁ ὅρος «μηνικὸν κέρδος» (κεφ. 97) ἀναφέρεται σὲ προβλήματα τόκου καὶ σημαίνει τὸ κέρδος ἑνὸς μηνός.

Ὁ ὅρος «φίνον» ἀναφέρεται (κεφ. 110) στὸ καθαρότατο ἀσήμι τῶν 12 οὐγγιῶν, καὶ «φίνον μάλαγμαν» στὸν χρυσὸ τῶν 24 καρατίων. Ὅταν ὅμως πρόκειται γιὰ παρασκευὴ ἀσημιοῦ μικροτέρας καθαρότητας χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «ἐπιβολὴ χαλκώματος», ἐνῷ γιὰ τὴν παρασκευὴ καθαροτέρου μετάλλου ὁ ὅρος «λαγαρίζω»[34].

Τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ἀναφέρεται ὡς «κανὼν τῆς σκάδρας» (κεφ. 103), καὶ διευκρινίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὅτι σκάδρα σημαίνει τετράγωνο.

Γιὰ τὸν συγγραφέα τοῦ κώδικα 65, «τετράγωνο παραλληλόγραμμο» εἶναι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, καὶ τὸ ὕψος τριγώνου ἀναφέρεται συχνὰ ὡς «διχοτόμος γωνίας αὐτοῦ».

Ὁ ὅρος «ἄρριζον τζάκισμα κορυφῆς» (κεφ. 122) ἀναφέρεται σὲ κάποιον ἀριθμό, τοῦ ὁποῖου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι κλασματικὸς μὲ «ἄρριζον» (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲν μπορεῖς νὰ ὑπολογίσεις τὴ ρίζα) παρανομαστή, ὅπως π.χ. 3/8, 7/14, κ.λπ. Ὁ ὅρος «ἀσχημάτιστον ἢ ἄτμητον τζάκισμα» χρησιμοποιεῖται γιὰ κλάσματα (π.χ. 13/14, 7/16), τὰ ὁποῖα -ὅπως ἐξηγεῖ ὁ συγγραφέας- δὲν μποροῦν νὰ λάβουν μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες μορφές: 1/2, ἢ 1/3, ἢ 1/4 (τότε δὲν ὑπολογίζεται ἡ ρίζα).

ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ - ΜΕΤΡΑ - ΣΤΑΘΜΑ

Νομίσματα τῆς ἐποχῆς ἀναφέρονται σὲ προβλήματα μετατροπῆς νομισμάτων καὶ ἀγοραπωλησιῶν. Ὁρισμένα ἀπὸ αὐτὰ κατονομάζονται, ἐνῶ ἄλλα δίδονται μὲ συμβολισμὸ ἀπὸ τὸν συγγραφέα. Τὸ νόμισμα τὸ ὁποῖο συμβολίζεται μὲ τὸ Φ

34. «Οἱ χρυσοεψηταὶ ἐξελαγάριζαν τήκοντες τὸν χρυσὸν εἰς μικρὰ ὀστράκινα σκεύη». Βλ. Κουκουλέ, Βυζ. βίος, σελ. 228. «Περὶ τοῦ λαγαρῖσαι τὸ χρυσίον»: βλ. Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. Berthelot, Pub. G. Steinheil, Paris 1888, κεφ. 5, σελ. 322, 333.

ἰσοδυναμεῖ μὲ 6 ἢ 7 ἢ 8 νομίσματα συμβολιζόμενα μὲ τὸ II, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται «χρυσά». Ἕνα II («μεγάλο χρυσὸ») ἔχει (χρήζει) στὴν Κωνσταντινούπολη 24 κάρατα, τὰ ὁποῖα συμβολίζει μὲ:[35], τὸ δὲ 1: ἔχει 8 τουρνέσια (κεφ. 78)[36]. Στὰ προβλήματα ὅμως συναλλαγῶν ἡ ἰσχύουσα ἰσοτιμία νομισμάτων εἶναι ἡ ἑξῆς: 1 Φ ἔχει 8 II χρυσὰ μικρά, 1 II χρυσὸ μικρὸ ἔχει 20 κάρατα καὶ 1 κάρατον ἔχει 4 τουρνέσια[37].

Στὸ B μέρος τοῦ κώδικα, τὸ ὁποῖο ἐξέδωσαν οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel, τὸ «φλωρίνιον» ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 ὑπέρπυρα (χρυσά), ἢ 48 καράτια ἢ 384 τουρνέσια[38]. Ἐπειδὴ στὸ χειρόγραφό μας (A μέρος τοῦ κώδικα), ἡ ἀναφερόμενη ἰσοτιμία εἶναι ἡ ἰσχύουσα στὴν Κωνσταντινούπολη, τὸ συμβολιζόμενο μὲ τὸ Φ νόμισμα πιθανότατα εἶναι τὸ «φλωρίνιον»[39], καὶ τὸ «μεγάλο χρυσὸ» τῆς Κωνσταντινούπολης (1 II = 24 καράτια) εἶναι τὸ ὑπέρπυρο[40]. Τοῦτο ἴσως νὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ «μικρὸ χρυσό» (1 μικρὸ II = 20 καράτια), διότι κατὰ τὴν Παλαιολόγεια περίοδο (1261-1453) τὸ νομισματικὸ σύστημα δὲν εἶναι καθόλου σταθερό, ἐφόσον κυκλοφοροῦν ὑπέρπυρα, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν μέχρι καὶ μὲ 11 καράτια[41]. Δὲν εἶναι λοιπὸν διόλου ἀπίθανο, νὰ πρόκειται γιὰ τὸ ἴδιο νόμισμα, τὸ ὁποῖο ἰσοδυναμεῖ ὀνομαστικῶς μὲ 24 καράτια στὴν Κωνσταντινούπολη, ἀλλὰ στὶς συναλλαγὲς ἡ ἀξία του εἶναι 20 καράτια.

---

35. Κεράτιον = ξυλόκοκκον = καράτον = κουκίον = κουκίον ξύλινον = χαλκοῦς = χαλκός. 1 κεράτιον = 4 σιτόκοκκοι = 3 ὀβολοί. Βλ. Schilbach, Byz. Metr., München 1970, σελ. 184, 186.
36. Στὴν Κωνσταντινούπολη ἴσχυαν οἱ ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις: 1 ὑπέρπυρο = 24 καράτια = 192 μεγάλα τουρνέσια (1341-1453 μ.Χ.). Συνεπῶς, τὸ νόμισμα, τὸ ὁποῖο συμβολίζεται στὸ χειρόγραφό μας μὲ τὸ II εἶναι τὸ ὑπέρπυρο. Βλ. Hendy, Stud. Byz. mon., σελ. 541.
37. 1 ὑπέρπυρο = 24 καράτια = 96 τουρνέσια (1300-1350 μ.Χ.).ὅ. π., σελ 536.
38. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 13.
39. Τὸ «χρυσὸ φλωρίνι» εἶναι νόμισμα τῆς περιόδου 1354 - 1376, τοῦ ὁποίου ἡ πραγματικὴ ὀνομασία εἶναι ἄγνωστη. Βλ. Βαλασιάδη, Ὁδ. βυζ. νομ., σελ. 149.
40. Hendy, Stud. Byz. mon., σελ. 536, 541.
41. ὅ. π., σελ.547. Βαλασιάδη, Ὁδηγὸς βυζ. νομ., σελ. 18.

Τὸ νόμισμα, τὸ καλούμενο «τουρνέσιο», ἢ «τορνήσιο», εἶναι χάλκινο νόμισμα τοῦ 14ου αἰ., τὸ ὁποῖο ζύγιζε 2 γραμμάρια καὶ εἶχε διάμετρο 18 χιλιοστά[42]. Ὡς γνωστόν, ἐπὶ Φραγκοκρατίας καὶ συγκεκριμένα τὸ 1249 μ.Χ. ὁ Γουλιέλμος Βιλλεαρδουίνος μὲ τὴν ἄδεια τοῦ Βασιλέα τῆς Γαλλίας, ἵδρυσε νομισματοκοπεῖο στὴν πόλη Γλαρέντζα, τὴν ὁποία εἶχε ἱδρύσει ὁ πατέρας του Γοδεφρίδος Βιλλεαρδουῖνος στὸ Πριγκηπάτο τῆς Ἀχαΐας τὸ 1210-1218 μ.Χ. Τὸ νόμισμα ποὺ ἔκοψε ὀνομάστηκε «τουρνέσιο», ἀπὸ τὸ ὄνομα τῆς πόλης Τοὺρ τῆς Γαλλίας[43].

Τὸ «μοδίον» εἶναι νόμισμα γῆς (κεφ. 224)[44] καὶ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἀξία ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἀγροτεμαχίου πλευρᾶς 10 οὐργιῶν καὶ ἐμβαδοῦ 100 τετρ. οὐργιῶν. Ἰσχύουν οἱ σχέσεις[45]: 1 μοδίον = 2 σχοινία = 40 λίτρες = 200 οὐργίες = 888,73 (ἢ 939,18) τετρ. μέτρα. Τὸ «μοδίον» εἶναι φορολογικὸς ὅρος[46] καὶ ὄχι μονάδα βάρους[47], γι' αὐτὸ καὶ ἡ ἰσοδυναμία του πρὸς τὶς οὐργίες ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποιότητα τῆς γῆς, δηλαδὴ τοῦ ἐδάφους τοῦ ἀγροῦ. Ἔτσι 1 μοδίον ἀγροῦ μπορεῖ νὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ 100, 200, ἢ 288 οὐργίες. Τὸ «μοδίον» σὲ ὁρισμένα προβλήματα (κεφ. 231) λαμβάνεται καὶ ὡς μονάδα ὄγκου.

Οἱ συνηθέστερες ὅμως μονάδες βάρους στὸ χειρόγραφο, καὶ εἰδικὰ στὰ προβλήματα μὲ ἐμπορεύματα, εἶναι τὸ «καντάρι» ἢ τὸ «κηντήρι», τὸ ὁποῖο ἰσοδυναμεῖ μὲ 100 «ρέτουλα». Ἰσχύει δὲ ἡ σχέση: 1 μεγάλο καντάρι = 52,268 κιλά, καὶ 1 μικρὸ καντάρι = 47,513 κιλά[48]. Βέβαια στὸ χειρόγραφο δὲν ὑπάρχει ἀναφορὰ στὸν ὅρο «κιλὸ» ὡς μονάδα βάρους.

42. Βαλασιάδη, Ὁδηγὸς βυζ. νομ., σελ. 18, 151.
43. Ἱστορία Ἑλληνικοῦ Ἔθνους, Ἐκδοτικὴ Ἀθηνῶν, τόμ. Θ, σελ. 252.
44. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 40.
45. Schilbach, Byz. Metr., σελ. 74.
46. Ὁ φόρος ἦταν συνήθως τὸ 1/24 τῆς ἀξίας τῆς γῆς. Βλ. Lefort et al, Géom. fisc Byz., σελ. 253.
47. «Τοῦ ἑνὸς μοδίου ἡ γῆ ἔχει λίτρας 40 καὶ δέχεται περίμετρον 200 οὐργίες». ὅ. π., σελ. 44.
48. ὅ. π., σελ. 188.

Ὡς μονάδες μήκους χρησιμοποιοῦνται τὰ «μίλια» γιὰ μεγάλες ἀποστάσεις· ἀλλὰ στὰ προβλήματα τῆς Γεωμετρίας, γιὰ μικρὰ εὐθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιοῦνται οἱ «σπιθαμές», καὶ γιὰ τμήματα μεγάλου μεγέθους (ὅπως περιμέτρους μεγάλων ἐκτάσεων γῆς) χρησιμοποιεῖται ἡ «οὐργία» ἢ τὸ «σχοινίον»[49], ἡ ἀντιστοιχία τῶν ὁποίων ἔχει ὡς ἑξῆς: 1 οὐργία= 1/10 σχοινίου[50]. Κατὰ τὸν E. Schilbach ὅμως ἰσχύει: 1 σχοινίον= 130 2/3 σπιθαμές= 3060,5 ἑκατ. Στὰ ὑφάσματα (κεφ. 88) ὅπως ἡ τσόχα ἢ «τζόχα» χρησιμοποιεῖται ὡς μονάδα μήκους ἡ «κάνα», ὅπου 1 κάνα= 8 σπιθαμές= 187,4 ἑκατ. ἢ 196,8 ἑκατ[51].

Ὅταν ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ προβλήματα ἀγοραπωλησιῶν μαργαριταριῶν καὶ κραμάτων μετάλλων γιὰ τὴν παρασκευὴ ἀσημιοῦ χρησιμοποιεῖ ὡς μονάδα βάρους τὴ «λίτρα». Μία λίτρα εἶναι ἴση μὲ 12 οὐγγιές[52], καὶ ἡ 1 «οὐγγιὰ» μὲ 6 «στάγια» ἢ «ἑξάγια»[53]. Τὸ κάθε στάγιον, ὅταν πρόκειται γιὰ χρυσό, εἶναι ἴσο μὲ 24 «κάρατα»[54]. 1 λίτρα «φίνο» ἀσήμι ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 ὀγγιές (κεφ. 110), ἐνῷ γιὰ διάφορα κράματα ἀσημιοῦ μὲ ἄλλα μέταλλα μπορεῖ νὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 11, 10, ἕως καὶ 5 ὀγγιές. Ἡ «λίτρα» χρησιμοποιεῖται καὶ σὲ προβλήματα μετάξης, ὅπου ὅμως ἔχει σταθερὴ τιμή. Ὁρισμένα προβλήματα ἀναφέρονται σὲ μετατροπὲς λιτρῶν ἰσοδυνάμων

49. Ἡ χρήση τοῦ σχοινίου καὶ τῆς οὐργίας ὀφείλεται στὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα· βλ. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 250.

50. Τὸ σχοινίον ἔχει 10 οὐργίες ὅταν πρόκειται γιὰ γῆ δεύτερης ποιότητας, καὶ 12 οὐργίες γιὰ γῆ τρίτης ποιότητας. Ἐπίσης τὸ σχοινίον ἔχει 10 οὐργίες σὲ ὁρισμένες περιοχές, ὅπως π.χ. στὴ Θράκη καὶ τὶς δυτικὲς περιοχές, καὶ 12 οὐργίες σὲ ἀνατολικὲς περιοχές. ὅ. π., σελ. 253-4.

51. Schilbach, Byz. Metr., σελ. 49, 50, 74.

52. «Λίτρα παρὰ Ρωμαίοις ἑρμηνεύεται λίβρα, ἥτις ἐτυμολογεῖται παρ' αὐτοῖς ἰσότης ἤγουν ἰσοκανονία, ἔχει δὲ ὀγγίας 12, τὸ δὲ ὄνομα παρήχθη ἐξ Ἑλληνίδος ἀπὸ τοῦ ὄγκου». Βλ., Heron, Stereom., σελ.214.

53. Τὸ «ἑξάγιον» (στατήρ), ὁ χρυσός, τὸ κοινῶς «ὑπέρπυρον» ἢ «νόμισμα» καλούμενον, ἰσοδυναμεῖ μὲ 24 καράτια. Βλ. Schilbach, Byz. Metr., σελ. 183.

54. 1 λίτρα= 12 οὐγγιές, 1 οὐγγιά= 6 sextula (χρυσός, ὑπέρπυρον)= 8 δραχμές= 48 ὀβολοί= 27,18 γραμμάρια. ὅ. π., σελ. 161.

πρὸς κάποιον ἀριθμὸ ὀγγιῶν, σὲ λίτρες ἰσοδύναμες πρὸς ἄλλον ἀριθμὸ ὀγγιῶν. Στὰ προβλήματα αὐτὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ὅροι : «δεκάρι» ἢ «δεκρί», καθὼς καὶ «μονάς», ὅταν πρόκειται γιὰ 10 λίτρες καὶ 1 λίτρα ἀντίστοιχα.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Ὅπως ἔχουμε ἤδη διαπιστώσει ἀπὸ τὸ περιεχόμενο τῶν μαθηματικῶν ἑνοτήτων, ὁ συγγραφέας κινεῖται μέσα σὲ εὐρὺ πεδίο θεμάτων τόσο στὴν Ἀριθμητικὴ ὅσο καὶ τὴν Ἄλγεβρα, τὴν Ἐπιπεδομετρία καὶ τὴ Στερεομετρία. Θεώρησα λοιπὸν σκόπιμο.

α) νὰ ἐρευνήσω κατὰ πόσον τὸ περιεχόμενο κάθε θεματικῆς ἑνότητας συνδεόταν μὲ τὶς μαθηματικὲς γνώσεις τῆς ἐποχῆς τῆς συγγραφῆς τοῦ χειρογράφου, καὶ

β) νὰ προσδιορίσω τὶς ἐπιδράσεις τὶς ὁποῖες μπορεῖ νὰ δέχθηκε ὁ συγγραφέας, τόσο ἀπὸ τοὺς Ἄραβες, ὅσο καὶ ἀπὸ τοὺς Λατίνους, τοὺς Ἰνδούς κ.λπ.

Ἡ παράθεση τῶν σχετικῶν στοιχείων γίνεται μὲ ἰδιαίτερη προσοχή, καὶ τὰ συμπεράσματα ἐκφράζονται μὲ κάθε ἐπιφύλαξη, ὥστε οὔτε νὰ ὑπερεκτιμηθεῖ τὸ ἔργο τοῦ συγγραφέα ἀπὸ ἐπιστημονικὴν ἄποψη, οὔτε αὐτὸς νὰ ἀδικηθεῖ καὶ νὰ ἀγνοηθεῖ ἡ προσφορά του. Διότι ἡ ἀξιολόγηση τῆς σπουδαιότητας καὶ τῆς πρωτοτυπίας ἑνὸς ἔργου πρέπει νὰ γίνεται σύμφωνα μὲ τὰ μέτρα καὶ τὰ κριτήρια τῆς ἐποχῆς του, ἔστω καὶ ἂν πρόκειται γιὰ ἐπιστημονικὲς ἐργασίες ποὺ δὲν περιβάλλονται ἀπὸ τὴν αἴγλη, τὴν ὁποία ἀπολαμβάνουν οἱ μεγάλες ἀνακαλύψεις-σταθμοί. Ἔτσι μπορεῖ νὰ εἶναι ἀξιόλογες γιὰ τὴν ἐποχή τους καὶ ἐκτὸς τῶν ἄλλων, ἴσως νὰ διαδραματίζουν κάποιον διόλου εὐκαταφρόνητο ρόλο στὰ μελλοντικὰ ἐπιστημονικὰ ἐπιτεύγματα.

Ἐπισημαίνω, ὅτι ἐπὶ τῆς βασιλείας τοῦ Μανουὴλ Α΄ Κομνηνοῦ (1143-1180)[55], μολονότι ἡ βυζαντινὴ αὐτοκρατορία εἶχε περιορισθεῖ σὲ ἑλληνόφωνες περιοχές, τὸ Βυζάντιο ἦταν πιὸ προηγμένο σὲ σχέση μὲ τὴ Δύση στὸν τομέα τῶν Μαθηματικῶν[56]. Κατὰ τὸ 1300 μ.Χ. γίνεται πλέον ὁ διαχωρισμὸς τῶν «ἐμπορικῶν» ἀπὸ τὰ «ἀκαδημαϊκὰ» Μαθηματικά.

Μάλιστα ἀπὸ τὸν 14ο αἰ. τὰ πρακτικὰ Μαθηματικὰ δὲν διδάσκονταν στὰ Πανεπιστήμια[57], ὅμως κατὰ τὴν ἄποψη ὁρισμένων, ἡ διδασκαλία τους βρισκόταν σὲ συνεχὴ ἀνταγωνισμὸ μὲ τὴν ὕλη ποὺ διδασκόταν στὶς Ἀνώτατες Σχολές[58] καὶ τοῦτο, διότι ἐνδιέφεραν πλῆθος ἀνθρώπων, ἀφοῦ εἶχαν νὰ κάνουν μὲ προβλήματα τῆς καθημερινῆς τους ζωῆς. Οἱ τελευταῖες δεκαετίες πρὶν τὴν ἅλωση τῆς Κων/πολης θεωροῦνται ἀσήμαντες σὲ προσφορὰ στὰ Μαθηματικά. Παρ' ὅλα αὐτά, ἡ ὕπαρξη μεγάλου πλήθους χειρογράφων δείχνει αὐξημένο ἐνδιαφέρον γιὰ τὴν τετρακτὺ ἀλλὰ καὶ τὴ λογιστική[59] καὶ τὴν γεωδαισία[60] ποὺ ἦταν κλάδοι τῶν κατ' ἐξοχὴν ἐμπορικῶν Μαθηματικῶν[61].

Ἡ Βυζαντινὴ ἐποχὴ τελειώνει κυρίως μὲ ἔργα προορισμένα γιὰ πρακτικὴ χρήση. Αὐτὰ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον βιβλία Ἀριθμητικῆς, δηλαδὴ συλλογὲς ἐπιλεγμένων προβλημάτων κληροδοτημένες ἀπὸ τὴν παράδοση πολλῶν χρόνων ἀλλὰ καὶ λαῶν. Αὐτὲς οἱ συλλογὲς περιλαμβάνουν στοιχεῖα πολύτιμα γιὰ ἐμᾶς τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ τὴν ἐξέλιξη τοῦ πολιτισμοῦ καὶ

---

55. Σύγχρονα θέματα, τεύχη 35, 36, 37 (Δεκ. 1998), Συνέντευξη μὲ τὸν Ν. Σβορῶνο, σελ. 47.
56. Vogel, Βυζ. ἔΐστ., σελ. 811.
57. Calinger, Hist. Math. to Euler, σελ.357,363.
58. Boyer-Merzbach, Ἱστ. Μαθ., σελ. 284.
59. Πρβλ. Heath, Hist. Gr. Math., τόμ. I, σελ. 14. Ἡ λογιστικὴ ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἀρίθμηση ἀντικειμένων καὶ ὄχι μὲ τὴ φύση τῶν ἴδιων τῶν ἀριθμῶν.
60. ὅ. π., σελ.16. Βλ. καὶ Heron, Stereom., σελ. 100.
61. Vogel, Βυζ. ἔΐστ., σελ. 814.

τῆς γλώσσας, ὡς ἀναφερόμενα σὲ ποικίλα ζητήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης (μετατροπὲς νομισμάτων, φορολογικά κ.ἄ.).

Τὰ προβλήματα τοῦ χειρογράφου μας, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ πρῶτο μέρος του, εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον προβλήματα πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ ἄλγεβρας καὶ ἐντάσσονται στὴ λογιστική, ἐνῶ ἐκεῖνα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ δεύτερο μέρος του εἶναι προβλήματα γεωδαισίας καὶ γενικῶς γεωμετρίας.

Στὴν ἀρχαιότητα «ἀριθμητικὴ» σήμαινε κυρίως θεωρία ἀριθμῶν, ἐνῶ ἡ λογιστικὴ[62], ὡς ἀσχολουμένη μὲ πρακτικὰ προβλήματα δὲν ἀνῆκε στὶς μαθηματικὲς ἐπιστῆμες καὶ κατὰ κάποιον τρόπο θεωρεῖτο ὑποδεέστερη[63]. Τὰ βιβλία της προορίζονταν γιὰ τὴ διδασκαλία στὰ δημοτικὰ σχολεῖα, καὶ χρησίμευαν στοὺς ἐμπόρους καὶ τοὺς παντὸς εἴδους τεχνίτες[64].

Ἀπὸ τὴ μελέτη τοῦ χειρογράφου διαπιστώνει κανεὶς ἐπιρροὲς ἀπὸ δύο λαούς, τοὺς ὁποίους ὁ συγγραφέας κατονομάζει ἀμέσως καὶ σαφῶς· τοὺς Λατίνους καὶ τοὺς Πέρσες[65]. Μάλιστα στὸ προοίμιο τῆς πρώτης βίβλου ὁ συγγραφέας διευκρινίζει, ὅτι ἡ ἐπιρροὴ τῶν Περσῶν σχετικὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὶς πράξεις τους δὲν προῆλθε ἄμεσα, ἀλλ' ἡ γνώση ἔφθασε σὲ μᾶς μέσω τῶν Λατίνων μὲ τὴν εὐκαιρία τῶν συχνῶν ἐπαφῶν ποὺ εἶχαν οἱ Βυζαντινοὶ μὲ αὐτούς, ὅταν λόγω

62. Κατὰ τὸν Ἀρχύτα, ἡ λογιστικὴ (τέχνη τοῦ ὑπολογισμοῦ) ὑπερέχει σὲ σχέση μὲ τὴν σοφία ἔναντι ὅλων τῶν ἄλλων τεχνῶν, ἀκόμη καὶ τῆς γεωμετρίας, διότι μπορεῖ νὰ ἀνυψωθεῖ στὸ ἐπίπεδο τῶν μορφῶν (τὰ εἴδη). Βλ. J. F. Mattéi, Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι, μτφρ. Κ. Καψαμπέλη, ἐκδ. Μ. Καρδαμίτσα, Ἀθήνα 1995, σελ. 74.

63. Σταμάτη, Κριτ. Βυζ. Βιβλ. Ἀριθμ., σελ. 12.

64. Σταμάτη, Ἑλλ. Μαθ., σελ. 46.

65. Ὁ ἄραβας χαλίφης Ἀλ Μαμοὺν προέτρεπε τὸν Ἀλ Χουαρίζμι νὰ συνθέσει ἔργο γιὰ τοὺς μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ νὰ τὸ περιορίσει στὸ εὐκολότερο καὶ χρησιμότερο μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, δηλαδὴ αὐτὸ ποὺ χρειάζονται οἱ ἄνθρωποι σὲ ζητήματα κληρονομιᾶς, μοιρασιᾶς περιουσίας, ἐμπορικῶν συναλλαγῶν, δικαστικῶν διενέξεων, καταμετρήσεων γῆς, γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν, κ. ἄ. Βλ. Boyer-Merzbach, Ἱστ. Μαθ., σελ. 256, καὶ Δ. Γούτα, Ἡ Ἀρχαία Ἑλληνικὴ σκέψη στὸν Ἀραβικὸ πολιτισμό, ἐκδ. Περίπλους, Ἀθήνα 2001, σελ. 159.

ἐμπορικῶν σχέσεων καὶ συναλλαγῶν πραγματοποιοῦσαν ταξίδια στὴ Ρώμη καὶ σὲ ἄλλες ἰταλικὲς πόλεις (κεφ. 1)[66]. Ἐξ ἄλλου σὲ ἀρκετὰ προβλήματα ἀναφέρονται ἡ Φλωρεντία (Φλωρέντζα) καὶ ἡ Ρώμη[67].

66. Ὁ συγγραφέας ἀναφέρει τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαίρεσης, καὶ στὴ συνέχεια ἀναφέρεται γενικώτερα στὶς μεθόδους τῆς ἀριθμητικῆς, «...προχειροτάτην μέθοδον, ἥτις εὑρίσκετο μὲν παρὰ τῶν πάντα καλῶς εἰδότων καὶ λίαν σοφωτάτων Περσῶν, πρὸς ἡμᾶς δὲ οὐκ ἔφθασε γενέσθαι γνώριμος αὐτὴ ἡ μέθοδος, ἀλλὰ ἐπὶ πολὺν λανθάνουσα ταῖς δυτικαῖς ἡμῶν μέρεσι τέως δήλη ἐγένετο πρός τινας τῶν ὑπὸ τοῖς ἰταλικοῖς μέρεσι ὄντων Λατίνων, πρὸς ἐκείνους δὲ συναλλάξεως χάριν καὶ πραγματείας ... ἡμᾶς δὲ οὐ πλείους τῶν 100 χρόνων εὑρέθη αὕτη ἡ μέθοδος καὶ γνώριμος γέγονε πρός τινας τῶν τοῖς ἰταλικοῖς μέρεσι ὄντων ἐλάνθανε δὲ πάλιν ἡμᾶς τοῖς τὴν Ἑλληνικὴν γλώτταν ἐπισταμένοις τὸ τοῖδε ἐγχείρημα...»

67. Ἡ Φλωρεντία (Φλωρέντζα) ἦταν ἡ κυριότερη ἀγορὰ χειρογράφων κατὰ τὸν 14ο αἰ. μ.Χ., διότι τότε κατέφθασαν ἐκεῖ πολλοὶ ἀξιόλογοι Ἕλληνες διδάσκαλοι, οἱ ὁποῖοι συνετέλεσαν στὴν ἀναβίωση τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γνώσης. Βλ. Rose, Ital. Ren. Math., σελ. 26.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΕΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΑΠΟ Α - ΙΓ.

Μέρος Γ[68]

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιο τῶν ἐμβαδῶν ἐπιπέδων σχημάτων παρουσιάζει ἐξαιρετικὸ ἐνδιαφέρον, ἔκρινα σκόπιμο νὰ ἀποτελέσει μία ξεχωριστὴ ἑνότητα. Ὑπενθυμίζω, ὅτι ἀπὸ τὸ χειρόγραφο λείπουν τὰ φύλλα, ποὺ περιεῖχαν τὰ κεφ. 189-200, τὰ ὁποῖα ἀφοροῦσαν σὲ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν πολεμικὴ τέχνη, ἐνῶ ἡ ἀρίθμηση τῶν σελίδων τοῦ χειρογράφου εἶναι συνεχής. Ἡ ὕπαρξη αὐτῶν τῶν κεφαλαίων, ἔστω καὶ μὲ ἁπλὴν ἀναφορά, στὸν πίνακα περιεχομένων τοῦ χειρογράφου, ἀποτελεῖ σημαντικὴ πληροφορία γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ γεωμετρικῶν μεθόδων στὴν ὀχυρωματικὴ τέχνη. Ἡ σπουδαιότητα καὶ ἡ χρησιμότητά τους ἀποδεικνύεται ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν ἐπιλεκτικὴ ἀφαίρεση τῶν σχετικῶν μὲ αὐτὰ φύλλων ἀπὸ τὸν κώδικα, προφανῶς προτοῦ αὐτὸς δεθεῖ ἐκ νέου.

Στὴν ἑνότητα αὐτὴ ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται κυρίως μὲ τὸν κύκλο καὶ τὸ τρίγωνο, καὶ στοὺς περισσότερους ὑπολογισμοὺς τὸν πρῶτο λόγο ἔχει τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, τὸ ὁποῖο καλεῖ «κανόνα τῆς σκάδρας». Ὁ ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς π ὁρίζεται ἀπὸ

68. Τὸ πρῶτο μέρος περιέχει ἀναλυτικὴ παρουσίαση καὶ μαθηματικὸ σχολιασμὸ τῶν προβλημάτων τῆς σημερινῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, καὶ τὸ δεύτερο μέρος τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων τῆς σημερινῆς ἄλγεβρας. Βλ. Μ. Χάλκου, Τὰ Μαθηματικὰ στὸ Βυζάντιο, Λογιστική, ἐκδ. Ἐπικαιρότητα, Ἀθήνα 2006, σελ. 21, 77.

τὸν συγγραφέα ὡς ὁ λόγος τῆς περιμέτρου ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴ διάμετρό του καὶ λαμβάνεται ἴσος μὲ 22/7, δηλαδὴ μὲ 3 1/7. Αὐτὴ ἡ προσέγγιση ἦταν παραδεκτὴ καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Ἀρχιμήδη, ἐφόσον θὰ ἐχρησιμοποιεῖτο σὲ πρακτικὲς μετρήσεις[69]. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ὑποθέσουμε, ὅτι ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖον ἀκόμα καὶ σὲ θέματα θεωρητικοῦ περιεχομένου χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ἡ τιμὴ 3 1/7, εἶναι διότι αὐτὰ τὰ ζητήματα ἀποτελοῦσαν, ὅπως ἀναφέρει ὁ ἴδιος, προγύμνασμα τῶν μαθητῶν του γιὰ τὰ προβλήματα ποὺ θὰ ἀκολουθοῦσαν, καὶ τὰ ὁποῖα ἦταν πρακτικὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς.

Οἱ προσεγγιστικὲς τιμὲς τοῦ π παρουσίαζαν μία ἐνδιαφέρουσα ποικιλία τόσο τὸν 15ο αἰ. ὅσο καὶ σὲ παλαιότερες ἐποχές. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρω, ὅτι τὸν 10ο αἰ. ὁ ἰνδὸς Srïdhara ἔθετε $\pi = \sqrt{10}$,[70] καὶ τὸν 13ο αἰ. ὁ κινέζος Ch' in Kiu-shao ἔδινε γιὰ τὸ π τὴν τιμὴ 3 1/7[71]. Στὴν Αἴγυπτο δέ, ἀπὸ ἀρχαιότερους χρόνους καὶ μέχρι τὸ 1500 μ.Χ. χρησιμοποιοῦσαν τὴν τιμὴ 3,1605[72]. Ὁ Μιχαὴλ Ψελλὸς θεωροῦσε ὅτι τὸ π ἦταν ἴσο μὲ $\sqrt{8} = 2{,}8284271$[73]. Μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη, τὴν τιμὴ 3 1/7 υἱοθέτησαν ἀκόμα ὁ Ἥρωνας ὁ Ἀλεξανδρέας (περίπου 50 μ.Χ.)[74], καὶ

69. Ἀπὸ τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη Κύκλου Μέτρησις (πρότ. 3) προκύπτουν γιὰ τὸ π οἱ ἑξῆς ἀνισοτικὲς σχέσεις: $\pi < 3\ 1/7$, $\pi > 3\ 10/71$. Βλ. W. R. Knorr, «Archimedes and the measure of the circle. A new interpratation, AHES, 15, N.2 (1976), Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1974, μέρος Β', τόμ. Ι, σελ. 454.
70. Smith, Hist. Math., τόμ. I, σελ. 274.
71. ὅ. π., σελ. 269.
72. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 13. Στὴν Αἴγυπτο ἡ γεωμετρία ἦταν ἐφαρμοσμένη ἀριθμητική. Δὲν ὑπῆρχε συστηματικὴ παραγωγὴ κανόνων, χωρὶς ὅμως αὐτὸ νὰ σημαίνει, ὅτι τοὺς ἀγνοοῦσαν. Βλ. V. d. Waerden, Ἀφύπνιση, σελ. 24. Στὸν Πάπυρο τοῦ Rhind δίδεται ἡ τιμὴ 3,16. Βλ. Heath, Hist. Gr. Math., τόμ. I, σελ. 124.
73. Heath, Hist. Gr. Math., τόμ. II, σελ. 545.
74. «Ὅτι δὲ πάσης διαμέτρου τριπλασιέβδομος ἐστὶν ἡ περίμετρος, δήλη ἐστὶν χξ, καὶ αὐτὴ οὖσα, ὡς τρὶς τὸν σι ἔχουσαι καὶ τὸ ἕβδομον αὐτοῦ». Δηλαδὴ ὁ Ἥρων εὕρισκε τὴν περίμετρο τῆς περιφέρειας πολλαπλασιάζοντας τὴν διάμετρο ἐπὶ τὸ 3 1/7. Heron., Stereom., τόμ. V, σελ. 20, 190. Vincent, Géom. Prat. Gr., τόμ. XIX, σελ. 216.

στὴ Δύση ὁ Φιμπονάτσι[75], ὁ Dominicus Parisiensis (1378 μ.Χ.) ὁ Ἀλβέρτος ὁ Σάξων (1365 μ.Χ.), καὶ ὁ Νικόλαος τῆς Κούζας (1450 μ.Χ.)[76].

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ μεθοδολογίες ἐπίλυσης τῶν προβλημάτων τῶν κεφαλαίων 182 καὶ 183, γιὰ τὴ λύση τῶν ὁποίων σήμερα θὰ χρησιμοποιούσαμε τὸ θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου[77]. Στὸ χειρόγραφό μας δὲν γίνεται ἀναφορὰ στὸ ἀνωτέρω θεώρημα, καὶ ὁ συγγραφέας του μὲ ἐλάχιστες πράξεις ὑπολογίζει μὲ ἕνα δικό του τρόπο τὴ διχοτόμο γωνίας σκαληνοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς διαφέρουν μεταξύ τους κατὰ μία ἢ δύο μονάδες, κ.λπ.

Στὰ σχόλια ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων κεφαλαίων ἐπιχειρῶ μία ὑποθετικὴ προσέγγιση τοῦ τρόπου ἐπίλυσης, τὸν ὁποῖο χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας καὶ προβαίνω σὲ μία σύγκριση τῶν δύο μεθόδων, δηλαδὴ τῆς μεθόδου τοῦ συγγραφέα καὶ μιᾶς σημερινῆς μεθόδου, τὴν ὁποία θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ διδάξουμε σὲ μαθητὲς τοῦ Λυκείου. Βέβαια τὸ περίεργο εἶναι ὅτι ὁ συγγραφέας ὁμιλεῖ γιὰ «κάθετο» τριγώνου, ἐννοώντας τὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας αὐτοῦ (ὑπολογίζει τὸ μῆκος διχοτόμου), ὅπως δείχνω στὰ ἀντίστοιχα σχόλια.

Ἐμεῖς σήμερα χρησιμοποιώντας μία μόνο μέθοδο, ὑπολογίζουμε τὴ διχοτόμο ὁποιασδήποτε γωνίας τριγώνου, ὅταν δίδονται οἱ τρεῖς πλευρές του. Στὸ χειρόγραφο ὅμως δίδονται διαφορετικὲς μέθοδοι ὑπολογισμοῦ της γιὰ τὰ σκαληνά τρίγωνα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη τῶν πλευρῶν διαφέρουν κατὰ 1 μονάδα, καὶ ἐκείνων τῶν ὁποίων διαφέρουν κατὰ 2 μονάδες, καὶ πέραν τούτων οὐδέν. Δηλαδή, ἴσως νὰ μὴ μποροῦσε ἢ νὰ μὴν ἐπιθυμοῦσε νὰ χρησιμοποιήσει κάποιο γενικότερον τρόπο, ἂν καὶ ἡ συνοπτικὴ παρουσίαση τῶν πράξεων ποὺ πραγματοποιεῖ

75. Vogel, Fibonacci, σελ. 608.
76. Smith, Hist. Math., τόμ. II, σελ. 307.
77. Τὸ θεώρημα αὐτὸ διδάσκεται σήμερα στὴν Β’ τάξη τῶν Λυκείων.

φαίνεται νὰ εἶναι κάτι ἀρκετὰ δυσκολότερο, τὸ ὁποῖο ἐντούτοις ἐπιτυγχάνει.

Βέβαια εἶναι πιθανὸν νὰ γνώριζε τὴ χρήση τῆς σημερινῆς μεθόδου, ἀλλὰ νὰ μὴ τὴ μεταχειριζόταν, ἀκριβῶς ἐπειδὴ αὐτὴ δὲν τοῦ ἔδινε τὴ δυνατότητα νὰ συνοψίσει τὶς πράξεις στὶς ἀπολύτως ἀναγκαῖες, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο κάνει, ἀφοῦ χωρίσει τὰ τρίγωνα σὲ κατηγορίες, ἀνάλογα μὲ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τους, ὅπως ἤδη ἀνέφερα.

Μία ἀκόμη προσέγγιση τῆς μεθόδου τοῦ συγγραφέα ἐπιχειρῶ στὰ σχόλια τῶν κεφ. 169, 177, ὅπου δίνω μία πιθανὴ ἑρμηνεία τῶν πράξεών του, σύμφωνα πάντοτε μὲ τὰ σημερινὰ δεδομένα.

Σχετικὰ δὲ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ κεφαλαίου 177, ἡ ἐκφώνηση καὶ ἡ λύση του εἶναι ἴδια μὲ ἑνὸς τοῦ Ἀλ Χουαρίζμι, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται πὼς εἶχε δεχθεῖ ἐπιρροὲς ἀπὸ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα[78].

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

κεφ. 166. (ρξς). Εἰσαγωγὴ στὴν γεωμετρία.

Ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα γράφει:

«Περὶ ἀποδόσεως τῆς τοῦ πράγματος μεταχειρίσεως, ἀρχῆς δὲ γεωμετρικῶν καὶ ἑτέρων διαφόρων τινων ζητημάτων. Τὰς ποικίλας τε καὶ διαφόρους ζητήσεις, τὰς διὰ τῆς μεταχειρίσεως τοῦ πράγματος[79], γενομένας, ἀποδόνταις μετρίως, τῶν ἐνδεχο-

78. Boyer-Merzbach, Ἱστ. Μαθ., σελ. 261.

79. Ὡς πρᾶγμα ὁρίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὁ ἄγνωστος χ, ὡς τζένσον τὸ τετράγωνο τοῦ ἀγνώστου χ, ὡς κοῦβον ἡ τρίτη δύναμη τοῦ ἀγνώστου χ, καὶ ὡς κάδρον ἡ τετάρτη δύναμη τοῦ χ. Μ. Χάλκου, Τὰ Μαθηματικὰ στὸ Βυζάντιο, Λογιστική, ἐκδ. Ἐπικαιρότητα, Ἀθήνα 2006, σελ. 93.

μένων ἐστὶ εὑρεθῆναι (25) καὶ ἄλλα τινα διάφορά τε ζητήματα τὰ διὰ τοῦ πράγματος εὑρισκόμενα, ἅπερ οὐ γεγράφαμεν ἄρτι. Καὶ μάλιστα τὰ μὲν διὰ τῶν πραγμάτων καὶ κούβων, τὰ δὲ διὰ τῶν πραγμάτων καὶ κάδρων εὑρισκόμενα, φέρε δ' εἴπομεν καὶ γεωμετρικάς, καὶ ἑτέρας τινας διαφόρους ζητήσεις, τὰς οὐ μετὰ τοῦ πράγματος εὑρισκομένας, ἀλλὰ διὰ ποικίλων καὶ διαφόρων μεταχειρίσεων».

κεφ. 167. (ρξζ). Εὕρεση τῆς διαμέτρου κύκλου ἀπὸ τὴν περίμετρον αὐτοῦ.

Ὁ συγγραφέας θεωρεῖ τὴν περίμετρο ἑνὸς τυχόντος κύκλου ἴση μὲ 22 σπιθαμές, καὶ διαιρεῖ τὴν περίμετρο μὲ τὴν διάμετρο λέγοντας, ὅτι αὐτὴ ἡ διαίρεση δίνει πάντα 3 1/7 = 22/7. Κατὰ συνέπεια ἡ διάμετρος θὰ εἶναι ἴση μὲ 22/(22/7) = 7 σπιθαμές.

κεφ. 168. (ρξη). Εὕρεση τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.

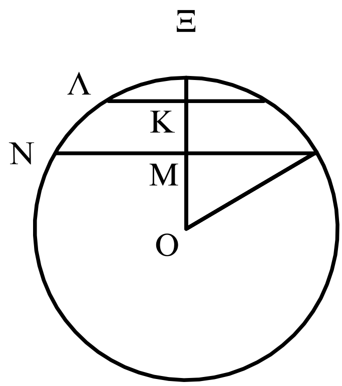
Χρησιμοποιεῖ τὸν ἴδιο λόγο, δηλαδὴ Π/δ = 3 1/7, ὅπου τὸ Π συμβολίζει τὴν περίμετρο, καὶ τὸ δ τὴν διάμετρο. Στὸ χειρόγραφο βέβαια δὲν ὑπάρχουν συμβολισμοί, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀντίστοιχες λέξεις τῆς περιμέτρου καὶ τῆς διαμέτρου.

κεφ. 169. (ρξθ). Εὕρεση διαμέτρου καὶ περιμέτρου κύκλου, ἀπὸ τὸ μῆκος χορδῆς καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τοῦ μέσου αὐτῆς ἀπὸ τὴν περιφέρεια.

Σύμφωνα μὲ τον κώδικα ἔχουμε: ΜΞ = 2, ΜΚ = 1, ΚΛ = 3, ΜΝ = 4.

Σήμερα θὰ ὀνομάζαμε ρ τὴν ἀκτίνα ΟΝ τοῦ κύκλου, ὁπότε ἐφαρμόζοντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ τρίγωνο ΟΜΝ θὰ εἴχαμε:

$ON^2 = OM^2 + MN^2$, δηλαδὴ $\rho^2 = 4^2 + (\rho\text{-}2)^2$, ἀπὸ ὅπου ρ = 5, καὶ συνεπῶς δ = 10, δηλαδὴ Π = 10.π



Ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου περιγράφει τὴν ἑξῆς διαδικασία:

4.4 = 16, 3.3 = 9, 1.1 = 1, 9 + 1 = 10, 16-10 = 6, 2.1 = 2, 6/2 = 3, 3.3 = 9, 9 + 16 = 25, ρίζα τοῦ 25 ἴσον 5, καὶ 5.2 = 10 = δ.

Κατὰ τὸν συγγραφέα λοιπὸν, ἀφοῦ 9 + 16 = 25 θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει ἡ σχέση:

$ΚΛ^2 + ΜΝ^2 = ρ^2$, ἀλλὰ ἀφοῦ

$ΟΜ^2 + ΜΝ^2 = ρ^2$, θὰ πρέπει

ΟΜ = ΚΛ. Ἀλλὰ ἔχουμε

$ΟΜ^2 = ΟΝ^2 - ΝΜ^2 = ρ^2 - 4^2 =$

$ΟΞ^2 - 4^2 = (2 + ΟΜ)^2 - 4^2$, ὁπότε

$ΟΜ^2 = 4 + ΟΜ^2 + 4ΟΜ - 16$ ἢ

4ΟΜ = 12, ἄρα ΟΜ = 3 = ΚΛ, τὸ ὁποῖο ἰσχύει γιατὶ θεωρεῖ ὅτι ΚΛ = 3.

Ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα 65 χρησιμοποιεῖ ἐπίσης ἕναν ἄλλο τρόπο καὶ περιγράφει τὶς ἑξῆς πράξεις:

4.4 = 16, 16/2 = 8, 8 + 2 = 10 = δ, Π = 10.(3 1/7) = 31 3/7.

Κατὰ τὸν συγγραφέα λοιπὸν φαίνεται, πὼς θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει ἡ σχέση:

$ΜΝ^2/2 + ΜΞ = 2.ΟΞ$, ἢ

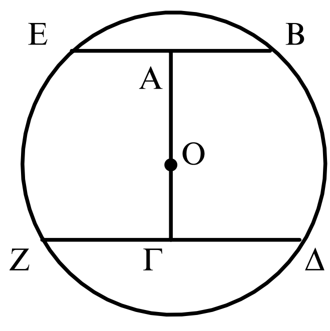
$ΜΝ^2/2 = ΟΜ + ΟΞ$, ἢ

$ρ^2 - ΟΜ^2 = 2.ΟΜ + 2.ΟΞ$, ἢ

ρ-ΟΜ = ΜΞ = 2, τὸ ὁποῖο στὴ συγκεκριμένη περίπτωση ἰσχύει.

Σὲ γενικότερο πρόβλημα μὲ ΟΑ καὶ ΟΓ τὶς καθέτους ἀπὸ τὸ κέντρο Ο ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας ρ, πρὸς τὶς παράλληλες χορδὲς ΕΒ = 12 καὶ ΖΔ = 16 κύκλου μὲ κέντρο τὸ Ο (θεωρεῖ τὴν ἀπόσταση τῶν χορδῶν ἴση μὲ 7), ὑπολογίζει τὴν παράσταση $\Gamma\Delta^2 + [(AB^2 + A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2)/2A\Gamma]^2$, ἡ ὁποία, καθὼς ἰσχυρίζεται ἰσοῦται μὲ τὸ ρ^2. Ἂν αὐτὸ εἶναι ἀληθές, τότε θὰ ἔχουμε:

$(AB^2 + A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2)/2A\Gamma = O\Gamma$, ἢ
$AB^2 + A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 = 2A\Gamma.O\Gamma$, ἢ
$\rho^2 - OA^2 + (OA + O\Gamma)^2 - \rho^2 + O\Gamma^2 = 2A\Gamma.O\Gamma$, δηλαδὴ
$2O\Gamma^2 + 2OA.O\Gamma = 2A\Gamma.O\Gamma$, ἢ
$2O\Gamma(O\Gamma + OA) = 2O\Gamma.A\Gamma$, ἢ
$O\Gamma + OA = A\Gamma$, τὸ ὁποῖο ἀληθεύει.



κεφ. 170. (ρο). Στὸ συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρεῖ κύκλο διαμέτρου 6 καὶ ζητεῖ τὴν πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν τετραγώνου.

Θεωρεῖ τὴν διαγώνιο τοῦ τετραγώνου ἴση μὲ τὴν διάμετρο, καὶ ἐφαρμόζει τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρόκειται προφανῶς γιὰ μία ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τὴν ὁποία θὰ χρησιμοποιούσαμε καὶ σήμερα.

κεφ. 171. (ροα). Μὲ πλευρὰ τμῆμα τῆς διαμέτρου ΑΒ = 12 κύκλου, ζητεῖ νὰ κατασκευαστεῖ τετράγωνο μὲ κορυφὲς ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Σήμερα, ἂν θεωρήσουμε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἴση μὲ χ καὶ ἐφαρμόσουμε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ τρίγωνο ΓΟΔ, θὰ ἔχουμε:

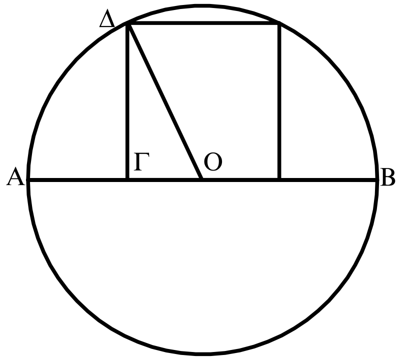
$ΟΔ^2 = ΓΔ^2 + ΓΟ^2$, δηλαδὴ

$6^2 = χ^2 + (χ/2)^2$, ἢ

$χ^2 = 144/5$, ἢ

$χ = \sqrt{}(144/5)$.

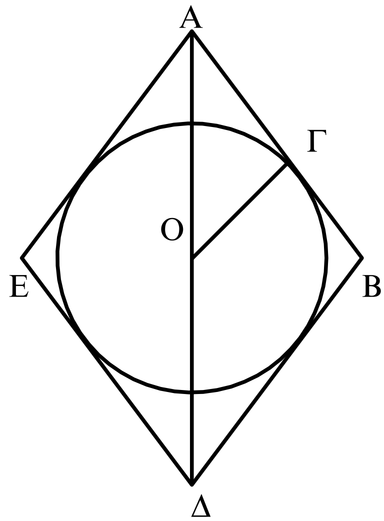
Ὁ συγγραφέας περιγράφει οὐσιαστικὰ τὸ τελευταῖο βῆμα ἀφοῦ ὑπολογίζει κατευθείαν τὸ χ ὡς τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $ΑΒ^2/5$, δηλαδὴ τοῦ 144/5.



κεφ. 172. (ροβ). Στὸ συγκεκριμένο πρόβλημα ζητεῖ νὰ ἐγγράψουμε κύκλο ἐντὸς τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 7.

Θεωρεῖ τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου ἴση μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ πολλαπλασιάζει τὸ 7 μὲ τὸ 3 1/7.

κεφ. 173. (ρογ). Ζητεῖται νὰ κατασκευαστεῖ κύκλος ἐντὸς ρόμβου πλευρᾶς ἴσης μὲ 7, μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ρόμβου ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου. Ὁ συγγραφέας θεωρεῖ τὴν μικρὴ διαγώνιο τοῦ ρόμβου ἴση μὲ 7.



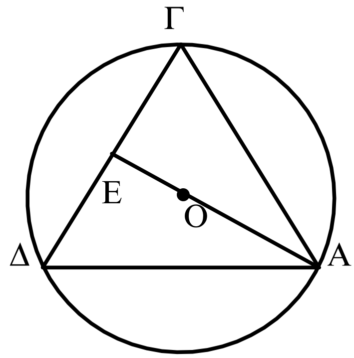
Ὁ συγγραφέας βρίσκει τὴν ΟΑ χρησιμοποιώντας τὸν κανόνα τῆς σκάδρας (Πυθαγόρειο θεώρημα), καὶ κάνει τὶς ἑξῆς πράξεις:

7.7 = 49, (7/2).(7/2) = 12 1/4,
49- (12 1/4) = 36 3/4,
$\sqrt{}$(36 3/4) = 6 1/16,
(6 1/16).2 = 12 2/16 = ΑΔ, καὶ γράφει ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ 6 1/16. Αὐτὸ εἶναι ἀληθές, διότι
ΟΑ = (7$\sqrt{}$3)/2, γιατὶ τὸ ΟΑ εἶναι ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς ἴσης πρὸς 7, καὶ
ΟΑ = 2ΟΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α τοῦ ρόμβου εἶναι ἴση μὲ 60 μοῖρες ὁπότε καὶ ἡ γωνία ΟΑΓ εἶναι ἴση μὲ 30 μοῖρες (οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τὶς γωνίες του).

Θὰ μπορούσαμε βέβαια νὰ ὑπολογίσουμε τὴν ΟΑ ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΟΑΒ ὡς ἑξῆς:
ΟΑ^2 = 49-49/4 = 3. 49/4, ὁπότε 2ΟΑ = 7$\sqrt{}$3.
Ἐπίσης, Ερόμβου = (7$\sqrt{}$3).7/2 = 49$\sqrt{}$3/2 = 7.(2ΟΓ), ὁπότε
2ΟΓ = 49$\sqrt{}$3/14 = 7$\sqrt{}$3/2.

κεφ. 174. (ροδ). Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο διαμέτρου ἴσης πρὸς 12.

Ὑπολογίζει τὴν ΑΕ = (3/4)12 = 9, καὶ γράφει: 81 + 81/3 = 108. Ὑπολογίζει κατόπιν τὴν ρίζα τοῦ 108 τὴν ὁποία εὑρίσκει ἴση πρὸς 10 7/8, καὶ αὐτὴ θεωρεῖ ὥς τὴν ζητουμένη πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Ἂν συμβολίσουμε μὲ ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ μὲ Ο τὸ κέντρο αὐτοῦ θὰ ἰσχύει:

$ΑΔ^2 = ΑΕ^2 + ΕΔ^2 =$

$(ρ + ρ/2)^2 + ΕΔ^2 =$

$(3ρ/2)^2 + ΕΔ^2 =$

$9ρ^2/4 + ΟΔ^2 - ΟΕ^2 =$

$9ρ^2/4 + ρ^2 - ρ^2/4 = 3.ρ^2 = 3.6^2 = 108,$

δηλαδὴ τὸ ΑΔ εἶναι ἴσο μὲ τὴν ρίζα τοῦ 108.

Ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου προφανῶς βασίζεται στὸ ὅτι:

$ΑΔ^2 = ΑΕ^2 + (1/3)ΑΕ^2 =$

$ΑΕ^2 + (ΑΕ\sqrt{3}/3)^2 =$

$ΑΕ^2 + \{[(α\sqrt{3}/2)\sqrt{3}]/3\}^2$, διότι, ἂν συμβολίσουμε μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΔ, τότε γιὰ τὸ ὕψος του ΑΕ θὰ ἰσχύει: $ΑΕ = α\sqrt{3}/2$.

Ἔτσι, $ΑΕ^2 + \{[(α\sqrt{3}/2)\sqrt{3}]/3\}^2 =$

$AE^2 + (\alpha/2)^2 =$

$AE^2 + E\Delta^2$, δηλαδὴ

$A\Delta^2 = AE^2 + E\Delta^2$, καὶ αὐτὸ ἰσχύει σύμφωνα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ τρίγωνο ΑΔΕ.

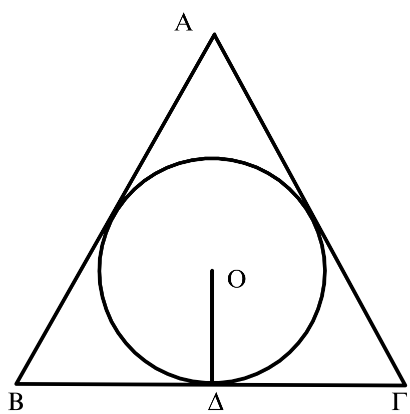
κεφ. 175. (ροε). Πρόβλημα ὑπολογισμοῦ τοῦ ὕψους ἰσοπλεύρου τριγώνου, ὅταν δίνεται ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

Πρόκειται γιὰ ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

κεφ. 176. (ρος). Ὑπολογισμὸς τῆς περιμέτρου κύκλου ἐγγεγραμμένου σὲ ἰσόπλευρο τρίγωνο, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία λαμβάνεται ἴση πρὸς 4.

Στὸ χειρόγραφο ὑπολογίζεται τὸ τετράγωνο τῆς πλευρᾶς, τὸ ὁποῖο ἰσοῦται μὲ 16, ἀφοὺ ἡ πλευρὰ δίνεται ἴση μὲ 4. Κατόπιν ἀφαιρεῖται τὸ 1/4 τοῦ 16 ἀπὸ τὸ 16, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι 12.

Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θεωρεῖται ἴσο μὲ τὴν ρίζα τοῦ 12 δηλαδὴ ἴσο μὲ 3 8/17. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου θεωρεῖται ἴση μὲ τὰ 2/3 τοῦ 3 8/17, δηλαδὴ μὲ 2 16/51. Κατόπιν ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ἡ περίμετρος πολλαπλασιάζοντας τὴν διάμετρο μὲ τὸ 3 1/7.



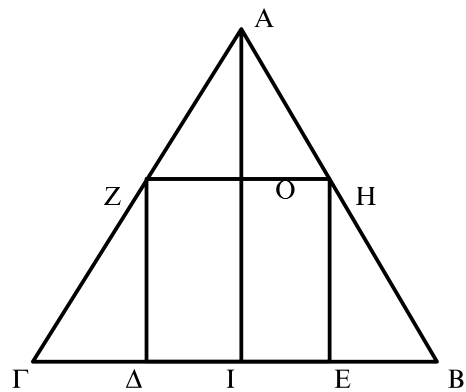
Σήμερα θὰ θεωρούσαμε τὴν ἀκτίνα ΟΔ= $(1/3)(4\sqrt{3}/2)=2\sqrt{3}/3$, ὁπότε ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου θὰ ἦταν ἴση μὲ $(4\sqrt{3}/3)\pi$.

κεφ. 177. (ροζ). Εὕρεση τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ὅταν δίδεται ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ σχήματος καὶ εἶναι ἴση με 10.

Ἡ σειρὰ τῶν πράξεων οἱ ὁποῖες περιγράφονται στὸ χειρόγραφο, εἶναι ἡ ἑξῆς:

$10.10= 100$, $100.3/4= 75$, $75.16= 1200$, $75.12= 900$,
$\sqrt{1200}= 34\ 12/19$, $\sqrt{900}= 30$, $34\ 12/19-30= 4\ 12/19= \chi$, (ὅπου χ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου).

Σήμερα θὰ ἀντιμετωπίζαμε τὸ ζήτημα ὡς ἑξῆς:



Θὰ θεωρούσαμε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἴση μὲ χ, καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΓΑΙ εἶναι ὅμοια, θὰ γράφαμε τὴν ἀναλογία:

$\chi/(10\sqrt{3}/2)= (5-\chi/2)/5$, ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει
$\chi= 2\sqrt{3}(10-5\sqrt{3})$.

Φαίνεται λοιπόν, ὅτι στὸ χειρόγραφο ἡ διαφορὰ

$\sqrt{}(75.16)$-$\sqrt{}(75.12)$ τίθεται ἴση μὲ τὴν πλευρὰ χ τοῦ τετραγώνου, ἐπειδὴ αὐτὴ ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ

$\sqrt{}3.\ \sqrt{}(25.16)\text{-}\ \sqrt{}3^2\sqrt{}(25.4) =$

$2\ \sqrt{}3.10\text{-}\ 2\sqrt{}3^2\ \sqrt{}25 =$

$2\ \sqrt{}3(10\text{-}\ 5\sqrt{}3).$

Ἡ ἐπίλυση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἔχει τὶς ρίζες της στὴν ἀρχαιότητα. Ὁ Ἀλ Χουαρίζμι τὸ ἀναφέρει σὲ ἐργασία του, ἀλλὰ βέβαια ἡ προέλευσή του ἀνάγεται στὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα[80]. Τὸ γενικότερον πρόβλημα δὲ τῆς ἐγγραφῆς τετραγώνου εἰς δοθὲν τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς πλευρᾶς του εὑρίσκεται στὸ βιβλίο τοῦ 1952: «Ἀσκήσεις Γεωμετρίας» (Ἰησουϊτῶν)[81]. Ἐπίσης μία χρήσιμη μέθοδος διδασκαλίας τῆς κατασκευῆς αὐτῆς ἐκτίθεται λεπτομερῶς στὸ βιβλίο τοῦ G. Polya, «Πῶς νὰ τὸ λύσω», στὶς σελίδες 51- 53.

κεφ. 178. (ροη). Παρόμοιο πρόβλημα μὲ τὸ 176.

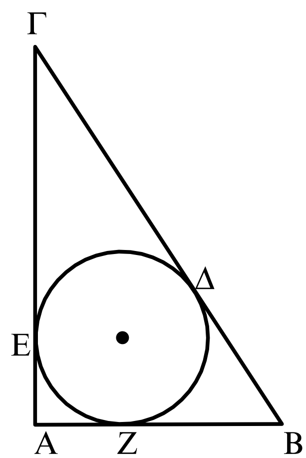
κεφ. 179. (ροθ). Ὑπολογισμὸς διαμέτρου καὶ περιμέτρου κύκλου ἐγγεγραμμένου σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο πλευρῶν 3, 4, καὶ 5 σπιθαμῶν.

Ὁ συγγραφέας, ἀφοῦ ἐξηγήσει ἀναλυτικὰ τὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ κάθε πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες, ἐφαρμόζοντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα 3 φορές, προσθέτει τὶς δύο κάθετες πλευρὲς καὶ βρίσκει $3+4=7$. Στὴ συνέχεια ἀφαιρεῖ τὸ 5 ἀπὸ τὸ 7 καὶ βρίσκει 2. Γράφει λοιπὸν πὼς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ 2.

---

80. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Princeton UP, 1968/1985, σελ. 257.
81. Ἀσκήσεις Γεωμετρίας (Ἰησουϊτῶν),μετάφραση τῆς 5ης γαλλικῆς ἔκδοσης ὑπὸ τοῦ Δ. Γκιόκα, τόμ. III, ἐκδ. Α. Καραβία, Ἀθῆναι 1952, σελίδα 720.

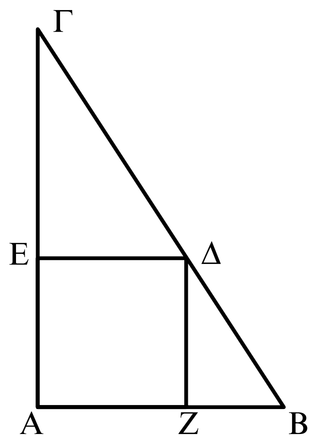
Σήμερα θὰ θέταμε $\rho = \chi =$ ΑΕ = ΑΖ, $\psi =$ ΔΒ = ΒΖ, καὶ $\zeta =$ ΓΔ = ΓΕ, ὁπότε θὰ εἴχαμε: $2\chi + 2\psi + 2\zeta = 2\tau$, ὅπου τὸ τ συμβολίζει τὴν ἡμιπερίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Δηλαδὴ $\chi = \tau - (\psi + \zeta) = (3+4+5)/2-5 = (3+4)/2-5/2 = 7/2-5/2 = 1$, ὁπότε ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου θὰ ἦταν ἴση μὲ 1, ἡ διάμετρος ἴση μὲ 2, καὶ ἡ περίμετρος ἴση μὲ 2.(3 1/7).



κεφ. 180. (ρπ). Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἐγγεγραμμένου σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ πλευρὲς 3, 4, 5, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα.

Σήμερα θὰ συμβολίζαμε μὲ χ τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ΑΖΔΕ, καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΕΔ καὶ ΓΑΒ εἶναι ὅμοια θὰ χρησιμοποιούσαμε τὴν ἀναλογία:

$\chi/3 = (4-\chi)/4$, ἀπὸ τὴν ὁποία θὰ εἴχαμε
$4\chi = 12-3\chi$, καὶ $\chi = 12/7$.



Στὸ χειρόγραφο δίδεται οὐσιαστικὰ μεθοδολογία ὑπολογισμοῦ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, ἀφοῦ προσθέτει καὶ πολλαπλασιάζει τὶς δύο κάθετες πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (3 + 4 = 7, 3.4 = 12), καὶ κατόπιν διαιρεῖ τὸ 12 μὲ τὸ 7 καὶ βρίσκει 12/7 = 1 5/7.

κεφ. 181. (ρπα).

α) Ὑπολογισμὸς διαγωνίου τετραγώνου ἀπὸ τὴν πλευρά του, καὶ τὸ ἀντίστροφο.

Χρησιμοποιεῖ τὸν κανόνα τῆς σκάδρας.

β) Ὑπολογισμὸς διαγωνίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἀπὸ τὶς πλευρές του.

Χρησιμοποιεῖ τὸν ἴδιο κανόνα.

κεφ. 182. (ρπβ). Ὑπολογισμὸς «ὕψους» ΑΔ, τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΑΒ = 16, ΑΓ = 12, καὶ ΒΓ = 14 σπιθαμές.

Πρέπει νὰ σημειωθεῖ ἐκ τῶν προτέρων πῶς, ὅταν ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου γράφει ὕψος, ἐννοεῖ τὴν διχοτόμο γωνίας τριγώνου ὅπως προκύπτει ἀπὸ τοὺς συγκριτικοὺς ὑπολογισμοὺς σχετικὰ μὲ αὐτὰ τὰ δύο μεγέθη.

Οἱ πράξεις ποὺ περιγράφονται στὸ χειρόγραφο εἶναι οἱ ἑξῆς:

16/2 = 8, ΒΔ = 8, 14.14 = 196, 196 + 8 = 204, 2.2 = 4 (ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν εἶναι ἴση μὲ 2), 204 + 4 = 208, 16.16 = 256, 256/4 = 64, 208- 64 = 144, καὶ ἡ ΑΔ εὑρίσκεται ἴση μὲ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 144, δηλαδὴ ἴση μὲ 12.

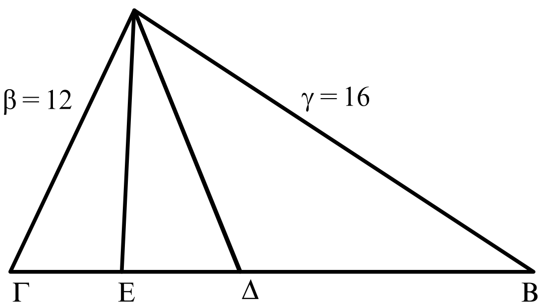
Σύμφωνα μὲ αὐτὴν τὴ μέθοδο, ἐὰν ΑΒ = γ, ΑΓ = β, καὶ ΒΓ = α, τότε θὰ πρέπει: $ΑΔ^2 = α^2 + γ/2 + 2.(γ-α)-γ^2 /4$.

Ἀλλὰ α = γ-2, ὁπότε

$ΑΔ^2 = (3.γ^2 -14.γ + 32)/4 =$

$(3.16^2 -14.16 + 32)/4 = 576/4 = 144$, καὶ συνεπῶς ΑΔ = 12

Ἐὰν ἐφαρμόσουμε τὸν τύπο: $ΑΔ^2 = β.γ.\{1- α^2/(β + γ)^2\}$, ποὺ χρησιμοποιοῦμε γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν α = γ-2 καὶ β = γ- 4, τότε θὰ ἔχουμε:



$ΑΔ^2 = (3.γ^2 - 12.γ)/4$, δηλαδὴ

$ΑΔ^2 = (3.16^2 - 12.16)/4 =$

(3.256- 192)/4 = 144 καὶ συνεπῶς ΑΔ = 12.

Παρατηροῦμε πὼς οἱ δύο μέθοδοι συμφωνοῦν ὡς πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα. Ἐπιπλέον διαπιστώνουμε ὅτι ὁ τύπος

$ΑΔ^2 = (3.γ^2 - 14.γ + 32)/4$, στὸν ὁποῖον καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τὴ μέθοδο τοῦ συγγραφέα λαμβάνει τὴ μορφή:

$ΑΔ^2 = (3.γ^2- 12.γ- 2.γ + 2.16)/4$, ὁπότε

$ΑΔ^2 = (3.γ^2 -12.γ) /4$. (ἀφοῦ γ = 16, τότε -2.γ + 32 = 0).

Διαπιστώνουμε, ὅτι ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα 65 κατ' οὐσίαν βασίζεται στοὺς ἴδιους τύπους ποὺ χρησιμοποιοῦμε καὶ ἐμεῖς, τοὺς ὁποίους ὅμως παρουσιάζει μὲ διαφορετικὴ μορφή.

κεφ. 183. (ρπγ). Ὑπολογισμὸς τῆς διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΑΒ = 16, ΑΓ = 15, καὶ ΒΓ = 14 σπιθαμές.

Παρόμοιο ζήτημα.

Ἡ μεθοδολογία τοῦ συγγραφέα περιγράφεται συνοπτικὰ ὡς ἑξῆς:

16.16 = 256, 15.15 = 225, 225 + 2 = 227, 256-227 = 29, 29/4 = 7 1/4,

ΒΔ = 7 1/4-1/25 = 7 21/100. Μετὰ γράφει: 256/4 = 64, καὶ

256-64 = 192, 192-3/4 = 191 1/4. Ἡ ζητουμένη διχοτόμος εἶναι ἴση μὲ τὴν ρίζα τοῦ 191 1/4, δηλαδὴ εἶναι ἴση μὲ 13 1/4.

κεφ. 184. (ρπδ). Πρόκειται γιὰ παρόμοιο ζήτημα.

Σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο παρατηρεῖται, ὅτι στὸ χειρόγραφο δὲν ὑπάρχουν ὁρισμένες σελίδες, μὲ ἀποτέλεσμα στὸ φύλλο 104α νὰ διαπραγματεύεται ὁ συγγραφέας τὸ κεφάλαιο 201, εἰς τὸ ὁποῖο ὑπολογίζει τὴν περίμετρο τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ τὴν ρίζα τοῦ 38 1/2, δηλαδὴ ἴσης μὲ 6 1/5 μιᾶς σπιθαμῆς κατὰ προσέγγιση. Αὐτὴ τὴν περίμετρο τὴν βρίσκει ἴση μὲ 24 4/5. Στὴ συνέχεια θεωρεῖ κύκλο περιμέτρου 22 σπιθαμῶν καὶ γράφει, πὼς τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαναφερθέντος τετραγώνου, δηλαδὴ ἴσο μὲ 38 1/2.

Γνωρίζουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτίνας ρ δίνεται ἀπὸ τὴν σχέση $Ε = πρ^2$. Ἐπειδὴ ἡ περίμετρος Π εἶναι ἴση μὲ 22 καὶ δίνεται ἀπὸ τὴν σχέση Π = 2πρ, ὑπολογίζουμε τὴν ἀκτίνα ρ = 11/π, ὁπότε ἀντικαθιστώντας στὸν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ ἔχουμε:

$Ε = π(121/π^2) = 121/π$. Καὶ ἐὰν 121/π = 38 1/2 , τότε προκύπτει ὅτι π = 3 1/7. Δηλαδὴ ἔχουμε τὴν προσεγγιστικὴ τιμὴ γιὰ τὸ π, τὴν ὁποία χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ ἑξῆς ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου σὲ ὅλους τοὺς ὑπολογισμούς του.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΒ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σ’ αὐτὴν τὴν ἑνότητα τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ συγγραφέα φαίνεται νὰ ἑστιάζεται κατ’ ἀρχὴν στὸ γεγονός, ὅτι μεταξὺ διαφόρων γεωμετρικῶν σχημάτων μὲ τὴν ἴδια περίμετρο, τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδὸν τὸ ἔχει ὁ κύκλος (κεφ. 223). Τὸ σημαντικότερο ὅμως στοιχεῖο εὑρίσκεται στὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ ἐμβαδῶν κανονικῶν πολυγώνων συναρτήσει τῆς περιμέτρου τους.

Ὁ συγγραφέας ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν κύκλου γνωστῆς περιμέτρου ὑψώνοντας τὴν περίμετρο στὸ τετράγωνο καὶ διαιρώντας τὸ ἀποτέλεσμα μὲ τὸ 4.π = 4.(3 1/7), δηλαδὴ μὲ τὸ 12 4/7. Ὅμως, καθ’ ὁμολογίαν τοῦ συγγραφέα (κεφ. 237), ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου δὲν γίνεται ὀρθῶς, ἀλλ’ ἡ προτεινόμενη μεθοδολογία δίδεται «χάριν γυμνασίας». Παρ’ ὅλα αὐτὰ ὅμως δὲν διευκρινίζει, ποιὰ μεθοδολογία θεωρεῖ ὡς τὴν ἐνδεδειγμένη. Ἡ συνέχεια ὅμως ἐπιφυλάσσει μίαν ἔκπληξη. Ὁ συγγραφέας ἀκολουθεῖ κατ’ οὐσίαν τὴν ἴδια μεθοδολογία μὲ αὐτὴ ποὺ ἐφαρμόζει γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, καὶ γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν ἐμβαδῶν κανονικοῦ 40-γώνου, 30-γώνου, 20-γώνου κ.λπ, ἀλλ’ ἀντὶ νὰ διαιρεῖ τὸ τετράγωνο τῆς περιμέτρου τους μὲ τὸ 12 4/7, τὸ διαιρεῖ μὲ 12 5/8, 12 2/3, 12 5/6 κ.λπ. Αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσοι μὲ (4,01).π, (4,03).π ἀντιστοίχως, κ.λπ. Δηλαδή, θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ ὑποθέσει, ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ ἐμβαδὰ ὑπολογίζονται συναρτήσει τοῦ π. Σημειώνω, ὅτι στὸ Λύκειο σήμερα διδάσκουμε μόνο τὸν ὑπολογισμὸ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 10-γώνου, 8-γώνου, 6-γώνου, 5-γώνου, 4-γώνου, καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Στὰ σχόλιά μου ἐπὶ τῶν κεφαλαίων 211 καὶ 212, ὑπολόγισα τὰ ἐμβαδὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μὲ πλευρὲς 3 1/3 καὶ 4 ἀντιστοίχως, καὶ οἱ τιμές τους βρέθηκαν κατὰ προσέγγιση ἴσες πρὸς 28,87 καὶ 27,6 ἀντιστοίχως. Μὲ τὴ μέθοδο τοῦ συγγραφέα τὰ ἴδια ἐμβαδὰ ἰσοῦνται πρὸς 29 1/6 καὶ 27 1/12 ἀντιστοίχως. Πιθανὸν στὴν περίπτωση τοῦ ἑξαγώνου τὸ σφάλμα νὰ γίνεται σκοπίμως[82]. Βέβαια δὲν πρόκειται γιὰ μεγάλη διαφορά, ἀλλὰ λαμβανομένου ὑπόψη, ὅτι ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀγροτεμαχίου ἐξαρτᾶτο καὶ ὁ ἀναλογῶν σὲ αὐτὸ φόρος[83], τότε πιθανότατα νὰ ἦταν τὰ λάθη ἐσκεμμένα, δεδομένου ὅτι στὸ Βυζάντιο φαίνεται, πὼς δὲν κατόρθωναν νὰ βροῦν εὔκολα ἄλλη φορολογίσιμη ὕλη πλὴν τῆς γῆς[84].

Γιὰ τὸν ἀνώνυμο συγγραφέα οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ ἰσχύουν γιὰ ὁρισμένα κανονικὰ πολύγωνα. Ὅταν πρόκειται ὅμως γιὰ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τραπεζίου, τετραγώνου, ρόμβου καὶ τριγώνου, οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι ἴδιοι μὲ τοὺς

82. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 1.
83. Τὰ πρωτότυπα τῶν φορολογικῶν βιβλίων τηροῦνταν στὸ «γενικὸ σεκρέτο» (λογιστήριο). Γιὰ νὰ καταγραφεῖ ἐκεῖ ἀγροτεμάχιο, ἔπρεπε νὰ γίνει ἔρευνα ἡ ὁποία ἦταν πολὺ δύσκολη λόγω τῶν μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν. Τὸ ἐμβαδὸν ὑπελογιζόταν σὲ σχέση μὲ τὴν ποιότητα τοῦ ἐδάφους τοῦ κτήματος (δηλ. ἐξέταζαν ἂν ἦταν προσοδοφόρο ἢ μή). Ὁ φόρος ποὺ ὁριζόταν ἦταν πάγιος, ἀκόμα καὶ ἂν τὰ κτήματα ἔπαυαν νὰ ἀποδίδουν, καὶ συνήθως γινόταν δυσβάσταχτος. Ἀλλαγὲς ὁρίων γίνονταν μόνον ἂν ἕνα κτῆμα χωριζόταν σὲ μερίδια, ὁπότε ἔπρεπε νὰ γίνουν ἐκ νέου ὑπολογισμοί. Βλ. Καλλιγᾶ, Μελέται, σελ. 257, 258.
84. ὅ. π., σελ. 294.
Τὸ κράτος ἐπίσης ἀπορροφοῦσε μεγάλα εἰσοδήματα καὶ ἀπὸ ἀστικὰ καὶ ἀγροτικὰ ἀκίνητα ποὺ ἀνῆκαν στὸν Αὐτοκράτορα, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ποσὰ ποὺ πλήρωναν οἱ πολίτες γιὰ τὴν ἀπόκτηση ἄδειας γιὰ τὴν ἵδρυση ὁποιασδήποτε ἰδιωτικῆς βιοτεχνίας. Βλ. T. T. Rise, Ὁ Δημόσιος καὶ Ἰδιωτικὸς βίος τῶν Βυζαντινῶν, ἐκδ. Παπαδήμα, Ἀθήνα 2000, σελ. 129.

σημερινούς, καὶ τίποτε δὲν μαρτυρεῖ, ὅτι σχετίζονται μὲ τὴν φορολογία[85].

Ὁ συγγραφέας ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ 9-γώνου καὶ 7-γώνου[86], ὡς τὸ «ἐξ ἀναλόγου» (καὶ ἐννοεῖ τὸν μέσο ὅρο) τῶν ἐμβαδῶν κανονικοῦ 10-γώνου καὶ 8-γώνου, ὅταν πρόκειται γιὰ τὸ 9-γωνο, καὶ κανονικοῦ 8-γώνου καὶ 6-γώνου, ὅταν πρόκειται γιὰ τὸ 7-γωνο[87]. Σημειώνω ἐπίσης, πὼς τὰ ἀνωτέρω θέματα δὲν διδάσκονται στὸ σημερινὸ Λύκειο.

Ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ρόμβου παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον. Στὰ σχόλιά μου ἐπ' αὐτῆς (κεφ. 215) δίνω μία πιθανὴ ἑρμηνεία τῆς μεθόδου τοῦ συγγραφέα. Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ στὰ σχόλια ἐπὶ τοῦ κεφ. 217, γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἡ μέθοδός τοῦ συγγραφέα βασίζεται σὲ μία πολύπλοκη παράσταση, ἡ ὁποία τελικὰ καταλήγει νὰ ἰσοῦται

---

85. Ὅταν πρόκειτο γιὰ εὔφορη γῆ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 20 ἐπὶ 15 οὐργίες, τότε ὑπολόγιζαν τὸ γινόμενο 15.20 = 300 μοδία. Ὅταν ὅμως πρόκειτο γιὰ ἄγονη γῆ τοῦ ἰδίου σχήματος μὲ διαστάσεις 30 ἐπὶ 20 οὐργίες, τότε θεωροῦσαν τὸ ἐμβαδὸν ἴσο μὲ (20.30)/200 = 3 μοδία.
Ὁ ὅρος «μοδίο» χρησιμοποιεῖτο γιὰ τὴν ἐκτίμηση τῆς γῆς, δηλαδὴ θεωροῦσαν, ὅτι ἡ γῆ ἑνὸς μοδίου ἀντιστοιχεῖ σὲ 40 λίτρες καὶ ἔχει περίμετρο 200 οὐργίες (κάθε λίτρα ἔχει 5 οὐργίες). Ὁ δὲ «μόδιος» ἔχει 480 οὐγγίες ἢ 2880 ἑξάγια. Τὸ δὲ 1 ἑξάγιο ἔχει 24 ξυλόκοκκα, καὶ τὸ 1 ξυλόκοκκο ἔχει 5 σιτόκοκκα.
Ἕνα ἀγροτεμάχιο σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 1 καὶ 2 σχοινία, εἶχε προφανῶς ἐμβαδὸν ἴσο μὲ 2. Διαιροῦσαν τὸ 2 μὲ τὸ 2, εὕρισκαν ἀποτέλεσμα ἴσο μὲ 1, καὶ ἔλεγαν ὅτι αὐτὸς ὁ τόπος εἶναι γῆ ἑνὸς μοδίου. Βλ. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 40, 44, 45.
86. Ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε ἀνακαλύψει μέθοδο κατασκευῆς κανονικοῦ 7-γώνου ἐγγεγραμένου σὲ κύκλο, ἡ ὁποία ἀναφέρεται ἀπὸ Ἄραβες συγγραφεῖς. Ἡ ἐφαρμογή της πραγματοποιεῖται χωρὶς κανόνα καὶ διαβήτη, ἀλλὰ μὲ κινητικὴ γεωμετρία, ὅπως γίνεται καὶ στὴ διαδικασία τριχοτόμησης ὀξείας γωνίας (χρήση κωνικῶν τομῶν). Ἀρχιμήδους ἅπαντα, Ε. Σταμάτη, ἐκδ. ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1974, τόμ. III, σελ. 78-101.
87. Γιὰ τὸ 7-γωνο καὶ τὸ 9-γωνο ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ τὸ «ἐξ ἀναλόγου» τῶν ἐμβαδῶν τῶν 8-γώνου καὶ 6-γωνου, καὶ 10-γώνου καὶ 8-γώνου ἀντιστοίχως. Σήμερα δὲν διδάσκονται στὸ Λύκειο οἱ ὑπολογισμοὶ τῶν ἀνωτέρω ἐμβαδῶν. Ὁ τρόπος κατασκευῆς κανονικοῦ 7-γώνου ὑπάρχει σὲ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδη, τὴν ὁποία ἀνακάλυψε ὁ C. Schoy. Βλ. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1974, σελ. 78-101. V. d. Waerden, Ἀφύπνιση, σελ. 266.

μὲ $α^2\sqrt{3}/4$, δηλαδὴ μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α. Τὸ ἐρώτημα βέβαια εἶναι ὅτι, ἀφοῦ γνώριζε τὸν τύπο $α^2\sqrt{3}/4$ —ὅπως φαίνεται στὴ συνέχεια, δηλαδὴ ὅταν περιγράφει καὶ ἕνα δεύτερο τρόπο— γιατί ταλαιπωροῦσε τοὺς μαθητές του μὲ κάτι τόσο πολύπλοκο; Κατὰ τὴν ἄποψή μου, ἴσως τὸ ἔκανε ἀποβλέποντας στὴν ἐξάσκηση καὶ μόνο τῶν μαθητῶν, ὅπως ἄλλωστε παραδέχεται σὲ ἄλλα κεφάλαια.

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ σκαληνοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του (κεφ. 219), λαμβάνει αὐθαίρετες τιμὲς (σωστὲς ὅμως) γιὰ τὰ μήκη τῶν τμημάτων, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ βάση τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους.

Στὸ κεφ. 221 δίδονται ὁ ὁρισμὸς τοῦ «σφαιροειδοῦς ἑξαγώνου», καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ του συναρτήσει τῆς περιμέτρου του. Σημειωτέον ὅτι αὐτὸς ὁ ὁρισμὸς δὲν διδάσκεται σήμερα στὴν δευτεροβάθμια ἐκπαίδευση.

Στὸ κεφάλαιο 222 ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται καὶ σὲ ἐμβαδὰ συνθέτων σχημάτων. Τὰ σχήματα αὐτὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄλλα ἁπλούστερα, τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν ὑπολογίζεται μὲ τὶς μεθόδους ποὺ ἔχει ἤδη περιγράψει στὰ ἀντίστοιχα κεφάλαια. Παρατηρεῖ δέ, πὼς δὲν ὑπάρχει σύνθετο σχῆμα τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ μὴν ὑπολογίζεται μὲ αὐτὲς τὶς μεθόδους. Ὡς γνωστόν, οἱ Βυζαντινοὶ ὑπολόγιζαν κατὰ προσέγγιση τὸ ἐμβαδὸν ἐκτάσεων ἀκανονίστου σχήματος, βάσει τῆς περιμέτρου τους[88]. Ἡ προσεγγιστικὴ μέθοδος ἀποσκοποῦσε στὴν ἀλλοίωση τοῦ ἀποτελέσματος γιὰ φορολογικοὺς λόγους. Ὁ συγγραφέας μας λοιπόν, ἢ ἀγνοεῖ τὴν συγκεκριμένη μέθοδο, ἢ

88. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρουμε μὴ κυρτὸ πολυγωνικὸ σχῆμα μὲ πλευρὲς 30, 8, 10, 20, 80, 2, 1, 5, 68 σχοινία. Ἡ περίμετρός του εἶναι ἴση μὲ 224 σχοινία. Ἀφαιροῦσαν 1 σχοινίο γιὰ κάθε 20 σχοινία «λόγω τῶν ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἐλλείψεων». Θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχαν λοιπόν: 224-11 = 213. Ἀντ' αὐτοῦ, ὅμως, ἀφαιροῦσαν τὸ 11 ἀπὸ τὸ 223 καὶ εἶχαν 212 σχοινία. Κατόπιν ἔκαναν τὶς ἑξῆς πράξεις: 212/2 = 106, 106/2 = 53, 53.53 = 2809 σχοινία, ἢ 1404 1/2 μοδία. Βλ. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 71.

τὴν παραλείπει σκοπίμως. Ἡ σκόπιμη παράλειψη θὰ μποροῦσε νὰ ἐξηγηθεῖ, ἂν μὲ τὸ ἔργο του ἀπέβλεπε σὲ διδακτικοὺς σκοποὺς μᾶλλον, μολονότι αὐτὸ περιέχει καὶ ἐφαρμογὲς τῆς θεωρίας, καθὼς καὶ πρακτικὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς. Πιθανὸν νὰ ἀπευθυνόταν σὲ μαθητὲς σχολείου καὶ σὲ ἐπαγγελματίες (π.χ. ἐμπόρους, χειροτέχνες, πρωτομάστορες στὶς οἰκοδομές[89], ὀπτικούς, ἀρχιτέκτονες, κ.λπ.), οἱ ὁποῖοι οὐδεμία σχέση εἶχαν μὲ τὴ φορολογία καὶ τὶς πρακτικές της[90].

Στὸ κεφ. 225, ὁ συγγραφέας θέλοντας νὰ ὑπολογίσει τὸ πλῆθος τῶν οἰκιῶν, τῶν ὁποίων ἡ βάση ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ὁποῖα χωροῦν σὲ δεδομένη ἔκταση γῆς ἰδίου σχήματος, ἀντὶ νὰ διαιρέσει τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγάλης ἔκτασης μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσης τῆς οἰκίας, διαιρεῖ τὰ τετράγωνα τῶν περιμέτρων τους. Στὰ σχόλια τοῦ κεφ. 221 ἀποδείξαμε, ὅτι γιὰ νὰ ἰσχύει αὐτὴ ἡ ἰσότητα πρέπει οἱ διαστάσεις τῆς μεγάλης ἔκτασης καὶ τῆς οἰκίας νὰ εἶναι ἀνάλογες, κάτι τὸ ὁποῖο ἰσχύει σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος.

Στὸ κεφ. 226 ὁ συγγραφέας ἀκολουθεῖ τὴν ἴδια διαδικασία γιὰ σχήματα κυκλικά, ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ τετράγωνα. Στὰ σχετικὰ σχόλια ἀποδεικνύω, ὅτι ἡ ἰσότητα $E/E_1 = \Pi^2/\Pi_1^2$ ἰσχύει πάντοτε γιὰ ὅλα αὐτὰ τὰ σχήματα.

Ὅσον ἀφορᾶ στὶς ἐπιρροές, τὶς ὁποῖες δέχθηκε ὁ συγγραφέας μας, φαίνεται νὰ σχετίζονται μὲ τὰ Μετρικὰ τοῦ Ἥρωνα τοῦ

89. Hunger, Βυζ. Λογ., σελ. 27.

90. Οἱ μορφωμένοι Βυζαντινοὶ ἔδειχναν ἐνδιαφέρον γιὰ τὸ ἔργο τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα, ὁ ὁποῖος θεωρεῖτο χρήσιμος καὶ σὲ διάφορα ἐπαγγέλματα, ἐκτὸς αὐτῶν ποὺ σχετίζονταν μὲ μετρήσεις μὲ σκοπὸ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ φόρου. Βλ. Lefort et al., Géom. fisc Byz., σελ. 31, 253.
Ὑπῆρχαν ὅμως καὶ τεχνικὲς σχολές, τὶς ὁποῖες ἵδρυσε ὁ Κωνσταντίνος Θ Μονομάχος, ὅπως ὑποδηλώνουν χωρία τῆς «νεαρᾶς τοῦ 1047», προκειμένου νὰ ἐνισχύσει τὴν τάξη τῶν ἐμπόρων καὶ τῶν βιοτεχνῶν. Βλ. Σταυρούλα Χονδρίδου, Ὁ Κωνσταντίνος Θ. Μονομάχος καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῆς τεχνικῆς ἐκπαίδευσης, Πρακτικὰ Α' Συν. Βυζαντινολόγων Ἑλλάδος καὶ Κύπρου, Ἰωάννινα 1999, σελ.151.

Ἀλεξανδρέα, τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν ἴδια φιλοσοφία μὲ αὐτὴ τοῦ χειρογράφου μας. Ἡ λύση τους βασίζεται σὲ θεωρήματα τοῦ Εὐκλείδη, καὶ τὰ κλάσματα συμβολίζονται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ συμβολίζονται στὸ χειρόγραφο μας[91]. Ἐξ ἄλλου καὶ ἡ γεωμετρία τῶν φόρων[92] βασίζεται στὸ ἔργο τοῦ Ἥρωνα, ἂν καὶ διαφέρει ὡς πρὸς τὸ ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ δὲν γίνονται μὲ ἀκρίβεια (διαφορὰ θεωρίας-πρακτικῆς). Σημειωτέον ὅτι ὁ Ἥρων πρῶτος χρησιμοποιεῖ τὸ σχοινίον καὶ τὴν οὐργία[93].

Στὰ ἔργα τὰ ὁποῖα πιθανὸν νὰ ἐπιρρέασαν τὸν συγγραφέα πρέπει νὰ συμπεριληφθοῦν α) Τὰ Ἐπιπεδομετρικά τοῦ Διοφάντου. Ὑπάρχει ἡ ἄποψη, ὅτι τὸ ἔργο αὐτὸ δὲν ἀνήκει στὸν Διόφαντο, ἀλλὰ εἶναι μεταγενέστερο Βυζαντινό, βασισμένο στὰ Γεωμετρούμενα καὶ Στερεομετρούμενα τοῦ Ἥρωνα[94]. β) Ἡ Σύνοψη περὶ μετρήσεως καὶ μερισμοῦ τῆς γῆς (γεωδαισία) τοῦ Ἰωάννη Πεδιάσιμου, ἡ ὁποία βασίζεται σὲ ἔργα τοῦ Εὐκλείδη, τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα, καὶ τοῦ Ἥρωνα τοῦ Βυζαντίου[95]. Τὸν 14ο αἰ. ὁ Ἰσαὰκ Ἀργυρὸς (ἔμμεσος μαθητὴς τοῦ Θεοδώρου Μετοχίτη), ἔγραψε ἐγχειρίδιο γεωδαισίας[96] παρόμοιο μὲ τὰ ψευδοηρώνεια κείμενα[97]. Ἀναφέρουμε ἐπίσης τὸν Ἀλ Χουαρίζμι, ὁ ὁποῖος συνέθεσε ἔργο ὅπου περιέχονται προβλήματα

91. ὅ. π., σελ. 28.
92. Κατὰ τὸν Μιχαὴλ Ψελλό, ἀκόμα καὶ σὲ γεωδαιτικὲς μετρήσεις ἔπρεπε νὰ χρησιμοποιεῖται μόνο ἡ γεωμετρία τῆς τετρακτύος, τὴν ὁποία θεωροῦσαν ὡς ἐπιστήμη. Τὴν ἴδια γνώμη εἶχε καὶ ὁ Ἰωάννης Πεδιάσιμος. ὅ. π., σελ.250, 251.
93. Τὸ σχοινίο ἔχει 10 οὐργίες, ὅταν πρόκειται γιὰ γῆ δεύτερης ποιότητας, καὶ 12 οὐργίες γιὰ γῆ τρίτης ποιότητας. Συνήθως τὸ σχοινίο εἶχε 10 οὐργίες στὴ Θράκη καὶ 12 οὐργίες στὶς χῶρες τῆς Ἀνατολῆς.ὅ. π., σελ. 253.
94. Heath, Hist. Gr. Math., τόμ. II, σελ. 453.
95. Στὸ ἔργο του ὁ Πεδιάσιμος δὲν κατορθώνει νὰ κρύψει, πόσο δυσνόητα φαίνονταν τὰ ἔργα τῶν προγόνων του. Βλ. Hunger, Βυζ. Λογ., τόμ. III, σελ. 47.
96. Ἡ γεωδαισία, ὡς κλάδος τῆς ἀριθμητικῆς διδασκόταν καὶ στὸ Πανδιδακτήριο τῆς Κωνσταντινούπολης.. Οἱ χρησιμοποιούμενοι τύποι ἐφαρμόζονταν μηχανικὰ καὶ χωρὶς ἀπόδειξη. βλ. Vogel, Βυζ. Επιστ., σελ. 808.
97. Τὸ ἔργο αὐτὸ τοῦ Ἰ. Ἀργυροῦ εἶναι ἀνέκδοτο.ὅ. π., σελ. 814. Hunger, Βυζ. Λογ., σελ. 57. Πολλὰ ἔργα ποὺ ἀποδίδονταν στὸν Ἥρωνα εἶναι ἔργα Βυζαντινῶν μὲ

μέτρησης ἐκτάσεων καὶ γενικῶν γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν[98], καὶ τὸν Φιμπονάτσι, ὁ ὁποῖος ἔγραψε σχετικὰ μὲ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνων, κύκλου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου, τριγώνου, τετραγώνου, ρομβοειδοῦς, κ.λπ. καὶ ὑπολόγιζε τὶς πλευρὲς κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δεκαγώνου[99].

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΒ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

κεφ. 202. (σβ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 40-γώνου ὅταν δίδεται ἡ πλευρά του ἴση μὲ 1/2 μιᾶς σπιθαμῆς.

Σήμερα δὲν διδάσκουμε παρόμοιο ζήτημα σὲ καμία τάξη τῆς δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης. Ἐπιπλέον θὰ γνωρίσουμε μία μέθοδο τὴν ὁποία ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ πάντοτε ὅταν ζητεῖ ἀπὸ τὴν περίμετρο νὰ ὑπολογίσει τὸ ἐμβαδὸν κάποιου κανονικοῦ πολυγώνου.

Στὸ συγκεκριμένο ζήτημα, παρατηρεῖ πὼς ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ 20 σπιθαμές, καὶ τὴν πολλαπλασιάζει μὲ τὸν ἑαυτόν της βρίσκοντας 400. Κατόπιν γράφει πὼς διαιροῦμε τὸ 400 πάντοτε μὲ τὸ 12 5/8, καὶ βρίσκουμε πὼς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ 40-γώνου εἶναι ἴσο μὲ 31 7/10.

κεφ. 203. (σγ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 30-γώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 2/3.

Γράφει πὼς ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ 20 σπιθαμές, πολλαπλασιάζει τὸ 20 μὲ τὸν ἑαυτόν του, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα

τόσο πολλὲς προσθῆκες, ὥστε νὰ μὴν εἶναι δυνατὴ πάντοτε ἡ ἐκτίμηση σχετικὰ μὲ τὴ γνησιότητά τους. Βλ. Drachmann-Mahoney, Hero, σελ. 311.

98. Boyer-Merzbach, Ἱστ. Μαθ., σελ. 256.

99. Vogel, Fibonacci, σελ. 609.

τὸ ὁποῖο εἶναι 400 τὸ διαιρεῖ μὲ τὸ 12 2/3 βρίσκοντας γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τὴ τιμὴ 31 11/19 τετραγωνικὲς σπιθαμές.

κεφ. 204. (σδ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 20-γώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 1 σπιθαμὴ.

Στὸ συγκεκριμένο πρόβλημα διαιρεῖ τὸ 400 μὲ τὸ 12 11/16 βρίσκοντας 31 1/2.

κεφ. 205. (σε). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 18-γώνου πλευρᾶς 1 1/9 τῆς σπιθαμῆς.

Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 12 3/4, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 31 1/3.

κεφ. 206. (σς). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 16-γώνου πλευρᾶς 1 1/4 τῆς σπιθαμῆς.

Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 12 5/6, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 31 1/6.

κεφ. 207. (σζ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 14-γώνου πλευρᾶς 1 3/7 τῆς σπιθαμῆς.

Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 12 11/12, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 30 29/30.

κεφ. 208. (ση). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 12-γώνου πλευρᾶς 1 2/3 τῆς σπιθαμῆς.

Διαιρεῖ τὸ 400 μὲ τὸ 13 καὶ βρίσκει 30 10/13.

κεφ. 209. (σθ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 10-γώνου πλευρᾶς 2 σπιθαμῶν.

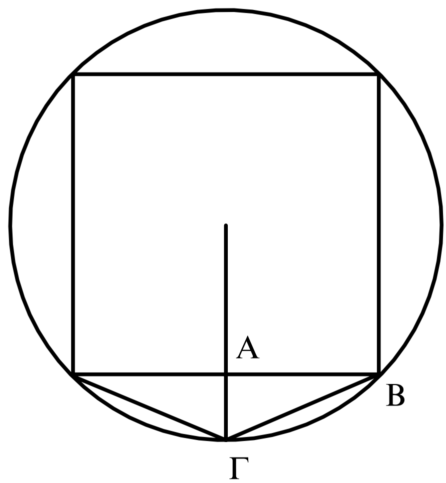
Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 13 1/9, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 30 1/2.

κεφ. 210. (σι). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ 8-γώνου πλευρᾶς 2 1/2 σπιθαμῶν.

Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 13 8/31, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 30 1/6.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ δίνουμε τὴν μέθοδο ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα προκειμένου νὰ ὑπολογίσουμε αὐτὸ τὸ ἐμβαδόν, μὲ σκοπὸ νὰ γίνουν οἱ ἀπαραίτητες συγκρίσεις.

Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο ἀκτίνας ρ τετράγωνο, ὑπολογίζουμε τὴν πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ 8-γώνου τὸ ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν ἴδιο κύκλο, ὡς ἑξῆς:



Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ $\rho\sqrt{2}$, ὁπότε τὸ τμῆμα ΑΓ τοῦ σχήματος εἶναι ἴσο μὲ

$\rho-(\rho\sqrt{2})/2 =$

$= (2\rho-\rho\sqrt{2})/2$, ὁπότε ἡ πλευρὰ ΓΒ τοῦ 8-γώνου εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{\{(\rho\sqrt{2}/2)^2+[(2\rho-\rho\sqrt{2})/2]^2\}} =$

$= \rho\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

Καὶ τὸ ἀπόστημά του θὰ εἶναι ἴσο μὲ

$\sqrt{[\rho^2-\rho^2(2-\sqrt{2})/4]} =$

$[\rho.\sqrt{(2+\sqrt{2})}]/2$.

Τελικὰ τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι ἴσο μὲ

$8.(\rho/2)^2.\sqrt{}(2^2-\sqrt{}2^2) = 2\rho^2\sqrt{}2.$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πλευρὰ τοῦ 8-γώνου δίδεται ἴση μὲ 2 1/2 σπιθαμές, θὰ ἔχουμε

$5/2 = \rho\sqrt{}(2-\sqrt{}2)$, ὁπότε θὰ ἰσχύει:

$\rho = (5/4)\sqrt{}(4+2\sqrt{}2)$, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ 8-γώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ

$2.(25/16)(4+2\sqrt{}2)\sqrt{}2 =$

$= (25/2)\sqrt{}2 + 25/2 =$

$= (25/2)(\sqrt{}2 + 1) =$

$= 400/(32/[\sqrt{}2 + 1])$.

Τὸ $32/(\sqrt{}2+1)$ εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσο μὲ 13,255, καὶ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ 13,258 μὲ τὸ ὁποῖο διαιρεῖται τὸ 400 στὸ χειρόγραφο. Αὐτὸ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τιμὴ τὴν ὁποία εὑρίσκουμε σήμερα μὲ τὴν μέθοδο ποὺ ἀναφέραμε ἤδη.

κεφ. 211. (σια). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 3 1/3 σπιθαμῶν.

Τὸ 400 διαιρεῖται μὲ τὸ 13 5/7, καὶ ἔτσι ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι 29 1/6.

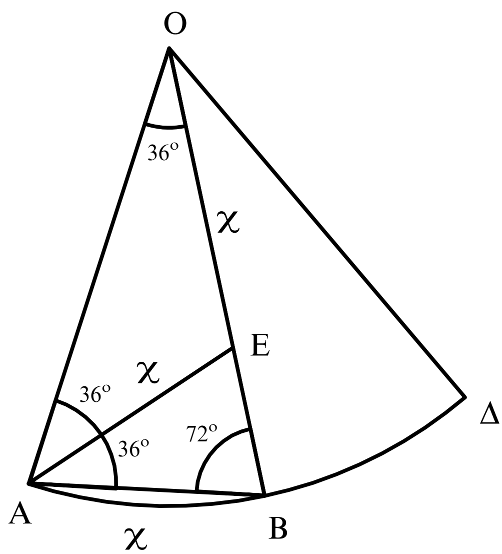
Σήμερα, ἐφ' ὅσον τὸ κανονικὸ 6-γωνο πλευρᾶς 3 1/3 ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα, θὰ ὑπολογίζαμε τὸ ἐμβαδὸν χρησιμοποιώντας τὴν σχέση:

$E = 6.[(3\ 1/3)^2\sqrt{}3]/4 = (3/2)(100/9)\sqrt{}3 = 28{,}87$ κατὰ προσέγγιση. Αὐτὴ ἡ τιμή, ὅπως διαπιστώνουμε, εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν τιμὴ 29 1/6, ἡ ὁποία προκύπτει μὲ τὴν μέθοδο τοῦ χειρογράφου.

κεφ. 212. (σιβ) Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πενταγώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 4 σπιθαμές.

Τὸ 400 στὴν συγκεκριμένη περίπτωση διαιρεῖται μὲ τὸ 14 6/13, ὁπότε προκύπτει ἐμβαδὸν ἴσο μὲ 27 2/3.

Σήμερα ὑπολογίζουμε κατ' ἀρχὴν τὴν πλευρὰ ΑΒ = χ κανονικοῦ 10-γώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο ἀκτίνας ρ ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου στὸ τρίγωνο ΟΑΒ (ΑΕ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, γωνία Ο ἴση πρὸς 36 μοῖρες, γωνία Α ἴση πρὸς 72 μοῖρες, καὶ γωνία Β ἴση πρὸς 72 μοῖρες). Ἔχουμε λοιπὸν τὴν ἀναλογία: $\rho/\chi = \chi/(\rho-\chi)$. Ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἀναλογία ἐκτελώντας τὶς ἀπαραίτητες πράξεις προκύπτει ὅτι $\chi = (\rho/2)(\sqrt{5}-1)$.



Κατόπιν χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο τοῦ Ἀρχιμήδη:

$\chi_{2\nu} = \sqrt{[2\rho^2-\rho\sqrt{(4\rho^2-\chi_\nu^2)}]}$, ἀπὸ τὸν ὁποῖον γιὰ $\nu = 5$ προκύπτει:

$\chi_5 = (\rho/2)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$.

Ἂν λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἴση μὲ 4 σπιθαμές, τότε ἀντικαθιστώντας στὴν σχέση αὐτή τὸ χ_5 μὲ τὸ 4, θὰ ἔχουμε τὴν ἀκτίνα ἴση μὲ

[$\sqrt{}$(10-2$\sqrt{}$5)(5 + $\sqrt{}$5)]/5. Τὸ δὲ ἀπόστημα τοῦ 5-γώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ

$\sqrt{}$[(10-2$\sqrt{}$5)(5 + $\sqrt{}$5)^2/25-(ρ^2/16)(10-2$\sqrt{}$5)].

Ἀντικαθιστοῦμε τὴν ἤδη εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ρ, καὶ τελικὰ τὸ ἐμβαδὸν προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπο:

Ε = 5(χ_5.α_5/2), ὅπου μὲ α_5 ἔχουμε συμβολίσει τὸ ἀπόστημα τοῦ πενταγώνου.

Ὁ συγγραφέας ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ 9-γώνου μὲ τὴν ἑξῆς μέθοδο:

Μὰς θυμίζει πὼς ἔχει ἤδη ὑπολογίσει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ 10-γώνου καθὼς καὶ τοῦ κανονικοῦ 8-γώνου, τὰ ὁποῖα εἶναι 30 1/2 καὶ 30 1/6 ἀντίστοιχα. Βρίσκει τὸ «ἐξ' ἀναλόγου» αὐτῶν τῶν δύο ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ 30 1/3. Βλέπουμε ἐδῶ πὼς ἐννοεῖ τὴν μέση τιμὴ αὐτῶν τῶν δύο ἀριθμῶν, ἡ ὁποία μέση τιμὴ θεωρεῖ πὼς εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ 9-γώνου.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ 7-γώνου. Σημειωτέον, ὅτι δὲν διδάσκουμε σήμερα τρόπο ὑπολογισμοῦ τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν τῶν σχημάτων.

Γνωρίζουμε πὼς ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτίνας ρ τῆς περιγεγραμμένης του περιφέρειας, εἶναι ἴση μὲ (ρ/2)$\sqrt{}$(10-2$\sqrt{}$5), καὶ μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος θὰ ἔχουμε ὅτι τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι ἴσο μὲ (ρ/4)$\sqrt{}$(6 + 2$\sqrt{}$5).

Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ: (5/2)(ρ^2/8)$\sqrt{}$(10-2$\sqrt{}$5)(6 + 2$\sqrt{}$5) =

= (5ρ^2/8)$\sqrt{}$(10 + 2$\sqrt{}$5).

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πλευρὰ θεωρεῖται ἴση μὲ 4, τότε

4 = (ρ/2)$\sqrt{}$(10-2$\sqrt{}$5), ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι

ρ^2 = (8/5)(5 + $\sqrt{}$5).

Ἂν λοιπὸν στὸν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ ἀντικαταστήσουμε τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας, τότε

$E = (5+\sqrt{}5)\sqrt{}(10+2\sqrt{}5) =$
$= 4\sqrt{}(25+10\sqrt{}5) \simeq 27{,}6$

Σύμφωνα πάντα μὲ τὰ δικὰ μας δεδομένα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου μὲ πλευρὰ 3 1/3 σπιθαμὲς, θὰ εἶναι $(50\sqrt{}3)/3 = 28{,}87$ κατὰ προσέγγιση. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς 5 σπιθαμῶν θὰ εἶναι ἴσο μὲ 25. Ἂν λοιπὸν ἡ μέθοδος τοῦ συγγραφέα εἶναι σωστή, τότε πρέπει $(25+28{,}87)/2 = 27{,}6$. Ὅμως τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι 26,94. Ἀλλὰ ἂν καὶ ὁ ἴδιος ὁ συγγραφέας ἐφαρμόσει τὴν μέθοδο αὐτὴ καὶ γιὰ τὸ πεντάγωνο, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ:

$(25+29+1/6)/2 = 325/12 = 27\ 1/12$.

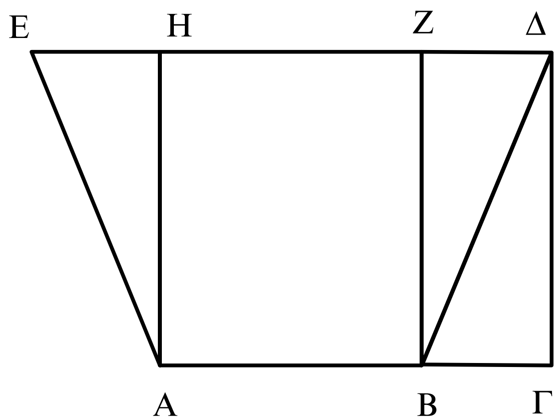
Καὶ αὐτὴ ἡ τιμὴ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν σημερινὴ τιμὴ ἡ ὁποία ἔχει εὑρεθεῖ $\simeq 27{,}6$. Ἐνῶ λοιπὸν γιὰ τὸ τετράγωνο ἔχουμε χθὲς καὶ σήμερα τιμὴ ἴση μὲ 25, γιὰ τὸ μὲν ἑξάγωνο ἡ τιμὴ τοῦ χειρογράφου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν σημερινή, γιὰ τὸ δὲ πεντάγωνο, καὶ ἐφόσον ἐφαρμόσουμε τὴν μέθοδο τὴν ὁποία ὁ συγγραφέας προτείνει γιὰ τὸ 7-γωνο καὶ γιὰ τὸ 9-γωνο, ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν σημερινή.

κεφ. 213. (σιγ). Ὑπολογίζονται ἐμβαδὰ τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων, μὲ τὴν ὑπόθεση ὅτι ὅλα τὰ σχήματα ἔχουν τὴν ἴδια περίμετρο ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ 20 σπιθαμές.

Θέλει προφανῶς νὰ τονίσει μὲ αὐτὴν τὴν συγκριτικὴ διαδικασία, πὼς ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ σχήματα τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδὸν τὸ ἔχει τὸ τετράγωνο, ἀκολουθεῖ δὲ τὸ παραλληλόγραμμο τοῦ ὁποῖου οἱ διαστάσεις διαφέρουν κατὰ 2 μονάδες (μῆκος = 6, πλάτος = 4), στὴ συνέχεια ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου οἱ διαστάσεις διαφέρουν κατὰ 4 μονάδες (μῆκος = 7, πλάτος = 3), μετὰ κατὰ 6, καὶ τέλος, τὸ μικρότερο ἐμβαδὸν τὸ ἔχει τὸ παραλληλόγραμμο μὲ μῆκος = 9 καὶ πλάτος = 1. Ὑπενθυμίζει πὼς ὁ κύκλος μὲ περίμετρο 20 σπιθαμῶν ἔχει ἐμβαδὸν μεγαλύτερο ἀπὸ τοῦ τετραγώνου καὶ ἴσο μὲ 31 9/11.

Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο ὁρίζονται ἐπίσης καὶ ἄλλα σχήματα ὅπως αὐτὸ τοῦ ρόμβου καὶ τοῦ ρομβοειδοῦς. Παρατηροῦμε πὼς τὸ ρομβοειδὲς τοῦ συγγραφέα δὲν εἶναι τίποτα διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο. Ἀκολούθως ὁρίζονται τὸ τραπέζιο, οἱ παράλληλες εὐθεῖες, τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, τὸ ἰσοσκελές καὶ τὸ σκαληνό. Ὁ τρόπος ὁρισμοῦ τῶν ἀνωτέρω σχημάτων εἶναι κατ' οὐσίαν ἴδιος μὲ αὐτὸν ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα, ἀλλὰ περιγραφικὸς καὶ μὲ ἁπλουστεύσεις, οἱ ὁποῖες ἐνδεχομένως νὰ ἐπηρεάζουν ἀρνητικὰ τὴν γενίκευση.

κεφ. 214. (σιδ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μὲ τὶς παράλληλες πλευρὲς ἴσες πρὸς 9 καὶ 3 σπιθαμές, καὶ τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς ἴσες πρὸς 5 σπιθαμὲς τὴν κάθε μία.



Ὑπολογίζει τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου ἐφαρμόζοντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα. Ἀφοῦ βρεθεῖ τὸ ὕψος ἴσο μὲ 4, χρησιμοποιεῖ τὸν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου, τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε σήμερα. Ὅμως ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο γράφει, εἶναι πὼς κατασκευάζει ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ πλευρὲς 6 καὶ 4, καὶ βρίσκει τὸ ἐμβαδὸν του τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ 24.

Αὐτὸ προκύπτει ἂν φέρουμε ΒΓ παράλληλη στὴν ΕΔ καὶ ΔΓ παράλληλη στὴν ΒΖ, ὁπότε καὶ τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΑΕΗ θὰ εἶναι ἴσα, καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΔΗ.

Τονίζει σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο σχημάτων μπορεῖ νὰ εἶναι ἴσα, ἀλλὰ τὸ μὲν παραλληλόγραμμο ἔχει περίμετρο 20, τὸ δὲ τραπέζιο 22.

κεφ. 215. (σιε). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ρόμβου ὅταν δίδεται ἡ πλευρὰ του ΑΒ ἴση μὲ 10 σπιθαμές, καὶ ἡ διαγώνιός του ΑΓ ἴση μὲ 12 σπιθαμές.

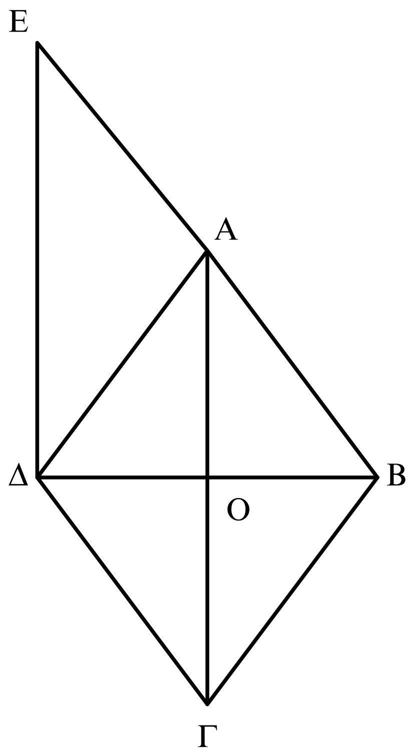
Μὲ τὸν κανόνα τῆς σκάδρας βρίσκει τὴν ΔΒ ἴση μὲ 16 σπιθαμές, ἐκτελώντας τὶς ἑξῆς πράξεις: $10+10= 20$, $20.20= 400$, $12.12= 144$, $400-144= 256$, καὶ $\sqrt{256}= 16$. Κατόπιν διαιρεῖ τὸ 12 μὲ τὸ 2 καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖο ἰσοῦται μὲ 6 τὸ πολλαπλασιάζει μὲ τὸ 16 βρίσκοντας 96.

Σήμερα μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα θὰ ὑπολογίζαμε τὴν ΟΒ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{(100-36)}= 8$. Κατόπιν θὰ ἐφαρμόζαμε τὸν τύπο:

$E= \Delta.\delta/2$, ὅπου Δ, δ εἶναι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου, βρίσκοντας

$E = \Delta.\delta/2= 12.16/2= 96$.

Ἡ μέθοδος ἡ ὁποία παρουσιάζεται στὸ χειρόγραφο εἶναι πιθανὸν νὰ στηρίζεται στὸ ἑξῆς: Ἂν προεκτείνουμε τὴν ΑΒ κατὰ τμῆμα ΑΕ ἴσο μὲ 10 σπιθαμές, τότε τὸ τρίγωνο ΕΑΔ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἴσο μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.



Συνεπῶς ΔΕ = ΑΓ, καὶ ἐπιπλέον τὰ τμήματα ΔΕ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι καὶ παράλληλα, διότι οἱ γωνίες Ε καὶ ΟΑΒ εἶναι ἴσες ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα ΕΑΔ καὶ ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΒΟ εἶναι κάθετη στὴν ΑΓ, τότε θὰ εἶναι κάθετη καὶ στὴν ΕΔ. Συνεπῶς τὸ τρίγωνο ΕΔΒ θὰ εἶναι ὀρθογώνιο, καὶ ΕΔ = ΑΓ = 12, ὁπότε ΒΔ = $\sqrt{(400\text{-}144)} = 16$.

Στὸ ἴδιο κεφάλαιο ἀντιμετωπίζει καὶ ἄλλα παρόμοια προβλήματα μὲ μέθοδο τὴν ὁποία δὲν σχολιάζουμε ἀφοῦ πρόκειται στὴν οὐσία περὶ τρόπου τὸν ὁποῖον θὰ χρησιμοποιούσαμε καὶ σήμερα.

κεφ. 216. (σις). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ὅταν δίδονται οἱ δύο ἄνισες πλευρὲς αὐτοῦ.

Βρίσκει τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, ὁπότε ἡ μέθοδός του εἶναι ἴδια μὲ τὴν σημερινή.

κεφ. 217. (σιζ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 6 σπιθαμές.

Ὁ συγγραφέας περιγράφει τὶς ἑξῆς πράξεις:

6.3 = 18, 18/2 = 9, 9-6 = 3, 3.9 = 27, 27.3 = 81, 81.3 = 243, ὁπότε τὸ ζητούμενο ἐμβαδὸν εἶναι ἴσο μὲ τὴν ρίζα τοῦ 243, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ 15 7/12 κατὰ προσέγγιση.

Ἀκολουθεῖ ὁ σύγχρονος τρόπος ἐπίλυσης τοῦ προβλήματος, κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζεται τὸ ὕψος χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, καὶ κατόπιν τὸ ὕψος ἀντικαθίσταται στὸν τύπο: Ε = β.υ/2, ὁ ὁποῖος δίνει τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου βάσεως β καὶ ὕψους υ. Πρέπει νὰ σημειωθεῖ πὼς σήμερα, ἀφοῦ ὑπολογισθεῖ θεωρητικὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ εὑρεθεῖ ἴσο μὲ $(\alpha^2\sqrt{3})/4$, στὸ ἑξῆς οἱ μαθητὲς χρησιμοποιοῦν αὐτὸν τὸν τύπο χωρὶς νὰ χρειάζεται κάθε φορὰ νὰ τὸν ἀποδεικνύουν.

Ὅσον δὲ ἀφορᾶ εἰς τὴν πρώτη μέθοδο ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τὴν ὁποία χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας, παρατηρώντας τὴν σειρὰ τῶν πράξεων βλέπουμε πὼς ἡ παράσταση

$\sqrt{[(3\alpha/2-\alpha)^3(3\alpha/2)]}$, εἶναι γιὰ τὸν συγγραφέα, ἴση μὲ τὸ ζητούμενο ἐμβαδόν. Ἐκτελώντας τὶς πράξεις ὅμως, ἡ ἀνωτέρω παράσταση διαμορφώνεται ὡς ἑξῆς:

$(3\alpha/2-\alpha)\sqrt{(9\alpha^2/4-3\alpha^2/2)} =$

$(3\alpha/2-\alpha)\sqrt{(3\alpha^2/4)} =$

$(\alpha/2)(\alpha\sqrt{3})/2 = \alpha^2\sqrt{3}/4.$

Βλέπουμε λοιπόν πὼς οὕτως ἢ ἄλλως καταλήγουμε στὸν τύπο, τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε σήμερα καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι ἁπλούστερος ἀπὸ τὸν προτεινόμενο στὸ χειρόγραφο.

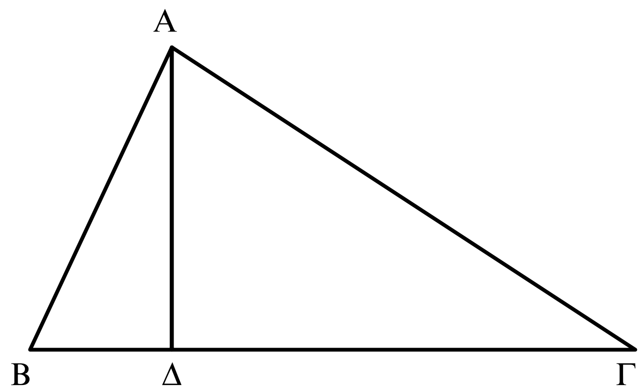
κεφ. 218. (σιη). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ἰσοσκελοῦς ὀξυγωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου τριγώνου, τῶν ὁποίων δίδονται οἱ πλευρές.

Χρησιμοποιεῖται τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὕψους, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο θὰ κάναμε καὶ σήμερα.

κεφ. 219. (σιθ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ σκαληνοῦ τριγώνου, ὅταν δίδονται οἱ πλευρὲς του ΑΒ = 10, ΑΓ = 17, καὶ ΒΓ = 21 σπιθαμές.

Ὁ συγγραφέας, ἀφοὺ σχεδιάσει τὸ ὕψος ΑΔ, θεωρεῖ ὅτι ΒΔ = 6, καὶ ΔΓ = 15 σπιθαμές, χωρὶς ὅμως νὰ τὸ ἀποδεικνύει.

Μετὰ ὑπολογίζει τὸ ὕψος ΑΔ, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, καὶ τὸ εὑρίσκει ἴσο μὲ 8 σπιθαμές. Τέλος πολλαπλασιάζει τὴν βάση ΒΓ, μὲ τὸ ὕψος ΑΔ, καὶ διαιρεῖ μὲ τὸ 2, ὁπότε βρίσκει τὸ ἐμβαδὸν ἴσο μὲ 84 τετρ. σπιθαμές.



Σήμερα χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, θὰ ἔχουμε τὴν ἑξῆς ἰσότητα:

$ΑΔ = \sqrt{(10^2 - ΒΔ^2)} = \sqrt{[17^2 - (21 - ΒΔ)^2]}$, ὁπότε ΒΔ = 6 σπιθαμές, καὶ $ΑΔ = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = 8$ σπιθαμές.

Συνεχίζει μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΒΓ= 21, καὶ τὸ ὕψος ΑΔ= 8 σπιθαμές.

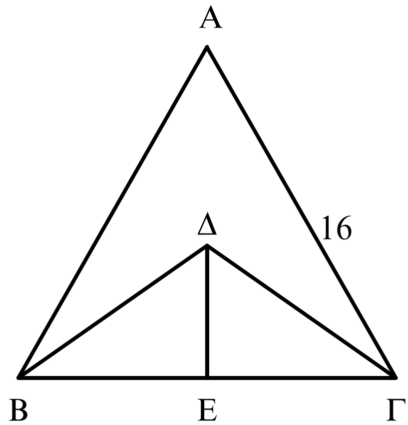
Χρησιμοποιεῖ τὸν τύπο Ε= β.υ/2, καὶ Κατόπιν θεωρεῖ αὐθαίρετα, πὼς ΒΔ= 9, καὶ ΔΓ= 12 σπιθαμές. Αὐτὸ τὸ κάνει γιὰ νὰ ὑπολογίσει τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ. Προφανῶς ὅμως, αὐτὲς οἱ τιμὲς τῶν τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ εἶναι τυχαῖες διότι ὅταν δίδονται ἡ βάση καὶ τὸ ὕψος τριγώνου δὲν ὑπάρχει μόνο ἕνα τρίγωνο μὲ τὰ συγκεκριμένα στοιχεῖα.

Στὴ συνέχεια ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ γνωστὲς τὶς δύο καθέτους πλευρές χρησιμοποιώντας τὸν τύπο Ε= β.υ/2, ὅπου ἡ βάση καὶ τὸ ὕψος ἀντικαθίστανται ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρές.

κεφ. 220. (σκ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου «ἐλλιποῦς».

Παρατηροῦμε πὼς σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο τοῦ χειρογράφου, ὅπως ἐξ’ ἄλλου ἔχουμε διαπιστώσει καὶ ἄλλες φορές, ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ ὀρολογία ἡ ὁποία ὄχι μόνο δὲν συνηθίζεται στὰ σύγχρονα μαθηματικά, ἀλλὰ ἐπιπλέον δυσκολεύει αἰσθητὰ τὴν ἔρευνα τὸ γεγονὸς ὅτι χρειάζεται χρόνος μέχρι νὰ κατανοήσει κανεὶς ἀπὸ τὴν μακροσκελέστατη περιγραφὴ τί ἐννοεῖ ὁ συγγραφέας, ὅταν ἀναφέρεται στὸν συγκεκριμένο ὅρο.

Προκύπτει λοιπόν, πὼς μὲ τὸν ὅρο «ἐλλιπὲς» ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐννοεῖ τὸ μὴ κυρτὸ τετράπλευρο τὸ ὁποῖο προκύπτει, ἂν ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο πλευρᾶς 16 σπιθαμῶν ἀφαιρέσουμε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΔΒΓ ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα.

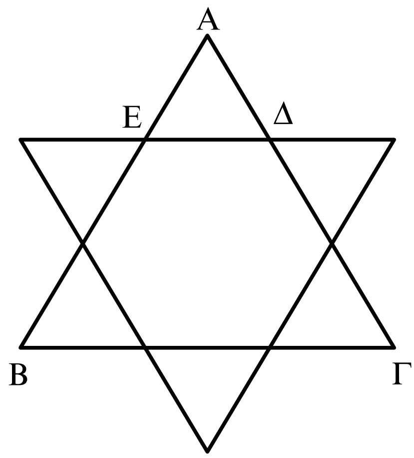


Ὑπολογίζει λοιπὸν κατ' ἀρχὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ὅπως εἴδαμε στὸ κεφ. 217, ὑπολογίζοντας πρῶτα τὸ ὕψος, μὲ τὴν βοήθεια τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Στὴ συνέχεια, χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα ὑπολογίζει τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, καὶ ἀμέσως μετὰ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ χρησιμοποιώντας τὸν τύπο Ε = β.υ/2. Τέλος ἀφαιρεῖ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τριγώνων καὶ ἔχει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ζητουμένου μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου.

κεφ. 221. (σκα). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ἑξαγώνου σχήματος τὸ ὁποῖο συντίθεται ἀπὸ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς 6 σπιθαμῶν, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα.

Σημειώνεται σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο, πὼς ἔχουμε ἕναν καινούργιο ὁρισμὸ γιὰ τὸ συγκεκριμένο σχῆμα, καὶ εἶναι αὐτὸς τοῦ «σφαιροειδοῦς ἑξαγώνου».

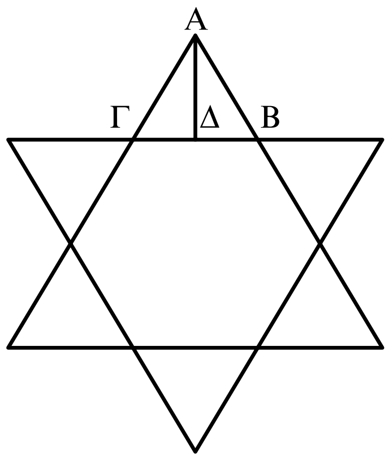
Σήμερα θὰ ὑπολογίζαμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ $36\sqrt{3}/4$, ἢ $9\sqrt{3}$, καὶ ἐπειδὴ ΑΔ = 2, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΕΔ, θὰ εἶναι ἴσο μὲ $4\sqrt{3}/4$, ἢ $\sqrt{3}$. Τέλος, τὸ ζητούμενο ἐμβαδὸν θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα: $9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.



Ἡ μέθοδος τοῦ χειρογράφου ἀναφέρεται πρῶτα στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, καὶ κατόπιν στὸ ὅτι τὸ 1/3 αὐτοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ ἀποτελεῖ τὸ συνολικὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνο ΑΕΔ. Τέλος, σύμφωνα μὲ τὴν μέθοδο αὐτή, πρέπει νὰ προστεθοῦν αὐτὰ τὰ τρία ἐμβαδά, εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, προκειμένου νὰ ἔχουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς ἑξαγώνου.

Στὸ ἴδιο κεφάλαιο ζητεῖ νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὴ κυρτοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖο φαίνεται στὸ σχῆμα καὶ ὀνομάζεται σφαιροειδὲς ἑξάγωνο.[100]

100. Αὐτὴ ἡ κατηγορία πολυγώνων διδασκόταν προαιρετικὰ στὰ Πρακτικὰ Λύκεια μέχρι τὸ 1980. Ἡ ὀνομασία τους ἦταν «ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα». Βλ. Σπ. Κανέλλου, Εὐκλείδειος Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι 1975, σελ. 213.



Δίδονται: ΑΒ = 3, καὶ ΒΓ = 2 σπιθαμές.

Σήμερα θὰ σχεδιάζαμε τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος θὰ εἴχαμε: $ΑΔ = \sqrt{(9\text{-}1)} = 2\sqrt{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, θὰ πολλαπλασιάζαμε μὲ τὸ 5, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνός, τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ $2.2\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$, καὶ θὰ εἴχαμε: $5.2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$. Κατόπιν, μὲ τὴν μέθοδο τὴν ὁποίαν ἔχουμε ἤδη ἀναφέρει, θὰ ὑπολογίζαμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου τὸ ὁποῖο εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ σχήματος, καὶ θὰ τὸ προσθέταμε εἰς τὸ $10\sqrt{2}$.

Στὸ χειρόγραφο, ὅπως ἀναμένουμε νὰ συμβεῖ, ἡ διαφορὰ ἔγκειται στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται βάσει τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

κεφ. 222. (σκβ). Στὸ κεφάλαιο αὐτό, ὁ συγγραφέας ἀναφέρεται σὲ ἐμβαδὰ συνθέτων σχημάτων τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται ἀφοὺ ἀναλυθοῦν τὰ σύνθετα σὲ ἐπιμέρους σχήματα ἁπλούστερα, τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν γνωρίζουμε μὲ ποιό τρόπο ὑπολογίζεται, καὶ προστεθοῦν στὸ τέλος αὐτὰ τὰ ἐμβαδά. Ὁ συγγραφέας τονίζει πὼς δὲν ὑπάρχει σύνθετο σχῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ μὴν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσουμε.

κεφ. 223. (σκγ). Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ ἔχουμε στὴν οὐσία μία ἀνακεφαλαίωση, ἡ ὁποία ἀπὸ ἔχει σκοπὸ νὰ τονίσει τὸ γεγονὸς, ὅτι ἀπὸ τὰ σχήματα μὲ περίμετρο ἴση μὲ 20 σπιθαμές τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδὸν τὸ ἔχει ὁ κύκλος καὶ ἀκολουθοῦν μὲ τὴν κατωτέρω διάταξη τὰ ἑξῆς σχήματα: Κανονικὸ 40-γωνο, 30-γωνο, 20-γωνο, 18-γωνο, 16-γωνο, 14-γωνο, 12-γωνο, 10-γωνο, 8-γωνο, 6-γωνο, 5-γωνο, καὶ 4-γωνο. Μετὰ ἀπὸ τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἀκολουθοῦν τὰ ἑξῆς σχήματα: Παραλληλόγραμμο μὲ βάση 4 καὶ ὕψος 6 σπιθαμές, παραλληλόγραμμο μὲ βάση 7 καὶ ὕψος 3 σπιθαμές, ἰσόπλευρο τρίγωνο, παραλληλόγραμμο μὲ βάση 8 καὶ ὕψος 2 σπιθαμές, καὶ παραλληλόγραμμο μὲ βάση 9 καὶ ὕψος 1 σπιθαμή.

κεφ. 224. (σκδ). Ἡ χρησιμότης ὅλων τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν γίνεται πλέον ὁλοφάνερη, ἀφοῦ σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο ἀσχολεῖται μὲ μετρήσεις τμημάτων γῆς.

Θεωρεῖ λοιπὸν κατ’ ἀρχὴν κυκλικὸ χωράφι περιμέτρου 2200 οὐργίων ἢ 220 σχοινίων, καὶ ζητεῖ πόσα μοδία δέχεται. Ἐξηγεῖ δέ, πὼς ἕνα τετράγωνο τμῆμα γῆς, μὲ πλευρὰ 10 οὐργίων, δηλαδὴ μὲ ἐμβαδὸν 100 τετρ. οὐργίες, δέχεται 1 μοδίο. Ἐκτελεῖ κατόπιν τὶς ἑξῆς πράξεις: Γιὰ νὰ ὑπολογίσει τὴν περίμετρο, διαιρεῖ τὸ 2200 μὲ τὸ 10 καὶ βρίσκει 220 σχοινία. Κατόπιν πολλαπλασιάζει τὴν περίμετρο μὲ τὸν ἑαυτὸν της καὶ ἔχει: $220.220 = 48400$. Μετὰ διαιρεῖ $48400/12 = 385$, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 3850 μοδία.

Σήμερα ἀπὸ τὴν περίμετρο ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ 2200, θὰ ὑπολογίζαμε τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ κύκλου ὡς ἑξῆς:

$\rho = 2200/(2\pi) =$

$= 1100/\pi$, ὁπότε

$E = \pi\rho^2 = 1100^2/\pi$ τετρ. οὐργίες, δηλαδὴ

$E/100 = 1100.11/π$ μοδία.

κεφ. 225. (σκε). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ δαπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 21 καὶ πλάτους 6 οὐργιῶν μίας οἰκίας, καὶ κατόπιν κάλυψη τοῦ δαπέδου μὲ τοῦβλα τετράγωνα, ὅταν ἡ κάθε οὐργία καλύπτεται πλήρως ἀπὸ 16 τοῦβλα.

Ἡ διαδικασία, ἡ ὁποία θὰ ἦταν ἡ ἴδια καὶ σήμερα, ξεκινᾶ μὲ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δαπέδου, τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ $21.6 = 126$ τετρ. οὐργίες. Κατόπιν πολλαπλασιάζει τὸ 126 μὲ τὸ 16 καὶ βρίσκει τὸν ἀριθμὸ τῶν τούβλων ποὺ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ καλύψουμε τὸ δάπεδο.

Ἐὰν τὰ τοῦβλα ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 2 1/2 καὶ πλάτος 2 οὐργίες, ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κάθε τούβλου, τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ 5 τετρ. οὐργίες, καὶ διαιρεῖ τὸ 126 μὲ τὸ 5, ὁπότε ἀπαιτοῦνται 25 1/2 τοῦβλα γιὰ νὰ καλυφθεῖ τὸ δάπεδο.

Τὰ συγκεκριμένα προβλήματα ἐπεκτείνονται καὶ σὲ προβλήματα ὑπολογισμοῦ ἀριθμοῦ οἰκιῶν μὲ βάση σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου δεδομένων διαστάσεων, οἱ ὁποῖες δύνανται νὰ καλύψουν μεγάλη ἔκταση γῆς. Στὸ χειρόγραφο, τὸ προαναφερθὲν πρόβλημα ἀντιμετωπίζεται μὲ τὴν ἑξῆς μέθοδο ἐπίλυσης: Γίνεται διαίρεση τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου τῆς ἔκτασης τῆς γῆς, μὲ τὸ τετράγωνο τῆς περιμέτρου τῆς οἰκίας. Αὐτὸ εἶναι πιθανὸν νὰ βασίζεται στὸ ἑξῆς:

Θεωροῦμε χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος μ, πλάτος π, καὶ ἐμβαδὸν Ε. Θεωροῦμε ἐπίσης οἰκία μὲ βάση σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους κ πλάτους λ, καὶ ἐμβαδοῦ E_1. Τότε θὰ ἰσχύει: $E/E_1 = (μ.π)/(κ.λ)$, καὶ αὐτὸς ὁ λόγος θὰ δίνει τὸ πλῆθος τῶν σπιτιῶν τὰ ὁποῖα χωροῦν στὴν μεγάλη ἔκταση γῆς. Σύμφωνα μὲ τὴν μέθοδο τὴν ὁποία μελετοῦμε στὸ χειρόγραφο, θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει:

$(2μ + 2π)^2/(2κ + 2λ)^2 = (μ.π)/(κ.λ)$, δηλαδὴ

$(\mu+\pi)^2.\kappa.\lambda = \mu.\pi.(\kappa+\lambda)^2$, ἀπὸ ὅπου προκύπτει
$\mu.\kappa.(\mu.\lambda\text{-}\kappa.\pi) = \lambda.\pi.(\lambda.\mu\text{-}\pi.\kappa)$.

Αὐτὴ ἡ τελευταία σχέση ὁδηγεῖ στὶς ἀναλογίες:
$\mu/\pi = \lambda/\kappa$ ἢ $\mu/\pi = \kappa/\lambda$.

Πρέπει δηλαδὴ, καὶ ἐφ' ὅσον χρησιμοποιήσουμε τὴν προτεινόμενη ἀπὸ τὸν συγγραφέα τοῦ χειρογράφου μέθοδο, οἱ διαστάσεις τῶν παραλληλογράμμων νὰ εἶναι ἀνάλογες, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο ἰσχύει στὸ συγκεκριμένο πρόβλημα.

Σήμερα θὰ μπορούσαμε νὰ προτείνουμε σχετικὸ θέμα στὴν Β΄ Λυκείου, μὲ τὴν ἑξῆς διατύπωση:

«Νὰ ἐξετάσετε τὴν συνθήκη ποὺ πρέπει νὰ ἰσχύει, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων, νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν τετραγώνων τῶν περιμέτρων αὐτῶν».

κεφ. 226. (σκς). Τὸ ἴδιο πρόβλημα μὲ χωράφι καὶ οἰκία κυκλικῶν σχημάτων (μὲ $\Pi = 20$ καὶ $\Pi_1 = 5$), ὅπου κατὰ τὸν συγγραφέα ὀφείλουμε νὰ διαιρέσουμε τὰ τετράγωνα τῶν περιμέτρων τοῦ χωραφιοῦ καὶ τῆς οἰκίας γιὰ νὰ βροῦμε πόσες οἰκίες μπορεῖ νὰ τοποθετηθουν στὸ κυκλικὸ χωράφι.

Δηλαδὴ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει:
$(\pi\rho^2)/(\pi{\rho_1}^2) = (2\pi\rho)^2/(2\pi\rho_1)^2$, ἢ $\rho^2/{\rho_1}^2 = \rho^2/{\rho_1}^2$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἀληθές.

Ἀκολουθεῖ πρόβλημα ἰδίου τύπου μὲ σχήματα ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ τετραγώνων, γιὰ τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ λόγου τῶν περιμέτρων.

Πράγματι, ἐὰν πρόκειται γιὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, τότε ἰσχύει:
$\Pi^2/{\Pi_1}^2 = E^2/{E_1}^2$, διότι
$(3\alpha)^2/(3{\alpha_1}^2) = [(\alpha^2\sqrt{3})/4]/[({\alpha_1}^2\sqrt{3})/4]$, ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο λόγοι εἶναι ἴσοι μὲ $\alpha^2/{\alpha_1}^2$.

Ἀλλὰ καὶ στὴν περίπτωση τῶν τετραγώνων σχημάτων, ἰσχύει πάντα: $(4\alpha)^2/(4\alpha_1)^2 = \alpha^2/{\alpha_1}^2$.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΓ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Ἡ κυριότερη ἐνασχόληση τοῦ συγγραφέα στὴν παροῦσα ἑνότητα εἶναι ὁ ὑπολογισμὸς ἐμβαδῶν παραπλεύρων ἢ καὶ ὁλικῶν ἐπιφανειῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, κώνων, κυλίνδρων καὶ σφαίρας. Οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται μὲ ἐφαρμογὴ τύπων οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται καὶ σήμερα. Ἐπισημαίνω ὅμως κάποιες ἀσάφειες στὴ διατύπωση τῶν προβλημάτων τῶν κεφαλαίων 231 καὶ 232. Συγκεκριμένα, στὰ σχόλιά μου ἐπὶ τοῦ κεφ. 232 δείχνω, ὅτι, ὅταν ὁ συγγραφέας γράφει περὶ τετραγώνου οὐργίας, κατ᾽ οὐσίαν ἐννοεῖ μονάδα ὄγκου καὶ ὄχι ἐπιφανείας. Ὑπ᾽ αὐτὴ τὴν ἔννοια γίνονται κατανοητὰ καὶ προηγούμενα παρόμοια προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς φαίνονταν παράδοξα λόγω τῆς συγκεκριμένης διατύπωσης.

Τὴν προτίμηση τοῦ συγγραφέα στὶς μεθόδους πρακτικῆς ἀριθμητικῆς διαπίστωσα ἀκόμα μία φορὰ στὸ κεφ. 234, ὅπου προτείνει λύση μακροσκελέστατη γιὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἔλυνε μὲ ἐλάχιστες πράξεις χρησιμοποιώντας ἐξισώσεις.

Τέλος γιὰ νὰ λύσει τὸ πρόβλημα ὑπολογισμοῦ ὄγκου δοχείου κάποιου εἰδικοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖο μοιάζει μὲ ἀγγεῖο (κεφ. 236), λαμβάνει τὸ «ἐξ ἀναλόγου» τῆς περιμέτρου τῶν δύο ἄκρων καὶ τῆς μέσης.

Ἀλλ᾽ ἔτσι βρίσκει τὸν μέσο ὅρο τῆς περιμέτρου τῶν κύκλων τοῦ ἄκρου καὶ τῆς μέσης. Σημειωτέον, ὅτι οἱ κύκλοι τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσοι.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΓ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Στὴ δεκάτη τρίτη ἑνότητα (κεφ. 227-233, 235-238) ἔχουμε ὅπως εἴπαμε προβλήματα στερεομετρίας, τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ ὑπολογισμοὺς ὄγκων καὶ ἐμβαδῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν στερεῶν (π.χ. τὸ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, κώνου, κυλίνδρου καὶ σφαίρας). Οἱ μεθοδολογίες λύσης ἔχουν πολλὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὶς σημερινές, ἀλλὰ οἱ ἐκφωνήσεις τους ἔχουν ἀσάφειες καὶ σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις εἶναι ἀκόμα καὶ λανθασμένες.

Πιθανὲς ἐπιρροὲς ποὺ δέχθηκε ὁ συγγραφέας μπορεῖ νὰ προέρχονται ἀπὸ τὸ ἔργο «Γεωμετρούμενα καὶ Στερεομετρούμενα» τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα[101]. Ἄλλο ἕνα σχετικὸ ἔργο ἦταν τὸ Liber abbaci τοῦ Φιμπονάτσι, στὸ 6ο κεφάλαιο τοῦ ὁποίου περιλαμβάνονται προβλήματα ὑπολογισμῶν ὄγκων στερεῶν[102].

Σὲ αὐτὴν τὴν ἑνότητα ὑπάρχει ἕνα κατὰ τὴν ἄποψή μου σημαντικὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὸ κεφάλαιο 236. Πρόκειται γιὰ ἀνεστραμμένο ἀγγεῖο, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ ὄγκος.

Τὸ ἀξιοπερίεργο ἐδῶ εἶναι τὸ σχῆμα τοῦ ἀγγείου, τὸ ὁποῖο δὲν μοιάζει μὲ κανένα ἄλλο στερεὸ ἀπὸ αὐτὰ μὲ τὰ ὁποῖα ἔχει ἤδη ἀσχοληθεῖ ὁ συγγραφέας.

Ὁ Ἀρχιμήδης εἰσάγοντας τὴ μέθοδο τῆς ἐξάντλησης

101. Heath, Hist. Gr. Math., τόμ. II, σελ. 453.
102. Vogel, Fibonacci, σελ. 609.

ὑπολόγισε ἐμβαδὰ καὶ ὄγκους, τὰ ὁποῖα σήμερα ὑπολογίζονται μέσω ὁλοκληρωμάτων[103].

Βρῆκε δηλαδὴ μέθοδο, μὲ τὴν ὁποία ὑπολόγισε ἐμβαδὰ καὶ ὄγκους στερεῶν κάθε μορφῆς, καὶ οἱ ἰδέες του ἀποτέλεσαν τὴ βάση τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ[104] τὸν 17ο αἰ.

Ἐπίσης ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρέας, γιὰ νὰ ὑπολογίσει τὸν ὄγκο τοῦ κώνου χρησιμοποιοῦσε μία προσεγγιστικὴ μέθοδο, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία ὑπολόγιζε τὸ γινόμενο τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου τοῦ ἀγομένου καθέτως πρὸς τὸ ὕψος καὶ στὸ μέσον αὐτοῦ.

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν σχήματος ἀγγείου εἶχαν γίνει καὶ ἄλλες ἀπόπειρες, ὄχι πάντοτε ἐπιτυχεῖς.

Μάλιστα σὲ ἑλληνικὸ πάπυρο τοῦ 4ου αἰ. μ.Χ. κάποιος μαθητὴς ἔχει ὑπολογίσει λανθασμένα τὸν ὄγκο ἀγγείου μὲ ἄνισες κυκλικὲς βάσεις[105].

Στὸν Μεσαίωνα πάλι, σχετικὰ μὲ τὴν ὁλοκλήρωση, ὑπῆρχε ἡ ἰδέα τοῦ χωρισμοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος σὲ ἄπειρα παραλληλόγραμμα, ἡ ὁποία ὅμως οὐδέποτε ἔγινε θεωρία.

Τὸ 1360 ὁ Ὄρεσμος (Oresme 1320-1382)[106], μὲ τὴ μέθοδο τῶν

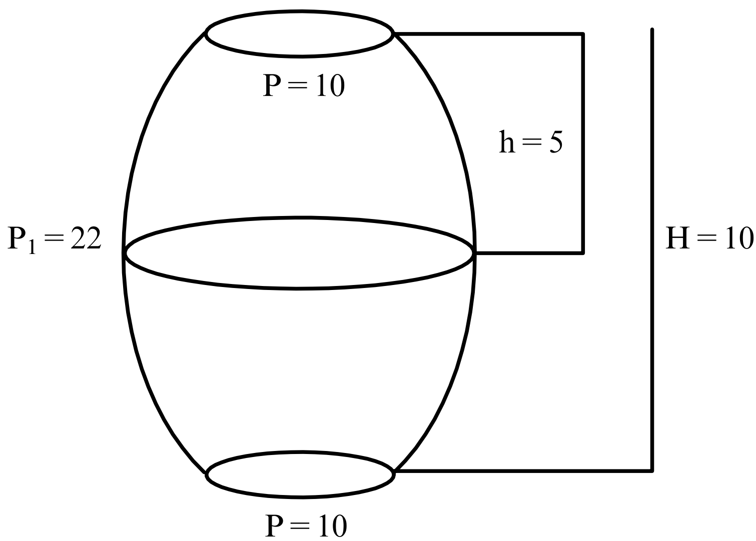
103. Γιὰ τὴ χρησιμοποίηση ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη τῶν ἀρχῶν τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ βλ. H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, ed. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, repr. Hildesheim 1996, σελ. 440-451. Smith, Hist. Math., τόμ. II, σελ. 684. Ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε εἰσαγάγει καὶ χρησιμοποιοῦσε τὰ ἀθροίσματα, ὅπως στοὺς νεωτέρους χρόνους ὁ Riemann, καὶ εἶχε βρεῖ μέθοδο ἀναγωγῆς τῶν προβλημάτων μεγίστου καὶ ἐλαχίστου σὲ προβλήματα ἐφαπτομένων. Βλ. I. G. Bachmakova, «Οἱ μέθοδοι διαφόρισης τοῦ Ἀρχιμήδη», AHES, N2, 1964, τόμ. II, σελ. 87-107.

104. Ἀκαδ. Ἐγκυκλ. Ἀκαδ. Ἐπιστημῶν τῆς ΕΣΣΔ, ἐκδ. Γιαννίκος, Ἀθήνα 1975-76, τόμ. II, «Διάσημοι μαθηματικοί», σελ. 478.

105. Smith, Hist. Math., τόμ. II, σελ. 294.

106. Βλ. M. Clagett, «Oresme Nicole», DSB, τόμ. X, σελ. 223-230. Ἀργότερα (1609) ὁ Κέπλερ ἔφθασε σὲ κάποιο χονδροειδὲς εἶδος ὁλοκλήρωσης, καὶ θεώρησε ὅτι κάθε στερεὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀπεριόριστο πλῆθος κώνων ἢ λεπτῶν δίσκων, ἡ ἄθροιση τῶν ὁποίων ἔγινε τὸ πρόβλημα τῆς μετέπειτα ὁλοκλήρωσης. Βλ. Smith, Hist. Math., τόμ. II, σελ. 684. V. M. Tikhomirov, Ἱστορίες γιὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, ἐκδ. Κάτοπτρο, Ἀθήνα 1999, σελ. 52-67. Struik, Hist. Math., σελ. 128.

μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τιμῶν (Πλάτη καὶ μήκη γεωγραφικὰ) κατόρθωσε νὰ ὑπολογίσει ἐμβαδὰ περιοχῶν οἱ ὁποῖες βρίσκονταν ἀνάμεσα σὲ καμπύλες καὶ εὐθεῖες.



Βέβαια στὸ χειρόγραφο ἔχει ὑπολογισθεῖ ὁ μέσος ὅρος τῶν περιμέτρων τῶν κύκλων μὲ ἀκτίνες 5/π καὶ 11/π. Ἀλλὰ καὶ μὲ τὴν πρακτικὴ μέθοδο γιὰ τὴν εὕρεση τέτοιου εἴδους ὄγκων Ο, τὴν ὁποία διαθέτουμε σήμερα [107], ἰσχύει ὅτι

$O = (H/6)(S_o + 4S_1 + S_2)$, ὅπου

$H =$ ἡ ἀπόσταση τῆς κάτω καὶ ἄνω τομῆς,

$S_0 =$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω τομῆς,

$S_1 =$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς, καὶ

$S_2 =$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἄνω τομῆς. Ἑπομένως ἔχουμε

$O = (10/6)(50/\pi + 484/\pi) = 890/\pi \ = 283{,}4 > 204$

Ἂν ὁ συγγραφέας εἶχε ἐπιρρεασθεῖ ἀπὸ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα, θὰ ἀκολουθοῦσε τὴν ἑξῆς πορεία[108]:

107. Ἀκαδ. Ἐγκυκλοπαίδεια, Ἀκαδ. Ἐπιστημῶν ΕΣΣΔ, ἐκδ. Γιαννίκος, Ἀθήνα 1975-76, τόμ. ΙΙ, «Ὁλοκλήρωμα καὶ παράγωγος», σελ. 366.
108. 108 Heron Stereom., τόμ. V, σελ. 102.

Θὰ ὕψωνε τὶς διαμέτρους τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου κύκλου στὸ τετράγωνο, τὶς ὁποῖες κατόπιν θὰ προσέθετε, ὁπότε θὰ εἶχε:

$(100/\pi^2) + (484/\pi^2) = 584/\pi^2$.

Στὴ συνέχεια θὰ ἐκτελοῦσε τὶς ἑξῆς πράξεις:

$(10/\pi)(22/\pi) = 220/\pi^2$

$(584 + 220)/\pi^2 = 804/\pi^2$

$(804/\pi^2)/3 = 268/\pi^2$

$(268/\pi^2)5 = 1340/\pi^2$

$(1340/\pi^2)2 = 2680/\pi^2 = 2680/(22/7)^2 = 271{,}3$.

Παρατηροῦμε, ὅτι ἡ τιμὴ αὐτὴ συγκρινόμενη μὲ τὴν τιμὴ 204 τοῦ χειρογράφου μας εἶναι πολὺ πλησιέστερη τῆς σημερινῆς. Ἀναρωτιόμαστε λοιπόν, μήπως ἡ μεθοδος τοῦ συγγραφέα μας ἀποσκοποῦσε στὸ κέρδος τῶν ἐμπόρων, ὡς μεσαζόντων μεταξὺ παραγωγῶν καὶ καταναλωτῶν.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΙΓ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

κεφ. 227. (σκζ). Κάλυψη ἐπιφανείας στύλου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 3 1/2, 3 1/2, 9, μὲ μάρμαρα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 1/2, 1/4.

Μέθοδος ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερα καὶ βασίζεται στὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

κεφ. 228. (σκη). Παρόμοιο πρόβλημα σχετικὸ μὲ ὄγκους ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων.

κεφ. 229. (σκθ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ ὑφάσματος πλάτους 2 σπιθαμῶν, τὸ ὁποῖο καλύπτει σφαιρικὴ ἐπιφάνεια περιμέτρου 22 σπιθαμῶν.

Στὸ χειρόγραφο, οἱ πράξεις οἱ ὁποῖες παρουσιάζονται εἶναι οἱ ἑξῆς: (154/7)/(22/7)= 7 ἡ διάμετρος, 22.7= 154, ὁπότε ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι 154 τετρ. σπιθαμές. Διαιρεῖ καὶ μὲ τὸ πλάτος τὸ ὁποῖο εἶναι ἴσο μὲ 2 καὶ ἔχει: 154/2= 77 τὸ ζητούμενο μῆκος.

Σήμερα θὰ ἀκολουθούσαμε τὴν ἑξῆς διαδικασία:

2πρ= 22, ἄρα ἡ ἀκτίνα ρ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ 11/π, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ εἶναι ἴσο μὲ $4.\pi.11^2/\pi^2 = 484/\pi$. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑφάσματος θὰ εἶναι: 2.μ= 484/π, καὶ συνεπῶς τὸ μῆκος μ τοῦ ὑφάσματος εἶναι ἴσο μὲ 242/π σπιθαμές.

κεφ. 230. (σλ). Ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ παράπλευρης ἐπιφάνειας κωνικῆς σκηνῆς ὕψους 40 σπιθαμῶν καὶ παράπλευρης ἀκμῆς 50 σπιθαμῶν, ὅταν τὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖο καλύπτει τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἔχη πλάτος 3 σπιθαμές.

Ὁ συγγραφέας χρησιμοποιώντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκει τὴν ἀκτίνα τῆς βάσης ἴση μὲ 30. Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς περιμέτρου τῆς βάσης ἀκολουθεῖ τὴν ἑξῆς διαδικασία:

$3.60 + 60/7 =$ 188 4/7.

Κατόπιν χρησιμοποιεῖ τὴν ἑξῆς ἐνδιαφέρουσα διατύπωση: «Τὸ κάτω μέρος τῆς σκηνῆς ἔχει περίμετρο 188 4/7 σπιθαμές, τὸ δὲ ἄνω ἔχει περίμετρο ἴση μὲ τὸ μηδέν, συνεπῶς τὸ ἐξ' ἀναλόγου εἶναι $(188\ 4/7)/2 =$ 94 2/7». Ἀκολούθως πολλαπλασιάζει τὸ 94 2/7 μὲ τὸ 50 καὶ βρίσκει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας εἶναι 4715 2/7 τετραγωνικές σπιθαμές, καὶ ὄχι 4714 2/7.

Διαπιστώνουμε ὅτι ἔχει κατ' οὐσίαν χρησιμοποιήσει τὸν τύπο τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε καὶ σήμερα γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἐμβαδὸν αὐτό, καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο ἰσχύει πὼς τὸ συγκεκριμένο ἐμβαδὸν εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἡμιπερίμετρο τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν παράπλευρη ἀκμή.

Τέλος γιὰ νὰ ὑπολογίσει τὸ συνολικὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖο θὰ χρειασθεῖ, διαιρεῖ τὸ 4715 2/7 μὲ τὸ 3.

Στὸ ἴδιο αὐτὸ κεφάλαιο ἐπιλύονται μὲ τὴν ἴδια μεθοδολογία καὶ ἄλλα παρεμφερῆ θέματα.

κεφ. 231. (σλα). Ὑπολογισμὸς «μοδίων»[109], τὰ ὁποῖα δέχεται ἕνας κυλινδρικὸς σάκκος, ὅταν αὐτὸς ἔχει προκύψει ἀπὸ δύο ἄλλους κυλινδρικοὺς σάκκους ἰδίου ὕψους, καὶ μοδίων 6 καὶ 4 ἀντιστοίχως.

---

109. Τὸ 1 μοδίον ἢ ὁ μόδιος εἶναι μέτρο ξηρῶν καρπῶν, τὸ ὁποῖο ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1/6 τοῦ μεδίμνου (κοιλοῦ), ἢ πρὸς 1/8 τοῦ ἀμφορέως, δηλαδὴ πρὸς 8,75 λίτρες, ἢ κυμαινομένου μεταξὺ 20-22 ὀκάδων. Ὅταν δὲ πρόκειται γιὰ καρπὸ ἐληᾶς ἰσοδυναμεῖ πρὸς 500 ὀκάδες. Βλ. Σταματάκου Ι., Λεξικὸν τῆς Νέας Ἑλληνικῆς γλώσσης, Ἐκδ. Φοῖνιξ, Ἀθῆναι 1971, Τόμ. ΙΙ, σελ. 1960.

Κατὰ τὴν ἐπίλυση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ξεκαθαρίζεται τί ἀκριβῶς ἐννοεῖ ὁ συγγραφέας μὲ τὴν ἀσαφῆ ἔκφραση ¨ἔχει προκύψει¨, καὶ διαπιστώνουμε, ὅτι πρόκειται γιὰ ἕναν καινούργιο σάκκο, ὁ ὁποῖος ἔχει παράπλευρη ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν δύο ἄλλων. Ἐπίσης ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο πρέπει νὰ τονισθεῖ εἶναι τὸ ὅτι ζητεῖ τὸν ὄγκο τοῦ νέου σάκκου.

Ἡ συνοπτικὴ περιγραφὴ τῆς μεθόδου τοῦ συγγραφέα ἔχει ὡς ἑξῆς:

$6.6 = 36$, $4.4 = 16$, $36 + 16 = 52$, $(6 + 4).(6 + 4) = 10.10 = 100$. Σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση: «Ἐὰν τὰ 10 δέχωνται 52, τὰ 100 πόσα δέχονται;» Καὶ συνεχίζει μὲ τὶς ἑξῆς πράξεις:

$100.10 = 1000$, $1000/52 = 19\ 3/13$.

Σήμερα τὸ συγκεκριμένο πρόβλημα θὰ ἀντιμετωπιζόταν ὡς ἑξῆς:

Συμβολίζουμε μὲ O_1, O_2, O_3, τοὺς ὄγκους τῶν σάκκων τῶν 6, τῶν 4, καὶ τῶν ζητουμένων μοδίων ἀντιστοίχως. Ἐπίσης συμβολίζουμε μὲ ρ_1, ρ_2, ρ_3 τὶς ἀντίστοιχες ἀκτίνες αὐτῶν. Τότε θὰ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$O_1 = \pi.\rho_1^2.\upsilon$, $O_2 = \pi.\ \rho_2^2.\upsilon$, $O_3 = \pi.\rho_3^2.\upsilon$.

Ἐπιπλέον θὰ ἰσχύει ἡ σχέση:

$2.\pi.\ \rho_1.\upsilon + 2.\pi.\ \rho_2.\upsilon = 2.\pi.\ \rho_3.\upsilon$, ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει

$\rho_1 + \rho_2 = \rho_3$, ὁπότε

$O_3 = \pi.(\rho_1 + \rho_2)^2.\upsilon = \pi.\ \rho_1^2.\upsilon + \pi.\ \rho_2^2.\upsilon + 2.\pi.\ \rho_1.\ \rho_2.\upsilon = 10 + 2.\pi.\ \rho_1.\ \rho_2.\upsilon$.

Ἀλλὰ $\rho_1^2\ .\ \rho_2^2 = 24/(\pi^2.\upsilon^2)$, ὁπότε
$\rho_1.\rho_2 = (2.\sqrt{6})/(\pi.\upsilon)$, καὶ $O_3 = 10 + 2.\pi.\upsilon.(2.\sqrt{6})/(\pi.\upsilon) = 10 + 4\sqrt{6}$.

Ἀκολουθεῖ τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα, ὅπου ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν μοδίων, τὰ ὁποῖα δέχονται δύο ἴδιοι σάκκοι ὅταν αὐτοὶ προέρχονται ἀπὸ ἕναν σάκκο τοῦ ἰδίου ὕψους, ὁ ὁποῖος δέχεται 20 μοδία.

Κατὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος γίνονται οἱ ἑξῆς πράξεις: 20/2 = 10, 10.10 = 100, 100/20 = 5.

Ἡ σημερινὴ διαδικασία θὰ περιελάμβανε τὰ ἑξῆς βήματα:

$2.\pi.\rho_3.\upsilon = 2.\pi.\rho_1.\upsilon + 2.\pi.\rho_2.\upsilon$, ὁπότε

$\rho_1 = \rho_3/2$. Ἀλλὰ

$\pi.\rho_3^2.\upsilon = 20$, συνεπῶς

$\pi.\rho_1^2.\upsilon = (\pi.\rho_3^2.\upsilon)/4 = 20/4 = 5$.

κεφ. 232. (σλβ). Ὑπολογισμὸς ὕψους σιτοδόχου οἴκου ὅταν δίδονται τὸ μῆκος 9 οὐργίες, τὸ πλάτος 3 οὐργίες καὶ τὰ μοδία τὰ ὁποῖα δέχεται εἶναι 1458.

Ὁ συγγραφέας ὑποθέτει ὅτι κάθε τετράγωνη οὐργία δέχεται 12 μοδία καὶ ἐκτελεῖ τὶς ἑξῆς πράξεις:

1458/12 = 121 1/2 τετρ. οὐργίες, 9.3 = 27, (121 1/2)/27 = 4 1/2 = υ.

Σήμερα χρησιμοποιώντας τὸν τύπο τοῦ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θὰ γράφαμε τὰ ἑξῆς:

$O = \mu.\pi.\upsilon$, ὁπότε $1458 = 9.3.\upsilon$, καὶ $1458/12 = 9.3.\upsilon$, συνεπῶς $\upsilon = 4\ 1/2$.

Κατόπιν ζητεῖται νὰ ὑπολογισθεῖ σὲ μέτρα τὸ ὕψος ὕδατος τὸ ὁποῖο περιέχεται σὲ πηγάδι μήκους 8 οὐργίων, πλάτους 3 οὐργίων, καὶ βάθους 2 1/2 οὐργίων, ὅταν ἡ κάθε μία «τετράγωνος» οὐργία δέχεται 100 μέτρα.

Ὅταν ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφραση «τετράγωνος οὐργία» ἐννοεῖ ὅπως φαίνεται, μονάδα μετρήσεως ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀφοῦ σὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο τὴν ὁρίζει ὡς ἔχουσα μῆκος πλάτος καὶ ὕψος.

Οἱ πράξεις οἱ ὁποῖες γίνονται εἶναι οἱ ἑξῆς:

8.3.(2 1/2) = 60 τετρ. οὐργίες, 60.100 = 6000, ὁπότε ὁ συγγραφέας παραπέμπει στὸ προηγούμενο πρόβλημα μὲ δεδομένα: Μῆκος ἴσο μὲ 8 οὐργίες, πλάτος ἴσο μὲ 3, καὶ τὰ μέτρα τὰ ὁποῖα δέχεται ὁ σάκκος εἶναι 6000.

κεφ. 233. (σλγ). Ὑπολογισμὸς ποσότητος ὕδατος τὸ ὁποῖο χύνεται ἀπὸ δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅταν τοποθετηθεῖ ἐντὸς αὐτῆς μία κυλινδρικὴ κολώνα.

Δίδονται τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς δεξαμενῆς ἴσα μὲ 3 οὐργίες, καὶ τὸ ὕψος της ἴσο μὲ 16 οὐργίες. Ἐπίσης δίδεται ἡ διάμετρος τῆς κολώνας ἴση μὲ 2 οὐργίες καὶ τὸ ὕψος της ἴσο μὲ 14 οὐργίες.

Ὑπολογίζεται ὁ ὄγκος τῆς δεξαμενῆς ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ $3.3.16 = 144$ τετρ. οὐργίες, καὶ κατόπιν ἀναφέρεται, πῶς πρέπει νὰ τετραγωνίσουμε τὸν κίονα ὅπως μάθαμε νὰ τετραγωνίζουμε τὸν κύκλο, δηλαδή: $2.2 = 4$, $(11/14).4 = 3\ 1/7$, $(3\ 1/7).14 = 44$ τετρ. οὐργίες.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ τελευταῖοι ὑπολογισμοὶ σχετίζονται μὲ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ὄγκου κυλίνδρου ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, δηλαδή:

$O = \pi.\rho^2.\upsilon = \pi.1.14 = 14.\pi \simeq 44.$

Τέλος ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ 144 τὸ 44 ὁπότε ἡ ζητουμένη ποσότητα εἶναι 100 τετρ. οὐργίες.

Ἀκολουθεῖ πανομοιότυπο πρόβλημα μὲ δεξαμενὴ σχήματος κυλινδρικοῦ καὶ σφαιρικὸ κίονα.

κεφ. 235. (σλε). Ὑπολογισμὸς ὄγκου δοχείου τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπὸ 30 σανίδες καὶ δέχεται 30 μέτρα, καὶ κατόπιν μετατρέπεται σὲ ἰδίας μορφῆς δοχεῖο ἀποτελούμενο ἀπὸ 20 σανίδες.

Στὸ χειρόγραφο περιγράφονται τέσσερεις μέθοδοι ἐπίλυσης τῶν ὁποίων δίνουμε μία συνοπτικὴ περιγραφή.

1η μέθοδος:

30.30 = 900, 20.20 = 400, 900/(12 4/7) = 71 13/22, 400/(12 4/7) = 31 9/11, 30.(31 + 9/11) = 954 6/11,

(954 + 6/11)/(71 + 13/22) = 13 1/3.

Ὁ συγγραφέας παρατηρεῖ ὅτι διαιροῦμε μὲ τὸ 12 4/7, διότι «ἔτσι ἐμάθαμε ἀπὸ τὴν περίμετρο τοῦ κύκλου νὰ εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ». Ἐπίσης σημειώνει, ὅτι θεωρεῖ τὸν τρόπο αὐτὸ ἀσαφῆ καὶ ἄχρηστον.

2η μέθοδος:

30.30 = 900, 20.20 = 400, 30/χ = 900/400, ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι χ = 13 1/3.

3η μέθοδος:

20.20 = 400, 400/30 = 13 1/3 ἢ 20/30 = χ/20.

Ἐξηγεῖ πῶς ἡ δευτέρα καθὼς καὶ ἡ τρίτη μέθοδος χρησιμοποιοῦνται ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν σανίδων καὶ τῶν μέτρων εἶναι ὁ ἴδιος.

4η μέθοδος:

30.30 = 900, 20.20 = 400, 900/30 = 30, 400/30 = 13 1/3.

Τὸ 30 μὲ τὸ ὁποῖο διαιροῦμε τὸ 900 εἶναι ὁ μερισθὴς καὶ ἔχουμε πάλι 30 μέτρα ὡς ἀποτέλεσμα.

Σχολιάζοντας κατ' ἀρχὴν τὴν διατύπωση τῆς ἐκφώνησης τοῦ προβλήματος διαπιστώνουμε τὴν ἀσάφεια τῆς ἐκφράσεως «ἀποτελεῖται ἀπὸ 30 σανίδες». Ὅσον ἀφορᾶ δὲ στὴν ἔκφραση «δέχεται 30 μέτρα», ἔχουμε ἤδη παρατηρήσει ὅτι πρόκειται γιὰ τὸν ὄγκο τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου. Ἐπομένως, τὸ ζητούμενο εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς νέου δοχείου τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπὸ 30 σανίδες. Ὅπως ὅμως προκύπτει ἀπὸ τὸ σχόλιο τὸ ὁποῖο ὁ συγγραφέας κάνει γιὰ τὴν διαίρεση τοῦ 900 μὲ τὸ 12 4/7, προκύπτει ὅτι $900 = 4\pi^2\rho^2$, καὶ $12\ 4/7 = 4\pi$. Συνεπῶς τὸ πηλίκον $900/(12\ 4/7) = 71\ 13/22$ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρώτου κυλινδρικοῦ δοχείου. Ἄρα ἡ ἔκφραση «ἀποτελεῖται ἀπὸ 30 σανίδες», σημαίνει ὅτι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι ἴση μὲ 30.

Κατόπιν ἐπιλύεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ὡς πρὸς χ ἡ ἀναλογία:

$30/(71\ 13/22) = \chi/(31\ 9/11)$, ἡ ὁποία δίνει

$\chi = 13\ 1/3$, καὶ τὸ χ παριστάνει τὸν ὄγκο τοῦ δεύτερου δοχείου. Ἡ σχέση ὅμως

$30/(71\ 13/22) = \chi/(31\ 9/11)$, εἶναι ἰσοδύναμη μὲ

$O/E = O_1/E_1$,

(ὅπου μὲ Ο καὶ Ε συμβολίζουμε τὸν ὄγκο καὶ τὸ ἐμβαδὸν βάσεως τοῦ πρώτου δοχείου, καὶ μὲ O_1 καὶ E_1 τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη τοῦ δευτέρου δοχείου),

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμη μὲ

$(\pi.\rho^2.\upsilon)/(\pi.\rho^2) = (\pi.\rho_1{}^2.\upsilon)/(\pi.\rho_1{}^2)$

ἡ ὁποία ἰσχύει διότι καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς εἶναι ἴσα μὲ υ, ὅπου μὲ υ συμβολίζουμε τὸ ὕψος τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ἴδιο καὶ στοὺς δύο κυλίνδρους.

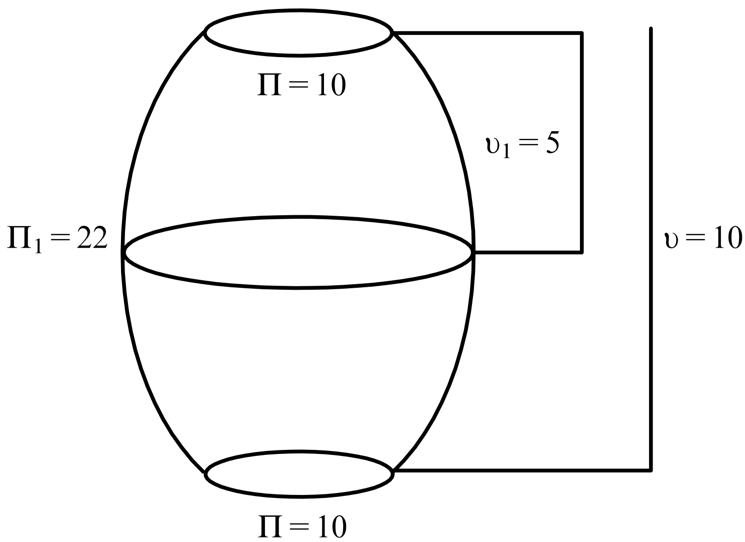
κεφ. 236. (σλς). Τετραγωνισμὸς σφαιροειδοῦς πιθαριοῦ μὲ περίμετρο μεγίστου κύκλου 3 1/7 οὐργίες.

Ζητεῖ τὴν εὕρεση τοῦ ὄγκου σφαίρας ὅταν δίνεται ἡ περίμετρος τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς. Ἐπειδὴ ὅμως θεωρεῖ τὸ $\pi = 3\ 1/7$, γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ προκύπτει ὅτι $2\rho = 1$, ὁπότε ὑπολογίζει τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας χρησιμοποιώντας τὸν τύπο $O = (4/3).\pi.\rho^3$.

Βρίσκει λοιπὸν ὅτι $O = 22/42$ τετρ. οὐργίες. Κατόπιν θεωρεῖ ὅτι κάθε τετράγωνος οὐργία δέχεται 50 μέτρα, καὶ γράφει: $(22/42)50 = 26\ 4/21$.

Τὸ ἴδιο πρόβλημα τὸ λύνει μὲ σπιθαμὲς ἀντὶ γιὰ οὐργίες, καὶ κατόπιν θεωρεῖ ὅτι κάθε σπιθαμὴ δέχεται 6 ψήφους. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε μέτρο ἔχει 36 ψήφους, θὰ ἔχει 6 τετρ. σπιθαμές, κ.λ.π.

Στὸ ἐπόμενο πρόβλημα ζητεῖ νὰ ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖο φαίνεται στὸ σχῆμα, ὅταν ἡ περίμετρος τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι ἴση μὲ 22, ἡ περίμετρος τῶν βάσεων εἶναι ἴση μὲ 10, τὸ ὕψος εἶναι ἴσο μὲ 10, καὶ τὸ ὕψος ἀπὸ τὸν μέγιστο κύκλο μέχρι τὸ χεῖλος εἶναι ἴσο μὲ 5.



Λαμβάνει τὸ «ἐξ’ ἀναλόγου» τῆς περιμέτρου τῶν κύκλων, τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι λαμβάνει τὸν μέσο ὅρο τοῦ 22 καὶ τοῦ 10, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ 16. Κατόπιν θεωρεῖ νέο κύκλο μὲ περίμετρο ἴση μὲ 16 καὶ, ἀπὸ τὴν περίμετρο αὐτοῦ τοῦ νέου κύκλου ὑπολογίζει τὸ ἐμβαδὸν του ἀκολουθώντας τὴν γνωστὴ διαδικασία. Τέλος πολλαπλασιάζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τελευταίου κύκλου μὲ τὸ ὕψος τοῦ δοχείου καὶ ἔχει τὸν ζητούμενο ὄγκο. Θεωρεῖ δηλαδὴ, ὅτι τὸ ἀρχικὸ δοχεῖο ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ ἕνα δοχεῖο κυλινδρικοῦ σχήματος ἰδίου ὕψους μὲ περίμετρο βάσεως ἴση μὲ τὸν μέσον ὅρο τῶν περιμέτρων τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κύκλου τοῦ ἀρχικοῦ δοχείου.

κεφ. 237, 238. (σλζ, σλη). Ὑπολογισμὸς ἀριθμοῦ μικρῶν πόλεων οἱ ὁποῖες περιέχονται μέσα σὲ μία μεγάλη πόλη, ὅταν τὰ σχήματα ὅλων τῶν πόλεων εἶναι κυκλικά.

Θεωρεῖ μία κυκλικὴ πόλη μὲ περίμετρο ἴση μὲ 22 μίλια, καὶ μία μικρὴ πόλη μὲ περίμετρο ἴση μὲ 4 μίλια. Ὑπολογίζει μὲ τὸν γνωστὸ τρόπο τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο πόλεων τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως 38 1/2 καὶ 1 6/22 τετρ. μίλια. Διαιρεῖ τὰ ἐμβαδὰ καὶ προκύπτει ὅτι ἡ μεγάλη πόλη περιέχει 30 1/4 μικρὲς πόλεις. Κατόπιν παρατηρεῖ ὅτι, ἂν ὁ τρόπος εὕρεσης τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ εἶναι σωστός, τότε (1/4)(1 + 6/22) = 7/22, ὁπότε 7/22 + 38 + 4/22 = 38 11/22, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγάλης πόλης. Ἄρα δὲν ὑπάρχει πρὸς τὸ παρὸν ἀντίφαση. Ὅμως ἂν ὑπολογίσουμε τὴν ρίζα τοῦ 38 11/22, αὐτὴ θὰ εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴση μὲ 6 10/49. Ἂν τώρα κατασκευασθεῖ τετράγωνο πλευρᾶς ἴσης μὲ 6 10/49, τότε ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση μὲ 24 4/5 καὶ ὄχι ἴση μὲ 22. Τὸ συμπέρασμα τὸ ὁποῖο ἐξάγεται κατὰ τὸν συγγραφέα, εἶναι πὼς ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἐκ τῆς περιμέτρου δὲν εἶναι σωστός, ἀλλὰ γίνεται «χάριν γυμνασίας».

ΚΕΙΜΕΝΟ
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ρξς´ Περὶ ἀποδόσεως τῆς τοῦ πράγματος μεταχειρίσεως, ἀρχῆς δὲ γεωμετρικῶν καὶ ἑτέρων διαφόρων τινῶν ζητημάτων.

ρξζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον.

ρξη´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου εἰδέναι τὴν τούτου περίμετρον.

ρξθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γῆς κεχωσμένου κύκλου, μέρος δὲ τούτου φαινόμενον, εἰδέναι διάμετρον καὶ περίμετρον πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ρο´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς κύκλου τεθῆναι τετράγωνον σχῆμα κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, καὶ εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ροα´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς ἡμισφαιρίου σχήματος τεθῆναι τετράγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον καὶ εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ροβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τετραγώνου σχήματος κύκλος τεθῆναι καὶ εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον καὶ περίμετρον πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ρογ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐπὶ σχήματος τετραγώνου, ὅπερ λέγεται ρόμβος, κύκλος τεθῆναι ἐντὸς καὶ εἰδέναι καὶ τὴν τοῦ ρόμβου καὶ τοῦ κύκλου διάμετρον.

ροδ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς κύκλου τεθῆναι σχῆμα τρίγωνον καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὴν τοῦ τριγώνου κάθετον, ἀπὸ δὲ τῆς τοῦ τριγώνου καθέτου εἰδέναι ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τριγώνου. +

ροε´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἰδέναι τὴν τούτου κάθετον.

ρος´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τριγώνου σχήματος κύκλος τεθῆναι καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον.

ροζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τριγώνου σχήματος τεθῆναι τετράγωνον καὶ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά.

ροη´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τριγώνου μέχρι ἑκάστης γωνίας πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί.

ροθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι σκαληνοῦ σχήματος, τοῦ ἐκ τετραγώνου ἔχοντος δύο πλευράς, πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη τούτου πλευρά, εἰδέναι δὲ καὶ τὴν ἐντὸς τούτου τεθημένου κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον.

ρπ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τοιούτου σκαληνοῦ σχήματος τετράγωνον τεθῆναι καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῶν τοῦ σκαληνοῦ πλευρῶν ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ρπα´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῶν πλευρῶν τὴν διαγώνιον εὐθείαν γραμμὴν εἰδέναι τοῦ τετραγώνου καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

ρπβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι κάθετον τριγώνου σκαληνοῦ σχήματος πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

ρπγ´ Καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας γωνίας ἁρξάμενος ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς περαιώσας.

ρπδ´ Καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας γωνίας ἁρξάμενος ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς περαιώσας.

ρπε´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τεθῆναι ἐντὸς τοῦ σκαληνοῦ τούτου σχήματος τετράγωνον ἰσόπλευρον.

ρπς´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ κύκλος τεθῆναι ἐντὸς τοῦ σκαληνοῦ τούτου σχήματος.

ρπζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ σκαληνοῦ μέχρι ἑκάστης γωνίας τῶν τριῶν πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί. + +

ρπη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ποιῆσαι κέντρον τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου διάστημα μέχρι ἑκάστης γωνίας τῶν τριῶν ἀνίσων πλευρῶν ἐν ἴσῳ διαστήματι καὶ ὅτι γενομένου κύκλου περὶ τὰς τρεῖς τούτου γωνίας εἰδέναι τὴν τούτου κύκλου διάμετρον.

ρπθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι διαφόρως τὶς ἐκτὸς καὶ ἐντὸς περιμέτρους πύργου τινός.

ρϟ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πύργου τινὸς τάφρον πόσων ὀργύων ἐστί + + +

ρϟα΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ποιῆσαι κλίμακα ὕψους ἱκανοῦ πρὸς τὸ διακλέψαι πόλιν ἢ πύργον τινά.

ρϟβ΄ Περὶ τοῦ ἐπὶ τείχους ἱσταμένου κόντου· πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσον γέγονεν χαμηλότερον τὸ ὕψος τούτου ἐξωθούμενος τοῦ τείχους ὑπὸ τοῦ κάτωθεν μέρους + + + +

(13A)ρϟγ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ δύο ἀνίσων καθ' ὕψος πύργων εἰδέναι τὴν ἐν μέσῳ τούτων διάστασιν, τὴν διὰ τῶν δύο καλωδίων γεγενημένην, εἰδέναι δὲ καὶ ἑκάστου καλωδίου μέγεθος.

ρϟδ΄ Περὶ τοῦ ὑποκλιθέντος δένδρου διὰ καλωδίου τανούμενον· πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσον γέγονεν ἐλάττω τὸ καλώδιον, ὅπερ ἦν πρότερον.

ρϟε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι διὰ τοῦ τεθημένου κατὰ πλάτος ξύλου ἀνὰ μέσον δύο τινῶν μακρῶν ξύλων τὴν κατὰ τὸ ἓν τούτων ἄκρος κατὰ πλάτος ἐπάνοιξιν πόσων οὐργιῶν ἐστί.

ρϟς΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἀπὸ τῆς ἐπανοίξεως τῶν δύο ἄκρων τῶν ξύλων εἰδέναι τὸ τεθήμενον πλάγιον ξύλον πόσων οὐργιῶν ἐστί.

ρϟζ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ διὰ τῆς ἐπανοίξεως τῶν δύο ἄκρων τῶν ξύλων καὶ τοῦ ἀνὰ μέσον τῶν δύο κατὰ πλάτος τεθημένου ξύλου εἰδέναι τὸ μῆκος τῶν δύο ξύλων πόσων οὐργιῶν ἐστί.

ρϟη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσον γέγονεν ἐλάττω τὸ μῆκος τῶν δύο ξύλων ἀπὸ τῶν ἄκρων μέχρι τῆς τούτων γωνίας διὰ τὸ ἐπανοῖξαι ἐπὶ μεῖζον τὴν τῶν ἄκρων διάστασιν.

ρϟθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσαι οὐργιαὶ λείπονται πρὸς τὸ ἀποπληρῶσαι τὴν ἐλάττως ἔχουσα γωνία διὰ τὸ ποιῆσαι στενοτέραν τὴν τῶν ἄκρων ἐπάνοιξιν.

σ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ διὰ τῆς οὔσης ἐπανοίξεως, καὶ ἧς βούλει ποιῆσαι, εἰδέναι πόσων οὐργιῶν ξῦλον κατὰ μῆκος ἔχεις προσθῆναι πρὸς τὸ ποιῆσαι τὴν ζητουμένην ἐπάνοιξιν.

σα´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι κύκλον καὶ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 40 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σγ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 30 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σδ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 20 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σε´ Περἰ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 18 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σς´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 16 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 14 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

ση´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 12 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 10 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σι´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 8 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σια´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 6 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν 5 καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιγ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἐμβαδὸν τετραγώνου ἰσοπλεύρου ὀρθογωνίου καὶ παραλληλογράμμου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι τετραγώνου τραπεζίου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρόμβου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σις΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρομβοειδοῦς σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιζ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἰσοπλεύρου τργώνου σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὀξυγωνίου ἐμβαδὸν καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀμβλυγώνιου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι τριγώνου σκαληνοῦ σχήματος ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσοσκελοῦς οὐ πεπληρωμένου τριγώνου, ἀλλ' ἐλάττως ἔχοντος, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκα΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἑξαγώνου ἐκ δύο τριγώνων ἰσοπλεύρων συντεθήμενον καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἐκ διαφόρων σχημάτων συντεθήμενον καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκγ΄ Περὶ τοῦ ποίου ἐστὶ πολυχωρεστέρου σχήματος.

σκδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἡ τούτων ζήτησις χρήσιμος εἰς γεωδαιτικὰς παραδόσεις μοδισμῶν.

σκε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι οἴκου τινὸς ἔδαφος πόσων οὐργιῶν ἐστί, καὶ ἄλλα τινὰ ὅμοια τούτου ζητήματα.

σκς΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσας ἐλάττονας πόλεις ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως.

σκζ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι διὰ πόσων καλυμμάτων ἔχεις καλύψαι στῦλον τινὸς ἰσόπλευρον ἢ ἑτερομήκη.

σκη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι διὰ πόσων βαρεμάτων οἰκοδομῆσαι ἔχεις στῦλον τινά, ὅσου ἂν ὕψους καὶ πλάτους βούλει.

σκθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσαι σπιθαμαὶ χάσδεον ἔχοσιν καλύψαι σφαίραν τινα.

σλ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν πανὶν ἐστὶ σύχρειον πρὸς τὸ ποιῆσαι σκηνήν, ὅσου ἂν μεγέθους βούληται.

σλα΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι, ὁ ἐκ τῶν δύο σάκκων, τῶν δεχομένων ὁ μὲν μοδία 6, ὁ δὲ 4, γενόμενος εἷς σάκκος πόσα μοδία δέξεται.

σλβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ διὰ τοῦ πλάτους καὶ μήκους τοῦ σιτοδόχου οἴκου καὶ τὸ ὕψος τούτου εἰδέναι, πόσων οὐργιῶν ἐστὶ ἐν ὃ καὶ πόσα μοδία δέξεται.

σλγ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσον ὕδωρ ἐξεχύθη ἐκ τοῦ φρέατος διὰ τὸ πεσεῖν ἐντὸς τούτου κύων στρογγυλὸς καθ΄ ὕψος οὐργιῶν 14.

σλδ΄ Περὶ τῆς ὑδροφόρου δεξαμενῆς τῆς ἐχούσης σωλήνας τρεῖς.

σλε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι (14α) οἰνοδόχον ἄγγος, τὸ κοινῶς ροούτζιον καλούμενον, τῷ ὄντι σανιδῶν 30, δεχόμενον δὲ καὶ μέτρα 30, γενόμενο δὲ σανιδῶν 20, τόσα μέτρα ἐλάττω τῷ τῶν 30 δέξεται.

σλς΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι οἰνοδόχον πῖθον καὶ εἰδέναι πόσα μέτρα οἶνον ἔχει ἐντός. + + + +

σλζ΄ Ἕτερον ζήτημα τούτου ὅμοιον.

σλη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἀποδεικτικῶς δεῖξαι ἀληθὴ ὄντος τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

ΚΕΙΜΕΝΟ
ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ

ρξζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον.

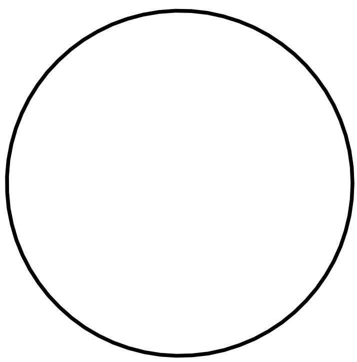
Ἔστω κύκλος τις ὅστις ἐστὶ ἡ τούτου περίμετρος πιθαμῶν κβ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι καὶ τὴν τούτου διάμετρον. Δεῖ οὖν τοῦτο πρῶτον γιγνώσκειν ὅτι παντὸς κύκλου περίμετρος, τριπλάσιον λόγον καὶ α/ζ ἔχει ἐκ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ. Ποίησον οὖν ἕβδομα (30) ἀκέραια γ καὶ α/ζ. Τὰ δὲ γ καὶ α/ζ γίνονται κβ ἕβδομα. Ποίησον καὶ τὰς κβ σπιθαμὰς τῆς περιμέτρου ἕβδομα· ζ-κις οὖν κβ γίνονται ρνδ ἕβδομα. Μέρισον τὰ ρνδ ἕβδομα μετὰ τῶν κβ ἑβδόμων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ζ. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου σπιθαμῶν ζ, ὅστις κύκλος ἔχει περίμετρον σπιθαμῶν κβ.

α

αεδ

ββ

ζ



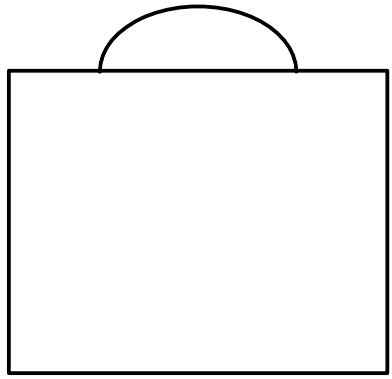
Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς κύκλου ζητῶν εἰδέναι διάμετρον, ποίησον τὴν τοῦ ζητουμένου κύκλου περίμετρον, ἕβδομα, καὶ μέρισον τὰ γενόμενα ἕβδομα πάντοτε μετὰ τῶν κβ ἑβδόμων ὧν ποιοῦσιν τὰ (35) γ καὶ α/ζ. Καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ τοῦ ζητουμένου κύκλου διάμετρος.

ρξη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου εἰδέναι τὴν τούτου περίμετρον.

Ἔστω ὁ αὐτὸς κύκλος ὅστις ἐστὶ ἡ διάμετρος τούτου σπιθαμῶν ζ. Ζητεῖς δὲ τὸ ἀνάπαλιν, ἐκ τῆς διαμέτρου μᾶλλον (98β)(1) εἰδέναι τὴν τούτου περίμετρον. Ἐπεὶ δὲ εἴπομεν ὅτι τριπλάσιον λόγον καὶ α/ζ ἔχει ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου, τριπλασίασον τὴν διάμετρον ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ζ· γ-ὶς οὖν ζ γίνονται κα. Λαβὲ καὶ α/ζ τῶν ζ ὅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α· κα οὖν καὶ α γίνονται κβ. Ἐστὶ δὲ ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κβ. Καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐκ τῆς διαμέτρου τῶν ζ σπιθαμῶν ὅτι ἡ περίμετρος ἐστὶ σπιθαμῶν κβ. Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς κύκλου ζητῶν εἰδέναι περίμετρον, τριπλασίασον τὴν διάμετρον τοῦ ζητουμένου κύκλου. Λαβὲ δὲ καὶ α/ζ τῆς διαμέτρου, καὶ (5) ὅσος γένηται ὁ τριπλασιασμὸς τῆς διαμέτρου μετὰ τῆς προσθέσεως τοῦ α/ζ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ τοῦ ζητουμένου κύκλου περίμετρος.

ρξθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γῆς κεχωσμένου κύκλου, μέρος δὲ τούτου φαινόμενον, εἰδέναι διάμετρον καὶ περίμετρον πόσων ἐστὶ σπιθαμῶν.

Ἔστω κύκλος τις ἐκ λίθου γεγενημένος καὶ ὑπὸ γῆς κεχωσμένος, βραχύ τι μέρος τούτου φαινόμενον, ὅπερ κατὰ πλάτος μὲν τὸ πρὸς γῆν φαινόμενον μέρος ἐστὶ σπιθαμῶν η. Τὸ δὲ ἀπὸ γῆς μέχρι τῆς κορυφῆς τούτου ὕψος ἐστὶ σπιθαμῶν β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον καὶ περί(10)μετρον πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως:



Λαβὲ τὸ ἥμισυ τοῦ πρὸς γῆν φαινομένου πλάτους τῶν η σπιθαμῶν καὶ πολλαπλασίασον τὸ ἥμισυ εἰς ἑαυτό· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Μέρισον ταῦτας τὰς ις σπιθαμὰς μετὰ τῶν β σπιθαμῶν τοῦ ὕψους καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς η· β-ὶς γὰς η ις γίνονται. Ἕνωσον ταῦτας τὰς η σπιθαμὰς μετὰ τῶν β τοῦ ὕψους δι' ὧν ἐμέρισας τὰ ις, καὶ (15) γίνονται ι. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ ἀφανοῦς τούτου κύκλου σπιθαμῶν ι. Τριπλασίασον τὰς ι σπιθαμὰς τῆς διαμέτρου καὶ γίνονται λ. Λαβὲ καὶ α/ζ τῶν ι, ὅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α καὶ γ/ζ μιᾶς σπιθαμῆς. Ἕνωσον τὰς λ σπιθαμὰς μετὰ τῆς α καὶ γ/ζ καὶ γίνονται λα καὶ γ/ζ μιᾶς σπιθαμῆς. Κατὰ γ' οὖν τὸν γεωμετρικὸν ὅρον τὸν λέγοντα ὅτι, πάσα περίμετρος, τριπλάσιον λόγον καὶ α/ζ ἔχει τῆς περιμέτρου, ἐστὶ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἀφανοῦς τούτου κύκλου σπιθαμῶν λα καὶ γ/ζ μιᾶς σπιθαμῆς.

Καὶ ἄλλως: Ἔστω ὁ αὐτὸς μὴ ἐξ' ὅλου φαινόμενος κύκλος ἀλλὰ τὸ ἔλαττον μὲν τούτου μέρος φαινόμενον (20) , τὸ μεῖζον δὲ ὑπὸ γῆς κρυπτόμενον μέρος. Ἐστὶ δὲ τὸ πρὸς γῆν φαινόμενον τούτου μέρος σπιθαμῶν η ὡς εἴπομεν. Ποίησόν δε ἀνωτέρω τῆς εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν ἑτέραν εὐθείαν γραμμήν. Ζήτει δὲ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ ἑτέρα εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας. Ἔστω δὲ σπιθαμῶν ς. Ζήτει δὲ ἀπὸ τῆς κατωτέρω μείζονος εὐθείας γραμμῆς, μέχρι τῆς ἄνωθεν ἐλάττονος εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν, πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί.

Ἔστω δὲ (25) ἡ τούτων διάστασις α σπιθαμῆς. Πολλαπλασίασον τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐλάττονος ἄνωθεν εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν τούτων διάστασιν ἥτις ἐστὶ σπιθαμὴ α· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α. Πρόσθες οὖν καὶ ταύτην τὴν α σπιθαμὴν ἐπὶ τῶν θ καὶ γίνονται σπιθαμαὶ ι. Ἄφελε ταύτας τὰς ι σπιθαμὰς ἐκ τῶν ις καὶ ἀπομένοσιν σπιθαμαὶ ς. Διπλασίασον τὴν (30) τῶν δύο εὐθειῶν γραμμῶν διάστασιν ἥτις ἐστὶ σπιθαμὴ α· β-ὶς οὖν α γίνονται β. Μέρισόν δε τὰς ς σπιθαμὰς ἃς ἀπέμειναν ἐκ τῶν ις, μετὰ τῶν β καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ. Ἀπὸ γ’ οὖν τῆς μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν, μέχρι τοῦ κέντρου, ταυτὸν δ’ εἰπεῖν μέχρι τῆς διαμέτρου ἐστὶ σπιθαμαὶ γ. Πολλαπλασίασον ταύτας τὰς γ σπιθαμὰς εἰς ἑαυτάς· γ-ὶς γ’ οὖν γ γίνονται θ. Ἕνωσον ταύτας μετὰ τῶν ις ὧν ἐπολλαπλασίασας τὸ ἥμισυ τῶν η, καὶ ἐγένοντο δ-κις δ, ις, καὶ γίνονται σπιθαμαὶ κε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν κε ἥτις ἐστὶ ε· ε-κις γὰρ ε, κε γίνονται. Ἐστὶ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου σπιθαμῶν ε, ἡ δὲ ὅλη διάμετρος σπιθαμῶν ι.

Καὶ ἄλλως: Τετραπλασίασον τὰς κε σπιθαμάς· δ-κις οὖν κε γίνονται ρ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρ ἥτις ἐστὶ ι· (35) ι-κις γὰρ ι γίνονται ρ. Ἐστὶ δὲ ἡ ὅλη διάμετρος τοῦ ἀφανοῦς τούτου κύκλου σπιθαμῶν ι, ὡς καὶ διὰ τῆς πρώτης μεταχειρίσεως οὕτως εὕραμεν. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τῶν ι σπιθαμῶν, εὑρίσκεται ἡ περίμετρος σπιθαμῶν λα καὶ γ/ζ ὡς ἀνωτέρω σαφέστερον εἴπομεν.

Ὡσαύτως καὶ παντὸς μὴ φαι(99α)(1)νομένου κύκλου ζητῶν διάμετρον τε καὶ περίμετρον, διὰ μόνου τοῦ φαινομένου μέρους, ἔχεις εἰδέναι διὰ τῶν εἰρημένων δύο μεταχειρίσεων τὴν τούτου διάμετρόν τε καὶ περίμετρον πόσων σπιθαμῶν εἰσί.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ταυτόν δ’ εἰπεῖν ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ι σπιθαμῶν μέχρι τῆς μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν, πόση ἐστὶ καθ' ὕψος ἡ τούτων διάστασις. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἀνωτέρω ἐλάττονος εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν, πόση ἐστὶ καθ' ὕψος ἡ τούτων διάστασις. Πολλα(5)πλασίασον τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Ἄφελε ταῦτα ἐκ τῶν κε καὶ ἀπομένοσιν θ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν θ ἥτις ἐστὶ γ. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ τῆς διαμέτρου ταυτὸν γὰρ ἐστί, μέχρι τῆς μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν, καθ' ὕψος διάστασις σπιθαμῶν γ.

Πολλαπλασίασον πάλιν τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῶν ι σπιθαμῶν· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐλάττονος ἀνωτέρω εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Ἄφελε ταῦτα ἐκ τῶν κε καὶ ἀπομένοσιν ις. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ις ἥτις ἐστὶ δ. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ (10) τῆς διαμέτρου, μέχρι τῆς ἐλάττονος ἄνωθεν εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν, καθ' ὕψος διάστασις σπιθαμῶν δ.

Ὡσαύτως καὶ πᾶν ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἀπτομένου τῇ διαμέτρῳ, πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ καθ'ὕψος διάστασις μέχρι τῆς ἄνωθεν ἐγκαρσίου εὐθείας γραμμῆς, ἣν ἂν ἔχῃς ζητῶν.

Ἔχεις δὲ καὶ ἄλλως εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον.

[1]Ἔστω ὁ αὐτὸς κύκλος οὐχ ὑπὸ γῆς κρυπτόμενος, ἀλλὰ φαινόμενος ὅλος. Ποίησον ἀνωτέρω τοῦ κέντρου εὐθείαν

1. Καὶ τὸ ἀνάπαλιν: Ἔστω ὅτι ἀνωτέρω τοῦ κέντρου ἐποίησας εὐθείαν γραμμὴν ἀπέχουσα τοῦ κέντρου σπιθαμῶν δ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι οὕτως: Πολλαπλασίασον τὴν διάμετρον εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Διπλασίασον τὰς σπιθαμὰς ἃς ἀφίσταται ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας καὶ γίνονται η. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε ξδ ἐκ τῶν ρ

γραμμήν. Ἔστω δὲ αὐτὴ σπιθαμῶν ς. Ποίησον καὶ κατωτέρω τοῦ κέντρου ἑτέραν εὐθείαν γραμμήν. Ἔστω δὲ αὐτὴ σπιθαμῶν η. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς (15) κατωτέρω εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν, μέχρι τῆς ἀνωτέρω εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν, ἡ καθ' ὕψος τούτων διάστασις σπιθαμῶν ζ.

Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὸ τὸ ἥμισυ τῆς ἄνωθεν ἐλάττονος εὐθείας γραμμῆς τῶν ς σπιθαμῶν· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν καθ' ὕψος τούτων διάστασιν τῶν ζ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Ἕνωσον ταύτας μετὰ τῶν θ σπιθαμῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ νη. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὸ καὶ τὸ ἥμισυ τῆς κάτωθεν (20) μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Ἄφελε ταύτας ἐκ τῶν νη καὶ ἀπομένοσιν μβ. Διπλασίασον τὰς ζ σπιθαμὰς τῆς καθ' ὕψον διαστάσεως καὶ γίνονται ιδ. Μέρισον τὰς μβ σπιθαμὰς μετὰ τῶν ιδ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς κατωτέρω μείζονος εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν, μέχρι τοῦ κέντρου, σπιθαμαὶ γ. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ.

α
δβ
αδ
γ

Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς κάτωθεν μείζονος

καὶ ἀπομένοσιν λς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λς ἥτις ἐστὶ ς. Ἐστὶ δὲ ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, σπιθαμῶν ς. Ἔστω δὲ ὅτι ἐποίησας καὶ ἑτέραν εὐθείαν γραμμὴν ἀπέχουσαν τοῦ κέντρου σπιθαμὰς γ. Πολλαπλασίασον τὴν διάμετρον εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Διπλασίασον τὰς γ σπιθαμὰς ἃς ἀφίσταται ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, καὶ γίνονται ς. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· ς-κις οὖν ς γίνονται λς. Ἄφελε λς ἐκ τῶν ρ καὶ γίνονται ξδ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ξδ ἥτις ἐστὶ η. Ἐστὶ δὲ ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, σπιθαμῶν η. Ὡσαύτως δὲ καὶ πάσαν ἄλλην εὐθείαν γραμμὴν, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

εὐθείας γραμμῆς τῶν η σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Ἕνωσον ταύτας μετὰ τῶν θ καὶ γίνονται ὁμοῦ κε. Ζήτει τὴν ρίζαν (25) τῶν κε ἥτις ἐστὶ ε. Ἐστὶ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου σπιθαμῶν ε. Ἡ δὲ ὅλη διάμετρος σπιθαμῶν ι.

Καὶ ἄλλως: Τετραπλασίασον τὰς κε σπιθαμάς· δ-κις οὖν κε γίνονται ρ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρ ἥτις ἐστὶ ι. Ἐστὶ δὲ ἡ καθ' ὅλου διάμετρος σπιθαμῶν ι. Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου κύκλου ζητῶν εἰδέναι τὴν διάμετρόν τε καὶ περίμετρον, διὰ τῶν ὁμοίων τούτων μεταχειρίσεων ὧν δεδηλώκαμεν, ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ρο΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς κύκλου τεθῆναι τετράγωνον σχῆμαν κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, καὶ εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω τις κύκλος ὅστις ἐστὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ σπιθαμῶν ς, τεθημένου δὲ (30) ἐντὸς τούτου, σχῆμα τετράγωνον, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι ἑκάστην πλευράν, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Δεῖ οὖν τοῦτο πρῶτον εἰδέναι, ὅτι ὅσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου διαγώνιος, ἡ ἀπὸ γωνίαν εἰς γωνίαν γεγενημένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος ἐστὶ σπιθαμῶν ς, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου διαγώνιος σπιθαμῶν ς ἐστί. Πολλαπλασίασόν δε τὰς ς σπιθαμὰς εἰς ἑαυτάς· ς-κις οὖν ς γίνονται λς. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῶν λς ὅπερ ἐστὶ ιη. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ιη ἥτις ἐστὶ δ καὶ ιγ/νδ βραχύ τι ἐλάττω. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου σχήματος σπιθαμῶν δ καὶ ιγ/νδ βραχύ τι ἐλάττω. Τὰ δὲ ιγ/νδ ἐστὶ ἔγγιστα α/δ. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ σπιθαμῶν δ καὶ α/δ μιᾶς σπιθαμῆς ἔγγιστα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴν (99β)(1) τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου ταυτόν δ' εἰπεῖν τοῦ κύκλου διάμετρον. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τοῦ ἡμίσεως πολλαπλασιασμοῦ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου, τοσαύτη ἐστὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἰσοπλεύρου σχήματος.

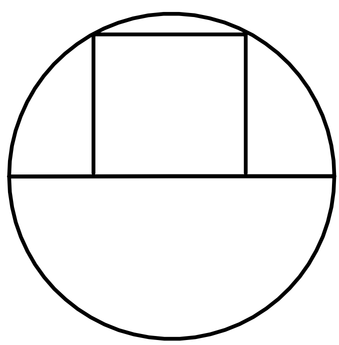
ροα´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς ἡμισφαιρίου σχήματος, τεθῆναι τετράγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον καὶ εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰν πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω ἡμισφαίριον σχῆμα ὅπερ ἐστὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ σπιθαμῶν ιβ, τεθημένου δὲ ἐντός, σχῆμα τετράγωνον ἰσόπλευρον κατὰ τὸ ἐγχωροῦν (5) μεῖζον μέγεθος. Ζητεῖς εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰν πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν διάμετρον τοῦ ἡμισφαιρίου ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ιβ ὡς εἴπομεν· ιβ-κις οὖν ιβ γίνονται ρμδ. Μέρισον ταῦτα πάντοτε μετὰ τῶν ε. Γίνεταί δε νῦν ὁ τούτων διαμερισμὸς κη καὶ δ/ε.

αδδ

εε

κη καὶ δ/ε



Ζήτει τὴν ρίζαν τοῦ κη καὶ δ/ε ἥτις ἐστὶ ε καὶ ια/λ. Τὰ γὰρ ε καὶ ια/λ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα εἰς ἑαυτὰ πολλαπλασιάζοσιν κη καὶ ψκα/ϡ ἅπερ ἐστὶ κη καὶ δ/ε. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ σχήματος (10) σπιθαμῶν ε καὶ ια/λ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ὅμοιον ζήτημαν, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν διάμετρον τοῦ ζητουμένου ἡμισφαιρίου. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ε.

Ζήτει δὲ τὴν ρίζαν τοῦ τοιούτου διαμερισμοῦ, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τοῦ γεγονότος διαμερισμοῦ, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ἐντὸς τοῦ ἡμισφαιρίου τεθημένου τετραγώνου σχήματος οὗ ζητεῖς.

ροβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τετραγώνου σχήματος κύκλος τεθῆναι, καὶ εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον καὶ περίμετρον πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω σχῆμαν τατράγωνον ἰσόπλευρον, ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς σπιθαμῶν ζ. Ἡ δὲ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κη. Τεθημένου δὲ κύκλου ἐντὸς κατὰ (15) τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι τὴν τούτου διάμετρον καὶ περίμετρον, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Ζήτει πρῶτον τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅση ἐστὶ καὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Τριπλασίασον τὴν διάμετρον· γ-ὶς οὖν ζ γίνονται κα. Λαβὲ καὶ α/ζ τῶν ζ ὅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α καὶ ἕνωσον τοῦτο μετὰ τῶν κα καὶ γίνονται ὁμοῦ κβ. (20) Ἐστὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου σπιθαμῶν κβ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἐστὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ ἡ τούτου περίμετρος δήλη ἡμῖν γίνεται.

ρογ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐπὶ σχήματος τετραγώνου οὗπερ λέγεται ρόμβος, κύκλος τεθῆναι ἐντός, καὶ εἰδέναι καὶ τὴν τοῦ ρόμβου καὶ τοῦ κύκλου διάμετρον.

Ἔστω σχῆμα τετράγωνον ὅπερ εἰώθαμεν καλεῖν ρόμβον, ἑκάστη δὲ τούτου πλευρὰ ἔστω σπιθαμῶν ζ. Ἔστω δὲ καὶ ἡ ἐγκάρσιος τούτου διαγώνιος σπιθαμῶν ζ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι καὶ τὴν ὄρθιον τούτου διαγώνιον πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Τεθημένου δὲ κύκλου ἐντός, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι καὶ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ τὴν τούτου περίμετρον.

Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως: Ποίησον ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ὀρθίας γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγωνίου τῶν ζ σπιθαμῶν, εὐθείαν γραμμήν. Ζήτει δὲ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ αὐτὴ ἡ εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας.

Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ Λατινικῶς καλουμένου κανόνος τῆς σκάδρας, ἥτις σκάδρα κατὰ τὴν ἡμετέραν γλῶτταν σημαίνει τετράγωνος ἥτις ἐστὶ ὁ παρών: Πολλαπλασίασον τὴν τῶν ζ σπιθαμῶν πλευρὰν εἰς ἑαυτή· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου διαγώνου τῶν ζ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· γ α/β-κις οὖν γ α/β τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ιβ καὶ α/δ. Ἄφελε τὰ ιβ καὶ α/δ ἐκ τῶν μθ, καὶ ἀπομένοσιν λς καὶ γ/δ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λς καὶ γ/δ ἥτις ἐστὶ ς καὶ α/ις. Τὰ γὰρ ς καὶ α/ις τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα πολλαπλασιάζοσιν κορυφὴν λς καὶ ρϟγ/σνς ἅπερ ἐστὶ λς καὶ γ/δ. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ὀρθίου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγώνου τῶν ζ σπιθαμῶν, ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τῶν λς καὶ γ/δ ἥτις ἐστὶ ὡς εἴπομεν σπιθαμαὶ ς καὶ α/ις μιᾶς σπιθαμῆς. Διπλασίασον ταύτας καὶ γίνονται ιβ καὶ β/ις. Ἐστὶ δὲ ἡ ὄρθιος διαγώνιος ἡ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τῆς κάτω, σπιθαμῶν ιβ καὶ β/ις μιᾶς σπιθαμῆς.

Καὶ ἄλλως προχειρεστέρως: Πολλαπλασίασον τὰς δύο πλευρὰς τὰς ἀνὰ ζ σπιθαμῶν οὖσαις, εἰς ἑαυτάς· ιδ-κις οὖν ιδ γίνονται (100α)(1) ρϟς. Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴν καὶ τὴν ἐγκάρσιον διαγώνιον τῶν ζ σπιθαμῶν· ζ-κις οὖν ζ γίνονται ρμθ. Ἄφελε ταύτας ἐκ τῶν ρϟς καὶ ἀπομένοσιν ρμζ. Ἡ δὲ ρίζα τῶν ρμζ ἐστὶ ιβ καὶ β/ις. Εὗρες οὖν καὶ οὕτως προχειρεστέρως ὅτι ἡ ὄρθιος διαγώνιος, ἡ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τῆς κάτω, ἐστὶ σπιθαμῶν ιβ καὶ β/ις μιᾶς σπιθαμῆς.

Ἐὰν δὲ τουναντίον ζητῆς ὅτι ἡ μὲν ὄρθιος διαγώνιος, ἡ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τῆς κάτω, ἐστὶ σπιθαμῶν ιβ καὶ β/ις μιᾶς σπιθαμῆς, ἡ ἐγκάρσιος διαγώνιος πόσων σπιθαμῶν ἐστί, λαβὲ τὰ ἡμίση τῶν ιβ καὶ β/ις ὅπερ ἐστὶ ς καὶ α/ις, καὶ πολλαπλα(5)σίασον τὰ ς καὶ α/ις εἰς ἑαυτά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς λς καὶ γ/δ. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὴν μίαν πλευρὰν τῶν ζ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Ἄφελε τὰ λς καὶ γ/δ ἐκ τῶν μθ, καὶ ἀπομένοσιν ιβ καὶ α/δ. Ἡ δὲ ρίζα τῶν ιβ καὶ α/δ ἐστὶ γ καὶ α/β. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ πλαγίου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ, σπιθαμαὶ γ καὶ α/β. Διπλασίασον ταύτας καὶ γίνονται ζ. Ἐστὶ δὲ ἡ ὅλη ἐγκάρσιος διαγώνιος σπιθαμῶν ζ.

Καὶ ἄλλως προχειρεστέρως: Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν ὅλην ὄρθιον διαγώνιον ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ιβ καὶ β/ις μιᾶς σπιθαμῆς, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ρμζ. Ἕνωσον δύο πλευράς· β-ὶς οὖν ζ γίνονται ιδ. Πολλαπλασίασον τὰς δύο ταύτας πλευρὰς εἰς ἑαυτάς· ιδ-κις οὖν ιδ γίνονται ρϟς. Ἄφελε (10) τὰ ρμζ ἐκ τῶν ρϟς καὶ ἀπομένοσιν μθ. Ἡ δὲ ρίζα τῶν μθ ἐστὶ ζ. Εὗρες οὖν καὶ οὕτως προχειρεστέρως ὅτι ἡ ὅλη ἐγκάρσιος διαγώνιος ἐστὶ σπιθαμῶν ζ ὥσπερ γὰρ ἀπὸ τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ, ἡ ὄρθιος δήλη ἡμῖν γίνεται, οὕτως καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθίου, ἡ ἐγκάρσιος γνώριμος ἡμῖν γίνεται. Ὅσαι δὲ σπιθαμαὶ εἰσὶ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ὀρθίου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ τῶν ζ σπιθαμῶν, σπιθαμαὶ ς καὶ α/ις μιᾶς σπιθαμῆς. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, σπιθαμῶν ς καὶ α/ις μιᾶς σπιθαμῆς. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ ἡ τούτου περίμετρος γνώριμος γίνεται.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν (15) τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ὅπερ ἐστὶ ἡ ἐγκάρσιος διαγώνιος τοῦ ρόμβου ἰσάριθμος μετὰ τῶν τούτου πλευρῶν, ἔχεις εἰδέναι ἀπὸ τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ τὴν ὄρθιον διαγώνιον, ἀπὸ δὲ τῆς ὀρθίου τὴν ἐγκάρσιον, διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας. Ὅση δὲ ἐστὶ ἡ ὄρθιος διαγώνιος ἡ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ὀρθίου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ, τοσούτων σπιθαμῶν καὶ ἡ τοῦ ἐντὸς τεθημένου κύκλου διάμετρος. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ ἡ τούτου περίμετρος γνώριμος γίνεται.

ροδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς κύκλου τεθῆναι σχῆμα τρίγωνον, καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τὴν τοῦ τριγώνου κάθετον. Ἀπὸ δὲ τῆς τοῦ τριγώνου καθέτου, εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τις κύκλος ὅστις ἐστὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ (20) σπιθαμῶν ιβ, τεθημένου δὲ ἐντὸς τοῦ τοιούτου κύκλου, τρίγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ κάθετος τοῦ τριγώνου. Ἐπεὶ γὰρ τοῦ τριγώνου οὐ λέγεται διάμετρος ἀλλὰ κάθετος. Ἀπὸ δὲ τῆς καθέτου τοῦ τριγώνου ἔχεις εἰδέναι καὶ ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Εὑρίσκονταί δε ταῦτα οὕτως: Λαβὲ γ/δ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἥτις ἐστὶ ὡς εἴπομεν ιβ σπιθαμῶν. Τὰ δὲ γ/δ τῶν ιβ σπιθαμῶν ἐστὶ θ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ κάθετος τοῦ τριγώνου σπιθαμῶν θ.

Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ τὴν κάθετον τοῦ τριγώνου· θ-κις οὖν θ γίνονται πα. Πρόσθες καὶ α/γ (25) τῶν πα. Τὸ δὲ α/γ τῶν πα ἐστὶ κζ· κζ δὲ καὶ πα ὁμοῦ γίνονται ρη. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρη ἥτις ἐστὶ ι καὶ ζ/ιη. Ἑκάστη οὖν πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἐστὶ ι καὶ ζ/ιη ἔγγιστα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν τὰ γ/δ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ ἡ κάθετος τοῦ τριγώνου, πολλαπλασίασόν δε τὴν κάθετον τοῦ τριγώνου εἰς ἑαυτή. Πρόσθες καὶ α/γ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τῆς ὁμάδος τούτων, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ἐντὸς τοῦ κύκλου τεθημένου τριγώνου σχήματος.

ροε´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἰδέναι τὴν τοῦ κύκλου κάθετον.

Ἔστω ὅτι εἶδας μὲν τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, οὖσαν σπιθαμῶν ι καὶ ζ/ιη μιᾶς σπιθαμῆς. (30) Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ τοῦ τριγώνου κάθετος. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου ἥτις ἐστὶ ὡς εἴπομεν σπιθαμῶν ι καὶ ζ/ιη. Ταῦτα δὲ εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν κορυφὴν ρη. Ζήτει τὸ α/δ μέρος τῶν ρη ὅπερ ἐστὶ κζ. Ἄφελε τὰ κζ ἐκ τῶν ρη καὶ ἀπομένοσιν πα.

Καὶ ἄλλως: Λαβὲ γ/δ τῶν ρη ἅπερ ἐστὶ πα. Ταυτὸν γὰρ ἐστὶ ἀφελεῖν α/δ ἐκ τῶν ρη καὶ λαβεῖν γ/δ τῶν ρη, καὶ ἑτέρου παντὸς ἀριθμοῦ.

Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν πα ἥτις ἐστὶ θ· θ-κις γὰρ θ γίνονται πα. Καὶ ἰδοὺ εὗρες ἐκ τῆς πλευρᾶς ὅτι ἡ κάθετος τοῦ τριγώνου ἐστὶ σπιθαμῶν θ, καθὼς εὗρες ἐκ τῆς καθέτου τῶν θ σπιθαμῶν ὅτι ἡ πλευρὰ (35) ἐστὶ σπιθαμῶν ι καὶ ζ/ιη. Εἰ δὲ καὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ζητῆς εἰδέναι ἐκ τῆς καθέτου τοῦ τριγώνου, πρόσθες τὸ α/γ μέρος τῆς καθέτου τοῦ τριγώνου, τουτέστι τῶν θ σπιθαμῶν· θ οὖν καὶ τὸ α/γ τῶν θ ὅπερ ἐστὶ γ, ὁμοῦ γίνονται ιβ. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου σπιθαμῶν ιβ.

(100β)(1) Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, τοῦ ἐντὸς κύκλου τεθημένου τριγώνου, ἔχεις εἰδέναι διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἀπὸ μὲν τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τὴν τοῦ τριγώνου κάθετον, ἀπὸ δὲ τῆς καθέτου τοῦ τριγώνου, τὴν τοῦ τριγώνου πλευράν. Καὶ τὸ ἀνάπαλιν: Ἀπὸ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς ἔχεις εἰδέναι τὴν τοῦ τριγώνου κάθετον, ἀπὸ δὲ τῆς καθέτου τοῦ τριγώνου, τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον.

ρος´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τριγώνου σχήματος κύκλος τεθῆναι καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον.

Ἔστω τρίγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον, ὅπερ ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς ἐστὶ σπιθαμῶν δ. Τεθημένου δὲ κύκλου ἐντός, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι ἀπὸ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως:

Ζήτει πρῶτον τὴν διάμετρον τοῦ τριγώνου πόσων σπιθαμῶν ἐστί, καθὼς οὖν εἴπομεν ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἰδέναι τὴν τούτου κάθετον. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ἥτις ὡς εἴπομεν ἐστὶ σπιθαμῶν δ· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Ἄφελε α/δ τῶν ις, τουτέστι δ, καὶ ἀπομένοσιν ιβ.

Καὶ ἄλλως: Λαβὲ γ/δ τῶν ις ἅπερ ἐστὶ πάλιν ιβ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ιβ ἥτις ἐστὶ γ καὶ η/ιζ ἔγγιστα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ κάθετος τοῦ τριγώνου, σπιθαμῶν γ καὶ η/ιζ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς. Λαβὲ β/γ τῶν γ καὶ η/ιζ, καὶ τὰ μὲν β/γ τῶν γ ἐστὶ β, τὰ δὲ β/γ τῶν η/ιζ ταυτόν δ' εἰπεῖν τῶν κδ/να, ἐστὶ ις/να. Ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν β καὶ γίνονται β καὶ ις/να. Ἐστὶ δὲ τὰ β/γ τῶν γ καὶ η/ιζ, β καὶ ις/να. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος σπιθαμῶν β καὶ ις/να, τουτέστι β καὶ α/γ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἔχεις εἰδέναι καὶ τὴν τούτου περίμετρον.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν τὸ ἐντὸς τριγώνου τεθημένου κύκλου, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ροζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τριγώνου σχήματος τεθῆναι τετράγωνον καὶ εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά.

Ἔστω τρίγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον ὅπερ ἐστὶ ἑκάστη τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ι, τεθημένου δὲ ἐντός του τετράγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι ἐκ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς καὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις οὖν τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Πολλαπλασίασον καὶ ἐνταῦτα εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου σχήματος· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Λαβὲ δὲ καὶ ἐνταῦτα γ/δ τῶν ρ ἅπερ ἐστὶ οε. Πολλαπλασίασον τὰ οε (20) μετὰ τῶν ις· ις-κις οὖν οε γίνονται ἅσ. Πολλαπλασίασον τὰ οε καὶ μετὰ τῶν ιβ· ιβ-κις οὖν οε γίνονται ϡ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ͵ασ· λδ καὶ ιβ/ιθ. Ζήτει δὲ καὶ τὴν ρίζαν τῶν ϡ ἥτις ἐστὶ λ. Ἄφελε τὰ λ ἐκ τῶν λδ καὶ ιβ/ιθ καὶ ἀπομένοσιν δ καὶ ιβ/ιθ. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου σπιθαμῶν δ καὶ ιβ/ιθ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν τὸ ἐντὸς τριγώνου τεθήμενον σχῆμα τετράγωνον, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, λαβὲ δὲ καὶ γ/δ τοῦ ἐκ ταύτης γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ὅσα ἐστὶ τὰ γ/δ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασίασον ταῦτα, πρῶτον μὲν μετὰ τῶν ις, εἶθ' οὕτως μετὰ τῶν ιβ. (25)

Ζήτει δὲ διηρημένως ἑκάστου ρίζαν τῶν δύο τούτων γεγονότων πολλαπλασιασμῶν. Ἄφελέ δε τὴν ἐλάττονα ρίζαν ἐκ τῆς μείζονος, καὶ ὅσον ἐστὶ τὸ ἐναπομένον μέρος τῆς μείζονος ρίζης, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγωνοῦ, τοῦ ἐντὸς τοῦ τριγωνοῦ τεθημένου σχήματος.

ροη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τριγωνοῦ, μέχρι ἑκάστης γωνίας πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω τρίγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον, ὅπερ ἑκάστη τούτου πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν ι. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι ἑκάστης γωνίας πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον καὶ ἐνταῦτα εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγωνοῦ ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ι· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Λαβὲ α/γ τῶν ρ (30) ὅπερ ἐστὶ λγ καὶ α/γ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λγ καὶ α/γ ἥτις ἐστὶ ε καὶ ιδ/ιη. Τὰ γὰρ ε καὶ ιδ/ιη εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν λγ καὶ α/γ βραχύ τι πλείω.

Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τριγωνοῦ, μέχρι ἑκάστης γωνίας, τῶν τριῶν, ἡ ρίζα τῶν λγ καὶ α/γ ἥτις ἐστὶ ὡς εἴπομεν σπιθαμαὶ ε καὶ ιδ/ιη μιᾶς σπιθαμῆς. Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τριγωνοῦ σχήματος. Λαβὲ δὲ τὸ α/γ μέρος τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τοῦ τρίτου μέρους οὗ ἔλαβες ἐκ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, τασαῦται σπιθαμαὶ εἰσὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου (35) μέχρι ἑκάστης γωνίας τῶν τριῶν.

ροθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι σκαληνοῦ σχήματος, τοῦ ἐκ τετραγώνου ἔχοντος δύο πλευράς, πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη τούτου πλευρά. Εἰδέναι δὲ καὶ τὴν ἐντὸς τούτου τεθημένου κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον.

Ἔστω σχῆμα τρίγωνον (101α)(1) ἀνίσους ἔχον πλευράς, ὅπερ εἰώθαμεν λέγειν σκαληνόν. Πᾶν γὰρ τρίγωνον τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς, σκαληνὸν λέγεται. Ἔστωσάν δε αἱ δύο τούτου πλευραὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου ὀρθογωνοῦ σχήματος συντεθήμεναι. Ἔστω δὲ ἡ μὲν ὄρθιος τούτου πλευρά, σπιθαμῶν δ, ἡ δὲ ἐγκάρσιος σπιθαμῶν γ. Ἡ δὲ ὑποκλίνουσα ὄρθιος, σπιθαμῶν ε. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ τούτου πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Τεθημένου δὲ κύκλου ἐντός, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι καὶ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον καὶ περίμετρον. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως:

Ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι τὴν ἀποκλίνουσαν μείζονα πλευρά, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις οὖν εἰδέναι τὴν ἀποκλίνουσαν μείζονα πλευρά, ἐκ τῆς ἐγκαρσίου καὶ ὀρθίου πλευρᾶς τῶν γ καὶ δ σπιθαμῶν, διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας, οὗ εἴπομεν ἐπὶ τοῦ ρογ^{ου} κεφαλαίου. Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴ τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν γ σπιθαμῶν· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν ὄρθιον πλευρὰν τῶν δ σπιθαμῶν· δ-κις οὖν δ γίνονται ις.

Ἐπεὶ ἡ ἀποκλίνουσα ἐστὶ μείζονα τῆς ἐγκαρσίου καὶ ὀρθίας πλευρᾶς, ἕνωσον τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς ἐγκαρσίου καὶ ὀρθίου πλευρᾶς, τουτέστι τὰ θ καὶ ις καὶ γίνονται ὁμοῦ κε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν κε ἥτις ἐστὶ ε· ε-κις γὰρ ε, κε γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ ἀποκλίνουσα μείζονα πλευρά, σπιθαμῶν ε.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι τὴν ὄρθιον πλευρὰν πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Πολλαπλασίασον τὴν ἀποκλίνουσαν μείζονα πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν γ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Ἄφελε τὸν ἐλάττονα πολλαπλασιασμὸν ἐκ τὸν μείζονα, τουτέστι τὰ θ ἐκ τῶν κε καὶ ἀπομένοσιν ις. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ις ἥτις ἐστὶ δ· δ-κις γὰρ δ γίνονται ις. Ἐστὶ δὲ ἡ ὄρθιος πλευρὰ σπιθαμῶν δ.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Πολλαπλασίασον τὴν ἀποκλίνουσαν μείζονα πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ὄρθιον πλευρὰν τῶν δ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· δ-κις οὖν δ γίνονται ις. Ἄφελε τὸν ἐλάττονα πολλαπλασιασμὸν ἐκ τὸν μείζονα, τουτέστι τὰ ις ἐκ τῶν κε καὶ ἀπομένοσιν θ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν θ ἥτις ἐστὶ γ· γ-ὶς γὰρ γ γίνονται θ. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐγκάρσιος πλευρά, σπιθαμῶν γ. Καὶ ἰδοὺ τῷ τρόπῳ τούτῳ, αἱ δύο πλευραί, δήλην ἡμῖν ποιοῦσιν τὴν τρίτον πλευρὰν ἐναλλάξ, πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ σκαληνοῦ τριγωνοῦ σχήματος.

Ἐπεὶ δὲ ζητεῖς εἰδέναι καὶ τὴν ἐντὸς τεθημένου διάμετρον καὶ περίμετρον, ἕνωσον τὰς ἐλάττονας δύο τούτου πλευρὰς τῶν γ καὶ δ σπιθαμῶν δηλονότι, καὶ γίνονται ὁμοῦ σπιθαμαὶ ζ. Ἄφελε ἐξ' αὐτῶν τὴν τρίτη μείζονα πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν καὶ ἀπομένοσιν σπιθαμαὶ β. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου σπιθαμῶν β. Ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου, καὶ ἡ τούτου περίμετρος γνώριμος γίνεται.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν σκαληνοῦ ἔχοντας δύο τούτου πλευρὰς ἐκ τοῦ τετραγωνοῦ σχήματος συντεθημένας, διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς, ἅπερ νῦν δεδηλώκαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος.

ρπ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐντὸς τοῦ τοιούτου σκαληνοῦ σχήματος τετράγωνον τεθῆναι, καὶ εἰδέναι ἀπὸ τῶν τοῦ σκαληνοῦ πλευρῶν, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγωνοῦ πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω τὸ αὐτὸν σκαληνὸν σχῆμαν, ὅπερ ἡ μὲν μείζονα αὐτοῦ πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν ε, ἡ δὲ ἐλάττω, τριῶν, ἡ δὲ ἀνάμεσον τούτων, δ, καθὼς οὕτως καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου εἴπομεν. Τεθημένου δὲ ἐντὸς τούτου τετράγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον, κατὰ τὸ ἐγχωροῦν μεῖζον μέγεθος, ζητεῖς εἰδέναι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγωνοῦ πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον πρὸς ἄλληλας τὰς δύο ἐλάττονας πλευρὰς τῶν γ καὶ δ σπιθαμῶν· δ-κις οὖν γ γίνονται ιβ. Ἕνωσον τὰς δύο ταῦτας ἐλάττονας πλευρὰς τῶν γ καὶ δ σπιθαμῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ σπιθαμαὶ ζ.

Μέρισον τὰς (30) ιβ σπιθαμὰς μετὰ τῶν ζ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α καὶ ε/ζ. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγωνοῦ, σπιθαμὴ α καὶ ε/ζ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

ρπα΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἐκ τῶν πλευρῶν, τὴν διαγώνιον εὐθείαν γραμμὴν εἰδεῖν τοῦ τετραγωνοῦ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Ἔστω τετράγωνον σχῆμα ἰσόπλευρον, ἐφ’ ἑκάστης πλευρᾶς σπιθαμῶν ε. Γενομένης δὲ εὐθείας γραμμῆς ἀπὸ γωνίας εἰς γωνίαν, ζητεῖς εἰδέναι ταύτην τὴν διαγώνιον εὐθείαν γραμμὴν πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις οὖν ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας, οὗ εἴπομεν ἐν τῷ ρπθῳ (35) κεφαλαίῳ.

Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴν τὴν ὄρθιον πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴν καὶ ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Καὶ ἐπὶ ἡ διαγώνιος ἐστὶ μείζονα, ἕνωσον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν δύο πλευρῶν (101β)(1) τὰ κε καὶ κε δηλονότι, καὶ γίνονται ν. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ν ἥτις ἐστὶ ζ καὶ α/ιδ. Ἐστὶ δὲ ἡ διαγώνιος εὐθεία γραμμὴ σπιθαμῶν ζ καὶ α/ιδ μιᾶς σπιθαμῆς.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν: Ἔστω οἶδας τὴν μὲν διαγώνιον, οὖσαν σπιθαμῶν ζ καὶ α/ιδ, τὴν δὲ ὄρθιον σπιθαμῶν ε. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι καὶ τὴν ἐγκάρσιον πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Πολλαπλασίασον τὴν διαγώνιον εἰς ἑαυτή, ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ζ καὶ α/ιδ καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ν. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ὄρθιον τῶν ε σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Ἄφελε τὸν ἐλάττονα πολλαπλασιασμὸν ἐκ τὸν πλείονα, τουτέστι ἄφελε τὰ κε ἐκ τῶν ν καὶ (5) ἀπομένοσιν κε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν κε ἥτις ἐστὶ ε. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐγκάρσιος πλευρὰ σπιθαμῶν ε. Ὥσπερ γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθίου καὶ ἐγκαρσίου, ἡ διαγώνιος δήλη γίνεται, οὕτως καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἀπὸ τῆς διαγωνίου εὐθείας γραμμῆς καὶ τῆς ὀρθίου πλευρᾶς, γίνεται γνώριμος ἡ ἐγκάρσιος πλευρά, ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τῆς διαγωνίου καὶ ἐγκαρσίου, γίνεται γνώριμος ἡ ὄρθιος πλευρά. Μὴ μόνον γὰρ ἐπὶ τετραγωνοῦ ἰσοπλεύρου γίνεται τοῦτο, ἀλλὰ πολλῷ μᾶλλον καὶ ἐπὶ ἑτέρου ἀνίσου τετραγωνοῦ σχήματος. Τὸ γὰρ ἰσόπλευρον, τὴν διαγώνιον μόνον οὐκ ἔχει γνώριμον, αἱ δὲ τούτου πλευραὶ ἀπὸ μιᾶς μόνης πλευρᾶς, καὶ αἱ λοιπαὶ γνώριμοι γίνονται.

Ἵνα δὲ γένηται σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω τὸ παρὸν σχῆμα ὅπερ (10) λέγεται παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον. Ἐστὶ γὰρ γενέσθαι παραλληλόγραμμον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ὡς τὸ παρὸν σχῆμα ὅπερ εἰώθαμεν καλεῖν ρομβοειδές. Ὁ γὰρ ρόμβος ἔχει σχῆμα τοιοῦτον: καθὼς ἐπὶ τοῦ ρόμβου κεφαλαίου εἴπομεν. Ἔστωσάν δε, αἱ μὲν δύο ἐγκάρσιαι τούτου πλευραί, ἀνὰ η σπιθαμῶν. Αἱ δὲ δύο ὄρθιαι ἀνὰ ς σπιθαμῶν. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὴν διαγώνιον εἰθείαν γραμμὴν πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας.

Πολλαπλασίασον τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν η σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ὄρθιον πλευρὰν τῶν ς σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· (15) ς-κις οὖν ς γίνονται λς. Ἐπεὶ γ’ οὖν ἡ διαγώνιος ἐστὶ μείζονα τῶν η καὶ ς σπιθαμῶν τῶν δύο πλευρῶν, ἕνωσον τὰ ξδ καὶ λς καὶ γίνονται ὁμοῦ ρ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρ ἥτις ἐστὶ ι. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ διαγώνιος εὐθεία γραμμή, σπιθαμῶν ι.

Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι τὴν ἄνωθεν ἢ κάτωθεν ἐγκάρσιον τούτου τετραγώνου πλευράν, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Πολλαπλασίασον τὴν διαγώνιον εὐθείαν γραμμὴν τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ὄρθιον πλευρὰν τῶν ϛ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ϛ-κις οὖν ϛ γίνονται λϛ. Ἄφελε τὰ λϛ ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν ξδ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ξδ ἥτις ἐστὶ η· η-κις γὰρ η ξδ γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ ἄνωθεν καὶ ἡ κάτωθεν ἐγκάρσιος πλευρά, σπιθαμῶν η.

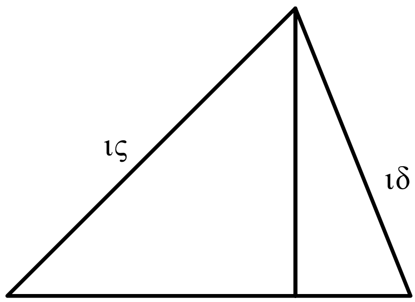
Ἔστω δὲ ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ἑκατέρα τῶν (20) δύο ὀρθίων πλευρῶν, πόσων σπιθαμῶν ἐστί. Πολλαπλασίασον τὴν διαγώνιον εἰθείαν γραμμὴν τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν η σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε τὰ ξδ ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν λϛ.

Ἐστὶ δὲ ἑκάστη ὄρθιος πλευρά, ἡ ρίζα τῶν λϛ ἥτις ἐστὶ ϛ· ϛ-κις γὰρ ϛ, λϛ γίνονται. Καθὼς γὰρ εἴπομεν, ἐκ τῶν πλευρῶν εὑρίσκεται ἡ διαγώνιος, ἀπὸ δὲ τῆς διαγωνίου εὑρίσκονται αἱ πλευραί.

ρπβʹ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι κάθετον τριγωνοῦ σκαληνοῦ σχήματος πόσων σπιθαμῶν ἐστί.

Ἔστω τρίγωνον σχῆμαν ἀνίσους ἔχον πλευράς, ὅπερ σκαληνὸν λέγεται. Πᾶν γὰρ τρίγωνον τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς, σκαληνὸν λέγεται, ὡς εἴπομεν καὶ ἐπὶ τοῦ ροθου κεφαλαίου. Ἔστω δὲ ἡ (25) μὲν μία τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ιδ, ἡ δὲ ἑτέρα ιε, ἡ δὲ τρίτη ιϛ.

Γενομένης δὲ καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ιϛ καὶ ιδ σπιθαμῶν, μέχρι τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ιε σπιθαμῶν, ὥστε, τέμνειν τὸ σκαληνὸν τοῦτο σῶμα δίχα ἐν ἴσῳ τμήματι ἑκατέρων τῶν δύο μερῶν, ζητεῖς εἰδέναι τὴν κάθετον ταύτην εὐθείαν γραμμήν, πόσων σπιθαμῶν ἐστί, καὶ ἐμ ποίῳ τόπῳ δεῖ περαιῶσαι ταύτη κατὰ πλάτος ἐπὶ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς ὥστε τέμνειν τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ιϛ καὶ ιδ σπιθαμῶν ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ᾽ ἑκατέρων (30) τῶν δύο μερῶν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:



Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμαὶ η. Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν ις καὶ ιε σπιθαμῶν καὶ λαβὲ σπιθαμὰς η, κακεῖσε τὸ πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἀρξάμενος μὲν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο πλευρῶν τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν, περαιώσας δὲ ταύτη, ἐπὶ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ιε σπιθαμῶν ἐν τῇ στιγμῇ τῶν η σπιθαμῶν. Οὕτω δὲ γενομένης τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, τέμνει τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ' ἑκατέρων τῶν δύο πλευρῶν.

Εἰ δὲ τὸ πέρας ταύτης ἐγένετο ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς τῶν ιε σπιθαμῶν, τουτέστι οὐκ ἐπὶ τῶν η σπιθαμῶν ὧν εἴπομεν, (35) ἀλλ' ἐπὶ τῶν ζ α/β, τοῦτο γὰρ ἐστὶ τὸ μέσον τῶν ιε, οὐκ ἂν ἔτεμεν ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ' ἑκατέρων τῶν δύο πλευρῶν, ἀλλὰ τὸ μὲν ἔτεμεν ἐπὶ μεῖζον, τὸ δὲ ἐπ' ἔλαττω, μὴ μόνον δὲ διὰ τοῦτο, ἄτοπόν τε καὶ ἄχρηστον, (102α)(1) ἀλλὰ καὶ ἐπὶ ἄλλων τινων ζητημάτων, ὧν εἰπεῖν ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος ἔχομεν, ἄχρηστον, εὑρεθήσεται τὸ πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ τοῦ μέσου τῶν ιε σπιθαμῶν γενόμενον.

Οὕτω δὲ γενόμενον ὡς εἴπομεν ἐπὶ τῶν η σπιθαμῶν, τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, καὶ ἀληθὲς καὶ χρήσιμον εὑρεθήσεται ἐφ' ὧν εἰπεῖν ἔχομεν, καθὼς διὰ τῆς πείρας ὁδῷ προβένων γενήσεται γνώριμον τὸ λεγόμενον. Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, περὶ δὲ τὸ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ κατὰ μῆκος ἡ κάθετος εὐθεία γραμμή, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τῶν ιε σπιθαμῶν πλευρὰν ἐφ' ἧς περαιοῦται ἡ κάθετος εὐθεία γραμμή· ιε-κις οὖν ιε γίνονται σκε. Πρόσθες καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, τουτέστι τὰς η σπιθαμάς, ὡς τὸ πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἐποίησας ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῶν ιε σπιθαμῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ σλγ. Ἐπεὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τῶν ιδ καὶ ιε καὶ ις, ἔχοσιν πρὸς ἄλληλας αἱ πλευραὶ ἀνὰ α σπιθαμὴν πλείω, πολλαπλασίασον ταύτην τὴν α σπιθαμὴν εἰς ἑαυτή· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α. Πρόσθες καὶ ταύτη τὴν μίαν σπιθαμὴν καὶ γίνονται ὁμοῦ σλδ. Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Λαβὲ α/δ τῶν σνς, ὅπερ ἐστὶ ξδ.

Καὶ ἄλλως: Πολλαπλασίασον τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος ταύτης πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, εἰς ἑαυτό· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἐστὶ γὰρ πότε τὸ μὲν ἓν χρῆσθαι, πότε τὸ ἕτερον. Ταυτὸν γὰρ ἐστὶ πολλαπλασιᾶσαι τὰς ις σπιθαμὰς καὶ λαβεῖν α/δ τῶν σνς ὅπερ ἐστὶ ξδ, καὶ πολλαπλασιᾶσαι τὸ ἥμισυ τῶν ις, ὅπερ η-κις η πάλιν γίνονται ξδ. Ἄφελε οὖν ταῦτα τὰ ξδ ἐκ τῶν σλδ καὶ ἀπομένοσιν ρο. Διπλασίασόν δε β/δ καὶ γίνονται δ/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α. Ἄφελε τοῦτο τὸ α ἀκέραιον ἐκ τῶν ρο καὶ ἀπομένοσιν ρξθ. Ἡ ρίζα δὲ τῶν ρξθ ἐστὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς. Ἡ δὲ ρίζα τῶν ρξθ ἐστὶ ιγ· ιγ-κις γὰρ ιγ γίνονται ρξθ. Ἐστὶ δὲ ἡ διχοτόμος εὐθεία γραμμή, σπιθαμῶν ιγ.

Ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν ὅπερ διαφέρει ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας, σπιθαμὴν α, ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ἀρξάμενον μὲν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, περαιούμενόν δε ἐπὶ τῆς κεραίας πλευρᾶς, τὸ δὲ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ κατὰ μῆκος ἡ ζητουμένη κάθετος εὐθεία γραμμή.

Πολλαπλασίασον τὴν μέσην πλευρὰν εἰς ἑαυτή, ἥτις ἐστὶ ἐλαττωμένη τῆς μείζονος, μείζων δὲ τῆς ἐλάττονος, δι' ὃ καὶ μέση λέγεται, πρόσθες καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ἐπὶ τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῆς μέσης πλευρᾶς, πρόσθες καὶ α σπιθαμὴν ἣν ἔχοσιν διαφορὰν πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς πλευραί, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα εἰς ἑαυτὴ πάλιν ἐστὶ α, πολλαπλασίασόν δε τὴν μείζονα πλευρὰν εἰς ἑαυτή, καὶ λαβὲ α/δ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὅλης μείζονος πλευρᾶς, ἄφελε οὖν τοῦτο ἐκ τῆς ὅλης ὁμάδος ἧς εἴπομεν τῆς μέσης πλευρᾶς καὶ τῶν μισῶν σπιθαμῶν (20) τῆς μείζονος καὶ τῆς α σπιθαμῆς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος ἐκ τῆς ὁμάδος ταύτης κράτει τοῦτο ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, διπλασίασον α α/β τέταρτον, καὶ γίνονται δὶς α α/β, γ/δ. Ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ, διπλασίασον β/δ καὶ γίνονται δ/δ τουτέστι ἀκέραιον α. Ἐπὶ δὲ τῶν ιε καὶ ιδ καὶ ιγ διπλασίασον β α/β τέταρτα, καὶ γίνονται ε/δ τουτέστι ἀκέραιον α καὶ α/δ. Ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιγ καὶ ιβ διπλασίασον γ/δ καὶ γίνονται ς/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α α/β, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Ἄφελε οὖν τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῶν ζητουμένων τετάρτων, ἐκ τῆς ἐναπολειφθείσης ὁμάδος ἧς ἰδίως κρατεῖς καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος τῆς ἐναπολειφθείσης ὁμάδος ἧς ἰδίως κρατεῖς. Ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας (25) γραμμῆς ἥσπερ ἂν ἔχης ζητῶν ἐπὶ τοιούτου σκαληνοῦ σχήματος ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ τριῶν πλευρῶν καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω καὶ ἕτερον σχῆμα σκαληνόν, ὅπερ ἡ μὲν ἐλάττω τούτου πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν ιβ, ἡ δὲ μείζων ις, ἡ δὲ ἐγκάρσιος ιδ. Ζητεῖς δὲ καὶ ἐκ τούτου, ἅπερ καὶ ἐκ τοῦ προγενεσθέρου ἐζήτησας. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως. Λαβὲ καὶ ἐν ταῦτα τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν ὅπερ ἐστὶ η. Ἄρξου δὲ καὶ ἐν ταῦτα ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν, καὶ λαβὲ σπιθαμὰς η, τουτέστι ὑπὲρ τὸ μέσον τῆς τῶν ιδ σπιθαμῶν πλευρᾶς, (30) σπιθαμὴν α, κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς διχοτόμου εὐθείας γραμμῆς ποίησον. Οὕτω δὲ γενομένης τῆς διχοτόμου εὐθείας γραμμῆς, τέμνει τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ις καὶ ιβ σπιθαμῶν, ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ' ἑκατέρων τῶν δύο πλευρῶν.

Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ τὴν τῶν ιδ σπιθαμῶν πλευρὰν ἥτις δέχεται τὴν κάθετον εὐθείαν γραμμήν· ιδ-κις οὖν ιδ γίνονται ρϟς. Πρόσθες καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, τουτέστι τὰς η σπιθαμάς, ὡς τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἐποίησας καὶ γίνονται ὁμοῦ σδ. Ἐπεὶ δὲ ἑκάστη πλευρὰ τῶν ιβ καὶ ιδ καὶ ις σπιθαμῶν, ἔχει σπιθαμὰς β πλείω, πολλαπλασίασον ταύτας τὰς β σπιθαμὰς εἰς ἑαυτάς· β-ὶς οὖν β (35) γίνονται δ. Πρόσθες καὶ ταύτας τὰς δ σπιθαμὰς καὶ γίνονται ὁμοῦ ση. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Λαβὲ α/δ τῶν σνς ὅπερ ἐστὶ ξδ. Καὶ ἄλλως:

Τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε (102β)(1) ξδ ἐκ τῶν ση καὶ ἀπομένοσιν ρμδ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρμδ ἥτις ἐστὶ ιβ· ιβ-κις γὰρ ιβ, ρμδ γίνονται. Ἐστὶ δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς σπιθαμῶν ιβ.

Ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ὅπερ διαφέρει ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὰς ιβ, ὡς τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς ἀρξάμενον μὲν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, περαιούμενόν δε ἐπὶ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς ἧς δέχεται τὴν κάθετον εὐθείαν γραμμήν.

Τὸ δὲ καὶ πόσων σπιθαμῶν (5) κατὰ μῆκος ἐστὶ ἡ κάθετος, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μέσην πλευρὰν ἥτις ἐστὶ ἔλαττω μὲν τῆς μείζονος, μείζων δὲ τῆς ἐλάττονος, ἥτις δέχεται τὴν κάθετον. Πρόσθες καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς ἐπὶ τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμόν, πρόσθες καὶ δ σπιθαμάς, ἃς πολλαπλασιάζοσιν αἱ β σπιθαμαί, τῆς διαφορᾶς τῶν τριῶν πλευρῶν, τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ, καὶ τῶν ιδ καὶ ιβ καὶ ι, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ὑπὲρ τὸ ἥμισυ ταύτης, ἐστὶ σπιθαμαὶ ἀκέραιαι, η ἢ ζ ἢ ς.

Εἰ δὲ ἔχη α/β, πολλαπλασίασον τὴν ὅλην μείζονα πλευρὰν εἰς ἑαυτή, καὶ λαβὲ α/δ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, ταυτὸν γὰρ ἐστὶ, ἄφελε οὖν τὸ α/δ ὅπερ ἔλαβες ἐκ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὅλης μείζονος πλευρᾶς, ἐκ τῆς ὅλης ὁμάδος (10) ἧς ἐποίησας, τῆς μέσης πλευρᾶς, καὶ μισοῦ τοῦ μείζονος, καὶ τῶν δ σπιθαμῶν, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος ἐκ τῆς ὁμάδος ταύτης, κράτει τοῦτο ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν κ καὶ ιη καὶ ις, τριῶν πλευρῶν, διπλασίασον ε α/β πέμπτα, καὶ γίνονται ια/ε ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια β καὶ α/ε. Ἐπὶ δὲ τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ, διπλασίασον β α/β πέμπτα καὶ γίνονται ε/ε ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α. Ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ διπλασίασον οὐδέν. Ἄφελε οὖν τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν, ἐκ τῆς ὁμάδος ἧς ἰδίως εἴπομεν κρατεῖν, ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιβ καὶ ι, διπλασίασον β α/β πέμπτα καὶ γίνονται ε/ε ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α. Ἐπὶ δὲ τῶν ιβ καὶ ι καὶ η, διπλασίασον ε α/β πέμπτα καὶ γίνονται ια/ε ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια β καὶ α/ε. Ἐπὶ δὲ τῶν ι καὶ η καὶ ς, διπλασίασον η α/β πέμπτα καὶ γίνονται ιζ/ε ἅπερ ἐστὶ (15) ἀκέραια γ καὶ β/ε. Τὸν γεγονότα δὲ διπλασιασμὸν τῶν ζητουμένων πέμπτων τῶν τριῶν τούτων πλευρῶν, οὐκ ἄφελε, ἀλλὰ μᾶλλον πρόσθες ἐπὶ τῆς ὁμάδος, ἧς ἰδίως κρατεῖς, κ' ἄν τε οὖν προσθῆναι χρὴ ταῦτα, κ' ἄν τε ἀφελεῖν καθ' ὃν τρόπον εἴπομεν. Ζήτει τὴν ρίζαν τῆς ὁμάδος τούτων, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτων, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ κατὰ μῆκος καὶ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμή, ἐπὶ τοιούτου ζητήματος ἀνὰ β σπιθαμῶν ἔχων τὴν διαφοράν, ὡς τῶν κ καὶ ιη καὶ ις, καὶ ὡς τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

ρπγ´ Καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας γωνίας ἀρξάμενος ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς περαιώσας.

Ἔστω τὸ πρῶτον σκαληνὸν σχῆμαν τὸ ἔχον πλευρὰς τρεῖς, σπιθαμῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ. Ἀρξαμένης μὲν τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ις καὶ ιε σπιθαμῶν, περαιωθείσης δὲ ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ιδ σπιθαμῶν, ζητεῖς δὲ εἰδέναι, ἅπερ καὶ πρότερον ἐζήτησας. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Ὡσαύτως πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν τῶν ιε σπιθαμῶν πλευράν· ιε-κις οὖν ιε γίνονται σκε.

Πρόσθες καὶ β καὶ γίνονται σκζ. Ἄφελε τὰ σκζ ἐκ τῶν σνς καὶ ἀπομένοσιν κθ. Λαβὲ α/δ τῶν κθ ὅπερ ἐστὶ ζ καὶ α/δ. Ἐκ δὲ τῶν ζ καὶ α/δ, ἄφελε α/κε μιᾶς σπιθαμῆς, καὶ ἀπομένοσιν ζ καὶ α/δ μιᾶς σπιθαμῆς, παρὰ α/κε μιᾶς σπιθαμῆς. Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν, καὶ λαβὲ σπιθαμὰς ζ καὶ α/δ μιᾶς σπιθαμῆς, παρὰ α/κε μιᾶς σπιθαμῆς, κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ιδ σπιθαμῶν. Οὕτω δὲ γενομένης τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, τέμνει τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ις καὶ ιε σπιθαμῶν, ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ' ἑκάτερον τῶν δύο πλευρῶν. Ἐκ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, τουτέστι τῶν σνς, λαβὲ α/δ ὅπερ ἐστὶ ξδ, καὶ ἄλλως ὡς εἴπομεν, τὸ ἥμισυ ταύτης, η-κις η, πάλιν γίνονται ξδ. Ἄφελε τὰ ξδ ἐκ τῶν σνς ὧν πολλαπλασιάζοσιν αἱ ις σπιθαμαὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς καὶ ἀπομένοσιν ρϟβ. Ἄφελέ τι καὶ γ/δ μιᾶς σπιθαμῆς, ἐκ τῶν ρϟβ, καὶ ἀπομένοσιν ρϟα καὶ α/δ. Ζήτει τὴν ρίζαν τούτων ἥτις ἐστὶ ιγ καὶ α/δ ἔγγιστα. Τὰ γὰρ ιγ καὶ α/δ εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρϟα καὶ α/γ. Ἐστὶ δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, ιγ καὶ α/δ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ὅπερ διαφέρει ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὴν α, ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μείζονα πλευράν. Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν μέσην πλευράν, τὴν ἔλαττο μὲν οὖσαν τῆς μείζονος, μείζων δὲ τῆς ἐλάττονος, δι' ὃ καὶ μέση λέγεται. Πρόσθες καὶ β ἐπὶ τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῆς μέσης πλευρᾶς, καὶ ὅσος γένηται (35) ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς μέσης πλευρᾶς, μετὰ τῆς προσθέσεως τῶν β, ἄφελε τοῦτο ἐκ τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῆς μείζονος πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, λαβὲ ἐξ αὐτοῦ τὸ τέταρτον μέρος. Ἀπὸ δὲ τοῦ τετάρτου μέρους, οὗ ἀφῆλες, ἔτι ἄφελε α/κε μιᾶς σπιθαμῆς, (103α)(1) κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἀρξάμενον ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς, περαιούμενόν δε ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς.

Τὸ δὲ καὶ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ κατὰ μῆκος ἡ κάθετος εὐθεία γραμμή, πολλαπλασίασον τὴν μείζονα πλευρὰν εἰς ἑαυτή, καὶ λαβὲ α/δ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς. Ἄφελέ δε τὸ α/δ ὅπερ ἔλαβες ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ἐκ τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτῆς μείζονος πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος τοῦ τοιούτου ὅλου πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ἐπὶ μὲν τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε τριῶν πλευρῶν, ἄφελε β/δ (5) ἅπερ ἐστὶ α/β, ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ ἄφελε γ/δ. Ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιγ καὶ ιβ, ἄφελε ε/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α καὶ α/δ. Ἐπὶ δὲ τῶν ιγ καὶ ιβ καὶ ια, ἄφελε ς/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α καὶ α/β.

Ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν δηλωθέντων τετάρτων, ἐκ τοῦ ἐναπομείναντος μέρους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, τὸ ἐναπομεῖναν μέρος, ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ κατὰ μῆκος καὶ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ τοῦ σκαληνοῦ σχήματος, τοῦ ἔχοντος ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὴν α πλείω, ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω δὲ ἡ διαφορὰ ἀνὰ β σπιθαμῶν ὡς τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ. Πολλαπλασίασον καὶ ἐν ταῦτα τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Ὡσαύτως πολλαπλασίασον καὶ ἐν ταῦτα τὴν μέσην πλευρὰν τῶν ιδ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ιδ-κις οὖν ιδ γίνονται ρϟς. Νῦν δὲ ἀντὶ τῶν β, πρόσθες θ, ἐπὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς μέσης πλευρᾶς τῶν ιδ σπιθαμῶν, ἥτις ἐστὶ ρϟς· θ δὲ καὶ ρϟς, γίνονται ὁμοῦ σε. Ἄφελε ταῦτα ἐκ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν ἥτις ἐστὶ σνς, καὶ ἀπομένοσιν να. Λαβὲ α/η τῶν να ὅπερ ἐστὶ ς καὶ γ/η μιᾶς σπιθαμῆς, πρόσθες καὶ α/κδ μιᾶς σπιθαμῆς ἐπὶ τῶν ς καὶ γ/η, ταυτὸν δ’ εἰπεῖν ἐπὶ τῶν ς καὶ θ/κδ, καὶ γίνονται ς καὶ ι/κδ, τουτέστι ς καὶ ε/ιβ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ις καὶ ιβ σπιθαμῶν καὶ λαβὲ σπιθαμὰς ς καὶ ε/ιβ μιᾶς σπιθαμῆς, κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ιβ σπιθαμῶν. Οὕτω δὲ γενομένης τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, τέμνει, τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ις καὶ ιδ σπιθαμῶν, ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ’ ἑκατέρων τῶν δύο πλευρῶν. Ἀπὸ δὲ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν ἥτις ἐστὶ σνς, λαβὲ α/δ ὅπερ ἐστὶ ξδ, πρόσθες καὶ δ καὶ γίνονται ὁμοῦ ξη. Ἄφελέ δε ταῦτα ἐκ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν ἥτις ἐστὶ ὡς εἴπομεν σνς, καὶ ἀπομένοσιν ρπη. Πρόσθες καὶ δ/η ἅπερ ἐστὶ α/β καὶ γίνονται ὁμοῦ ρπη α/β. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρπη α/β (20) ἥτις ἐστὶ ιγ καὶ ζ/ι μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Τὰ γὰρ ιγ καὶ ζ/ι εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρπζ καὶ ζ/ι. Ἐστὶ δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς σπιθαμῶν ιγ καὶ ζ/ι μιᾶς σπιθαμῆς, βραχύ τι πλείω.

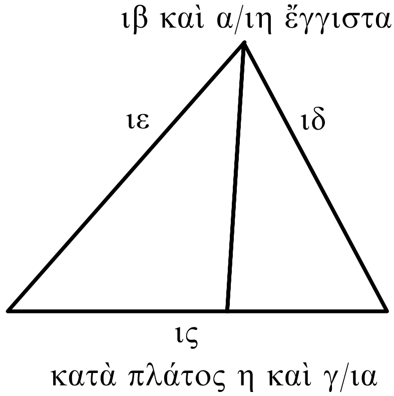
Ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ὅπερ διαφέρει ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὰς β, ὡς τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μείζονα πλευράν. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὴν μέσην πλευρὰν τὴν ἔλαττο μὲν οὖσαν τῆς μείζονος, μείζων δὲ τῆς ἐλάττονος, δι᾿ ὃ καὶ μέση λέγεται, πρόσθες καὶ θ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς μέσης πλευρᾶς, καὶ ὅσος γένηται ὁ τῆς μέσης πλευρᾶς πολλαπλασιασμός, μετὰ καὶ τῆς προσθέσεως τῶν θ, ἄφελε τοῦτον ἐκ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν (25) μέρος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, λαβὲ ἐξ αὐτοῦ α/η, τουτέστι μέρισον τοῦτο μετὰ τῶν η. Οὕτως γὰρ ἔχεις προχείρως λαβεῖν τὸ α/η. Καὶ ὅσον γένηται τὸ α/η κράτει τοῦτο ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν κ καὶ ιη καὶ ις τριῶν πλευρῶν, τὸ α/η ἐστὶ η καὶ γ/η, πρόσθες καὶ α/κδ, καὶ γίνονται η καὶ ε/ιβ. Ἐπὶ δὲ τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ, τὸ α/η ἐστὶ ζ καὶ γ/η. Πρόσθες καὶ α/κδ καὶ γίνονται ζ καὶ ε/ιβ. Ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ, τὸ α/η ἐστὶ ϛ καὶ γ/η. Πρόσθες καὶ α/κδ καὶ γίνονται ϛ καὶ ε/ιβ. Ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιβ καὶ ι, τὸ α/η ἐστὶ ε καὶ γ/η. Πρόσθες οὐδέν, καὶ πάλιν ἐστὶ ε καὶ γ/η. Ἐπὶ δὲ τῶν ιβ καὶ ι καὶ η, τὸ α/η ἐστὶ δ καὶ γ/η. Πρόσθες οὐδέν, καὶ πάλιν ἐστὶ δ καὶ γ/η. Ἐπὶ δὲ τῶν ι καὶ η καὶ ϛ, τὸ α/η ἐστὶ γ καὶ γ/η. Ἄφελε α/κδ καὶ ἀπομένοσιν γ καὶ α/γ.

Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς, καὶ λαβὲ ὅσον ἐστὶ (30) τὸ α/η μετὰ τῆς ἐπιδιορθώσεως τῆς προσταφαιρέσεως τοῦ α/κδ ὡς εἴπομεν, κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἀρξάμενος μὲν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς, περαιώσας δὲ τοῦτο ἐπὶ τῆς ἐλάττονος πλευρᾶς.

Τὸ δὲ καὶ πόσων σπιθαμῶν κατὰ μῆκος ἐστὶ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμή, λαβὲ α/δ τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, πρόσθες καὶ δ, καὶ ὅσον γένηται τὸ α/δ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ζητουμένης μείζονος πλευρᾶς, ἄφελε τοῦτο ἐκ τοῦ ὅλου πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτῆς μείζονος ζητουμένης πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος, κράτει τοῦτο ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν κ καὶ ιη καὶ ις τριῶν πλευρῶν, πρόσθες ε/η μιᾶς σπιθαμῆς, ἐπὶ δὲ τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ πρόσθες δ α/β /η. Ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ, πρόσθες δ/η ἅπερ ἐστὶ α/β.(35) Ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιβ καὶ ι πρόσθες γ α/β /η. Ἐπὶ δὲ τῶν ιβ καὶ ι καὶ η πρόσθες γ/η. Ἐπὶ δὲ τῶν ι καὶ η καὶ ς πρόσθες β α/β /η. Προστεθέντων δὲ τῶν δηλωθέντων ὀγδόων ἐπὶ τοῦ ἐναπομείναντος μέρους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ζητουμένης μείζονος πλευρᾶς, οὗ καὶ ἰδίως κρατεῖν εἴπομεν, ζήτει τὴν ρίζαν τούτου, καὶ (103β)(1) ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, τοῦ σκαληνοῦ σχήματος τοῦ ἔχοντος ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας, σπιθαμὰς β πλείω, ὡς τῶν κ καὶ ιη καὶ ις, καὶ ὡς τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

ρπδ΄ Καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας γωνίας ἀρξάμενος, ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς περαιώσας.

Ἔστω τὸ πρῶτον σκαληνὸν σχῆμαν τὸ ἔχον πλευρὰς τρεῖς, σπιθαμῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ, ἀρξαμένης μὲν τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο ἐλαττόνων πλευρῶν τῶν ιε καὶ ιδ σπιθαμῶν, περαιωθείσης δὲ ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, (5) ζητεῖς εἰδέναι ἅπερ καὶ πρότερον ἐζήτησας. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως:



Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν ἥτις νῦν δέχεται τὴν διάμετρον· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Λαβὲ α/δ τῶν σνς ὅπερ ἐστὶ ξδ. Πρόσθες καὶ δ καὶ γίνονται ὁμοῦ ξη. Πρόσθες καὶ α α/β τέταρτον καὶ γίνονται ξη καὶ α α/β / δ. Ζήτει τὴν ρίζαν τούτων ἥτις ἐστὶ η καὶ γ/ια. Τὰ γὰρ η καὶ γ/ια εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ξη καὶ β/ε. Ἐστὶ δὲ τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, σπιθαμῶν η καὶ γ/ια μιᾶς σπιθαμῆς. Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων (10) πλευρῶν τῶν ιε καὶ ις σπιθαμῶν, καὶ λαβὲ σπιθαμὰς η καὶ γ/ια, κακεῖσε τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν. Οὕτω δὲ γενομένης τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, τέμνει τὰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τῶν ιε καὶ ιδ σπιθαμῶν, ἐν ἴσῳ τμήματι ἐφ’ ἑκατέρων τῶν δύο πλευρῶν.

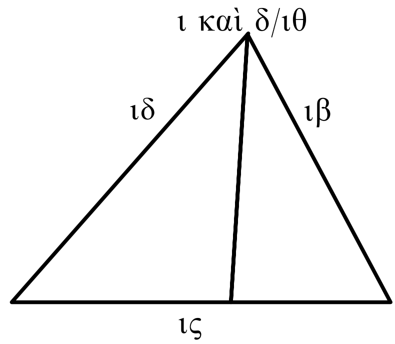
Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν ἐλάττονα πλευρὰν τῶν ιδ σπιθαμῶν· ιδ-κις οὖν ιδ γίνονται ρϟς. Λαβὲ α/δ τῶν ρϟς ὅπερ ἐστὶ μθ. Καὶ ἄλλως ὡς εἴπομεν, πολλαπλασίασον τὸ ἥμισυ τῶν ιδ σπιθαμῶν· ζ-κις οὖν ζ πάλιν γίνονται μθ. Πρόσθες καὶ α α/β καὶ γίνονται ὁμοῦ ν α/β. Ἄφελε ταῦτα ἐκ τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῆς αὐτῆς ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν ιδ σπιθαμῶν ἥτις ἐστὶ ρϟς, καὶ ἀπομένοσιν ρμε α/β. Διπλασίασόν δε (15) α/δ καὶ γίνονται β/δ ἅπερ ἐστὶ α/β. Ἄφελέ δε τοῦτο ἐκ τῶν ρμε α/β καὶ ἀπομένοσιν ρμε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρμε ἥτις ἐστὶ ιβ καὶ α/ιη. Τὰ γὰρ ιβ καὶ α/ιη τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρμε καὶ ε/ις. Ἐστὶ δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, σπιθαμῶν ιβ καὶ α/ιη μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, ὅπερ διαφέρει ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὴν α, ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τὸ μὲν κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, πολλαπλασίασον τὴν ζητουμένην μείζονα πλευρὰν εἰς ἑαυτή. Λαβὲ δὲ α/δ τοῦ ἐκ ταύτης γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ, πρόσθες ἐπὶ τοῦ α/δ καὶ δ πλείω, καὶ κράτει τὸ α/δ μετὰ τῆς προσθέσεως τῶν δ, ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, τριῶν πλευρῶν, πρόσθες β/δ ἅπερ ἐστὶ α/β, ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ πρόσθες α α/β /δ. (20) Ἐπὶ δὲ τῶν ιε καὶ ιδ καὶ ιγ, πρόσθες α/δ, ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιγ καὶ ιβ πρόσθες α/β /δ ὅπερ ἐστὶ α/η. Ἐπὶ δὲ τῶν ιγ καὶ ιβ καὶ ια πρόσθες οὐδέν. Καὶ ὅσον γένηται τὸ α/δ τῆς πολλαπλασιασθείσης μείζονος ζητουμένης πλευρᾶς μετὰ τῆς προσθέσεως τῶν δ, ὧν καὶ κρατεῖν ἰδίως εἴπομεν, ἔτι τε καὶ τῶν δηλουμένων τετάρτων ὧν εἴπομεν, ἄφελε ταῦτα πάντα, ἐκ τῆς ὅλης ὁμάδος τῆς πολλαπλασιασθείσης ζητουμένης μείζονος πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ τῆς μείζονος πλευρᾶς, ζήτει τὴν ρίζαν τούτου, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, ἀρξάμενον μὲν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, περαιωθὲν δὲ ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς.

Τὸ δὲ καὶ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν ἐλάττονα πλευράν. Λαβὲ δὲ (25) α/δ τοῦ ταύτης γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ. Πρόσθες καὶ α α/β, καὶ ὅσον γένηται τὸ α/δ τῆς πολλαπλασιασθείσης ἐλάττονος πλευρᾶς, μετὰ καὶ τῆς προσθέσεως τοῦ α α/β, ἄφελε τοῦτο, ἐκ τοῦ ὅλου πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτῆς ἐλάττονος ζητουμένης πλευρᾶς, καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μέρος κράτει τοῦτο ἰδίως. Καὶ ἐπὶ μὲν τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε τριῶν πλευρῶν, διπλασίασον οὐδέν, ἐπὶ δὲ τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ διπλασίασον α/δ καὶ γίνονται β/δ ἅπερ ἐστὶ α/β. Ἐπὶ δὲ τῶν ιε καὶ ιδ καὶ ιγ, διπλασίασον β/δ καὶ γίνονται δ/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραιον α. Ἐπὶ δὲ τῶν ιδ καὶ ιγ καὶ ιβ διπλασίασον γ/δ καὶ γίνονται ς/δ ἅπερ ἐστὶ α α/β. Ἐπὶ δὲ τῶν ιγ καὶ ιβ καὶ ια διπλασίασον δ/δ καὶ γίνονται η/δ ἅπερ ἐστὶ ἀκέραια β. Ἄφελε οὖν ταῦτα τὰ διπλασιασθέντα τέταρτα, ἐκ τοῦ ἐναπομείναντος μέρους οὗ κρατεῖς ἰδίως. Ζήτει δὲ τὴν ρίζαν τούτου, καὶ ὅση ἐστὶ ἡ ρίζα τούτου, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ καὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου (30) εὐθείας γραμμῆς τοῦ σκαληνοῦ σχήματος τοῦ ἔχοντος ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἑτέρας σπιθαμὴν α πλείω, ὡς τῶν ιζ καὶ ις καὶ ιε, καὶ ὡς τῶν ις καὶ ιε καὶ ιδ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω δὲ ἡ διαφορὰ ἀνὰ β σπιθαμῶν, ὡς τῶν ις καὶ ιδ καὶ ιβ.



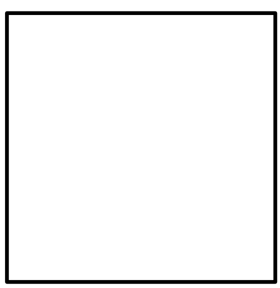
κατὰ πλάτος η καὶ ζ/ια

Πολλαπλασίασον καὶ ἐν ταῦτα τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Λαβὲ καὶ ἐν ταῦτα α/δ τῶν σνς ὅπερ ἐστὶ ξδ. Νῦν δὲ ἀντὶ τῶν δ πρόσθες η καὶ γίνονται ὁμοῦ οβ. Διπλασίασόν δε α καὶ γ/ι καὶ γίνονται β καὶ ς/

ι, τουτέστι β καὶ γ/ε. Ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν οβ καὶ γίνονται ὁμοῦ οδ καὶ γ/ε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν οδ καὶ γ/ε ἥτις ἐστὶ η καὶ ζ/ια. Τὰ γὰρ η καὶ ζ/ια τεχνικῶς εἰς ἑαυτὰ πολλα(35) πλασιαζόμενα πολλαπλασιάζοσιν οδ καὶ γ/ε. Ἐστὶ δὲ τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς, σπιθαμῶν η καὶ ζ/ια μιᾶς σπιθαμῆς. Ἄρξου δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ιδ καὶ ις σπιθαμῶν, καὶ λαβὲ σπιθαμὰς η καὶ ζ/ια μιᾶς σπιθαμῆς, κακεῖσε, τὸ κατὰ πλάτος πέρας τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ποίησον, ἐπὶ1(104α)(1) ποίησόν δε τετράγωνον ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον ἑκάστη τούτου πλευρὰν σπιθαμῶν ς καὶ α/ε μιᾶς σπιθαμῆς, τουτέστι τὴν ρίζαν τῶν λη α/β σπιθαμῶν, ὧν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ἕνωσον τὰς τέσσαρας πλευράς· δ-κις οὖν ς καὶ α/ε γίνονται κδ καὶ δ/ε μιᾶς σπιθαμῆς. Ἐστὶ δὲ ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου, σπιθαμῶν κδ καὶ δ/ε μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, καθ' ὅτι τὰ ς καὶ α/ε οὐ πολλαπλασιάζοσιν λη α/β ἀλλὰ λη ια/κε. Αἱ δὲ κδ δ/ε ἅπερ ἐστὶ περίμετρος τοῦ τετραγώνου, ἐστὶ πλείω τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου τῶν κβ (5) σπιθαμῶν, σπιθαμὰς β καὶ δ/ε μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Καθ' ὅσον δὲ ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τῶν κβ σπιθαμῶν, τοσοῦτον ἐστὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῶν κδ σπιθαμῶν καὶ δ/ε μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω.

λη α/β

ς α/ε

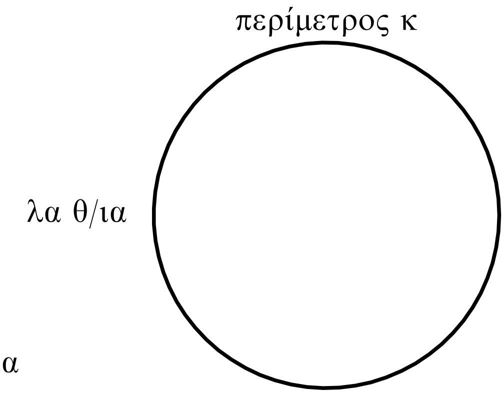
ς α/ε  ς α/ε

῞Εκαστον γὰρ ἐμβαδὸν τούτων, ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λη α/β. Πολλαπλασίασον γὰρ τὴν ὄρθιον πλευρὰν τοῦ τετραγώνου μετὰ τὴν τούτου ἐγκάρσιον, τουτέστι ς καὶ α/ε μετὰ τῶν ς καὶ α/ε καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς λη καὶ ια/κε τουτέστι λη α/β ἔγγιστα. Χωρητικότερον γὰρ ὂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἢ τοῦ τετραγωνοῦ μείζονος περιμέτρου δείαιτο τὸ τετράγωνον, ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου, πρὸς τὸ ἰσομερὲς σῶμα δέξασθαι.

῞Ετερον τούτου ὅμοιον.

῎Εστω κύκλος ὃς ἐστὶ ἡ περίμετρος τούτου (10) σπιθαμῶν κ. Πολλαπλασίασον τὴν τοῦ περίμετρον εἰς ἑαυτή· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ δ/ζ καθὼς εἴπομεν πάντοτε ποιεῖν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα καὶ θ/ια μιᾶς σπιθαμῆς. Καὶ ἰδοὺ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος περίμετρον σπιθαμῶν κ, ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λα καὶ θ/ια μιᾶς σπιθαμῆς. Καὶ τοῦτο γίνεται ὄντως, καὶ ἐπὶ παντὸς ἑτέρου κύκλου.

ζ
αη
δςβ
βηυυ
ηηη
η
λα καὶ θ/ια



᾿Οπινήκα δὲ ζητῆς εἰδέναι ἐμβαδὸν κυκλοτέρου σχήματος πολυγωνίου, γωνιῶν μ, ἢ γωνιῶν λ καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἔχεις εἰδέναι καὶ τὸ τοῦτον ἐμβαδὸν οὐ μετὰ (15) μιᾶς μεταχειρίσεως ἀλλὰ διὰ ποικίλλων καὶ διαφόρων μεταχειρίσεων, καθὼς ἐροῦμεν ἐφ’ ἑκάστης τάξεως τούτων σαφέστερον, ἐντεῦθεν ἀρξάμενοι.

σβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν μ, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα γωνιῶν μ, ἐφ’ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῆς α/β, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ, ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ ε/η καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα καὶ ζ/ι μιᾶς σπιθαμῆς. (20) Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων λα καὶ ζ/ι μιᾶς σπιθαμῆς.

ς ξθ/ρα

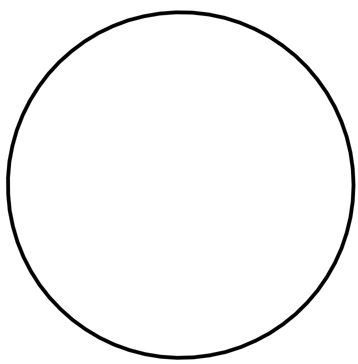
αζθ

γβυυ

αυαα

αυ

λα καὶ ζ/ι

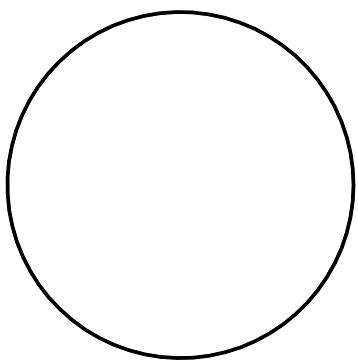


Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν μ. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν, πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ ε/η, καὶ ὁ γενόμενος τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν μ γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σγ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν λ, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα, γωνιῶν λ, ἐφ’ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς β/γ μιᾶς σπιθαμῆς, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. (25) Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ β/γ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα καὶ ια/ιθ μιᾶς σπιθαμῆς. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων λα καὶ ια/ιθ.

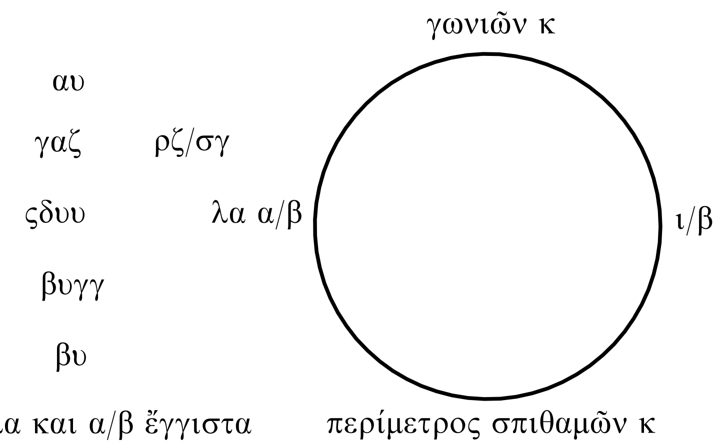


Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν λ. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμόν, πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ β/γ, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, (30) τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν λ γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν κ, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν κ, ἐφ’ ἑκάστης σπιθαμῆς α, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ ια/ις, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα α/β ἔγγιστα. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου (35) χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λα α/β ἔγγιστα.



Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν κ. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ ια/ις, (104β)(1) καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν κ γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ιη καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

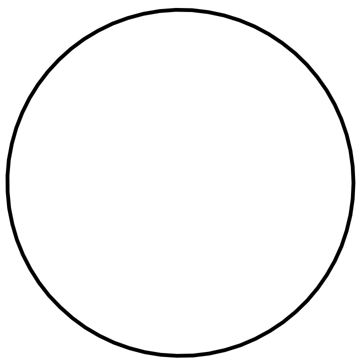
Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ιη ἐφ’ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῆς α καὶ α/θ, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· (5) κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ γ/δ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα καὶ α/γ βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λα καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω.

γωνιῶν ιη

α
β
αζθ
ασυυ
εαα
ε
λα καὶ α/γ

ιθ/να



λα καὶ α/γ πλέον τι

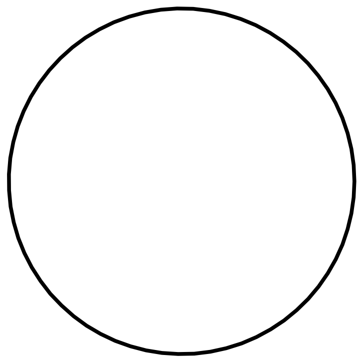
περίμετρος σπιθαμῶν κ

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ιη. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμόν, πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ γ/δ, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ιη γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

ϛ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ις καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν (10) γωνιῶν ις, ἐφ’ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῆς α καὶ α/δ, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

α
β
γθγ
βδυυ
ζζζ
ζ
λα και α/ς



Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ ε/ς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λα καὶ α/ς. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων, λα καὶ α/ς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ις. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα (15) πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ ε/ς, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ις γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σζ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ιδ καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

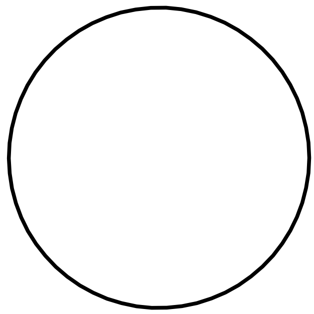
Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ιδ, ἐφ' ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῆς α καὶ γ/ζ, ὁμοῦ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

γωνιῶν ιδ

α

αγε

ρν/ρνε



δηυυ

λ καὶ κθ/λ

αεεε

αε

λ καὶ κθ/λ

περίμετρος σπιθαμῶν κ

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιβ καὶ ια/ιβ, καὶ (20) γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ καὶ κθ/λ, τουτέστι ἔγγιστα λα. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν σπιθαμῶν τετραγώνων λα ἔγγιστα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ιδ. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή.

Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιβ καὶ ια/ιβ, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ιδ γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

ση΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ιβ καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

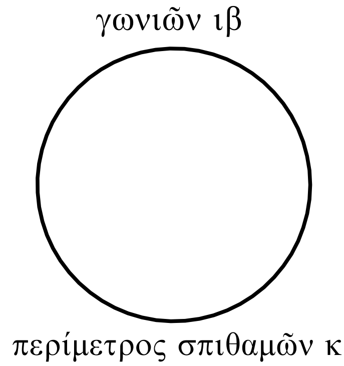
αα

δυυ

αγγ   λ ι/ιγ

α

λ καὶ κθ/λ



Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιγ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ καὶ ι/ιγ. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λ καὶ ι/ιγ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ιβ. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιγ, καὶ ὅσος γένηται (30) ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ιβ γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχῃς ζητῶν.

σθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ι καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ι, ἐφ’ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῶν β, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

γς

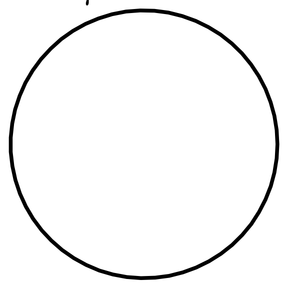
γςυυ ξ/ριη

ααηη λ/αβ

αα

λα και α/β

γωνιῶν ι



περίμετρος σπιθαμῶν κ

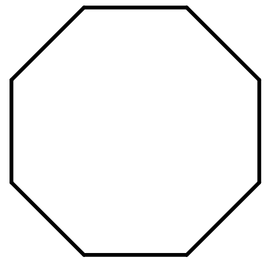
Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιγ καὶ α/θ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ α/β. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου (35) χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λ α/β.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ι. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμόν, πάντοτε μετὰ τῶν ιγ καὶ α/θ, καὶ ὅσος γένηται (105α)(1) ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ι γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σι΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν η καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν η, ἐφ᾽ ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῶν β α/β, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

αζ
αβδυυ   ο/υια   λ καὶ α/ς
δααα   πλέον τι
δα
λ καὶ α/ς



Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ (5) τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιγ καὶ η/λα, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ καὶ α/ς μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων λ καὶ α/ς μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν η. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιγ καὶ η/λα, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμὸς τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν η γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

Καὶ ἄλλως: Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν (10) τοῦ σφαιροειδοῦς ὀκταγωνοῦ σχήματος, τουτέστι σπιθαμὰς β α/β, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ς α/δ. Διπλασίασον τὰ ς α/δ καὶ γίνονται ιβ α/β. Κράτει ταῦτα ἰδίως. Πολλαπλασίασόν δε ταῦτα τὰ ιβ α/β ἅπερ κρατεῖς ἰδίως, εἰς ἑαυτά, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ρνς α/δ. Διπλασίασον ταῦτα· β-ὶς οὖν ρνς α/δ γίνονται τιβ α/β. Ζήτει τὴν ρίζαν τούτων ἥτις ἐστὶ ιζ β/γ βραχύ τι πλείω. Τὰ γὰρ ιζ καὶ β/γ εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα πολλαπλασιάζοσιν τιβ καὶ α/θ. Ἕνωσόν δε τὴν ρίζαν τῶν τιβ α/β ἥτις ἐστὶ σπιθαμαὶ ιζ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς, μετὰ τῶν ιβ α/β σπιθαμῶν ὧν ἰδίως εἴπομεν κρατεῖν, καὶ γίνονται ὁμοῦ σπιθαμαὶ λ καὶ α/ς μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω.

Εὗρες οὖν καὶ διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν (15) τούτου, ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τεραγώνων λ καὶ α/ς μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς ἰσόπλευρον γωνιῶν η. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ ὀκταγωνοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν. Διπλασιασόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν τῆς μίας πλευρᾶς, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διπλασιασμός, κράτει τοῦτον ἰδίως. Πολλαπλασίασόν δε τοῦτον τὸν διπλασιασμόν, ὃν ἰδίως κρατεῖς, εἰς ἑαυτό, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτου πολλαπλασιασμός, διπλασίασον πάλιν τοῦτον. Ζήτει δὲ τὴν ρίζαν τοῦ διπλασιασμοῦ τούτου, καὶ ἕνωσον τὴν ρίζαν τούτου μεθ'ὧν εἴπομεν ἰδίως κρατεῖν, καὶ ὅσαι σπιθαμαὶ ἐστὶ ἡ τούτων ὁμάς, τοσούτων σπιθαμῶν τετραγώνων ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς ὀκταγωνοῦ σχήματος οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σια´ Περὶ τοῦ πῶς (20) ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ς καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ς, ἐφ' ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῶν γ καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

α

ζ ις/ϟς

αηης

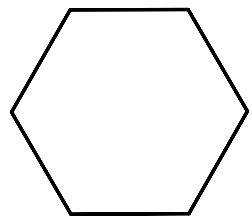
βηυυ κθ α/ς

θςς

θ

κθ καὶ α/ς

γωνιῶν ς



περίμετρος σπιθαμῶν κ

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴν τὴν τούτου περίμετρον· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιγ καὶ ε/ζ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κθ α/ς. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων κθ καὶ α/ς.

(25) Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ς. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μερισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιγ καὶ ε/ζ, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ς γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

σιβ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν σφαιροειδοῦς σχήματος γωνιῶν ε καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

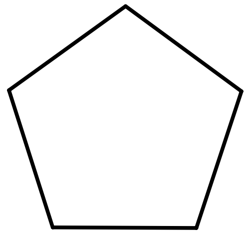
Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ε, ἐφ' ἑκάστης τούτου πλευρᾶς σπιθαμῶν δ, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

α

ζβ ρκδ/ρπη γωνιῶν ε

αδη περίμετρος

σπιθαμῶν κ



γϛδδ κζ καὶ β/γ

ἔγγιστα

εβυυ

αηηη

αη

κζ καὶ β/γ ἔγγιστα

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν τούτου περίμετρον· (30) κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιδ καὶ ϛ/ιγ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κζ καὶ β/γ ἔγγιστα. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων κζ καὶ β/γ ἔγγιστα.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ε. Πολλαπλασίασον τὴν τούτου περίμετρον εἰς ἑαυτή. Μέρισόν δε τὸν γεγονότα πολλαπλασιασμὸν πάντοτε μετὰ τῶν ιδ καὶ ϛ/ιγ, καὶ ὅσος γένηται ὁ τούτων διαμερισμός, τοσούτων σπιθαμῶν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ε γωνιῶν οὗπερ ἂν ἔχης ζητῶν.

Ἐὰν δὲ, σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν θ ζητῇς (35) τετραγωνῖσαι, καὶ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ζήτει τῶν ι γωνιῶν τὸ ἐμβαδὸν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν λ α/β. Ζήτει δὲ καὶ τῶν η γωνιῶν ὅπερ ἐστὶ λ καὶ α/ϛ πλείω τι. Λαβὲ δὲ τὸ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο τούτων ἐμβαδῶν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν λ καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς. Προστιθεμένου γὰρ α/ς ἐπὶ τῶν λ καὶ α/ς, γίνονται (105β)(1) λ καὶ β/ς τουτέστι λ καὶ α/γ.

Ἀφαιρεθέντος δὲ α/ς ἐκ τῶν λ α/β ἀπομένοσιν πάλιν λ καὶ α/γ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν θ γωνιῶν, σπιθαμῶν τετραγώνων λ καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς, καθὼς δηλοῦται διὰ τοῦ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο ἐμβαδῶν τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων τῶν ι καὶ η γωνιῶν.

Ἐὰν δὲ καὶ σφαιροειδὲς σχῆμαν γωνιῶν ζ, ζητῇς τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ζήτει τῶν η γωνιῶν τὸ ἐμβαδὸν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν λ καὶ α/ς, ζήτει καὶ τῶν ς γωνιῶν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν κθ καὶ α/ς, λαβὲ δὲ τὸ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο τούτων ἐμβαδῶν ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν κθ καὶ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς. (5) Προστιθέμενης γὰρ α/β σπιθαμῆς ἐπὶ τῶν κθ καὶ α/ς, γίνονται κθ β/γ.

Ἀφαιρεθείσης δὲ α/β σπιθαμῆς ἐκ τῶν λ α/γ, ἀπομένοσιν πάλιν κθ β/γ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος τῶν ζ γωνιῶν, σπιθαμῶν τετραγώνων κθ καὶ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς, καθὼς δηλοῦται διὰ τοῦ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο ἐμβαδῶν τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων τῶν η καὶ ς γωνιῶν.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν σφαιροειδὲς πολύγωνον· εἰ μὲν ἐστὶ ἐξ ὧν γωνιῶν συνγεγράφαμεν, ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου διὰ τῶν προδηλωθέντων μεταχειρίσεων.

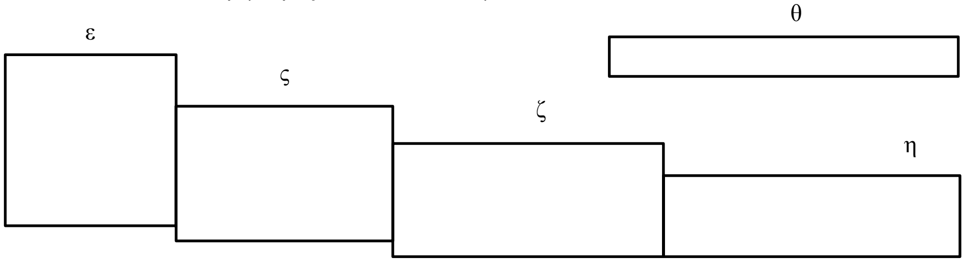
Εἰ δ' ἔστι γωνιῶν κα ἢ ιθ ἢ ιζ ἢ ιε ἢ ιγ ἢ ια ἢ καὶ ὅσων ἄλλων πλειόνων γωνιῶν ἔχεις ζητῆσαι πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ἔχεις τοῦτο εἰδέναι δι' οὗ τρόπου καὶ ἐπὶ τῶν θ γωνιῶν, καὶ ζ εἴπομεν.

Ζητήσας γὰρ μεῖζον (10) καὶ ἔλαττο σφαιροειδὲς σχῆμαν, λαβὲ τὸ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο τούτων ἐμβαδῶν, τοῦ μείζονος δηλονότι καὶ ἐλάττονος, καὶ τὸ ἐξ ἀναλόγου τῶν δύο, ἐστὶ τὸ ζητούμενον μέσον σφαιροειδὲς σχῆμαν, ὅπερ ἂν ἔχῃς ζητῶν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιγ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἐμβαδὸν τετραγώνου ἰσοπλεύρου ὀρθογωνοῦ καὶ παραλληλογράμμου, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σχῆμαν τετράγωνον ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον, ἑκάστη τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ε, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

Ἡ τούτων πάντων περίμετρος ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν κ



Πολλαπλασίασον πρὸς ἀλλήλας τὰς δύο τούτων πλευράς (15) τουτέστι ε μετὰ τῶν ε· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου ὀρθογωνοῦ σχήματος, σπιθαμῶν κε.

Ἔστω δὲ καὶ παραλληλόγραμμον οὐκ ἰσόπλευρον μὲν, ὀρθογώνιόν δε, (20) ὅπερ αἱ μὲν δύο τούτου ἐγκάρσιαι πλευραὶ ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ς, αἱ δὲ δύο ὄρθιαι ἀνὰ σπιθαμῶν δ, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Πολλαπλασίασον πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς δύο τούτου πλευράς, τὴν ὄρθιον καὶ ἐγκάρσιον· δ-κις οὖν ς γίνονται κδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμου τούτου, σπιθαμῶν τετραγώνων κδ.

Ἔστω δὲ καὶ παραλληλόγραμμον τετράγωνον οὐκ ἰσόπλευρον μέν, ὀρθογώνιόν δε, ὅπερ αἱ μὲν δύο τούτου ἐγκάρσιαι πλευραί, ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ζ, αἱ δὲ δύο ὄρθιαι ἀνὰ σπιθαμῶν γ, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Πολλαπλασίασον πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς δύο τούτου πλευράς, τὴν ὄρθιον καὶ τὴν ἐγκάρσιον· γ-ὶς οὖν ζ γίνονται (25) κα. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, σπιθαμῶν τετραγώνων κα.

Ἔστω δὲ καὶ παραλληλόγραμμον τετράγωνον, οὐκ ἰσόπλευρον μέν, ὀρθογώνιόν δε, ὅπερ αἵ μὲν δύο τούτου ἐγκάρσιαι πλευραὶ ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν η, αἵ δὲ δύο ὄρθιαι ἀνὰ σπιθαμῶν β, ὁμοῦ δὲ ἥ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Πολλαπλασίασον πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς δύο τούτου πλευράς, τὴν ὄρθιον καὶ τὴν ἐγκάρσιον· β-ὶς οὖν η γίνονται ις. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, σπιθαμῶν τετραγώνων ις.

Ἔστω δὲ παραλληλόγραμμον τετράγωνον, οὐκ ἰσόπλευρον μέν, ὀρθογώνιόν δε, ὅπερ αἵ μὲν δύο τούτου ἐγκάρσιαι πλευραί, ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν θ, αἵ δὲ δύο ὄρθιαι (30) ἀνὰ σπιθαμῆς α, ὁμοῦ δὲ ἥ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Πολλαπλασίασον πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς δύο τούτου πλευράς, τὴν ὄρθιον καὶ ἐγκάρσιον· ἅπαξ οὖν θ πάλιν ἐστὶ θ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, σπιθαμῶν τετραγώνων θ.

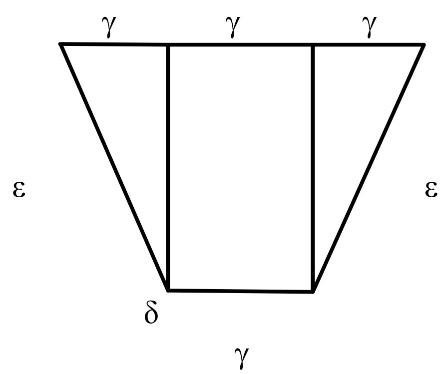
Πᾶν οὖν τετράγωνον, τετράπλευρον λέγεται. Πᾶν δὲ τρίγωνον, τρίπλευρον λέγεται. Πολύπλευρόν δε τὸ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενον. Κοινῶς δὲ πᾶν σχῆμαν τὸ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενον εὐθύγραμμον λέγεται.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μὲν κυρίως ἐστί, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον, ὡς τὸ πρῶτον. Ἑτερόμηκές δ' ἐστί, ὃ ὀρθογώ(35)νιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρόν δε, ὡς τὸ δεύτερον καὶ τὰ λοιπά. Ῥόμβος δὲ ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιόν δε, ὡς τὸ παρὸν ἐστὶ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιόν δε. Ρομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίας, πλευράς τε καὶ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε (106α)(1) ἰσόπλευρον ἐστί, οὔτε ὀρθογώνιον, ὡς τὸ παρόν. Εἰ γὰρ παραλληλόγραμμον εἰσὶ ὁ τε ρόμβος καὶ τὸ ρομβοειδές, ἀλλ’ οὐκ ὀρθογώνιον, τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράγωνα, τραπέζια λέγονται.

Δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, τίποτε εἰσὶ παράλληλοι εὐθεῖαι γραμμαί· παράλληλοι οὖν εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰσὶ αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, ἐφ’ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδ’ ἕτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλων. Παραλληλόγραμον δ’ ἐστὶ σχῆμαν εὐθύγραμμον, τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας (5) ἴσας ἀλλήλων ἔχον. Ἐστὶ δὲ αὐτῶν, τὰ μὲν ὀρθογώνια, τὰ δὲ οὐκ ὀρθογώνια, ὥς τὰ ἐκτιθέμενα πάντα τετράγωνα, ἐστὶ παραλληλόγραμμα, ὀρθογώνια τετράπλευρα, τὸ μὲν πρῶτον, ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον, τὰ δὲ λοιπὰ εἰσὶ ἑτερομηκὲς ὀρθογώνια. Παραλληλόγραμμον ἰσόπλευρον μὲν οὐκ ὀρθογώνιον δ’ ἐστὶ, ὁ ρόμβος καὶ τὸ ρομβοειδὲς ἅπερ προείπομεν. Τρίγωνόν δε ἰσόπλευρον ἐστὶ τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς· ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνον ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

σιδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι, τετραγωνοῦ τραπεζίου ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω τετράγωνον ὅπερ εἰώθαμεν καλεῖν τραπέζιον· (10) οὔτε γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστί, οὔτε ὀρθογώνιον οὔτε ρόμβος, οὔτε ρομβοειδές.



Ἔστω δὲ ἡ μὲν ἄνωθεν ἐγκάρσιος τούτου πλευρά, σπιθαμῶν γ, ἡ δὲ κάτωθεν σπιθαμῶν θ. Αἱ δὲ δύο ἀποκλίνουσαι λόξιαι, ἔστωσαν ἀνὰ σπιθαμῶν ε. Ζητεῖς δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Ποίησον δύο εὐθείας ὀρθίους γραμμάς, ἀπὸ τῶν ἄνωθεν δύο γωνιῶν, μέχρι τῆς κάτωθεν ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν θ σπιθαμῶν. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, τῶν ε καὶ θ σπιθαμῶν μέχρι τῆς ὀρθίου εὐθείας γραμμῆς ἧς ἐποίησας, σπιθαμαὶ γ. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας γωνίας, ἐστὶ σπιθαμαὶ γ. Καὶ τὸ ἀνάμεσον τῶν δύο ὀρθίων εὐθειῶν γραμμῶν, σπιθαμαὶ γ. Ὁμοῦ ἡ ὅλη κάτωθεν οὖσα ἐγκάρσιος πλευρά, σπιθαμῶν θ ὡς εἴπομεν. Ζήτει πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη ὄρθιος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν γ σπιθαμῶν, μέχρι τῆς κάτωθεν τῶν θ σπιθαμῶν. Ἔχεις δὲ ταύτην εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Πολλαπλασίασον γὰρ τὴν ἀποκλίνουσαν λόξιον πλευρὰν τῶν ε σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Κράτει ταῦτα ἰδίως. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰς καὶ τὰς γ σπιθαμὰς τὰς ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, τῶν ε καὶ θ σπιθαμῶν, μέχρι τῆς ὀρθίου εὐθείας γραμμῆς ἧς ἐποίησας· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Ἄφελε ταῦτα τὰ θ, ἐκ τῶν κε ὧν εἴπομεν ἰδίως κρατεῖν, καὶ ἀπομένοσιν ις. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ις ἥτις ἐστὶ δ· δ-κις γὰρ δ γίνονται ις. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη ὄρθιος εὐθεία γραμμὴ σπιθαμῶν δ. Τουτέστι ἡ καθ’ ὕψος διάστασις τῶν δύο ἐγκαρσίων πλευρῶν τῶν γ καὶ θ σπιθαμῶν, ἐστὶ σπιθαμῶν δ.

Ἕνωσόν δε τὰς δύο ἐγκαρσίους πλευρὰς τῶν γ καὶ θ σπιθαμῶν, καὶ γίνονται ὁμοῦ ιβ. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τῶν ιβ ὅπερ ἐστὶ σπιθαμαὶ ς. Ποίησόν δε τετράγωνον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἑτερομηκές, τὰς μὲν δύο ἐγκαρσίους πλευρὰς ἀνὰ σπιθαμῶν ς ἅπερ ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῶν ιβ σπιθαμῶν, τὰς δὲ δύο ὀρθίους πλευράς, ἀνὰ σπιθαμῶν δ, ἅπερ ἐστὶ ἡ ρίζα τῶν ις. Τοιοῦτον δὲ ποιήσας τετράγωνον, τὸ ἐμβαδὸν τούτου, ἐστὶ τοσούτου χωρητικόν, ὥσπερ καὶ τοῦ ἑτέρου ὅπερ καλεῖται τραπέζιον. Τὸ μὲν γὰρ ἔχει περίμετρον σπιθαμῶν κ, τὸ δὲ σπιθαμῶν κβ. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ὕψος πρὸς τὸ πλάτος, τουτέστι τὰς δ σπιθαμὰς τῆς ὀρθίου πλευρᾶς, πρὸς τὰς ς τῆς ἐγκαρσίου· δ-κις οὖν ς γίνονται κδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὰ ἀμφότερα τὰ δύο τούτων σχήματα, σπιθαμῶν τετραγώνων κδ.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω τραπέζιον ὅπερ ἡ μὲν ἐγκάρσιος ἄνωθεν τούτου πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν ς, ἡ δὲ ἐγκάρσιος κάτωθεν τούτου σπιθαμῶν η. Αἱ δὲ δύο ἀποκλίνουσαι λόξιαι ἀνὰ σπιθαμῶν ι. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν (30) τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ποίησον δύο εὐθείας ὀρθίους γραμμὰς ἀπὸ τῶν ἄνωθεν δύο γωνιῶν μέχρι τῆς κάτωθεν ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν η σπιθαμῶν. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ι καὶ η σπιθαμῶν, μέχρι τῆς ὀρθίου εὐθείας γραμμῆς ἧς ἐποίησας, σπιθαμὴ α. Ὡσαύτως καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας γωνίας, ἐστὶ σπιθαμὴ α. Τὸ δὲ ἀνάμεσον τῶν δύο ὀρθίων εὐθειῶν γραμμῶν ἐστὶ σπιθαμῶν ς. Ὁμοῦ ἡ ὅλη κάτωθεν οὖσα ἐγκάρσιος πλευρά, σπιθαμῶν η ὡς εἴπομεν.

Ζήτει πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἑκάστη ὄρθιος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ς σπιθαμῶν, μέχρι (35) τῆς κάτωθεν τῶν η σπιθαμῶν. Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Πολλαπλασίασον γὰρ τὴν ἀποκλίνουσαν λόξιον πλευρὰν τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Κράτει ταῦτα ἰδίως. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ καὶ τὴν α σπιθαμὴν τὴν ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας (106β)(1) τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, τῶν ι καὶ η σπιθαμῶν μέχρι τῆς ὀρθίου εὐθείας γραμμῆς ἧς ἐποίησας· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α. Ἄφελε ταύτην τὴν α σπιθαμὴν ἐκ τῶν ρ ὧν εἴπομεν ἰδίως κρατεῖν, καὶ ἀπομένοσιν ϟθ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ϟθ ἥτις ἐστὶ θ καὶ ιθ/κ. Τὰ γὰρ θ καὶ ιθ/κ τεχνικῶς εἰς ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ϟθ. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη ὄρθιος εὐθεία γραμμή, σπιθαμῶν θ καὶ ιθ/κ μιᾶς σπιθαμῆς, τουτέστι ἡ καθ' ὕψος διάστασις τῶν δύο ἐγκαρσίων πλευρῶν τῶν ς καὶ η σπιθαμῶν, ἐστὶ σπιθαμῶν θ καὶ ιθ/κ μιᾶς σπιθαμῆς. Ἕνωσόν δε τὰς δύο ἐγκαρσίους πλευρὰς τῶν ς καὶ η σπιθαμῶν, καὶ γίνονται (5) ὁμοῦ ιδ. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τῶν ιδ ὅπερ ἐστὶ σπιθαμῶν ζ. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ὕψος πρὸς τὸ πλάτος, τουτέστι τὰς θ σπιθαμὰς καὶ ιθ/κ τῆς ὀρθίου εὐθείας γραμμῆς πρὸς τὰς ζ τοῦ πλάτους· ζ-κις δὲ θ καὶ ιθ/κ γίνονται ξθ καὶ ιγ/κ μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρόμβου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω τετράγωνον ὅπερ εἰώθαμεν καλεῖν ρόμβον, ἑκάστη τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ι, ἡ δὲ τούτου ὄρθιος διαγώνιος σπιθαμῶν ιβ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

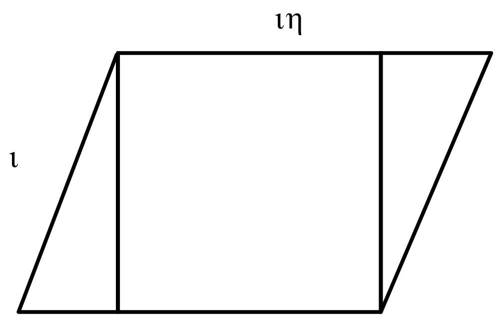
Ποίησον καὶ ἐγκάρσιον δια(10)γώνιον γραμμήν. Ζήτει δὲ πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ αὐτὴ ἡ ἐγκάρσιος εὐθεία γραμμή. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας οὕτως: Ἕνωσον τὰς δύο τούτου πλευρὰς τῶν ἀνὰ ι σπιθαμῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ κ. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ὄρθιον τούτου διαγώνιον εἰς ἑαυτή· ιβ-κις οὖν ιβ γίνονται ρμδ.

Ἄφελε τὰ ρμδ ἐκ τῶν υ καὶ ἀπομένοσιν σνς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν σνς ἥτις ἐστὶ ις· ις-κις γὰρ ις, σνς γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐγκάρσιος (15) εὐθεία γραμμὴ ἥτις οἰκειοτέρως διαγώνιος λέγεται, σπιθαμῶν ις. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθίου διαγωνοῦ εὐθείας γραμμῆς τῶν ιβ σπιθαμῶν, μετὰ τῆς ἐγκαρσίου διαγωνοῦ εὐθείας γραμμῆς τῶν ις σπιθαμῶν· ς-κις οὖν ις γίνονται ϟς. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων ϟς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶς ρόμβος ἰσόπλευρος διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σις΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ρομβοειδοῦς σχήματος ἐμβαδόν.

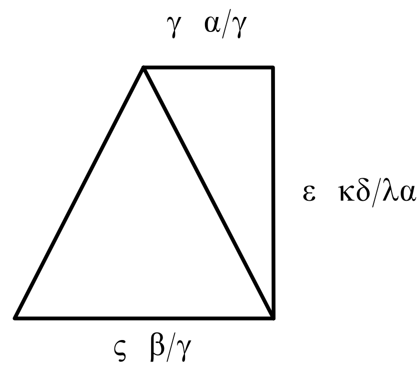
Ἔστω ρομβοειδὲς σχῆμαν, ὅπερ αἱ μὲν ἐγκάρσιαι δύο τούτου πλευραὶ ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ιη, αἱ δὲ δύο ἀποκλίνουσαι λόξιαι ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ι. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν (15) τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας.



Ποίησον δύο ὀρθίους εὐθείας γραμμάς, ἀπὸ τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν μέχρι τῆς κατὰ διάμετρον ἑτέρας πλευρᾶς, ὥστε ἐναπομεῖναι σχῆμα τετράγωνον, ἑτερόμηκες παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, ἑκάστη τούτου ἐγκάρσιος πλευρὰ σπιθαμῶν ι. Τὰ δὲ δύο σκαληνὰ τρίγωνα τῶν δύο ἄκρων, αἱ μὲν ἀποκλίνουσαι λόξιαι τούτων πλευραί, ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν η. Ζήτει καὶ τὰς ὀρθίους τούτου γραμμὰς (20) ἃς ἐποίησας πόσων σπιθαμῶν εἰσί. Ἔχεις δὲ ταύτας εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας.

Πολλαπλασίασον τὴν ἀποκλίνουσαν λόξιον πλευρὰν τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον καὶ τὴν ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν η σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε τὰ ξδ ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν λς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λς ἥτις ἐστὶ ς· ς-κις γὰρ ς, λς γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἑκάστη ὄρθιος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, σπιθαμῶν ς. Πολλαπλασίασόν δε ταύτας τὰς ς σπιθαμὰς τοῦ ὕψους, πρὸς τὰς ιη τοῦ μήκους· ς-κις οὖν ιη γίνονται ρη. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρομβοειδοῦς τούτου σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων ρη. Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ρομβοειδοῦς σχήματος ἐμβαδόν, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

(25) σιζ´ Ἔστω ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἑκάστη τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ς καὶ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς, ὁμοῦ δὲ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.



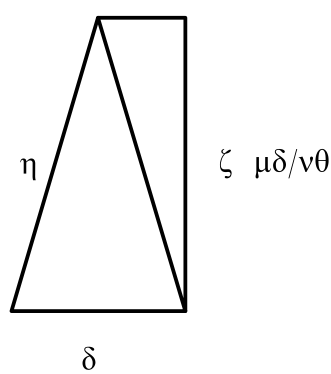
Ἕνωσον καὶ τὰς τρεῖς τούτου πλευράς· γ-ὶς οὖν ς καὶ β/γ γίνονται ὁμοῦ κ. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῶν κ, ταυτὸν δ᾽ εἰπεῖν (5) τῆς τούτου περιμέτρου τὸ ἥμισυ ὅπερ ἐστὶ ι. Ἄφελε οὖν ἐκ τῶν ι τὴν μίαν τούτου πλευρὰν ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ς καὶ β/γ καὶ ἀπομένοσιν γ καὶ α/γ. Πολλαπλασίασον τὰ γ καὶ α/γ μετὰ τῶν ι· ι-κις οὖν γ καὶ α/γ γίνονται λγ καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς. Πολλαπλασίασον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν γ καὶ α/γ· γ δὲ καὶ α/γ μετὰ τῶν λγ καὶ α/γ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ρια καὶ α/θ μιᾶς σπιθαμῆς. Πολλαπλασίασον καὶ ταῦτα μετὰ τῶν γ καὶ α/γ. Τὰ δὲ γ καὶ α/γ μετὰ τῶν ρια καὶ α/θ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν το καὶ γ/η μιᾶς σπιθαμῆς. Ζήτει τὴν ρίζαν τούτων ἥτις ἐστὶ ιθ καὶ ι/μα μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ χωρητικόν τὸ ἐμβαδὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τούτου τριγωνοῦ σχήματος, (10) σπιθαμῶν τετραγώνων ιθ καὶ ι/μα μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, τουτέστι σπιθαμῶν ιθ καὶ α/δ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς, ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν το καὶ γ/η μιᾶς σπιθαμῆς.

Καὶ ἄλλως: Ζήτει ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ς σπιθαμῶν καὶ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς, πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί. Ἔχεις δὲ ταύτας εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας. Πολλαπλασίασον τὴν ἀποκλίνουσαν μίαν τούτου πλευρὰν εἰς ἑαυτή, ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ς καὶ β/γ μιᾶς σπιθαμῆς. Τὰ δὲ ς καὶ β/γ εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν μδ καὶ δ/θ μιᾶς σπιθαμῆς. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ς καὶ β/γ εἰς ἑαυτό, ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ γ καὶ α/γ. Τὰ δὲ γ καὶ α/γ εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν ια καὶ α/θ μιᾶς σπιθαμῆς. Ἄφελε ταῦτα τὰ ια καὶ α/θ ἐκ τῶν μδ καὶ δ/θ καὶ ἀπομένοσιν λγ καὶ γ/θ, (15) τουτέστι λγ καὶ α/γ μιᾶς σπιθαμῆς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λγ καὶ α/γ ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ε καὶ κδ/λα μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς, σπιθαμαὶ ε καὶ κδ/λα μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω, ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν λγ καὶ α/γ. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ς καὶ β/γ ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ γ καὶ α/γ, καὶ πολλαπλασίασον ταύτας τὰς τρεῖς σπιθαμὰς καὶ α/γ τοῦ πλάτους, πρὸς τὰς ε καὶ κδ/λα τοῦ ὕψους, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ιθ καὶ α/δ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς. Εὗρες δὲ καὶ οὕτως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τούτου τριγωνοῦ σχήματος ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων ιθ καὶ α/δ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς.

Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐμβαδόν, διὰ τῶν δύο τούτων μεταχειρίσεων ἔχεις εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι ἰσοσκελοῦς (20) τριγωνοῦ, ὀξυγωνοῦ ἐμβαδόν, καὶ ἰσοσκελοῦς τριγωνοῦ ἀμβλυγωνοῦ, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω ἰσοσκελὲς σχῆμαν τρίγωνον ὀξυγώνιον, αἱ μὲν δύο τούτου λόξιαι ἀποκλίνουσαι πλευραὶ ἀνὰ σπιθαμῶν η, ἡ δὲ τούτου ἐγκάρσιος πλευρὰ σπιθαμῶν δ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας: Καὶ πρῶτον χρὴ εἰδέναι τίποτε ἐστὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἰσοσκελὲς δὲ τρίγωνον ἐστί, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχων πλευράς. Πᾶν γὰρ τρίγωνον τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς λέγεται.



Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ τὴν ἀποκλίνουσαν λόξιον μίαν του πλευρὰν τῶν η σπιθαμῶν· η-κις οὖν η γίνονται ξδ.(25)

Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν δ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· β-ὶς οὖν β γίνονται δ. Ἄφελε ταύτας τὰς δ σπιθαμὰς, ἐκ τῶν ξδ καὶ ἀπομένοσιν ξ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ξ: Σπιθαμαὶ ζ καὶ μδ/νθ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, ὥς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν ξ. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν δ σπιθαμῶν, ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ σπιθαμαὶ β, καὶ πολλαπλασίασον ταύτας τὰς β σπιθαμὰς τοῦ πλάτους, πρὸς τὰς ζ καὶ μδ/νθ τοῦ ὕψους· β-ὶς οὖν ζ καὶ μδ/νθ γίνονται ιε καὶ κθ/νθ, τουτέστι ιε καὶ α/β ἔγγιστα. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τούτου τριγωνοῦ σχήματος ὅπερ ἐστὶ ἡ τούτου περίμετρος σπιθαμῶν κ, σπιθαμῶν (30) τετραγώνων ιε καὶ α/β ἔγγιστα.

Ἔστω δὲ καὶ ἀμβλυγώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ μὲν δύο τούτου ἀποκλίνουσαι λόξιαι πλευραί, ἀνὰ σπιθαμῶν ι, ἡ δὲ ἐγκάρσιος τούτου πλευρὰ σπιθαμῶν ις. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν λόξιον ἀποκλίνουσαν τούτου πλευρὰν τῶν ι σπιθαμῶν· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε ταύτας τὰς ξδ σπιθαμὰς ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν λς. Ζήτει (35) τὴν ρίζαν τῶν λς ἥτις ἐστὶ ς. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας, μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, σπιθαμαὶ ς, ὥς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν λς. Λαβὲ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ η, (108α)(1) καὶ πολλαπλασίασον ταύτας τὰς η σπιθαμὰς τοῦ πλάτους, πρὸς τὰς ς τοῦ ὕψους· ς-κις οὖν η γίνονται μη. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς ἀμβλυγωνοῦ τούτου σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων μη.

Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐμβαδόν, κάντε ὀξυγώνιον ἐστί, κάντε ἀμβλυγώνιον διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας ἔχεις εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σιθ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι τριγωνοῦ σκαληνοῦ σχήματος ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω τρίγωνον σκαληνὸν σχῆμαν, ὅπερ ἡ μὲν μία ἀποκλίνουσα τούτου πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν ι, ἡ δὲ ἑτέρα ἀποκλίνουσα λόξιος ἐστὶ σπιθαμῶν ιζ, ἡ δὲ ἐγκάρσιος μείζονα τούτου πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν κα. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Ποίησον ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ἀμβλείας γωνίας μέχρι τῆς ἐγκαρσίου μείζονος πλευρᾶς, κατὰ βάθος, κάθετον εὐθεία γραμμή. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ μὲν τῆς ἀμφογωνίας τῆς μείζονος καὶ ἐλάττονος πλευρᾶς τῶν κα καὶ ι σπιθαμῶν, μέχρι τῆς περαιωθείσης καθέτου εὐθείας γραμμῆς, σπιθαμαὶ ς. Ἀπὸ δὲ τῆς περαιωθείσης ὀρθίου γραμμῆς μέχρι τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ιζ καὶ κα σπιθαμῶν, ἐστὶ σπιθαμαὶ ιε. Ὁμοῦ δὲ ἡ ὅλη ἐγκάρσιος μείζονα πλευρά, σπιθαμῶν κα. Ζήτει πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας:

Πολλαπλασίασον τὴν ἀποκλίνουσαν λόξιον ἐλάττονα πλευρὰν τῶν ι σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰς καὶ τὰς ς σπιθαμὰς τὰς ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν ι καὶ ς σπιθαμῶν, μέχρι τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς· ς-κις οὖν ς γίνονται λς. Ἄφελε ταύτας τὰς λς σπιθαμὰς ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν ξδ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ξδ ἥτις ἐστὶ η· η-κις γὰρ η, ξδ γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας σπιθαμῶν η.

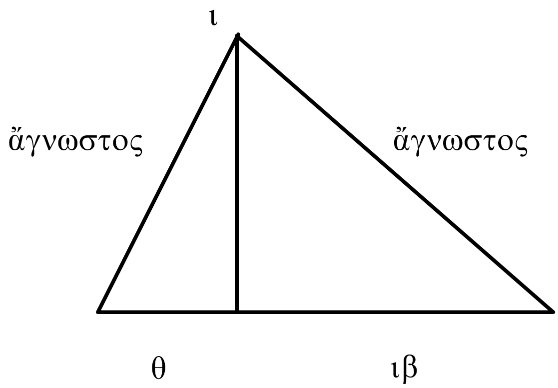
Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν δύο ἑτέρων πλευρῶν ζητῆς εἰδέναι πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, εὑρήσης αὐτὴ καὶ οὕτως σπιθαμῶν η. Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴ τὴν λόξιον ἀποκλίνουσαν πλευρὰν τῶν ιζ σπιθαμῶν· ιζ-κις οὖν ιζ γίνονται σπθ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰς καὶ τὰς ιε σπιθαμὰς τὰς ἀπὸ τῆς καθέτου εὐθείας γραμμῆς ἧς ἐποίησας μέχρι τῆς ἀμφιγωνίας τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν τῶν ιζ καὶ κα σπιθαμῶν· ιε-κις οὖν ιε γίνονται σκε. Ἄφελε ταῦτα τὰ σκε ἐκ τῶν σπθ καὶ ἀπομένοσιν ξδ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ξδ ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν η, ὡς εἴπομεν. (20) Εὗρες οὖν καὶ οὕτως τὴν κάθετον εὐθείαν γραμμὴν ἣν ἐποίησας, ἅτιναι εἰσὶ πλάτος, πρὸς τὰς κα σπιθαμὰς τῆς ὅλης ἐγκαρσίου μείζονος πλευρᾶς τοῦ μήκους· η-κις οὖν κα γίνονται ρξη. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τούτων ὅπερ ἐστὶ πδ.

Καὶ ἄλλως προχειρεστέρως: Πολλαπλασίασον τὴν ὅλην ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν κα σπιθαμῶν τοῦ μήκους, πρὸς τὸ ἥμισυ τῶν η σπιθαμῶν τοῦ πλάτους· δ-κις οὖν κα πάλιν γίνονται πδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σκαληνοῦ τούτου τριγωνοῦ σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων πδ.

Ἐὰν δὲ καὶ ἕκαστον μέρος διηρημένως ζητῆς εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν, λαβὲ τὸ ἥμισυ τῶν η σπιθαμῶν τῆς εὐθείας (25) γραμμῆς τοῦ πλάτους δηλονότι, ὅπερ ἐστὶ σπιθαμαὶ δ, καὶ πολλαπλασίασον ταύτας τὰς δ σπιθαμὰς πρὸς τὰς ϛ τοῦ μήκους καὶ ιε, τουτέστι τῶν δύο μερῶν· δ-κις οὖν ϛ γίνονται κδ, δ-κις δὲ ιε γίνονται ξ. Ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ἐμβαδὸν τοῦ ἐλάττονος μέρους, σπιθαμῶν τετραγώνων κδ, τοῦ δὲ μείζονος, σπιθαμῶν τετραγώνων ξ. Ὁμοῦ δὲ τὸ ὅλον τούτου ἐμβαδόν, σπιθαμῶν πδ ὡς εἴπομεν.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον.

Ἔστω σκαληνὸν τρίγωνον σχῆμαν, ὅπερ ἡ μὲν ἐγκάρσιος τούτου μείζονα πλευρὰ ἐστὶ σπιθαμῶν κα ὡς καὶ τοῦ ἀνωτέρου οὗ εἴπομεν, ἡ δὲ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἔστω πάλιν σπιθαμῶν η. Αἱ δὲ δύο ἀποκλίνουσαι λόξιαι, ἔστωσαν ἄγνωσται. Ἐπεὶ γὰρ εἶδας τὴν κάθετον εὐθείαν γραμμὴν οὖσαν (30) σπιθαμῶν η, οὐκ'ἔστι χρεία εἰδέναι τὰς δύο ἀποκλίνουσας λόξιας πόσων σπιθαμῶν εἰσί. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

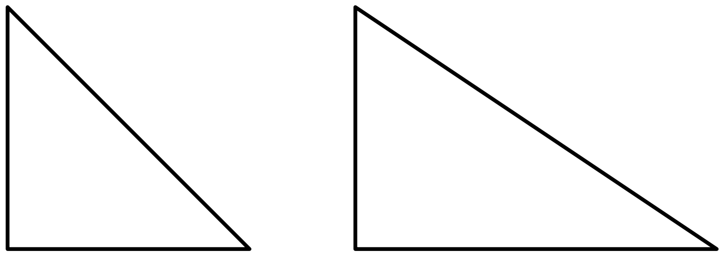


Λαβὲ καὶ ἐνταῦτα τὸ ἥμισυ τῶν η σπιθαμῶν τῆς εὐθείας γραμμῆς τοῦ μήκους, ὅπερ ἥμισυ τῶν η ἐστὶ σπιθαμῶν δ, καὶ εἰ μὲν ἑνωμένως ζητῆς εἰδέναι τὸ ὅλον τούτου σῶμαν πόσου ἐστὶ χωρητικόν, πολλαπλασίασον τὴν ὅλην μείζονα ἐγκάρσιον πλευρὰν τῶν κα σπιθαμῶν, πρὸς τὰς δ ἅπερ ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῶν η· δ-κις οὖν κα (35) γίνονται πδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ὅλον τούτου ἐμβαδὸν σπιθαμῶν τετραγώνων πδ ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου.

Εἰ δὲ διηρημένως ζητῆς εἰδέναι τὰ δύο μέρη αὐτοῦ, δ-κις θ γίνονται λς, δ-κις δὲ ιβ γίνονται μη. Καὶ τὸ μὲν ἔλαττο μέρος ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων λς, τὸ δὲ μεῖζον μη. Ὁμοῦ δὲ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν, σπιθαμῶν πδ.

(108β)(1) Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου σκαληνοῦ σχήματος ἐμβαδόν, τοῦ τὴν μίαν μὲν τούτου ἔχον ἐγκάρσιον πλευράν, τὰς δὲ δύο ἀποκλίνουσας, λόξιας, ἔχεις εἰδέναι διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω δὲ καὶ ἕτερον σκαληνὸν σχῆμαν, ὅπερ αἱ μὲν δύο τούτου πλευραὶ ἡ ὄρθιός τε καὶ ἡ ἐγκάρσιος ἐστὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου ὀρθογωνοῦ σχήματος, ἑκάστη αὐτῶν ἀνὰ σπιθαμῶν ζ, ἡ δὲ λόξιος ἔστω ἄγνωστος. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.



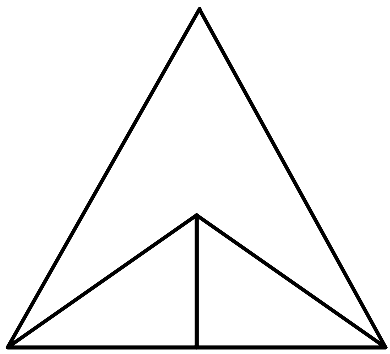
Ἐπεὶ οὖν οἶδας τὴν ὄρθιον καὶ ἐγκάρσιον τούτου πλευράν, τουτέστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος, πολλαπλασίασον τὸ πλάτος πρὸς τὸ μῆκος· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τούτων ὅπερ ἐστὶ κδ α/β. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σκαληνοῦ τούτου σχήματος σπιθαμῶν τετραγώνων κδ α/β.

Ἔστω δὲ καὶ ἕτερον τρίγωνον σκαληνόν, ὁμοίως τὰς δύο πλευρὰς ἔχον ἐκ τοῦ τετραγώνου ὀρθογωνοῦ σχήματος, ἡ μὲν ὄρθιος σπιθαμῶν θ, ἡ δὲ ἐγκάρσιος σπιθαμῶν ιβ· θ-κις οὖν ιβ γίνονται ρη. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τούτων ὅπερ ἐστὶ νδ. Ἐστὶ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτου, σπιθαμῶν τετραγώνων νδ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον τρίγωνον σκαληνόν, ἔχον τὰς δύο τούτου πλευρὰς ἐκ τοῦ τετραγώνου ὀρθογωνοῦ σχήματος, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης προχείρου μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσοσκελοῦς οὐ πεπληρωμένου τριγωνοῦ, ἀλλ’ ἐλλιπῶς ἔχοντα, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον οὐ πεπληρωμένον, ἀλλ’ ἐλλιπῶς ἔχον τὸ περὶ τῆς ἐγκαρσίου πλευρᾶς μέρος, οὐδὲ γὰρ ἔχει ὅλως ἐγκάρσιον πλευράν. Ἐστὶ δὲ αἱ μὲν δύο τούτου μείζοναι πλευραὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ις. Αἱ δὲ δύο ἐλάττοναι, αἱ ἐντὸς τούτου οὖσαι, ἀνὰ σπιθαμῶν ι. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις οὖν τοῦτο εἰδέναι διὰ τῶν δύο μεταχειρίσεων ὧν εἴπομεν ἐπὶ τοῦ σιζ^{ου} κεφαλαίου.



Ἡ μὲν γὰρ πρώτη μεταχείρισις: Ἕνωσον τὰς τρεῖς τούτου πλευράς· τρὶς οὖν ις γίνονται ὁμοῦ μη. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῶν μη ὅπερ ἐστὶ κδ. Ἄφελε τὴν μίαν τούτου πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν ἐκ τῶν κδ καὶ ἀπομένοσιν η. Πολλαπλασίασον τὰ κδ μετὰ τῶν η· η-κις οὖν κδ γίνονται ρϟβ. Πολλαπλασίασον καὶ ταῦτα τὰ ρϟβ μετὰ τῶν η· η-κις οὖν ρϟβ γίνονται ͵αφλς. Πολλαπλασίασον καὶ ταῦτα τὰ ͵αφλς μετὰ τῶν η· η-κις δὲ ͵αφλς γίνονται ͵ιβσπη. Ζήτει τὴν ρίζαν τούτων ἥτις ἐστὶ ρι καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω. Εἴπερ οὖν ἦν πεπληρωμένον τὸ παρὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἦν ἂν τὸ τούτου ἐμβαδόν, σπιθαμῶν τετραγώνων ρι καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν ͵ιβσπη, καὶ ἐστὶ αὐτὴ ἡ πρώτη μεταχείρισις.

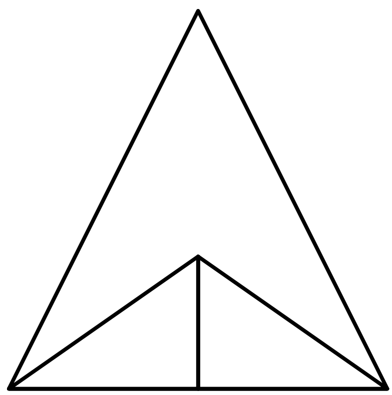
Δευτέρα δὲ μεταχείρισις: Ζήτει ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας: Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴ τὴν μίαν τούτου ἀποκλίνουσαν πλευρὰν τῶν ις σπιθαμῶν· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὸ καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε ταῦτα τὰ ξδ ἐκ τῶν σνς καὶ ἀπομένοσιν ρϟβ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ρϟβ ἥτις ἐστὶ ιγ καὶ ς/ζ βραχύ τι ἐλάττω. Ἐστὶ δὲ ἡ κάθετος ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς σπιθαμῶν ιγ καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν ρϟβ.

Πολλαπλασίασόν δε ταύτας τὰς ιγ καὶ ς/ζ μετὰ τῶν η σπιθαμῶν τῶν ἀπὸ τῆς γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν· η-κις οὖν ιγ καὶ ς/ζ γίνονται ρι καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς. Καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως διὰ τῆς δευτέρας μεταχειρίσεως (30) εὗρες ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τούτου ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων ρι καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω.

Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πεπληρωμένον, πολλαπλασίασον τὴν ἐντὸς ἀποκλίνουσαν μίαν τούτου πλευρὰν ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ι εἰς ἑαυτή· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Πολλαπλασίασον καὶ τὰς η σπιθαμὰς τὰς ἀπὸ τῆς γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν· η-κις οὖν η γίνονται ξδ. Ἄφελε ταῦτα τὰ ξδ ἐκ τῶν ρ καὶ ἀπομένοσιν λς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λς ἥτις ἐστὶ ς· ς-κις γὰρ ς, λς γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο ἐλαττόνων πλευρῶν, τῶν ι ἀνὰ σπιθαμῶν οὐσῶν, μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν ις σπιθαμῶν, σπιθαμαὶ ς, καθὼς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν λς ὧν ἀπέμηναν ἐκ τῶν ρ. Πολλαπλασίασόν δε ταύτας τὰς ς σπιθαμὰς πρὸς τὰς (35) η τοῦ πλάτους· ς-κις οὖν η γίνονται μη. Ἄφελέ δε ταύτας τὰς μη σπιθαμὰς ἐκ τῶν ρι καὶ ς/ζ βραχύ τι ἐλάττω, καὶ ἀπομένοσιν ξβ καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω· διὰ γ' οὖν τὸ ἐλλιπὲς εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου, ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων ξβ καὶ ς/ζ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι ἐλάττω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἰσοπλεύρου τριγωνοῦ (109α)(1) ἐλλιποῦς ἐμβαδόν, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω δὲ καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐλλιπές, ὅπερ αἱ μὲν δύο τούτου μείζοναι πλευραὶ ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν κ, αἱ δὲ δύο ἐλάττοναι αἱ ἐντὸς τούτων οὖσαι ἀνὰ σπιθαμῶν ιγ. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ποίησον καὶ ἐγκάρσιον πλευράν. Ἔστω δὲ αὐτὴ ἡ ἐρυθρὰ ἐγκάρσιος πλευρὰ ἣν ἐποίησας, σπιθαμῶν κδ. (5) Ζήτει δὲ ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐγκαρσίου ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν, πόσαι σπιθαμαὶ εἰσί. Ἔχεις δὲ ταύτας εἰδέναι διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας.



Πολλαπλασίασον γὰρ τὴν μείζονα πλευρὰν τῶν κ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· ιβ-κις οὖν ιβ γίνονται ρμδ. Ἄφελε ταῦτα τὰ ρμδ ἐκ τῶν (10) υ καὶ ἀπομένοσιν σνς. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν σνς ἥτις ἐστὶ ις· ις-κις γὰρ ις, σνς γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ κάθετος ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν, σπιθαμῶν ις ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν σνς. Πολλαπλασίασόν δε ταύτας τὰς ις σπιθαμὰς πρὸς τὰς ιβ, τὰς ἀπὸ τῆς γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν· ιβ-κις οὖν ις γίνονται ρϟβ.

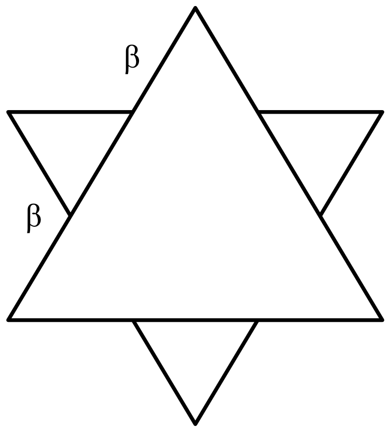
Εἴπερ οὖν ἦν πεπληρωμένον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παρόντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἦν ἂν τὸ τούτου ἐμβαδὸν χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων ρϟβ. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστι τὸ ἐμβαδὸν τούτου πεπληρωμένον, πολλαπλασίασον τὴν ἐλάττονα ἀποκλίνουσαν τούτου πλευρὰν τῶν ιγ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτή· ιγ-κις οὖν ιγ γίνονται ρξθ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὸ καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν· ιβ-κις οὖν ιβ γίνονται ρμδ. Ἄφελε τὰ ρμδ ἐκ τῶν ρξθ καὶ ἀπομένοσιν κε. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν κε ἥτις ἐστὶ ε· ε-κις γὰρ ε, κε γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἀπὸ τῆς ἀμφογωνίας τῶν δύο ἐλαττόνων πλευρῶν τῶν ἀνὰ ιγ σπιθαμῶν, μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν, σπιθαμαὶ ε, ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν κε, ὧν ἀπέμειναν ἐκ τῶν ρξθ. Πολλαπλασίασον ταύτας τὰς ε σπιθαμὰς πρὸς τὰς ιβ τὰς ἀπὸ τῆς γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν κδ σπιθαμῶν· ε-κις οὖν ιβ γίνονται ξ. Ἄφελε ταύτας τὰς ξ σπιθαμὰς ἐκ τῶν ρϟβ, καὶ ἀπομένοσιν ρλβ. Διά γ’ οὖν τὸ ἐλλιπὲς εἶναι τὸ τούτου ἐμβαδόν, ἐστὶ χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων ρλβ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἑτέρου παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἐλλιποῦς, ἐμβαδόν, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι τὸ ἐμβαδὸν τούτου, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκα´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἑξαγωνοῦ ἐκ δύο τριγώνων ἰσοπλεύρων συντεθήμενον, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω ἑξάγωνον ἐκ δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων συντεθήμενον, ὅπερ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν ς.

Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῶν δύο μεταχειρίσεων ὧν εἴπομεν (25) ἐπὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐν τῷ σιζ-ῳ κεφαλαίῳ, δι' ὧν εὕραμεν ἐκεῖσε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παρόντος ἰσοπλεύρου τριγώνου χωρητικόν, σπιθαμῶν τετραγώνων ιε καὶ ζ/ιβ μιᾶς σπιθαμῆς, βραχύ τι πλείω.

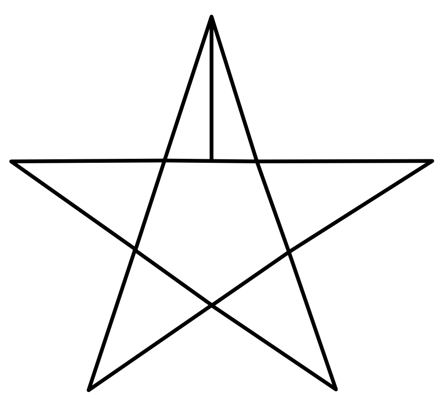


Ἐπεὶ δὲ τὸ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐστὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου χωρητικὸν σπιθαμῶν τετραγώνων ιε καὶ ζ/ιβ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, αἱ δὲ τρεῖς γωνίαι τοῦ ἑτέρου ἰσοπλεύρου τριγώνου, αἱ ἀπομένουσαι περὶ τὸ ἐκτὸς μέρος τοῦ ἑνὸς ἀκεραίου τριγωνοῦ, ἐστὶ τρίτον μέρος τοῦ ἑνὸς ἀκεραίου τριγωνοῦ, λαβὲ τὸ τρίτον μέρος τῶν ιε καὶ ζ/ιβ, ταυτὸν δ' εἰπεῖν (30) τῶν ιε καὶ κα/λς, ὅπερ ἐστὶ ε καὶ ζ/λς, καὶ ἕνωσον ταῦτα μετὰ τῶν ιε καὶ κα/λς, καὶ γίνονται ὁμοῦ κ καὶ κη/λς, τουτέστι κ καὶ ζ/θ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγωνοῦ τούτου ἰσοπλεύρου σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων κ καὶ ζ/θ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, καθ' ὃν λόγον εἴπομεν τὸ ἓν τρίγωνον ιε καὶ ζ/ιβ βραχύ τι πλείω, ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου ἑξαγωνοῦ ἐμβαδόν, ἐκ δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων συντεθήμενον, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Εἰ δὲ τὰ δύο συντεθήμενα τριγωνα ἔχωσιν (35) ἀνίσους πλευρὰς καὶ γωνίας, ζήτει ἑκάστην γωνίαν διηρημένως καθ' ὃν τρόπον εἴπομεν ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀξειγωνοῦ ἐν τῷ σιη-ῳ κεφαλαίῳ. Εὑρὼν δὲ διηρημένως ἑκάστης γωνίας ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐναπομένον ἐντὸς σώματος σφαιροειδὲς ἑξάγωνον, (109β)(1) διὰ τῆς μεταχειρίσεως ἧς εἴπομεν ἐν τῷ σια-ῳ κεφαλαίῳ, καὶ ἑνώσας ὁμοῦ τὰς κατὰ μέρος τούτων τετραγώνους σπιθαμάς, εὑρήσης παντὸς ἑξαγώνου ἢ πενταγώνου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω γὰρ σχῆμαν πεντάγωνον ὀξυγώνιον κατὰ μὲν πλάτος ἑκάστη τούτου γωνία σπιθαμῶν β, κατὰ μῆκος δέ, ἑκάστη πλευρὰ τῶν δύο τῶν ποιούντων ἑκάστη γωνίαν, ἀνὰ σπιθαμῶν γ, τὸ δὲ ἐναπομεῖναν ἐντὸς τούτων πεντάγωνον, σφαιροειδές, ἐστὶ ἡ περίμετρος τούτου σπιθαμῶν ι. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ὅλον (5) τούτου ἐμβαδόν, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

β ιθ/κγ



Ποίησον τὴν κάθετον εὐθείαν γραμμὴν ἀπὸ τῆς ἄνωθεν ὀξυγώνου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ἐρυθρᾶς εὐθείας γραμμῆς τῶν β σπιθαμῶν. Ζήτει δὲ διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας πόσων σπιθαμῶν ἐστὶ αὐτὴ ἡ κάθετος γραμμὴ ἣν ἐποίησας ἀπὸ τῆς ἄνωθεν γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῶν β σπιθαμῶν. Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὰς τὰς γ σπιθαμὰς τῆς μίας πλευρᾶς, πᾶσαι γὰρ ἐστὶ ἀνὰ σπιθαμῶν γ· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Πολλαπλασίασον καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐρυθρᾶς ἐγκαρσίου εὐθείας γραμμῆς τῶν β σπιθαμῶν· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α. Ἄφελε α ἐκ τῶν θ καὶ ἀπομένοσιν η. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν η ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν β καὶ ιθ/κγ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, ἀπὸ τῆς ὀξυγωνοῦ γωνίας, μέχρι τοῦ μέσου τῶν β σπιθαμῶν τῆς ἐρυθρᾶς εὐθείας γραμμῆς, σπιθαμῶν β καὶ ιθ/κγ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω, ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν η. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ἥμισυ τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς τῶν β σπιθαμῶν, τουτέστι τὴν μίαν σπιθαμήν, πρὸς τὰς β καὶ ιθ/κγ τῆς εὐθείας γραμμῆς ἧς εὗρες εἶναι διὰ τῆς ρίζης τῶν η· ἅπαξ οὖν β καὶ ιθ/κγ, πάλιν ἐστὶ β καὶ ιθ/κγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ πέντε γωνίαι εἰσὶ ὅμοιαι, ἑκάστη γωνία ἀπὸ τῆς ἐρυθρᾶς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἐκτός, ἐστὶ χωρητικὴ σπιθαμῶν τετραγώνων β καὶ ιθ/κγ μιᾶς σπιθαμῆς βραχύ τι πλείω. Ἕνωσον τὰς πέντε γωνίας· ε-κις οὖν β καὶ ιθ/κγ, γίνονται ιδ καὶ γ/κγ μιᾶς σπιθαμῆς. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὴν περίμετρον τοῦ ἐναπομένοντος σφαιροειδοῦς πενταγώνου σχήματος εἰς ἑαυτή, ἥτις ἐστὶ σπιθαμῶν ι ὡς εἴπομεν· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Μέρισον ταῦτα τὰ ρ μετὰ τῶν ιδ καὶ ς/ιγ ὧν εἰώθαμεν μερίζειν πᾶν τοιοῦτον σχῆμαν πεντάγωνον, καθὼς εἴπομεν ἐν τῷ σιβ-ῳ κεφαλαίῳ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ς καὶ ι/ια.

Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιροειδοῦς πενταγώνου σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων ς καὶ ι/ια μιᾶς σπιθαμῆς. Ἕνωσον τὰς ς καὶ ι/ια μετὰ τῶν ιδ καὶ γ/κγ καὶ γίνονται ὁμοῦ κα βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου τούτου σχήματος, σπιθαμῶν τετραγώνων κα βραχύ τι πλείω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ παντὸς ἑτέρου πολυγώνου σχήματος ἐμβαδόν, κ’ ἄν τε ὀξυγώνιον ἐστί, κ’ ἄν τε ἀμβλυγώνιον, κ’ ἄν τε ἴσαις ἀλλήλαις γωνίαις ἔχον, κ’ ἄν τε διαφέρουσαις ἔχεις τετραγωνῖσαι ταύτας διηρημένως διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας, καὶ εἰδέναι ἑκάστης γωνίας ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἑνώσας δὲ τὰ κατὰ μέρος μέρη, εὑρήσης τὸ ὅλον ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

σκβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν ἐκ διαφόρων σχημάτων συντεθήμενον, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Ἔστω σχῆμαν ἐκ τοσούτων διαφόρων σχημάτων συντιθέμενον. Ζητεῖς δὲ τετραγωνῖσαι τὸ ἐμβαδὸν τούτου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν· ἂν κ’ ἔχης οὖν τοῦτο εἰδέναι ὡς ἐν ταυτῷ ἅμα, τὸ ὅλον τούτου ἐμβαδόν, ἀλλὰ διηρημένως. Ἔστωσάν δε αἱ μὲν δύο ὄρθιαι μείζοναι πλευραὶ τοῦ τετραγώνου, ἀνὰ σπιθαμῶν ϛ, αἱ δὲ δύο ἐγκάρσιαι ἐλάττοναι, ἀνὰ σπιθαμῶν ε. Πολλαπλασίασον τὴν ὄρθιον πλευρὰν πρὸς τὴν ἐγκάρσιον· ϛ-κις οὖν ε γίνονται λ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τετραγώνου, σπιθαμῶν τετραγώνων λ.

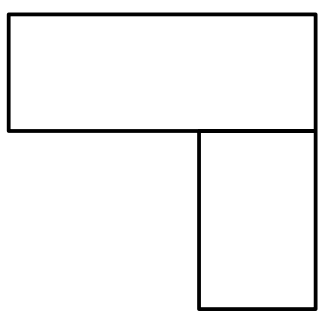
Ἔστωσάν δε καὶ αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀνὰ σπιθαμῶν ζ. Ποίησον καὶ κάθετον εὐθείαν γραμμὴν ἀπὸ τῆς τούτου γωνίας μέχρι τοῦ μέσου τῆς ὀρθίου ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν ϛ σπιθαμῶν. Πολλαπλασίασόν δε τὰς ζ σπιθαμὰς μιᾶς πλευρᾶς εἰς ἑαυτάς· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὸ καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθίου ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τῶν ϛ σπιθαμῶν εἰς ἑαυτό· γ-ὶς οὖν γίνονται θ. Ἄφελε θ ἐκ τῶν μθ καὶ ἀπομένοσιν μ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν μ ἥτις ἐστὶ ϛ καὶ ιβ/λζ βραχύ τι πλείω. Ἐστὶ δὲ ἡ κάθετος εὐθεία γραμμὴ ἣν ἐποίησας, σπιθαμῶν ϛ καὶ ιβ/λζ βραχύ τι πλείω ὡς δηλοῦται διὰ τῆς ρίζης τῶν μ. Πολλαπλασίασον ταύτας πρὸς τὰς γ σπιθαμὰς τῆς ἡμίσιας πλευρᾶς τῶν ϛ σπιθαμῶν· γ-ὶς οὖν ϛ καὶ ιβ/λζ γίνονται ἔγγιστα ιθ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, σπιθαμῶν ιθ. Ἔστω δὲ καὶ ἡ ἐγκάρσιος πλευρὰ τοῦ σκαληνοῦ τριγώνου, σπιθαμῶν η. Πολλαπλασίασον ταύτας πρὸς τὰς ς σπιθαμὰς τῆς ἐγκαρσίου ἐρυθρᾶς τούτου πλευρᾶς· ς-κις οὖν η (110α)(1) γίνονται μη. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τούτων ὅπερ ἐστὶ κδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σκαληνοῦ τριγώνου, σπιθαμῶν τετραγώνων κδ, ἡ δὲ τοῦ ἡμισφαιρίου διάμετρος, ἥτις ἐστὶ ἡ μία ἐγκάρσιος πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἐστὶ σπιθαμῶν ε. Πολλαπλασίασον ταύτας τὰς ε σπιθαμὰς εἰς ἑαυτάς· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Λαβὲ ια/ιδ τῶν κε, καθὼς εἴπομεν ἐν τῷ σα-ῳ κεφαλαίῳ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι ἐκ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδὸν τούτου. Ἐστὶ δὲ τὰ ια/ιδ ε σπιθαμῶν τῆς διαμέτρου, ιθ καὶ θ/ιδ. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τούτων ὅπερ ἐστὶ θ καὶ κγ/κη, τουτέστι θ καὶ ς/ζ ἔγγιστα. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν (5) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμισφαιρίου, σπιθαμῶν τετραγώνων θ καὶ ς/ζ ἔγγιστα μιᾶς σπιθαμῆς. Τὸ δὲ κάτωθεν σφαιροειδὲς τεταρτημόριον, αἱ ε σπιθαμαὶ τῆς ἐγκαρσίου ἐρυθρᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τοῦ ὅλου κύκλου τοῦ ἔχοντος τὸ τεταρτημόριον.

βε δ αυυ αδ
βε α αγθ αυυ α δβη
βε α βζε αυυ α ααυυ
βζε αδδ ααυυ αδδ
α α
ιθ καὶ θ/ιδ οη καὶ η/ιδ

Διπλασίασόν δε τὰς ε σπιθαμὰς καὶ γίνονται ι. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Λαβὲ ια/ιδ τῶν ρ, ἅπερ ια/ιδ τῶν ρ ἐστὶ οη καὶ η/ιδ. Λαβὲ τὸ τέταρτον μέρος τῶν οη καὶ η/ιδ, ὅπερ ἐστὶ ιθ καὶ θ/ιδ. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τεταρτημορίου, σπιθαμῶν τετραγώνων ιθ καὶ θ/ιδ μιᾶς σπιθαμῆς. Ἕνωσον τὰς δηλωτικὰς σπιθαμὰς ἑκάστου ἐμβαδοῦ αὐτῶν, τουτέστι (10) τοῦ μὲν τετραγώνου σπιθαμὰς λ, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου σπιθαμὰς ιθ ἔγγιστα, τοῦ δὲ σκαληνοῦ τριγώνου κδ, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου θ καὶ κγ/κη, τοῦ δὲ τεταρτημορίου ιθ καὶ θ/ιδ, καὶ γίνονται ὁμοῦ σπιθαμαὶ ρβ καὶ ιγ/κη. Ἐστὶ δὲ χωρητικὸν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ σώματος τῶν διαφόρων σχημάτων τούτων ὧν ὑπεθέμεθα, σπιθαμῶν τετραγώνων ρβ καὶ ιγ/κη.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον σχῆμαν ἐκ διαφόρων σχημάτων συντεθήμενον. Ἐπεὶ οὐκ ἔχεις ζητῆσαι ἅμα τὸ ὅλον τούτου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν, σκόπει τὰ διαφέροντα τούτου σχήματα, τίνι ἐστὶ ὅμοια, καὶ ζήτει διηρημένως, ἑκάστου σχήματος ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν, δι’ ὧν τρόπων ὑπὸ τῶν διαφόρων ὑποδειγμάτων ὑποτιθέμεθα. Εὑρὼν δὲ ἑκάστου τούτου ἐμβαδὸν διηρημένως πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ἕνωσον τὰς δηλουμένας σπιθαμὰς τῶν διαφόρων σχημάτων (15) ὁμοῦ. Τούτῳ δὲ τῷ τρόπῳ ἔχεις εἰδέναι παντὸς ποικίλου καὶ διαφόρου σχήματος ἐμβαδόν, πόσου ἐστὶ χωρητικόν.

Τὸ παρὸν σχῆμα γνώμων λέγεται. Εὑρίσκεταί δε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γνώμονος, ὡς τοῦ ἑτερομήκους παραλληλογράμμου τετραγώνου.



Καὶ οὐκ ἔστι σχῆμαν, ὅπερ οὐ δύνασαι εὑρεῖν πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Τὸ μὲν γὰρ ἐμπονεσθέρως, τὸ δὲ ἀπονεσθέρως ἔχεις εἰδέναι διὰ τῶν ὁμοίων ποικίλων τε καὶ διαφόρων ὑποδειγμάτων ὧν ἐκτιθέμεθα, πόσου ἐστὶ χωρητικὸν ἕκαστον τούτων ἐμβαδὸν καθὼς ἂν ἔχῃ ἕκαστον θέσεως.

σκγ΄ Περὶ τοῦ ποῖον ἐστὶ πολυχωρέστερον σχῆμαν.

1) Κύκλου ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα καὶ θ/ια. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

2) Γωνιῶν μ ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα καὶ ζ/ι. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

3) Γωνιῶν λ ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα καὶ ια/ιθ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

4) Γωνιῶν κ ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα α/β. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

5) Γωνιῶν ιη ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα καὶ ιθ/να ἢ α/γ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

6) Γωνιῶν ις ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λα καὶ α/ς. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

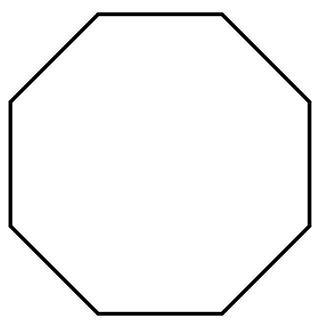
7) Γωνιῶν ιδ ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λ καὶ κθ/λ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

8) Γωνιῶν ιβ ἐμβαδόν, σπιθαμῶν λ καὶ ι/ιγ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

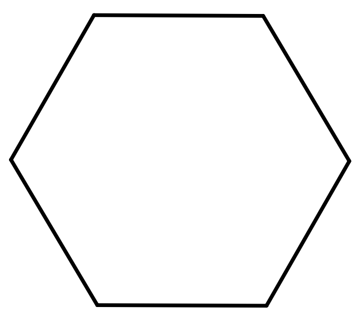
Ἀεὶ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι ὅτι τῶν ἄλλων πάντων σχημάτων, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐστὶ πολυχωρέστερον, μετὰ δὲ τούτου ἐστὶ τὸ σφαιροειδὲς πολύγωνον τῶν μ γωνιῶν ἢ ὅσων ἂν εἴπῃς πλειόνων γωνιῶν, εἶθ’ οὕτως τῶν λ γωνιῶν, μετὰ δὲ τούτων, τῶν κ, καὶ ἀκολούθως τῶν ιη καὶ ις καὶ ιδ καὶ ιβ καὶ ι καὶ η καὶ ς καὶ ε γωνιῶν, εἶθ’ οὕτως τὸ ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον τετράγωνον, μετὰ δὲ (110β) τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον τετράγωνον τὸ δεχόμενον σπιθαμὰς κδ. Ἔπειτα τὸ παραλληλόγραμμον τετράγωνον τὸ δεχόμενον σπιθαμὰς κα. Ἔπειτα τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ὅπερ δέχεται σπιθαμὰς ιθ καὶ α/δ. Ἔπειτα τὸ παρα(10)λληλόγραμμον τετράγωνον ὅπερ δέχεται σπιθαμὰς ις. Ἔπειτα τὸ παραλληλόγραμμον τετράγωνον ὅπερ δέχεται σπιθαμὰς θ.

9) Γωνιῶν ι. Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν λ α/β. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

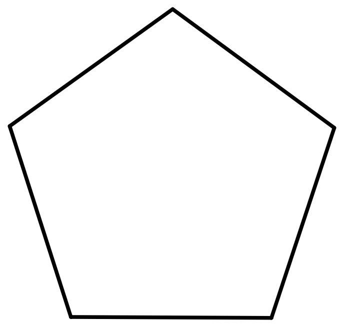
10) Γωνιῶν η. Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν λ α/ς. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.



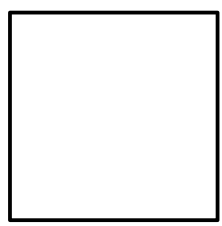
11) Γωνιῶν ς. Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν κθ α/ς. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.



12) Γωνιῶν ε. Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν κζ β/γ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.



13) Γωνιῶν δ. Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν κε. Ἡ περὶμετρος σπιθαμῶν κ.

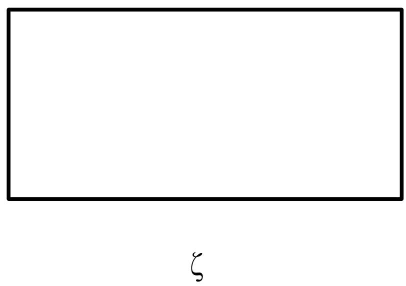


ε

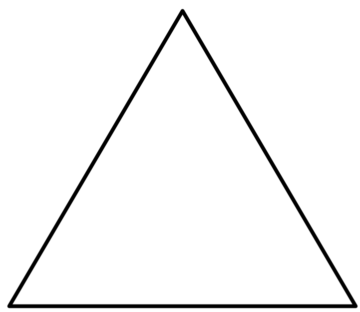
14) Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν κδ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

ς

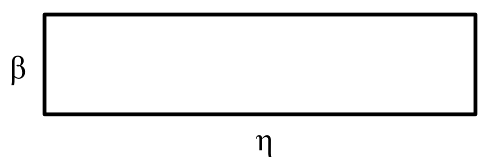
15) Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν κα. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.



16) Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν ιθ α/δ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.



17) Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν ις. Ἡ περὶμετρος σπιθαμῶν κ.



18) Ἐμβαδὸν σπιθαμῶν θ. Ἡ περίμετρος σπιθαμῶν κ.

Οὐκ ἔστι ἀνάλογα τὰ δύο τούτων σχήματα.

Τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τετράγωνον, καθ’ ὅσῳ ἂν ἐκτεινομένας ἔχη τὰς δύο πλευράς, συστελόμενάς δε τὰς λοιπὰς τούτου δύο, (15) τοσοῦτον ἐστὶ μᾶλλον καὶ βραχυχωρέστερον τὸ ἐμβαδὸν τούτου, ἅπερ δύο σχήματα διαφόρως προείπομεν πόσου ἐστὶ χωρητικά, ἐνταῦτα ἀκολούθως ὁμοῦ, ὑπεθέμεθα, ἵνα εἰδέναι ἔχης ὡς ἐν ταυτῷ, ἑκάστου ἐμβαδὸν πόσου ἐστὶ χωρητικόν. Ἐστὶ δὲ ἡ τούτων πάντων περίμετρος ἀνὰ σπιθαμῶν κ. Ἕκαστόν δε τούτων, ἀκολούθως ἐστὶ ἐλάττονος ποσότητος δεκτικόν, τοῦ προτιθεμένου αὐτοῦ σχήματος ὡς ὁρᾶται σαφέστατα.

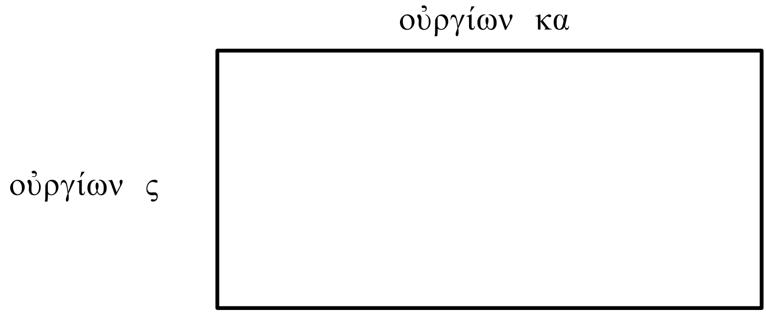
σκδ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἡ τούτων ζήτησις χρήσιμος εἰς γεωδοτικὰς παραδόσεις μοδησμῶν.

Ἐστὶ μέν, ὅτε χρήσιμόν τε καὶ ἀναγκαῖον, ἡμῖν εὑρεθήσεται, εἰδέναι τὰ διάφορα τούτων σχήματα, πόσων σπιθαμῶν ἢ οὐργιῶν ἐστὶ χωρητικά, οὐκ ἐλάττω δὲ καὶ ἐπὶ γεωδοτικὰς παραδόσεις μοδησμῶν, ἀναγκαία καὶ χρήσιμα εὑρεθήσωνται. Δι' αὐτῶν γὰρ δηλωθήσεται ἡμῖν πᾶν γῆς μόριον, πόσων μοδίων ἐστὶ χωρητικόν, ὥσπερ γὰρ (20) ἐπὶ οἴκων μεγεθῶν οὐργίας λαμβάνομεν, ἐπὶ κύκλων δὲ καὶ γραμμῶν σπιθαμὰς ἐπιζητοῦμεν, οὕτως καὶ ἐπὶ γεωμετρικὰς παραδόσεις μοδησμῶν ἀντὶ οὐργίων καὶ σπιθαμῶν, μοδίων τετραγώνων ζητήσεις ποιούμεθα.

σκε΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι οἴκου τινος ἔδαφος πόσων οὐργίων ἐστί, καὶ ἄλλα τινα ὅμοια τούτου ζητήματα.

Ἔστω οἶκος τις κατὰ μῆκος οὐργίων κα, κατὰ πλάτος δὲ οὐργίων ς. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ἔδαφος τούτου πόσων οὐργίων ἐστί.

Πολλαπλασίασον τὸ μῆκος πρὸς τὸ πλάτος ὡς εἰώθαμεν ἐπὶ τῶν τετραγώνων ποιεῖν· ς-κις οὖν κα, ρκς γίνονται. Ἐστὶ δὲ τὸ ἔδαφος τούτου οὐργιῶν τετραγώνων (10) ρκς. Διὰ δὲ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι πόσων οὐργίων τετραγώνων ἐστὶ ἕκαστον τούτου τεῖχος, καθὼς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐποίησας.



Τὸ παρὸν ἔδαφος ἐστὶ οὐργίων τετραγώνων ρκς

Ἔστω δὲ ὅτι βούλει καλύψαι τὸ ἔδαφος τούτου διὰ τούβλων ἢ μαρμάρων τετραγώνων, τοιούτου μεγέθους, ὥστε ἑκάστην οὐργίαν τῶν ρκς, ἀρχούντως καλύψαι τοῦβλα ἢ μάρμαρα ις.

Πολλαπλασίασον μιᾶς οὐργίας τοῦβλα ἢ μάρμαρα, τουτέστι ις, μετὰ τῶν ρκς οὐργίων· ις-κις γὰς ρκς γίνονται ͵βκς. Καὶ ἰδοὺ εὗρες ὅτι ͵βκς τοῦβλα (15) ἢ μάρμαρα, ἔσται σοὶ χρεία, πρὸς τὸ καλύψαι τὸ ὅλον ἔδαφος τῶν ρκς οὐργίων.

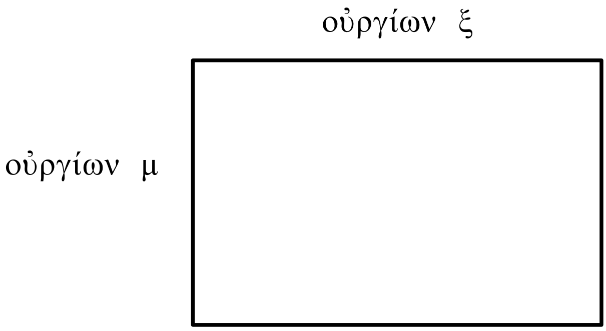
Ἔστω δὲ ὅτι βούλει καλύψαι τὸ ἔδαφος τούτου διὰ τινων καλυμμάτων, ἅπερ ἕκαστον κάλυμμα, κατὰ μῆκος μὲν ἐστὶ οὐργίων β α/β, κατὰ πλάτος δὲ οὐργίων β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα καλύμματα τοιούτου μεγέθους, ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ καλύψαι τὸ ἔδαφος τῶν ρκς οὐργίων.

Πολλαπλασίασον τὸ πλάτος τοῦ καλύμματος πρὸς τὸ μῆκος αὐτοῦ, τουτέστι β-ὶς τὰ β α/β γίνονται ε. Ἕκαστον οὖν κάλυμμαν καλύπτει οὐργίας ε. Μέρισον τὰς ρκς οὐργίας μετὰ τῶν ε, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κε καὶ α/ε. Τὸ ἔδαφος οὖν τῶν ρκς οὐργίων, ἔχεις καλύψαι διὰ καλυμμάτων κε καὶ α/ε ἑνὸς καλύμματος, τοιούτου μεγέθους οὗ εἴπομεν ἕκαστον κάλυμμαν κατὰ μὲν πλάτος οὐργίων β, κατὰ μῆκος δὲ οὐργίων β α/β.

α α/ε
αβς
εε
βε καὶ α/ε

Ἔστω δὲ καὶ τόπος τις ἐπίπεδος, κατὰ μῆκος μὲν οὐργίων ξ, κατὰ πλάτος δὲ οὐργίων μ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσους ἂν οἴκους τὸ ἐμβαδὸν τούτου ἔχει δέξασθαι, τῶν ἀνὰ οὐργίων γ κατὰ μῆκος, κατὰ πλάτος δὲ ἀνὰ οὐργίων β.

Πολλαπλασίασον τὸ μῆκος τῶν ξ οὐργίων πρὸς τὸ πλάτος τῶν μ· μ-κις οὖν ξ γίνονται ͵βυ.



Ἡ περίμετρος τοῦ οἴκου, οὐργίων ι
σ-κις σ γίνονται ͵μ, ι-κις ι γίνονται ρ. Γίνονταί δε καὶ οὕτως οἶκοι δυυ.
Τὸ ἐμβαδὸν τούτου δέχεται οἴκους υ, κατὰ μῆκος μὲν οὐργίων γ, κατὰ πλάτος δὲ οὐργίων β.

ςυ
υυ υ βδυυ
βδυ δ ςςς
βδυυ οἶκοι δυυ

Πολλαπλασίασον καὶ τοῦ οἴκου τὰς κατὰ πλάτος β οὐργίας πρὸς τὰς κατὰ μῆκος γ· β-ὶς οὖν γ γίνονται ς. Μέρισον τὰς ͵βυ οὐργίας μετὰ τῶν ς οὐργίων τοῦ ἑνὸς οἴκου, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς υ. Χωρῶσιν δὲ ἐντὸς τούτου οἶκοι υ.

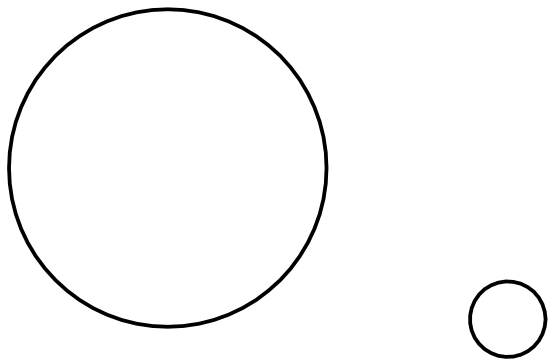
Καὶ ἄλλως: Ἡ περίμετρος τοῦ ἐπιπέδου τόπου ἐστὶ οὐργίων σ, καὶ γὰρ μ καὶ ξ, καὶ πάλιν μ καὶ ξ, ὁμοῦ αἱ τέσσερες πλευραὶ οὐργίαι σ. Τοῦ δὲ ἑνὸς οἴκου ἡ περίμετρος (35) ἐστὶ οὐργίων ι. Καὶ γὰρ β καὶ γ, καὶ πάλιν β καὶ γ, ὁμοῦ αἱ τέσσερες πλευραὶ τοῦ οἴκου, οὐργίαι ι. Πολλαπλασίασον τὰς σ οὐργίας τοῦ ἐπιπέδου τόπου εἰς ἑαυτάς· σ-κις οὖν σ γίνονται ͵μ. Πολλαπλασίασον καὶ τὰς ι οὐργίας τοῦ οἴκου εἰς ἑαυτάς· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Μέρισον τὰς ͵μ μετὰ τῶν ρ καὶ γίνεται (111β)(1) ὁ τούτων διαμερισμὸς υ. Εὗρες οὖν καὶ οὕτως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου τόπου οὗ ὑπεθέμεθα, δέξεται οἴκους υ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

σκς΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσας ἐλάττονας πόλεις ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως.

Ἔστω τις πόλη σφαιροειδής, ἥτις ἡ περίμετρος ταύτης ἐστὶ μιλίων κ. Ἔστω δὲ καὶ ἑτέρα τις πόλη, τοιούτου σχήματος, ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης μιλίων ε. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσας πόλεις (5) ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως, τῶν ἀνὰ μιλίων ε.

αγ Δέξεται πόλεις ις ἀνὰ μιλίων ε. Περίμετρος μίλια κ.



δυυ

βεε

β

ις Περίμετρος μίλια ε

Πολλαπλασίασον τὰ κ μίλια τῆς μείζονος πόλεως εἰς ἑαυτά· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Πολλαπλασίασον καὶ τὰ ε μίλια τῆς ἐλάττονος πόλεως εἰς ἑαυτά· ε-κις οὖν ε γίνονται κε. Μέρισον τὰ υ μίλια μετὰ τῶν κε μιλίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ις. Δέξεταί δε πόλεις ις ἀνὰ μιλίων ε, ἡ οὖσα ἀνὰ μιλίων κ.

Καὶ ἄλλως: Τὰ ε μίλια πρὸς τὰ κ, ἐστὶ α/δ, τουτέστι ὃν λόγον ἔχει τὸ α πρὸς τὰ δ, τὸν αὐτὸν ἔχοσιν (10) καὶ τὰ ε μίλια πρὸς τὰ κ. Πολλαπλασίασόν δε τὰ δ καὶ α εἰς ἑαυτά, καθὼς ἐπολλαπλασίασας καὶ τὰ κ καὶ ε εἰς ἑαυτά· δ-κις οὖν δ γίνονται ις, καὶ ἅπαξ α πάλιν ἐστὶ α, ἅπερ οὕτως κείμενα α/ις δηλῶσιν α ἑξακαιδέκατον. Ἐστὶ δὲ ις-ον μέρος, ἡ πόλις τῶν ε μιλίων, τῆς πόλεως τῶν κ μιλίων. Ὁσάκις οὖν χωρεῖ τὸ α πρὸς τὰ ις, τοσαύτας πόλεις τῶν ἀνὰ ε μιλίων δέξεται ἡ πόλις τῶν κ μιλίων. Τουτέστι δέξεται πόλεις ις ὡς εἴπομεν.

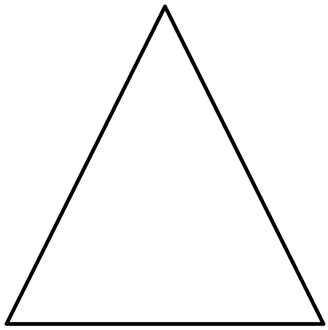
Ἔστω δὲ καὶ πόλις τρίγωνος ἰσόπλευρος ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης μιλίων ιη. Ἔστω δὲ καὶ ἑτέρα τις πόλη τοιούτου σχήματος ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης μιλίων ς. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσας πόλεις ἀνὰ μιλίων ς, (15) ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως.

ε

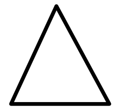
γβδ

γς

θ



Περίμετρος μιλίων ιη



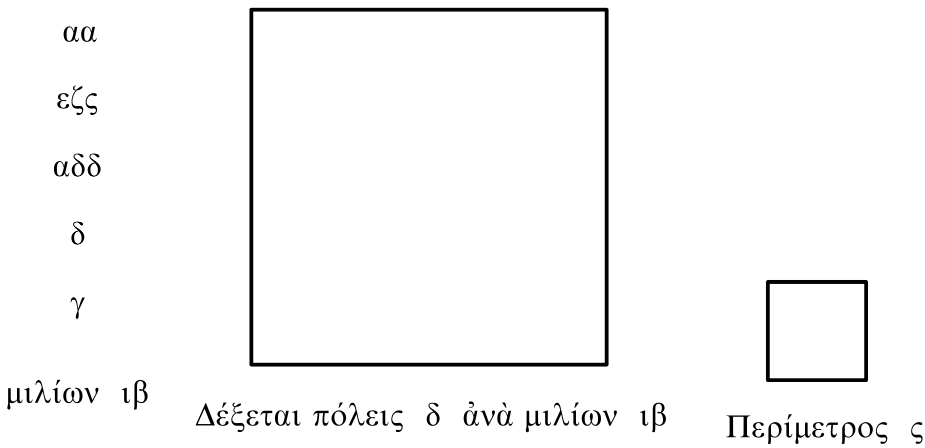
Περίμετρος

μιλίων ς

Πολλαπλασίασον ἑκάστης πόλεως περίμετρον εἰς ἑαυτή· ιη-κις οὖν ιη γίνονται τκδ, ς-κις δὲ ς γίνονται λς. Μέρισον τὰ τκδ μετὰ τῶν λς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς θ. Δέξεταί δε πόλεις θ ἀνὰ μιλίων ς, ἡ οὖσα μιλίων ιη.

Καὶ ἄλλως: Τὰ ς μίλια τῆς ἐλάττονος πόλεως, πρὸς τὰ ιη μίλια τῆς μείζονος πόλεως, ἔχοσιν λόγον ὃν ἔχει τὸ α πρὸς τὰ γ, τουτέστι α/γ. Πολλαπλασίασόν δε τὸ α καὶ τὰ γ εἰς ἑαυτά, καθὼς ἐπολλαπλασίασας καὶ τὰ ς καὶ ιη εἰς ἑαυτά· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α, καὶ γ-ὶς τὰ γ (20) γίνονται θ, ἅπερ οὕτως κείμενα α/θ δηλῶσιν α ἔννατον.᾿Εστὶ δὲ θ-ον μέρος ἡ πόλις τῶν ς μιλίων, τῆς πόλεως τῶν ιη μιλίων. ῾Οσάκις οὖν χωρεῖ τὸ α πρὸς τὰ θ, τοσαύτας πόλεις τῶν ἀνὰ ς μιλίων δέξεται ἡ τῶν ιη μιλίων, τουτέστι δέξεται πόλεις θ ὡς εἴπομεν.

῎Εστω δὲ καὶ πόλις τετράγωνος ἰσόπλευρος ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης μιλίων κδ. ῎Εστω δὲ καὶ ἑτέρα τις πόλη τοιούτου σχήματος ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης μιλίων ιβ, ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσας πόλεις ἀνὰ μιλίων ιβ, ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως.



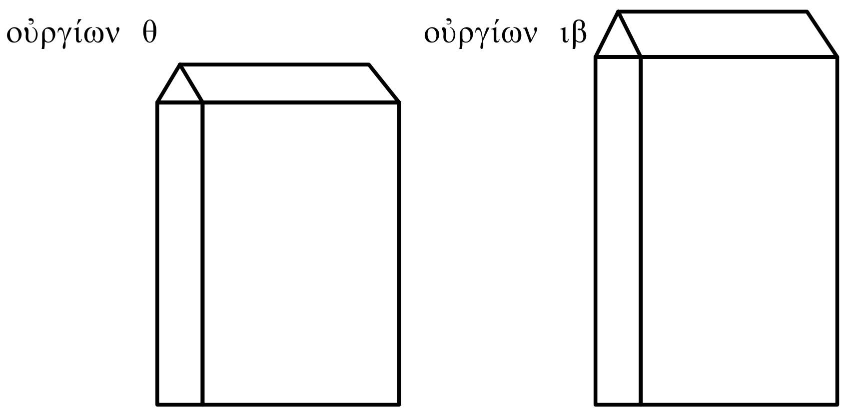
Πολλαπλασίασον ἑκάστης πόλεως περίμετρον εἰς ἑαυτή· (25) κδ-κις οὖν κδ γίνονται φος, ιβ-κις δὲ ιβ γίνονται ρμδ. Μέρισον τὰ φος μετὰ τῶν ρμδ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς δ. Δέξεταί δε πόλεις δ ἀνὰ μιλίων ιβ, ἡ οὖσα μιλίων κδ.

Καὶ ἄλλως: Τὰ ιβ μίλια τῆς ἐλάττονος πόλεως, πρὸς τὰ κδ μίλια τῆς μείζονος πόλεως, ἔχοσιν λόγον ὃν ἔχει τὸ α πρὸς τὰ β, τουτέστι α/β. Πολλαπλασίασόν δε τὸ α καὶ β εἰς ἑαυτά, (30) καθὼς ἐπολλαπλασίασας καὶ τὰ ιβ καὶ κδ εἰς ἑαυτά· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α καὶ β-ὶς τὰ β γίνονται δ, ἅπερ οὕτως κείμενα α/δ δηλῶσιν α τέταρτον. Ἐστὶ δὲ τέταρτον μέρος ἡ πόλις τῶν ιβ μιλίων, τῆς πόλεως τῶν κδ μιλίων. Ὁσάκις οὖν χωρεῖ τὸ α πρὸς τὰ δ, τοσαύτας πόλεις τῶν ἀνὰ ιβ μιλίων, δέξεται ἡ τῶν κδ μιλίων, τουτέστι δέξεται πόλεις δ ὡς εἴπομεν.

Εἰ δὲ ἀνόμοια ἐστὶ τὰ σχήματα τῶν δύο πόλεων, τῆς μείζονος δηλονότι καὶ ἐλάττονος, ἡ μὲν οὖσα σφαιροειδής, ἡ δὲ τρίγωνος, ἡ μὲν τρίγωνος, ἡ δὲ τετράγωνος, οὐκ ἔχεις διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον. Εὑρήσης δὲ τοῦτο, δι’ οὗ τρόπου εἴπομεν τετραγωνίζειν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (35) καὶ τοῦ τριγώνου καὶ τετραγώνου, καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικά. Ὥσπερ γὰρ ἐκεῖσε σπιθαμὰς καὶ οὐργίας τετραγωνίζομεν, οὕτως ἐπὶ τούτων τετραγώνισον ἑκάστης πόλεως μίλια, καὶ μέρισον τῆς μείζονος πόλεως τὸν τετραγωνισμόν, μετὰ τῆς ἐλάττονος τὸν τετραγωνισμόν. Καὶ ὅσος γένηται (112α)(1) ὁ τούτων διαμερισμός, τοσαύτας πόλεις δέξεται ἡ μείζων πόλις.

σκζ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι, διὰ πόσων καλυμμάτων ἔχεις καλύψαι στῦλον τινα ἰσόπλευρον ἢ ἑτερομηκῆ.

Ἔστω τις στῦλος κι ὁμοειδής, καθ’ ὕψος μὲν οὐργίων θ, ἑκάστη δὲ τούτου πλευρὰ κατὰ πλάτος ἔστω οὐργίων γ α/β. Βούλει δὲ καλύψαι τοῦτον ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν, διὰ σανίδων μαρμάρων, ὅπερ ἕκαστον κατὰ πλάτος ἐστὶ α/δ οὐργίας μιᾶς, κατὰ μῆκος δὲ ἐστὶ α/β οὐργίας μιᾶς. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα τουβλοειδῆ μάρμαρα τοιούτου μεγέθους ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ καλύψαι (5) τὸν δηλωθέντα στυλοειδῆ κίονα, ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρῶν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:



Ζήτει τὴν περίμετρον τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἥτις ἐστὶ οὐργίων ιδ· δ-κις γὰρ γ α/β, ιδ γίνονται. Ἐστὶ δὲ ἡ περίμετρος τῶν τεσσάρων τούτου πλευρῶν, οὐργίων ιδ. Πολλαπλασίασον ταύτας πρὸς τὸ ὕψος τῶν θ οὐργίων· θ-κις οὖν ιδ γίνονται ρκς. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῶν τεσσάρων τούτου πλευρῶν, οὐργίων τετραγώνων ρκς.

Ζήτει πόσα τουβλοειδῆ μάρμαρα, κατὰ πλάτος μὲν οὐργίας μιᾶς, κατὰ μῆκος δὲ α/β οὐργίας μιᾶς, ἔχοσιν καλύψαι οὐργίαν μίαν τετράγωνον. Πολλαπλασίασον τὰς ἄνω καὶ κάτω ψήφους τοῦ α/δ καὶ α/β· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α, καὶ δ-κις β ἐστὶ η, ἅπερ οὕτως κείμενα α/η δηλῶσιν α ὄγδοον οὐργίας μιᾶς. Καὶ ἰδοὺ α/η οὐργίας μιᾶς τετραγώνου, ἔχει καλύψαι ἕκαστον τουβλοειδὲς μάρμαρον, πλάτους μὲν ὄντος α/δ, μήκους δὲ α/β μέρος οὐργίας μιᾶς. Ἐπεὶ οὖν η τουβλοειδῆ μάρμαρα καλύπτουσιν οὐργίαν μίαν, η-κις ρκς γίνονται ͵αη. Ἔχεις οὖν καλύψαι τὰς τέσσαρας τούτου πλευράς, διὰ τουβλοειδῶν μαρμάρων, ἅη τοιούτου μεγέθους οὗ εἴπομεν.

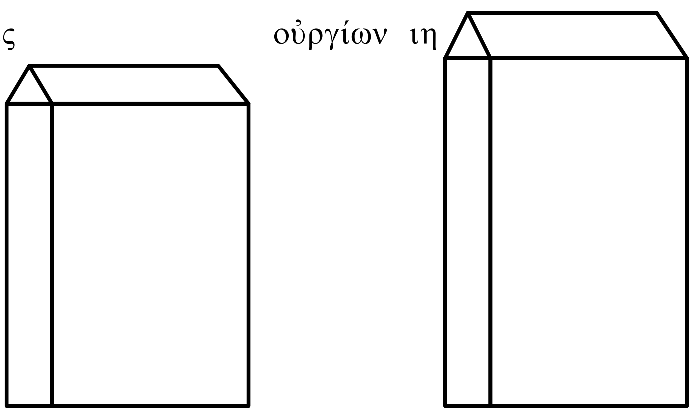
Ἔστω δὲ καὶ ἕτερος στῦλος, καθ' ὕψος μὲν οὐργίων ιβ, τὸ δὲ πλάτος τῶν δύο ἐλαττόνων πλευρῶν ἀνὰ οὐργίων β καὶ α/δ, τὸ δὲ μῆκος τῶν δύο μειζόνων πλευρῶν, ἀνὰ οὐργίων δ α/β. Ὁμοῦ δὲ ἡ περίμετρος τῶν δ πλευρῶν, οὐργίων ιγ α/β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι διὰ πόσων τουβλοειδῶν μαρμάρων, κατὰ πλάτος μὲν α/γ οὐργίας μιᾶς, κατὰ μῆκος δὲ α/β οὐργίας, ἔχοσιν καλύψαι τὴν ἐπιφάνειαν τῶν τεσσάρων πλευρῶν.

Πολλαπλασίασον τὰς ἄνω καὶ κάτω ψήφους τοῦ α/γ καὶ α/β· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α, γ-ὶς δὲ β γίνονται ς, ἅπερ οὕτως κείμενα α/ς, δηλῶσιν α ἕκτον οὐργίας μιᾶς. Καλύπτει δὲ ἕκαστον τουβλοειδὲς μάρμαρον, α/ς μέρος οὐργίας μιᾶς τετραγώνου. Τουτέστι ς τουβλοειδῆ μάρμαρα, καλύπτοσιν οὐργίαν α τετράγωνον. Πολλαπλασίασόν δε τὰς ιγ α/β οὐργίας τῆς περιμέτρου τῶν τεσσάρων πλευρῶν, πρὸς τὰς ιβ τοῦ ὕψους· ιβ-κις οὖν ιγ α/β γίνονται ρξβ. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῶν τεσσάρων τούτου πλευρῶν, οὐργίων τετραγώνων ρξβ. Ἐπεὶ δὲ ἑκάστη οὐργία καλύπτεται διὰ ς τουβλοειδῶν μαρμάρων, ς-κις ρξβ γίνονται ϡοβ. Ἔχεις οὖν καλύψαι τὰς τέσσαρας τούτου πλευρὰς διὰ τουβλοειδῶν μαρμάρων ϡοβ, τοιούτου μεγέθους οὗ εἴπομεν.

σκη΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι διὰ πόσων βαρεμάτων, οἰκοδομῆσαι ἔχεις στῦλον τινα ὅσου ἂν ὕψους καὶ πλάτους βούλῃ.

Ἔστω ὅτι βούλει οἰκοδομῆσαι στῦλον τετράγωνον ἰσόπλευρον, ἑκάστη τούτου πλευρὰ ἀνὰ οὐργίων β α/δ, τὸ δὲ ὕψος τούτου οὐργίων ις. Βούλει δὲ τοῦτον οἰκοδομῆσαι διὰ βαρεμάτων ὁμοίων, κατὰ πλάτος μὲν ἀνὰ α/γ οὐργίας μιᾶς, κατὰ μῆκος δὲ ἀνὰ α/β οὐργίας μιᾶς, (25) κατὰ βάθος δὲ α/δ οὐργίας μιᾶς. Ζητεῖς εἰδέναι πόσα βαρέματα τοιούτου μεγέθους ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ οἰκοδομῆσαι στῦλον τοιοῦτον.

οὐργίων ις   οὐργίων ιη



Πολλαπλασίασον τὴν μίαν πλευρὰν πρὸς τὴν ἑτέραν, τουτέστι β α/δ μετὰ τῶν β α/δ, καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ε α/ις. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ὕψος τῶν ις οὐργίων, πρὸς τὰς ε καὶ α/ις οὐργίας μιᾶς· ις-κις οὖν ε καὶ α/ις γίνονται πα. Ἐστὶ δὲ τὸ ὅλον σῶμα τοῦ ζητουμένου τούτου στύλου, οὐργίων τετραγώνων πα. Θὲς σύνεγγυς, τὰς δηλωτικὰς ψήφους τοῦ δηλωθέντος βαρέματος, τουτέστι πλάτος α/γ, μῆκος α/β, βάθος α/δ. Πολλαπλασίασόν δε τὰς ἄνωθεν τούτου ψήφους καὶ τὰς κάτωθεν. Αἵ μὲν οὖν ἄνωθεν πολλαπλασιάζοσιν α, καθ' ὅτι ἅπαξ α πάλιν ἐστὶ α, αἵ δὲ κάτωθεν, γ-ὶς τὰ β γίνονται ς· ς-κις δὲ δ γίνονται κδ. Ἑκάστη οὖν οὐργία τετράγωνος, διὰ βαρεμάτων κδ τοιούτου μεγέθους οἰκοδομηθήσεται· πα-κις δὲ κδ γίνονται ͵αϡμδ. Καὶ ἰδοὺ ͵αϡμδ βαρέματα τοιούτου μεγέθους ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ οἰκοδομῆσαι τοιοῦτον στῦλον ὃν εἴπομεν.

Ἔστω ὅτι βούλει ποιῆσαι καὶ στῦλον τετράγωνον οὐκ ἰσόπλευρον, ἀλλ' αἵ μὲν δύο τούτου ἐλάττοναι πλευραί, ἀνὰ οὐργίων β καὶ α/γ, αἵ δὲ δύο μείζοναι ἀνὰ οὐργίων β α/β. Τὸ δὲ ὕψος τούτου, οὐργίων ιη. Βούλει δὲ τοῦτον οἰκοδομῆσαι διὰ βαρεμάτων ὁμοίων, κατὰ πλάτος ἀνὰ α/δ οὐργίας μιᾶς, κατὰ μῆκος δὲ ἀνὰ α/γ οὐργίας μιᾶς, κατὰ βάθος δὲ ἀνὰ α/ε οὐργίας μιᾶς. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα βαρέματα τοιούτου μεγέθους ἔσται σοὶ χρεία, πρὸς τὸ οἰκοδομῆσαι στῦλον τοιοῦτον.

Πολλαπλασίασον τὴν μίαν πλευρὰν πρὸς τὴν ἑτέραν, τουτέστι β α/γ μετὰ τῶν β α/β (112β) καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ε καὶ ε/ς οὐργίας μιᾶς. Πολλαπλασίασόν δε τὸ ὕψος τῶν ιη οὐργίων πρὸς τὰς ε καὶ ε/ς οὐργίας μιᾶς· ιη-κις οὖν ε καὶ ε/ς γίνονται ρε. Ἐστὶ οὖν τὸ ὅλον σῶμα τοῦ ζητουμένου τούτου στύλου, οὐργίων τετραγώνων ρε. Θὲς σύνεγγυς τὰς δηλωτικὰς ψήφους τοῦ δηλωθέντος βαρέματος, τουτέστι πλάτος α/δ, μῆκος α/γ, βάθος α/ε. Πολλαπλασίασόν δε τὰς ἄνωθεν καὶ κάτωθεν ψήφους. Αἵ μὲν οὖν ἄνωθεν πολλαπλασιάζοσιν α, καθ' ὅτι ἅπαξ α πάλιν ἐστὶ α, αἵ δὲ κάτωθεν, δ-κις γ γίνονται ιβ, ιβ-κις δὲ ε γίνονται ξ. Ἑκάστη οὖν οὐργία τετράγωνος, οἰκοδομηθήσεται διὰ βαρεμάτων ξ τοιούτου μεγέθους οὗ εἴπομεν· ξ-κις οὖν ρε γίνονται χλ. Καὶ ἰδοὺ χλ βαρέματα τοιούτου μεγέθους, ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ οἰκοδομῆσαι στῦλον τοιοῦτον ὃν εἴπομεν.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον στῦλον διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι διὰ πόσων βαρεμάτων ἔχεις οἰκοδομῆσαι τὸν ζητούμενον στῦλον.

σκθ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσαι σπιθαμαὶ χάσδεον ἔχοσιν καλύψαι σφαίραν τινα.

Ἔστω τις σφαίρα, ἥτις ἐστὶ ἡ περίμετρος ταύτης, σπιθαμῶν κβ. Βούλει δὲ καλύψαι ταύτην, μετὰ χασδέου τινος ὅπερ κατὰ πλάτος ἐστὶ σπιθαμῶν β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσαι σπιθαμαὶ τετράγωναι χάσδεον ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ καλύψαι τὴν ὅλην σφαίραν. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως: Ζήτει πρῶτον τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἔχεις δὲ ταύτην εἰδέναι ἐκ τῆς περιμέτρου τῶν κβ σπιθαμῶν, (10) ὡς πολλάκις εἴπομεν.

α

αεδ

ββ

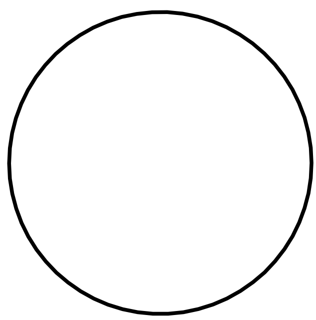
ζ

α

αεδ

ββ

ζ



Χάσδεόν δε κατὰ μῆκος σπιθαμῶν οζ

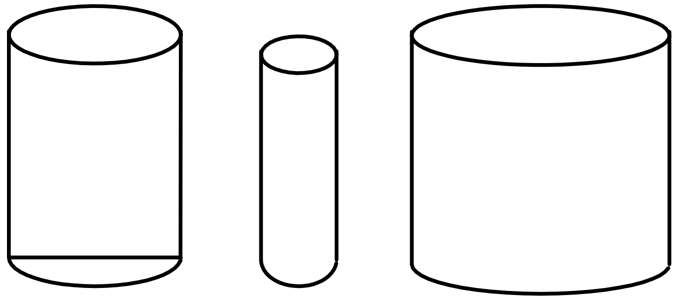
κατὰ πλάτος δε σπιθαμῶν β

Αἱ γὰρ κβ σπιθαμαὶ τῆς περιμέτρου γίνονται ἕβδομα ρμδ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κβ/ζ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ζ. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος σπιθαμῶν ζ. Πολλαπλασίασον τὴν περίμετρον πρὸς τὴν διάμετρον· ζ-κις οὖν κβ γίνονται ρμδ. Ἐστὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας σπιθαμῶν τετραγώνων ρμδ. Μέρισον τὰς ρμδ σπιθαμὰς μετὰ τῶν β σπιθαμῶν τοῦ πλάτους δηλονότι τοῦ χασδέου, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς οζ· β-ὶς γὰρ οζ, ρμδ γίνονται. Καὶ ἰδοὺ κατὰ (15) μῆκος οζ σπιθαμῶν χάσδεον, κατὰ πλάτος δὲ σπιθαμῶν β, ἔσται σοὶ χρεία πρὸς τὸ καλύψαι τὴν ὅλην σφαιροειδῆ ἐπιφάνειαν τῆς παρούσης σφαίρας.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον μέγεθος ἐπιφανείας σφαίρας, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι πόσον χάσδεον ἢ ἄλλο τι εἶδος, ἔσται σοὶ χρεία, καλύψαι τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς ζητουμένης σφαίρας. Σφαίραν δὲ λέγομεν τὴν πανταχόθεν οὖσαν κυκλότερην, οὐ τὸν κύκλον τὸν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον μόνην ἔχοσαν ἄνευ σώματος στερεοῦ.

σλα΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι, ὁ ἐκ τῶν δύο σάκκων τῶν δεχομένων ὁ μὲν μοδία ς, ὁ δὲ δ, γενόμενος εἷς σάκκος πόσα μοδία δέξεται.

Ἔστωσαν δύο σάκκοι, τὸ μὲν ὕψος αὐτῶν ἴσον κατὰ πάντα καὶ ὅμοιον. Κατὰ πλάτος δὲ διαφέροντες, ὁ μὲν δέχεται μοδία ς, ὁ δὲ δ. Ἑνώσας δὲ τοὺς δύο σάκκους καὶ ποιήσας αὐτοὺς ἓν σάκκον, ζητεῖς εἰδέναι πόσα μοδία δέξεται. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:



Μοδία ς   Μοδία δ   Μοδία ιβ

Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰ τὰ ς μοδία· ς-κις οὖν ς γίνονται λς. Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὰ καὶ τὰ δ μοδία· δ-κις δὲ δ γίνονται ις. Ἕνωσον τὰ ις μετὰ τῶν λς καὶ γίνονται ὁμοῦ νβ. (35) Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰ καὶ τὰ ι μοδία ἅπερ δέχονται οἱ δύο σάκκοι· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Ἐὰν οὖν τὰ ι δέχωνται νβ, τὰ ρ πόσα δέξωνται. Ποίησόν δε τοῦτο διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν: Πολλαπλασίασον γὰρ τὰ ρ μετὰ τῶν ι· ι-κις οὖν ρ γίνονται ͵α.

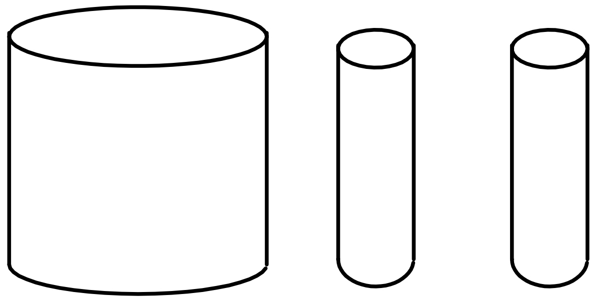
α
δγ
εηβ
αυυυ αβ/εβ
εββ
ε
αθ καὶ γ/αγ

Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν νβ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς, ιθ καὶ γ/ιγ. Δέξεταί δε ὁ ἐκ τῶν δύο γενόμενος σάκκος, μοδία ιθ καὶ γ/ιγ ἑνὸς μοδίου.

(113β)(1) Καὶ τὸ ἀνάπαλιν:

Ἔστω δὲ καὶ ἕτερός τις σάκκος ὅστις δέχεται μοδία κ. Γενόμενός δε ὁ εἷς σάκκος, δύο ἴσοι κατὰ πάντα καὶ ὅμοιοι, κατὰ τὸ ὕψος καὶ πλάτος, ζητεῖς εἰδέναι πόσα μοδία ἕκαστος δέξεται.

Πολλαπλασίασον τὸ ἥμισυ τῶν κ μοδίων εἰς ἑαυτό· ι-κις οὖν ι γίνονται ρ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κ μοδίων, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ε· ε-κις γὰρ κ, ρ γίνονται. Ἕκαστος οὖν τῶν δύο σάκκων δέξεται ἀνὰ ε μοδίων.



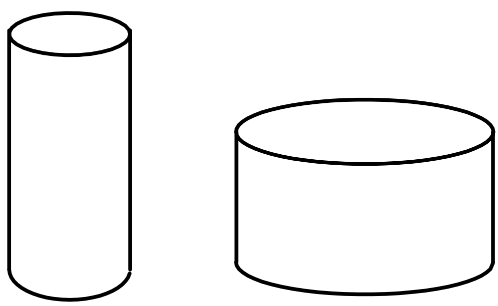
Μοδία κ Μοδία ε Μοδία ε

Καὶ ἄλλως προχειρεστέρως:

Λάμβανε πάντοτε (5) ἐπὶ τοῦ τοιούτου ζητήματος, τὸ τέταρτον μέρος τῶν μοδίων ὧν δέχεται ὁ σάκκος, καὶ ὅσον ἐστὶ τὸ τέταρτον μέρος τῶν μοδίων ὧν δέχεται ὁ εἷς σάκκος, τοσαῦτα μοδία δέξεται ἕκαστος σάκκος τῶν δύο.

Ἕτερον ζήτημαν:

Ἔστω σάκκος τις καθ' ὕψος οὐργίων γ, ὅστις δέχεται μοδία κ. Βούλει δὲ ποιῆσαι τοῦτον πλατύτερόν τε καὶ θαμαλότερον ὥστε δέχεσθαι μοδία λ. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσον γένεται θαμαλότερος, οὕτως γενόμενος. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:



Μοδία κ Μοδία λ

Πολλαπλασίασον τὰς γ οὐργίας τοῦ ὕψους, πρὸς τὰ κ μοδία ἅπερ δέχεται· γ-ὶς οὖν κ γίνονται ξ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν λ μοδίων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς β· β-ὶς γὰρ λ, ξ γίνονται. Ἐγένετό δε τὸ ὕψος τούτου οὐργίων β, (10) τουτέστι ἐγένετο θαμαλότερος οὐργία α· β δὲ οὐργίων γενόμενον τὸ ὕψος αὐτοῦ, προστεθείσης τῆς μίας καθ’ ὕψος τούτου οὐργίας, ἐπὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ, δέχεται μοδία λ οὕτως γενόμενος.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν:

Ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς σάκκος ὅστις δέχεται μοδία λ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ οὐργίων β. Γενόμενός δε στενότερός τε καὶ ὑψηλότερος, ὥστε δέχεσθαι μοδία κ, ζητεῖς εἰδέναι πόσον γέγονεν ὑψηλότερος, οὕτῳ γενόμενος.

Πολλαπλασίασον τὰς β οὐργίας τοῦ ὕψους πρὸς τὰ λ μοδία· β-ὶς οὖν λ γίνονται ξ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κ μοδίων ὧν βούλει δέχεσθαι καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς γ· γ-ὶς γὰρ κ, ξ γίνονται. Γίνεταί δε τὸ ὕψος αὐτοῦ οὐργίων γ. Οὕτῳ δὲ γενόμενος, στενότερός τε καὶ ὑψηλότερος, δέχεται μοδία κ.

Ἕτερον ζήτημαν:

Ἔστω ὁ αὐτὸς σάκκος ὁ ἔχων ὕψος οὐργίων γ, δέχεταί δε μοδία κ. (15) Γενόμενός δε πλατύτερός τε καὶ θαμαλότερος, ὥστε γενέσθαι καθ’ ὕψος οὐργίων β, ζητεῖς εἰδέναι πόσα μοδία πλείω τῶν κ δέξεται, οὕτῳ γενόμενος.

Πολλαπλασίασον τὰς γ οὐργίας ἃς νῦν ἔχει ὕψος, μετὰ τῶν κ μοδίων ὧν νῦν δέχεται· γ-ὶς οὖν κ γίνονται ξ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν β οὐργίων ὧν βούλει ποιῆσαι τὸ αὐτοῦ ἔλαττο ὕψος, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λ· β-ὶς γὰρ λ, ξ γίνονται· λ οὖν μοδία δέξεται, γενόμενον τὸ ὕψος αὐτοῦ οὐργίων β, ὅστις ὂν καθ’ ὕψος οὐργίων γ ἐδέχετο μοδία κ.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν:

Ἔστω ὁ αὐτὸς σάκκος ὁ ἔχων ὕψος οὐργίων β, δέχεταί δε μοδία λ, γενόμενός δε στενότερός τε καὶ ὑψηλότερος ὥστε γενέσθαι τὸ ὕψος αὐτοῦ οὐργίων γ, ζητεῖς εἰδέναι πόσα μοδία ἐλάττω τῶν λ δέξεται οὕτῳ γενόμενος.

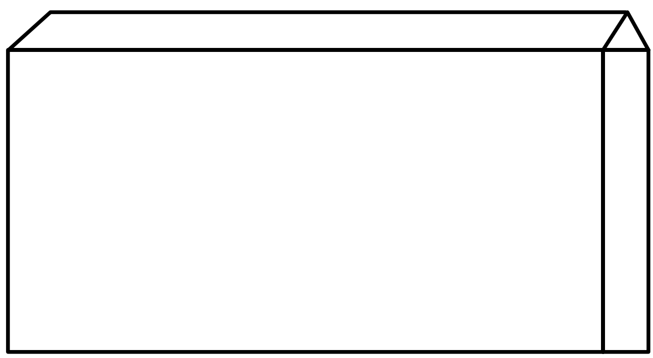
Πολλαπλασίασον τὰς β οὐργίας ἃς νῦν ἔχει ὕψος, μετὰ τῶν λ μοδίων ὧν νῦν δέχεται· β-ὶς οὖν λ, γίνονται ξ. Μέρισον (20) ταῦτα μετὰ τῶν γ οὐργίων ὧν βούλει ποιῆσαι τὸ αὐτοῦ μεῖζον ὕψος, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κ· γ-ὶς γὰρ κ, ξ γίνονται· κ οὖν μοδία δέξεται, γενόμενον τὸ ὕψος αὐτοῦ οὐργίων γ, ὅστις ὂν καθ' ὕψος οὐργίων β, ἐδέχετο μοδία λ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν σάκκων, ὧν εἴπομεν διὰ τῶν δηλωθέντων μεταχειρίσεων ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

σλβ΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ, διὰ τοῦ πλάτους καὶ μήκους, τοῦ σιτοδόχου οἴκου, καὶ τὸ ὕψος τούτου εἰδέναι πόσων οὐργίων ἐστί, ἐνῶ καὶ πόσα μοδία δέξεται.

Ἔστω τις σιτοδόχος οἶκος, κατὰ μὲν πλάτος οὐργίων γ, κατὰ μῆκος δὲ οὐργίων θ. Ἐστὶ δὲ πληρέστατος σίτου, ὡς οἱ μοδίων μεγάλων, ἅυνη. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι τὸ ὕψος τοῦ σιτοδόχου τούτου οἴκου, πόσων οὐργίων ἐστί. Ἔχεις δὲ (25) τοῦτο εἰδέναι οὕτως:

δ α/β



Μῆκος οὐργίων θ. Δέχεται μοδία ͵αυνη. γ

βαγ ς/αβ	βζ βζ/εδ
αδεη	βδγ
αβββ	εδ
αα	
αβα καὶ α/β	δ καὶ α/β

Ζήτει πρῶτον οὐργίαν μίαν τετράγωνον πόσα μοδία δέχεται. Ἔστω τοίνυν ὅτι ἑκάστη οὐργία τετράγωνος δέχεται μοδία ιβ. Ἐπεὶ οὖν ἑκάστη οὐργία δέχεται μοδία ιβ, μέρισον τὰ ͵αυνη μοδία μετὰ τῶν ιβ μοδίων ὧν δέχεται ἑκάστη οὐργία, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρκα α/β. Ἐστὶ δὲ ὁ ὅλος σιτοδόχος οἶκος δεκτικὸς οὐργίων τετραγώνων ρκα α/β. Πολλαπλασίασον τὰς θ οὐργίας τοῦ μήκους πρὸς τὰς (30) γ τοῦ πλάτους· θ-κις οὖν γ γίνονται κζ. Μέρισον τὰς ρκα α/β οὐργίας μετὰ τῶν κζ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς δ α/β. Ἐστὶ δὲ τὸ ὕψος τοῦ σιτοδόχου τούτου οἴκου, οὐργίων δ α/β.

Ἕτερον ζήτημαν:

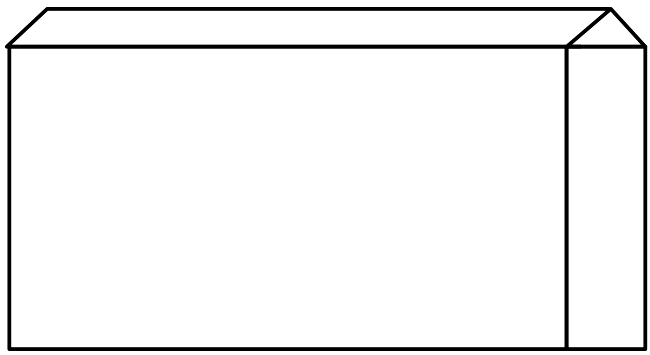
Ἔστω ὁ αὐτὸς σιτοδόχος οἶκος κενός. Ζητεῖς εἰδέναι πόσα μοδία τοιούτου μεγέθους δέξεται, πρὸς τὸ γενέσθαι πληρέστατος σίτου.

Πολλαπλασίασον πάλιν τὰς κατὰ μῆκος θ οὐργίας πρὸς τὰς κατὰ πλάτος γ οὐργίας· θ-κις οὖν γ πάλιν γίνονται κζ. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὰς κζ οὐργίας πρὸς τὰς δ α/β οὐργίας τοῦ ὕψους· κζ-κις οὖν δ α/β γίνονται ρκα α/β. Ἐπεὶ δὲ οἶδας ὅτι ἑκάστη οὐργία δέχεται μοδία ιβ, πολλαπλασίασον τὰ ιβ μοδία τῆς μίας τετραγώνου οὐργίας, πρὸς τὰς ρκα α/β τοῦ οἴκου· ιβ-κις οὖν ρκα α/β, (35) γίνονται ͵αυνη. Δέξεταί δε ὁ σιτοδόχος οὗτος οἶκος μοδία ͵αυνη.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι πόσα μοδία δέξεται ὁ σιτοδόχος οἶκος, καὶ πόσον ἐστὶ τὸ ὕψος τοῦ σιτοδόχου οἴκου οὗπερ ἂν ἔχῃς ζητῶν.

Ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν ἐπὶ ὕδατος:

Ἔστω γηστέρνα τις (114α)(1) ἥτις ἐστὶ κατὰ μῆκος μὲν οὐργίων η, κατὰ πλάτος δὲ οὐργίων γ, τὸ δὲ βάθος ταύτης, ἔστω οὐργίων β α/β. Ἐστὶ δὲ πλήρους ὕδατος. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα μέτρα ὕδωρ ἔχει ἐντός. Ζήτει οὖν πρῶτον πόσα μέτρα δέξεται οὐργία μία, τετράγωνος. Ἔστω δὲ ὅτι οὐργία μία τετράγωνος κατά τε πλάτος καὶ μῆκος καὶ βάθος, δέξεται μέτρα ρ ἢ καὶ ὅσα ἂν εἴπης ἐλάττω ἢ πλείονα.



Τὸ βάθος οὐργίαι β α/β. Πλάτος γ. Δέχεται μέτρα ς.

Πολλαπλασίασόν δε τὸ μῆκος ταύτης πρὸς τὸ πλάτος· (5) η-κις οὖν γ, γίνονται κδ. Πολλαπλασίασόν δε ταύτας τὰς κδ οὐργίας πρὸς τὰς β α/β οὐργίας τοῦ βάθους· κδ-κις οὖν β α/β γίνονται ξ· ξ οὖν οὐργίας τετραγώνους ποιεῖ τὸ ὅλον σῶμα ταύτης. Ἐπεὶ δὲ εἴπομεν ὅτι ἑκάστη οὐργία δέξεται μέτρα ρ, ρ-κις ξ γίνονται ͵ς. Δέξεταί δε τὸ ὅλον σῶμα ταύτης, μέτρα ͵ς.

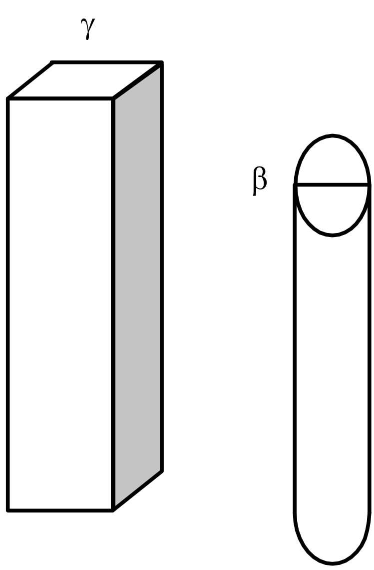
Εἰ οὖν τὸ μῆκος οἶδας οὐργίων η, τὸ δὲ πλάτος οὐργίων γ, δέξεταί δε καὶ μέτρα ͵ς, τὸ δὲ βάθος οὐκ οἶδας πόσων οὐργίων ἐστί, ζητεῖς δὲ τοῦτο εἰδέναι, ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι δι’ οὗ τρόπου ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ σιτοδόχου οἴκου εἴπομεν.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτων ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

σλγ´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσον ὕδωρ ἐξεχύθη ἐκ τοῦ

(10) φρέατος, διὰ τὸ πεσεῖν ἐντὸς τούτου, κίων στρογγυλὸς καθ’ ὕψος οὐργίων ιδ-ων.

Ἔστω φρέαρ ὕδατος πεπληρωμένον, τὸ βάθος αὐτοῦ οὐργίων ις, τετράγωνόν δε ἰσόπλευρον ὄν. Ἔστω ἑκάστη τούτου πλευρὰ οὐργίων γ, ὁμοῦ δὲ ἡ περίμετρος τῶν τεσσάρων τούτου πλευρῶν οὐργίων ιβ. Ἔστω δὲ ὅτι πέπτωκεν ἐντὸς τοῦ φρέατος τούτου, κίων τις στρογγυλός, ὅστις καθ’ ὕψος μὲν ἔστω οὐργίων ιδ, τὸ δὲ τῆς διαμέτρου τούτου πλάτος, οὐργίων β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι, πόσον ὕδωρ ἐφθάρει τε καὶ ἐξεχύθην διὰ τῆς τοῦ κίονος εἰσβολῆς. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι οὕτως:



<u>αα</u> αβ

δδ δ δδ β/αδ

αδ

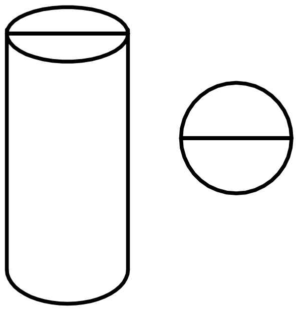
γ καὶ α/ζ

Τετραγώνισον πρῶτον τὸ φρέαρ, καὶ ζήτει πόσαι οὐργίαι γίνονται τετρά(15)γωναι. Πολλαπλασίασον γὰρ τὴν μίαν τούτου πλευρὰν πρὸς τὴν ἑτέραν· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Πολλαπλασίασόν δε διὰ τῶν θ τούτων οὐργίων, τὰς κατὰ βάθος ις οὐργίας τοῦ φρέατος· θ-κις οὖν ις γίνονται ρμδ. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ὅλου σώματος τοῦ φρέατος, οὐργίων ρμδ. Τετραγώνισον καὶ τὸν κίονα ὡς εἰώθαμεν τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴν τὴν τούτου διάμετρον ἥτις ἐστὶ οὐργίων β· β-ὶς οὖν β γίνονται δ. Λαβὲ δὲ ια/ιδ τῶν δ, ἅπερ ια/ιδ τῶν δ ἐστὶ γ καὶ α/ζ. Πολλαπλασίασόν δε ταῦτα τὰ γ καὶ α/ζ μετὰ τοῦ ὕψους (20) τῶν ιδ οὐργίων τοῦ κίονος· ιδ-κις οὖν γ καὶ α/ζ, γίνονται μδ. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ὅλου σώματος τοῦ κίονος οὐργίων μδ. Ἄφελε ταύτας τὰς μδ τετραγώνους οὐργίας τοῦ κίονος, ἐκ τῶν ρμδ οὐργίων τοῦ φρέατος, καὶ ἀπομένοσιν οὐργίαι ι. Διὰ γ' οὖν τῆς ἐντὸς τοῦ φρέατος πτώσεώς τε καὶ εἰσβολῆς τοῦ κίονος, διεφθάρει καὶ ἐξεχύθη ὕδωρ οὐργίων τετραγώνων μδ. Ἐναπέμεινέν δε ἐντὸς τοῦ φρέατος, ὕδωρ οὐργίων τετραγώνων ρ. Ἡ δὲ τετράγωνος οὐργία εἴπομεν ὅτι δέχεται μέτρα ρ, ἢ ὅσα ἂν ἔχης εἰπεῖν πλείω ἢ ἐλάττω.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν φρεάτός τε καὶ κίονος, διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι (25) καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ἕτερον ζήτημαν:

Ἔστω φρέαρ σφαιροειδῆ κατὰ πλάτος, τὸ μὲν βάθος αὐτοῦ οὐργίων δ, ἡ δὲ τούτου διάμετρος οὐργίων γ. Ἐστὶ δὲ ὕδατος πεπληρωμένον. Ἔστω δὲ ὅτι πέπτωκεν ἐντὸς τοῦ φρέατος τούτου λίθος σφαιροειδὴς κατὰ πάντα, ὃς ἐστὶ ἡ τούτου περίμετρος οὐργίων ς καὶ β/ζ μιᾶς οὐργίας, ἡ δὲ τούτου διάμετρος μὴ φαινομένη ἐστὶ ἄγνωστος. Ἔχεις δὲ ταύτη εἰδέναι ἐκ τῆς περιμέτρου τῶν ς καὶ β/ζ ὅτι ἐστὶ οὐργίων β. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσον ὕδωρ ἐφθάρει τε καὶ ἐξεχύθη διὰ τῆς τοῦ σφαιροειδοῦς λίθου εἰσβολῆς. Ἔχεις δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῶν δύο κανόνων, τὸν κύκλον τε καὶ τὴν σφαίραν τετρα(30)γωνιζόντων.



Περίμετρος ς καὶ β/ζ

Βάθος οὐργίων δ

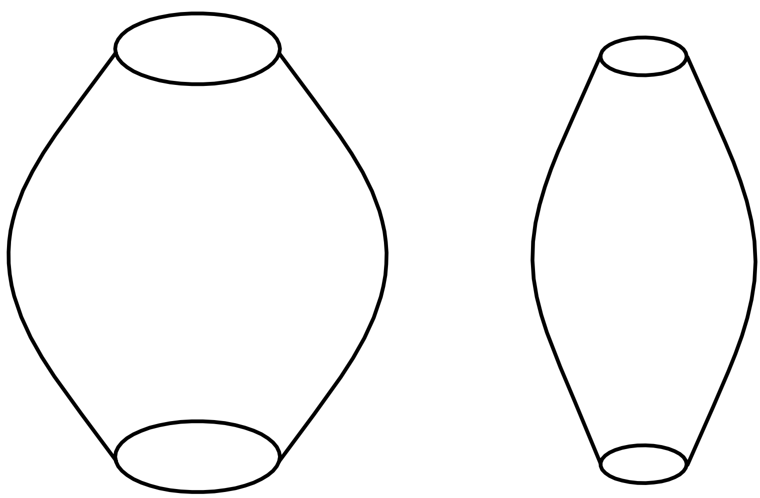
Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴ τὴν τῶν γ οὐργίων διάμετρον τοῦ φρέατος· γ-ὶς οὖν γ γίνονται θ. Λαβὲ δὲ ια/ιδ τῶν θ ἅπερ ἐστὶ ζ καὶ α/ιδ. Πολλαπλασίασόν δε διὰ τῶν ζ καὶ α/ιδ τὰς κατὰ βάθος δ οὐργίας τοῦ φρέατος· δ-κις οὖν ζ καὶ α/ιδ γίνονται κη καὶ δ/ιδ, τουτέστι κη καὶ β/ζ μιᾶς τετραγώνου οὐργίας. Τετραγώνισον καὶ τὸν κατὰ πάντα σφαιροειδῆ λίθον. Πολλαπλασίασον γὰρ εἰς ἑαυτὴ τὴν τῶν β οὐργίων τούτου διάμετρον, ἣν εὗρες ἐκ τῆς περιμέτρου τῶν ς καὶ β/ζ οὐργίας μιᾶς· β-ὶς οὖν β γίνονται δ. Πάντοτέ δε ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος λάμβανε α/ς τοῦ γεγονότος πολλαπλασιασμοῦ τῆς διαμέτρου τῆς ζητουμένης σφαίρας. Νῦν δὲ τὸ α/ς τῶν δ ἐστὶ β/γ μιᾶς ἀκεραίου (35) οὐργίας· ς-κις γὰρ β/γ γίνονται ἀκέραια δ. Πολλαπλασίασόν δε τὰ β/γ μετὰ τῆς περιμέτρου τῶν ς καὶ β/ζ οὐργίας μιᾶς. Γίνεταί δε ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς δ καὶ δ/κα. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ὅλου σώματος τοῦ σφαιροειδοῦς λίθου, οὐργίων τετραγώνων δ καὶ δ/κα μιᾶς τετραγώνου οὐργίας. Ἄφελε δ καὶ δ/κα ἐκ τῶν κη καὶ β/ζ, καὶ ἀπομένοσιν κδ καὶ β/κα. (114β)(1) Διὰ γ' οὖν τῆς ἐντὸς τοῦ φρέατος πτώσεώς τε καὶ εἰσβολῆς τοῦ σφαιροειδοῦς λίθου, ἐφθάρει καὶ ἐξεχύθη ὕδωρ οὐργίων τετραγώνων δ καὶ δ/κα μιᾶς οὐργίας. Ἐναπέμεινέν δε ἐντὸς τοῦ φρέατος ὕδωρ οὐργίων τετραγώνων κδ καὶ β/κα μιᾶς οὐργίας.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

σλε´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι οἰνοδόχον ἄγγος τὸ κοινῶς βουτζίν καλούμενον τῷ ὄντι σανίδων λ, δεχόμενόν δε καὶ μέτρα λ, γενόμενόν δε, σανίδων κ, πόσα μέτρα ἔλαττω τῶν λ δέξεται.

Ἔστω οἰνοδόχον ἄγγος τὸ κοινῶς βουτζίον καλούμενον, ὅπερ ἔχει σανίδας λ, δέχεταί δε καὶ μέτρα λ. Ἀφαιρεθέντων δὲ σανίδων ι καὶ γενόμενον σανίδων κ, ζητεῖς εἰδέναι πόσα μέτρα ἔλαττω τῶν λ δέξεται. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τεσσάρων μεταχειρίσεων.

σανίδων λ, μέτρα λ σανίδων κ, μέτρα ιγ α/γ



Καὶ πρώτη μὲν μεταχείρισις ἐστὶ τετραγωνῖσαι (30) τὴν τῶν λ καὶ κ σανίδων περίμετρον ὡς εἰώθαμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου ποιεῖν. Πολλαπλασίασον γὰρ τὰς λ σανίδας καὶ κ εἰς ἑαυτάς· λ-κις οὖν λ γίνονται ϡ, κ-κις δὲ κ γίνονται υ. Μέρισον τὰ ϡ καὶ τὰ υ μετὰ τῶν ιβ δ/ζ ,καθὼς εἰώθαμεν ἐκ τῆς περιμέτρου τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. Καὶ τῶν μὲν ϡ ὁ διαμερισμὸς γίνεται οα καὶ ιγ/κβ, τῶν δὲ υ ὁ διαμερισμὸς γίνεται λα καὶ θ/ια. Ἐὰν οὖν τὰ οα καὶ ιγ/κβ γίνωνται μέτρα λ, τὰ λα καὶ θ/ια γίνονται μέτρα ιγ καὶ α/γ. Πολλαπλασίασον γὰρ τὰ λ μέτρα μετὰ τῶν λα θ/ια καὶ γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς ϡνδ ς/ια. Μέρισον ταῦτα διὰ τῶν οα ιγ/κβ ὡς εἰώθαμεν ποιεῖν διὰ τοῦ κανόνος τοῦ διὰ τῶν τριῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς ιγ α/γ.

ε	ζ
ας	αη
ζδβ εβ/ηη	δςβ
ςγυυ	βηυυ
ηηη	ηηη
η	η
ζα αγ/ββ	γα θ/αα

Ὃν γὰρ λόγον ἔχοσιν τὰ λ μέτρα πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν (35) τῶν οα καὶ ιγ/κβ, τὸν αὐτὸν ἔχοσιν καὶ τὰ ιγ α/γ πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τῶν λα θ/ια. Δέχεταί δε τῶν κ σανίδων τὸ βουτζίν, μέτρα ιγ καὶ α/γ ἑνὸς μέτρου. Τοῦτο δὲ ἀσαφὲς καὶ ἄχρηστον ἐπιχείρημα ἐπὶ τοῦ παρόντος ζητήματος, δι' ὃ ἐπὶ τὴν δευτέραν ἔλθωμεν μεταχείρισιν, ἥτις (115β)(1) ἐστὶ αὐτή. Πολλαπλασίασον τὰς λ καὶ κ σανίδας εἰς ἑαυτάς· λ-κις οὖν λ γίνονται ϡ, κ-κις δὲ κ γίνονται υ. Εἰ οὖν αἱ λ σανίδαι δέχωνται μέτρα ϡ, αἱ υ σανίδαι πόσα μέτρα δέξωνται; Πολλαπλασίασον τὰς λ σανίδας τοῦ μείζονος βουτζίου, μετὰ τῶν υ σανίδων· λ-κις οὖν υ γίνονται ͵ι͵β.

γγ	αα
αβυυυ γυυ/θυυ	δυυ αυ/γυ
θυυυ	γυυ
θυ	γ
αγ α/γ	αγ α/γ

Μέρισον ταύτας τὰς ͵ι͵β μετὰ τῶν ϡ μέτρων, ὧν εἴπομεν, ἐὰν αἱ λ σανίδαι δέχωνται μέτρα ϡ, αἱ υ σανίδαι πόσα δέξωνται, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιγ καὶ α/γ. Καὶ ἰδοὺ καὶ οὕτως προχειρεστέρως καὶ σαφεστέρως εὗρες διὰ τῆς παρούσης δευτέρας μεταχειρίσεως, ὅτι ἐὰν αἱ λ σανίδαι δέχωνται μέτρα λ, αἱ κ σανίδαι δέξωνται μέτρα ιγ καὶ α/γ ἑνὸς μέτρου.

Ἡ δὲ τρίτη μεταχείρισις ἥτις ἐστὶ προχειρεστέρα: Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰς τὰς κ σανίδας τοῦ ἐλάττονος βουτζίου· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Μέρισον ταῦτα τὰ υ μετὰ τῶν λ σανίδων τοῦ μείζονος βουτζίου, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν ιγ καὶ α/γ.

Ἡ δευτέρα οὖν καὶ αὐτὴ ἡ τρίτη προχειρεστέρα μεταχείρισις, γίνονται οὕτως ὡς εἴπομεν, ὅταν αἱ λ σανίδαι δέχωνται καὶ μέτρα λ, καὶ αἱ μ σανίδαι καὶ μέτρα μ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ὅταν δὲ ἀνωμάλως ἔχωσιν, καὶ δέχονται αἱ λ σανίδαι μέτρα λε ἢ καὶ μ ἢ ὅσα ἂν πλείω ἢ ἐλάττω βούλη εἰπεῖν, οὐκ ἔχεις διὰ τῶν δύο μεταχειρίσεων τῆς δευτέρας τε καὶ τῆς τρίτης, εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

Ἐστὶ δὲ ἑτέρα τετάρτη τις μεταχείρισις, ἐπὶ πάντων ἔχουσα τὸ ἀσφαλές τε καὶ πρόχειρον. Πολλαπλασίασον τὰς λ σανίδας εἰς ἑαυτὰς ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων μεταχειρίσεων εἴπομεν· λ-κις οὖν λ γίνονται ϡ. Πολλαπλασίασον καὶ τὰς κ σανίδας εἰς ἑαυτάς· κ-κις οὖν κ γίνονται υ. Ζήτει τίς ἂν μερισθὴς ἔχει μερῖσαι τὰ ϡ, πρὸς τὸ γενέσθαι ὁ τούτων μερισμὸς λ. Ἔχεις δὲ τοῦτον εἰδέναι διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως: Μέρισον τὰ ϡ μετὰ τῶν λ, ὧν ζητεῖς γενέσθαι ὁ μερισμὸς τῶν ϡ μέτρα λ. Τὰ ϡ δέ, μετὰ τῶν λ μέτρων μεριζόμενα, γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς πάλιν λ.

	αα
θυυ	δυυ αυ/γυ
γυυ	γυυ
γ	γ
γυ	αγ α/γ

Καὶ ἰδοὺ εὗρες ὃν μερισθὴν ζητεῖς πρὸς τὸ μερῖσαι τὰ ϡ καὶ γενέσθαι ὁ μερισμὸς τῶν ϡ, μέτρα λ. Τὰ γὰρ ϡ, ἔχοντα μερισθὴν λ, ὁ διαμερισμὸς τούτων γίνεται πάλιν λ. Μέρισον καὶ τὰς υ σανίδας μετὰ τοῦ τοιούτου μερισθοῦ, τῶν λ δηλονότι, δι’ οὗ καὶ τὰ ϡ μεριζόμενα ὁ διαμερισμὸς τούτων πάλιν γίνεται λ, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιγ α/γ, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν προγενεσθέρων μεταχειρίσεων οὕτως εὗρες.

Ἵνα δὲ σαφέστερον ὑμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, ἔστω ὅτι ζητεῖς εἰδέναι, ἐὰν λ σανίδαι δέχωνται μέτρα μ, αἱ κ σανίδαι πόσα μέτρα δέξωνται, πολλαπλασίασον πάλιν τὰς λ σανίδας καὶ κ εἰς ἑαυτάς· λ-κις οὖν λ γίνονται ϡ, κ-κις δὲ κ γίνονται υ.

		γ
γζ		γε/δε
αβ	β	δεε
θυυ βυ/δυ	αηυυ	ηυυ
δυυ	δεε	δεε
δ	δ	δ
ββ α/β	δυ	αζ ζ/θ

Ζήτει τίς ἂν μερισθὴς ἔχει μερῖσαι τὰ ϡ πρὸς τὸ γενέσθαι (20) ὁ τούτων διαμερισμὸς μ. Μέρισον τὰ ϡ μετὰ τῶν μ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κβ α/β.

Καὶ ἰδοὺ μετὰ τῶν κβ α/β μεριζόμενα τὰ ϡ, γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μ. Μέρισον γὰρ τὰ ϡ μετὰ τῶν κβ α/β, ταυτὸν δ’ εἰπεῖν τὰ ͵αω μισὰ μετὰ τῶν με μισῶν, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μ. Μέρισον καὶ τὰ υ ἅπερ ἐπολλαπλασίασαν αἱ κ σανίδαι, μετὰ τῶν κβ α/β ὧν ἐμέρισας καὶ τὰ ϡ, τουτέστι μέρισον τὰ ω μισὰ μετὰ τῶν με μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιζ ζ/θ. Εὗρες οὖν ὅτι ἐὰν λ σανίδαι (25) δέχωνται μέτρα λ, αἱ κ σανίδαι δέξωνται μέτρα ιζ ζ/θ ἑνὸς μέτρου.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Ἔστω ὅτι ζητεῖς τὸ ἀνάπαλιν. Ἐὰν τῶν κ σανίδων τὸ βουτζὶν δέχεται μέτρα ιζ καὶ ζ/θ ἑνὸς μέτρου, τῶν λ σανίδων πόσα μέτρα δέξεται;

Πολλαπλασίασον πάλιν τὰς λ καὶ κ σανίδας εἰς ἑαυτάς· λ-κις οὖν λ γίνονται ϡ, κ-κις δὲ κ γίνονται υ. Ζήτει τίς ἂν μερισθὴς ἔχῃ μερῖσαι τὰ υ πρὸς τὸ γενέσθαι ὁ τούτων διαμερισμὸς ιζ ζ/θ. Μέρισον τὰ υ μετὰ τῶν ιζ καὶ ζ/θ, καὶ τὰ μὲν υ γίνονται ͵γχ ἔννατα, τὰ δὲ ιζ καὶ ζ/θ γίνονται ρξ ἔννατα.

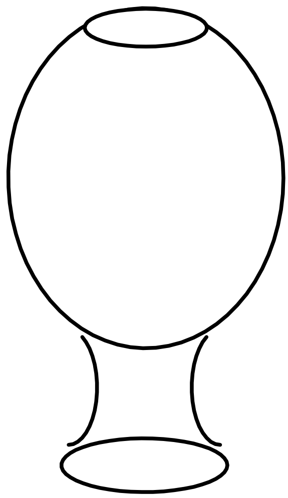
	γ	
β	γζ	
αδη ηu/αςu	δεε γε/δε	β
γςuu	ηuu	αηuu
ας	δεε	δεε
	δ	δ
ββ α/β	αζ ζ/θ	δu

Μέρισον τὰ ͵γχ ἔννατα μετὰ τῶν ρξ ἐννάτων καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κβ α/β. Καὶ ἰδοὺ (30) μετὰ τῶν κβ α/β μεριζόμενα τὰ υ, γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιζ ζ/θ. Μέρισον γὰρ τὰ ω μισὰ μετὰ τῶν με μισῶν καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ιζ ζ/θ. Μέρισον καὶ ἀντὶ τῶν ϡ ἀκεραίων τῶν λ σανίδων ͵αω μισά, μετὰ τῶν με μισῶν τῶν κβ α/β, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς μ. Εὗρες οὖν διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, ὅτι ἐὰν τῶν κ σανίδων τὸ βουτζὶν δέχεται μέτρα ιζ καὶ ζ/θ ἑνὸς μέτρου, τῶν λ σανίδων δέξεται μέτρα μ, ὥσπερ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐὰν τῶν λ σανίδων δέχεται μέτρα μ, τῶν κ σανίδων δέξεται μέτρα ιζ ζ/θ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν. Εἰ μὲν μ σανίδαι ἐστὶ καὶ μ μέτρων, καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον καὶ διὰ τῆς παρούσης μεταχειρίσεως, καὶ διὰ τῶν προγενεσθέρων (35) ὧν δεδηλώκαμεν. Εἰ δὲ ἀνωμάλως ἔχωσιν τὰ μέτρα τῶν σανίδων, σανίδαι μὲν κ, μέτρα δὲ κε ἢ καὶ ιε, τουτέστι πλείω ἢ ἐλάττω, οὐκ ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον διὰ τῶν προδηλωθέντων μεταχειρίσεων, ἢ μόνον, μετὰ τῆς παρούσης τελευταίας τετάρτης μεταχειρίσεως ἧς εἴπομεν.

(116α)(1) σλς΄ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ τετραγωνῖσαι οἰνοδόχον πῖθον καὶ εἰδέναι πόσα μέτρα οἶνον ἔχει ἐντός.

Ἔστω τις πῖθος σφαιροειδὴς κατὰ πάντα, οἴνου πεπληρωμένος. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα μέτρα οἶνον ἔχει ἐντός. Ἔχεις δὲ τοῦτο εἰδέναι διὰ τῆς μεταχειρίσεως τοῦ σφαιροειδοῦς λίθου τοῦ ἐπὶ τοῦ φρέατος πεπλωκότος.



Ἔστω γὰρ ἡ περὶ τὰ μέσα τούτου περίμετρος οὐργίων γ καὶ α/ζ οὐργίας μιᾶς. Τὰ δὲ γ καὶ α/ζ ἐστὶ ἕβδομα κβ. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κβ/ζ καθὼς εἰώθαμεν οὕτως λαμβάνειν ἐκ τῆς περιμέτρου (5) τὴν διάμετρον, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς α ἀκέραιον. Τὰ γὰρ κβ μετὰ τῶν κβ μεριζόμενα, α ἀκέραιον γίνεται. Ἐστὶ δὲ ἡ διάμετρος τούτου οὐργία α. Πολλαπλασίασόν δε εἰς ἑαυτὴ ταύτη τὴν μίαν οὐργίαν ἥτις ἐστὶ ἡ τοῦ πίθου διάμετρος · ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α. Λαβὲ α/ς τοῦ α ὅπερ ἐστὶ πάλιν α/ς. Πολλαπλασίασόν δε τὴν περίμετρον ἥτις ἐστὶ οὐργίαι γ καὶ α/ζ μετὰ τοῦ α/ς. Ἔχεις δὲ ταῦτα πολλαπλασιᾶσαι οὕτως: Πολλαπλασίασον τὸ α/ς μετὰ τῶν γ ἀκεραίων· γ-ὶς οὖν α/ς γίνονται γ/ς. Πολλαπλασίασόν δε καὶ τὸ α/ζ μετὰ τοῦ α/ς, τουτέστι τὰς ἄνωθεν καὶ κάτωθεν ψήφους· ἅπαξ οὖν α πάλιν ἐστὶ α· ς-κις δὲ ζ γίνονται μβ, (10) ἅπερ οὕτως κείμενα α/μβ δηλῶσιν α τεσσαρακοστὸν δεύτερον. Ἕνωσόν δε τὸ α/μβ μετὰ τῶν γ/ς, ταυτὸν δ' εἰπεῖν κα/μβ καὶ γίνονται ὁμοῦ κβ/μβ. Καὶ ἰδοὺ τὰ γ καὶ α/ζ μετὰ τοῦ α/ς πολλαπλασιαζόμενα, γίνεται ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς κβ/μβ. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ πίθου κβ/μβ μιᾶς τετραγώνου οὐργίας.

Ἔστω δὲ ὅτι ἑκάστη οὐργία τετράγωνος δέχεται μέτρα ν, ἢ ὅσα ἂν ἔχῃς εἰπεῖν. Λαβὲ κβ/μβ τῶν ν μέτρων, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ια/κα τῶν ν μέτρων. Πολλαπλασίασον γὰρ τὰ ν μέτρα τῆς μιᾶς τετραγώνου οὐργίας μετὰ τῶν ἄνωθεν ια· ια-κις οὖν ν γίνονται φν. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν κάτωθεν κα, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κς καὶ δ/κα. Καὶ ἰδοὺ τὰ ια/κα τῶν ν μέτρων ἐστὶ μέτρα κς καὶ δ/κα (15) ἑνὸς μέτρου. Ἔχει δὲ ὁ πῖθος, μέτρα κς καὶ δ/κα ἑνὸς μέτρου, τουτέστι κς καὶ α/ε ἔγγιστα.

ευ	α
ευ α	αγδ δ/βα
ευ α	εευ
εευ	βαα
	β
	βς δ/βα

Μὴ μόνον δὲ μετὰ οὐργίων, ἀλλὰ καὶ μετὰ σπιθαμῶν ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον. Ἔστω γὰρ ἡ περίμετρος τούτου σπιθαμῶν κβ, ἡ δὲ διάμετρος σπιθαμῶν ζ. Ὃν γὰρ λόγον ἔχει τὸ α πρὸς τὰ γ καὶ α/γ, τὸν αὐτὸν ἔχοσιν καὶ τὰ ζ πρὸς τὰ κβ. Πολλαπλασίασόν δε τὴν τῶν ζ σπιθαμῶν διάμετρον εἰς ἑαυτή· ζ-κις οὖν ζ γίνονται μθ. Λαβὲ τὸ α/ς μέρος τῶν μθ ὅπερ ἐστὶ η καὶ α/θ· ς-κις γὰρ η καὶ α/θ, μθ γίνονται. Πολλαπλασίασον τὰ η καὶ α/θ μετὰ τῶν κβ σπιθαμῶν τῆς περιμέτρου· κβ-κις οὖν η καὶ α/θ γίνονται ροη καὶ δ/θ. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ὅλου σώματος τοῦ πίθου, σπιθαμαὶ τετράγωναι ροη καὶ δ/θ μιᾶς σπιθαμῆς τετραγώνου.

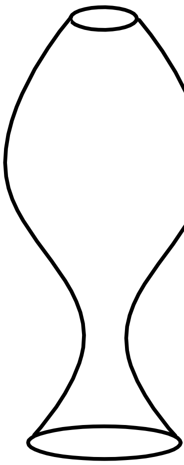
Ἔστω δὲ ὅτι ἑκάστη σπιθαμὴ τετράγωνος (20) δέχεται ψήφους ς. Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον μέτρον ἐστὶ ψῆφοι λς, ἕκαστον μέτρον οἰκειοῦται τετραγώνους σπιθαμὰς ς· ς-κις γὰρ ς, λς γίνονται. Μέρισόν δε τὰς ροη τετραγώνους σπιθαμὰς, μετὰ τῶν ς τετραγώνων σπιθαμῶν ὧν οἰκειοῦται ἕκαστον μέτρον, καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κθ καὶ β/γ. Δέχεταί δε ὁ πῖθος μέτρα κθ και β/γ.

εδ	δ/ς
αζη	
ςς	
βθ καὶ	β/γ

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν σφαιροειδοῦς κατὰ πάντα πίθου, κ' ἄν τε οὐργίων, κ' ἄν τε σπιθαμῶν μέρος λαμβάνης, ἐπὶ τῆς τούτου περιμέτρου τε καὶ διαμέτρου, διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως, ἔχεις εἰδέναι πόσα μέτρα δέχεται ἐντός, ὁ ζητούμενος πῖθος.

Ἕτερον ζήτημαν:

Ἔστω πῖθος τις οὐ κατὰ πάντα σφαιροειδὴς, τὸ μὲν ὕψος αὐτοῦ σπιθαμῶν ι, ἡ δὲ περὶ τὰ μέσα τούτου περίμετρος ἔστω σπιθαμῶν κβ. (25) Ἀπὸ δὲ ταύτης τῆς περιμέτρου τῶν κβ σπιθαμῶν μέχρι τοῦ χείλους ἐστὶ σπιθαμαὶ ε, ὁμοῦ δὲ τὸ ὕψος ι. Ἡ δὲ κορυφὴ τούτου καὶ ἡ βάσις ἐφ' ἧς ἵσταται, στενότεραι οὖσαι τῆς κατὰ μέσον ἐξοχῆς, ἔστω ἡ τούτων περίμετρος σπιθαμῶν ι.



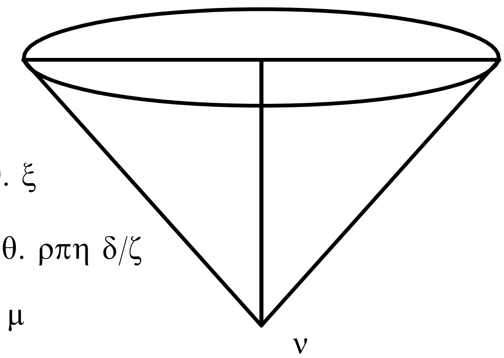
αγ	βγ/ηη	β
αζθ β		βυδ
ηη η		σσ
η		γδ
βυ δ/αα		

Λαβὲ τὸ ἐξ ἀναλόγου τῆς περιμέτρου τῶν δύο ἄκρων καὶ τῆς μέσεως, τουτέστι ἕνωσον τὰς κβ σπιθαμὰς τῆς περὶ τὰ τὰ μέσα περιμέτρου, μετὰ τῶν ι σπιθαμῶν τῆς περὶ τὰ ἄκρα περιμέτρου· κβ οὖν καὶ ι ὁμοῦ γίνονται λβ. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῶν λβ ὅπερ ἐστὶ ις. Ἡ ἐξ ἀναλόγου δὲ περίμετρος τῶν περὶ τὰ μέσα κβ σπιθαμῶν καὶ τῶν περὶ τὰ ἄκρα ι σπιθαμῶν, ἐστὶ (30) σπιθαμαὶ ις. Πολλαπλασίασον ταύτας εἰς ἑαυτάς· ις-κις οὖν ις γίνονται σνς. Μέρισον ταῦτα μετὰ τῶν ιβ καὶ δ/ζ ὡς εἰώθαμεν τετραγωνίζειν ἐκ τῆς περιμέτρου, τὸν κύκλον καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς κ καὶ δ/ια. Ἐστὶ δὲ ὁ κατὰ πλάτος τετραγωνισμὸς τοῦ πίθου, σπιθαμαὶ τετράγωναι κ καὶ δ/ια μιᾶς τετραγώνου σπιθαμῆς. Ἐπεὶ δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἴπομεν ἐστὶ σπιθαμῶν ι, πολλαπλασίασον τὸ πλάτος πρὸς τὸ ὕψος· ι-κις οὖν κ καὶ δ/ια γίνονται σγ καὶ ζ/ια, τουτέστι ἔγγιστα σδ. Ἐστὶ δὲ ὁ ὅλος τετραγωνισμὸς τοῦ καθόλου σώματος τούτου (35) σπιθαμῶν τετραγώνων σδ ἔγγιστα.

Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον μέτρον οἰκειοῦται σπιθαμὰς τετραγώνους ς ὡς εἴπομεν, μέρισον τὰ σδ μετὰ τῶν ς καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς λδ. Δέχεταί δε ὁ πῖθος μέτρα λδ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον ζήτημαν, διὰ τῆς ὁμοίας μεταχειρίσεως ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

(116β)(1) σλζ´ Ἕτερον ζήτημαν τούτου ὅμοιον: Ἔστω τις ὑδροφόρος δεξαμενὴ ὕδατος πεπληρωμένη· τὸ δὲ σχῆμα ταύτης ἔστω ἄνωθεν μὲν περὶ τὸ χεῖλος κυκλοτερές, κατὰ βάθος δὲ καταλήγουσα εἰς οὐδέν· καὶ ἡ μὲν τοῦ χείλους περίμετρος ἔστω σπιθαμῶν ρπη δ/ζ μιᾶς σπιθαμῆς, ἀπὸ δὲ τοῦ χείλους μέχρι τὸ καταλῆγον εἰς οὐδὲν βάθος ἔστω σπιθαμῶν ν. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι πόσα μέτρα ὕδωρ ἔχει ἐντός.



διάμετρος σπιθ. ξ

περίμετρος σπιθ. ρπη δ/ζ

τὸ βάθος σπιθ. μ

Ἔχεις δὲ ταῦτα εἰδέναι οὕτως: Ποίησον ἕβδομα τὰ ρπη δ/ζ· γίνονται δὲ ταῦτα, ἕβδομα ͵ατκ. Μέρισον τὰ ͵ατκ ἕβδομα πρὸς τὰ κβ ἕβδομα, ὡς εἰώθαμεν λαμβάνειν ἐκ τῆς περιμέτρου τὴν διάμετρον, καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς ξ· ἐστὶ δὲ ἡ μὲν περίμετρος σπιθαμῶν ρπη δ/ζ, ἡ δὲ διάμετρος σπιθαμῶν ξ. Λαβὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῶν ξ σπιθαμῶν, ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ σπιθαμαὶ λ. Πολλαπλασιασόν δε ταύτας τὰς λ σπιθαμὰς εἰς ἑαυτάς· λ-κις δὲ λ γίνονται ϡ. Πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰς καὶ τὰς ν σπιθαμὰς τὰς ἀπὸ τοῦ χείλους μέχρι τὸ καταλῆγον εἰς οὐδὲν βάθος· ν-κις δὲ ν γίνονται ͵βφ. Ἄφελε τὰ ϡ ἐκ τῶν ͵βφ καὶ ἀπομένοσι ͵αχ. Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν ͵αχ, ἥτις ἐστὶ μ· μ-κις γὰρ μ

͵αχ γίνεται. Καὶ ἰδοῦ εὗρες διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας, ὅτι ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς διαμέτρου τῶν ξ σπιθαμῶν μέχρι τὸ καταλῆγον εἰς οὐδὲν βάθος ἐστὶ σπιθαμῶν μ.

Ἐπεὶ δὲ ἡ περὶ τὸ χεῖλος περίμετρος ἐστὶ σπιθαμῶν ρπη καὶ δ/ζ κατὰ βάθος δὲ καταλῆγον εἰς οὐδέν, λαβὲ τὸ ἐξ ἀναλόγου τοῦ χείλους τῆς περιμέτρου τῶν ρπη καὶ δ/ζ καὶ τὸ οὐδενὸς τοῦ κατὰ βάθους, τουτέστι λαβὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τῶν ρπη καὶ δ/ζ, ὅπερ ἐστὶ ϟδ καὶ δ/ιδ. Τοῦτο γὰρ ἐστὶ τὸ ἐξ ἀναλόγου, καθὼς τοῦτο καὶ ἐν τῷ σλ-ῷ κεφαλαίῳ τὸ περὶ τῆς σκηνῆς (15) εἴρηται. Ἐστὶ δὲ νῦν ἡ ἐξ ἀναλόγου περίμετρος τοῦ χείλους σπιθαμῶν ϟδ καὶ δ/ιδ μιᾶς σπιθαμῆς, ἥτις ἦν πρότερον σπιθαμῶν ρπη καὶ δ/ζ, ἡ δὲ διάμετρος ἐστὶ σπιθαμῶν λ, ἥτις ἦν πρότερον σπιθαμῶν ξ. Τετραγώνισόν δε τὰς ἐξ ἀναλόγου τῆς περιμέτρου σπιθαμάς, τουτέστι τὰς ϟδ καὶ δ/ιδ, ὡς εἰώθαμεν τετραγωνίζειν τὸν κύκλον· πολλαπλασίασον γὰρ τὴν τῶν λ σπιθαμῶν ἐξ ἀναλόγου διάμετρον εἰς ἑαυτήν· λ-κις δὲ λ γίνονται ϡ. Λαβὲ ια/ιδ τῶν ϡ, ὡς εἰώθαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου τετραγωνίζειν τὸν κύκλον, καθὼς τοῦτο εἴρηται ἐν τῷ σα-ῳ κεφαλαίῳ. *Τὰ δὲ ια/ιδ τῶν ϡ ἐστὶ ψζ καὶ α/ζ. Πολλαπλασίασον ταύτας πρὸς τὰς κατὰ βάθος μ σπιθαμάς, ἃς εὗρες (20) διὰ τοῦ κανόνος τῆς σκάδρας· μ-κις δὲ ψζ καὶ α/ζ γίνεται ͵κ͵η καὶ σπε καὶ ε/ζ. Ἔχει δὲ ἡ ὑδροφόρος ταύτη δεξαμενὴ ὕδωρ σπιθαμῶν τετραγώνων ͵κ͵η καὶ σπε καὶ ε/ζ μιᾶς σπιθαμῆς τετραγώνου.

θ u u	βαγβ	β/ιδ
θ u u α	θθuu	
θ u u α	αδδδ	
θ θ u u	αα	
	χζ καὶ α/ζ	

* Ἀπομένει τζάκισμα ἀκέραιον α καὶ ς/ζ. Συγκρινόμενα δὲ πρὸς τὰ ς τὸν μερισθήν, γίνεται ιβ/μβ. Γίνονταί δε ὁμοῦ ͵δψιδ καὶ ιβ/μβ.

Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον μέτρον ὑπεθέμεθα οἰκειοῦσθαι σπιθαμὰς τετραγώνους ς, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προγενεσθέρων εἴπομεν, μέρισον τὰς ͵κ͵η καὶ σπε καὶ ε/ζ πρὸς τὰς ς τετραγώνους σπιθαμάς, καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς ͵δψιδ καὶ α/ς καὶ ε/ζ, ἅπερ ἦν πρότερον.

δ β α α/ς καὶ ε/ζ
βηβη ε
ς ς ς ς
δζαδ καὶ α/ς καὶ ε/ζ
δζαδ καὶ λζ/μβ

Τὰ δὲ α/ς καὶ ε/ζ ὁμοῦ γίνονται λζ/μβ. Πρόσθες ταῦτα ἐπὶ τοῦ ͵δψιδ καὶ γίνεται ὁμοῦ ͵δψιδ καὶ λζ/μβ. Ἔχει δὲ (25) αὐτὴ ἡ ὑδροφόρος δεξαμενὴ μέτρα ͵δψιδ καὶ λζ/μβ ἑνὸς μέτρου.

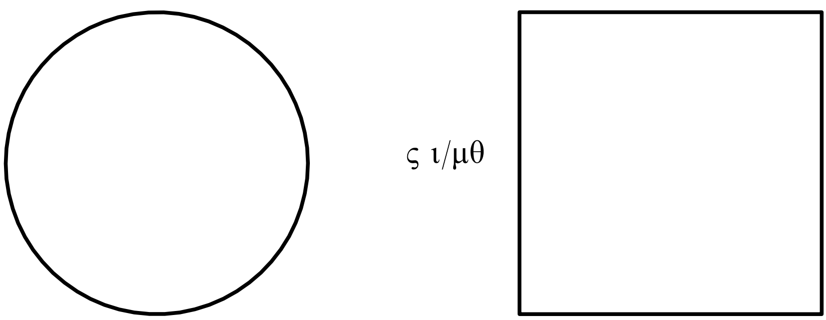
Ὡσαύτως καὶ πᾶν ἕτερον τούτου ὅμοιον σχῆμαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως ἔχεις τετραγωνίσαι τὸ ὅλον σῶμαν τῆς ζητουμένης ὑδροφόρου δεξαμενῆς καὶ εἰδέναι πόσα μέτρα ὕδωρ ἔχει ἐντός, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης ὑδροφόρου δεξαμενῆς ἐποίησας.

σλη´ Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ ἀποδεικτικῶς δεῖξαι ἀληθὴ ὄντα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

Εἴρηται ἐν τῷ σα-ῳ κεφαλαίῳ, πὼς ἐστὶ διὰ τριῶν μεταχειρίσεων τετραγωνῖσαι ἐμβαδὸν κύκλου καὶ εἰδέναι πόσου ἐστὶ χωρητικόν, ἐνῷ εὕραμεν συμφώνως (30) διὰ τῶν τριῶν μεταχειρίσεων εἶναι χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τὸ κατὰ περίμετρον σπιθαμῶν κβ τοῦ κύκλου, σπιθαμῶν τετραγώνων λη καὶ α/β. Πῶς γ' οὖν ἐστὶ εἰδέναι, εἰ οὕτως ἔχῃ, ὡς συμφώνως αἱ τρεῖς δεδηλώκασιν μεταχειρίσεις; Ἀποδειχθήσεταί δε εἶναι ἀληθές, διὰ τῆς παρούσης ἀποδείξεως:

Ἐν τῷ σκς-ῳ κεφαλαίῳ εἴρηται, πῶς ἐστὶ εἰδέναι πόσας ἐλάττονας πόλεις ἔχει δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως. Ἀποδέδεικτέ δε ἐκεῖσε, διὰ τῆς δηλωθείσης μεταχειρίσεως, ὅτι πᾶν ὅμοιον σχῆμαν δύο πόλεων κυκλοτερὲς πρὸς κυκλότερη, καὶ τρίγωνον πρὸς τρίγωνον, καὶ τετράγωνον πρὸς τετράγωνον, ἀναγκαίως ἀληθῶς ἡμῖν (35) ἀποδεικνύουσα τὸ ζητούμενον· μηδ’ ὁποσοῦν ἁμαρτάνουσα τῆς ἀληθείας, ἠκριβωμένως δὲ μᾶλλον δηλοῦσα, πόσας πόλεις ἐλάττονας δέξεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως, φέρε λοιπὸν διὰ τῆς ἀσφαλοῦς καὶ βεβαίας μεταχειρίσεώς τε καὶ ἀποδείξεως(117α)(1) τῶν δύο πόλεων, τὴν ἀναπόδεικτον καὶ ἀμφίβολον μεταχείρισιν, τὴν τὸν κύκλον τετραγωνίζουσαν, ἀληθὴ εἶναι ἀποδείξωμεν. Τὸ γὰρ ἀμφίβολον, τῇ ἀληθείᾳ σύμφωνον εὑρεθέν, ἀληθὲς ἐστὶ μᾶλλον καὶ οὐκ ἔτι ἀμφίβολον λέγεται.

Περίμετρος κδ δ/ε. Ἐμβαδόν λη α/β



Περίμετρος κβ. Ἐμβαδὸν λη α/β. Δέξεται δύο πόλεις λ α/δ, ἀνὰ δ μιλίων ἐχούσας περίμετρον.

Ἔστω τοίνυν τις πόλις κυκλοτερής, ἥτις κατὰ περίμετρον ἐστὶ μιλίων κβ. Ἔστω δὲ καὶ ἑτέρα τις πόλις, ἥτις κατὰ περίμετρον ἐστὶ μιλίων δ, (5) καὶ τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς κατὰ περίμετρον πόλεως μιλίων κβ ἐστὶ χωρητικὸν λη α/β μιλίων τετραγώνων, ὡς ἐν τῷ σα-ῳ κεφαλαίῳ διὰ τῶν τριῶν μεταχειρίσεων εὕραμεν, ἃς ὡς μὴ ἀληθεῖς πάνυ γε οὖσας, ἀμφιβάλοντες, ἀποδεῖξαι νῦν ἀληθεῖς εἶναι μᾶλλον πειρώμεθα. Τετραγώνισον τοίνυν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κατὰ περίμετρον πόλεως, μιλίων δ· δ-κις δὲ δ γίνονται ις. Τὰ ις δέ, γίνονται ἕβδομα ριβ. Μέρισον τὰ ριβ ἕβδομα τοῦ ις πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὰ πη, τοῦ ιβ καὶ δ/ζ, καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς α καὶ ς/κβ. Ἐστὶ δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐχούσης πόλεως περίμετρον μίλια δ, χωρητικόν, μιλίου τετραγώνου α καὶ ς/κβ ἑνὸς τετραγώνου μιλίου.

Καὶ ἄλλως, ὡς ἐν τῷ σκς-ῳ κεφαλαίῳ εἴρηται περὶ τῶν δύο πόλεων, τουτέστι πολλαπλασίασον εἰς ἑαυτὰ τὰ κβ μίλια τῆς περιμέτρου τῆς μείζονος πόλεως.

β	α
γδ κδ/πη	δηδ δ/ις
ααβ	αςς
ηη	α
α καὶ ς/κβ	λ α/δ

Ὡσαύτως καὶ τὰ δ μίλια τῆς περιμέτρου τῆς ἐλάττονος πόλεως· κβ-κις οὖν κβ γίνονται υοδ, δ-κις δὲ δ γίνονται ις. Μέρισον τὸν υπδ πολλαπλασιασμὸν τῆς μείζονος πόλεως, πρὸς τὸν ις τῆς ἐλάττονος πόλεως, καὶ γίνεται ὁ τούτων μερισμὸς λ καὶ α/δ. Δέξεταί δε ἡ μείζων πόλις τῶν κβ μιλίων, πόλεις λ καὶ α/δ μιᾶς πόλεως ἀνὰ μιλίων δ ἔχουσαι περίμετρον. Τοῦτο δὲ ἐστὶ πάνυ γε ἀληθὲς, ὡς ἐστὶ εἰδέναι διὰ τῶν τετραγώνων, καὶ τριγώνων πόλεων.

Εἰ γ' οὖν ἀληθῶς ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μείζονος πόλεως ἐστὶ μιλίων τετραγώνων λη α/β, ταυτὸν δ' εἰπεῖν λη ια/κβ, τῆς δὲ ἐλάττονος πόλεως, ἐστὶ μίλιον τετράγωνον α καὶ ς/κβ, ὡς διὰ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου εὕραμεν, ἀποδεικτίσεται διὰ τῆς ἑτέρας ἀναμφιβόλου μεταχειρίσεως ἥτις δεδήλωκεν δέξασθαι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μείζονος πόλεως, πόλεις λ καὶ α/δ μιᾶς πόλεως ἀνὰ μιλίων δ ἔχουσαι περίμετρον· λ-κις γὰρ μίλια α καὶ ς/κβ γίνονται μίλια λη καὶ δ/κβ. Λαβὲ τὸ α/δ μέρος τοῦ α μιλίου καὶ ς/κβ, ὅπερ ἐστὶ ζ/κβ· δ-κις γὰρ ζ/κβ γίνεται α καὶ ς/κβ. Ἕνωσον τὰ ζ/κβ μετὰ τῶν λη καὶ δ/κβ, καὶ γίνονται ὁμοῦ λη καὶ ια/κβ, τουτέστι λη α/β. Καὶ ἰδοὺ καὶ διὰ τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν λη μιλίων καὶ ια/κβ τῆς μείζονος πόλεως, καὶ τοῦ α μιλίου καὶ ς/κβ τῆς ἐλάττονος πόλεως, εὕραμεν ὅτι δέξεται ἡ μείζων πόλις, ἐλάττονας πόλεις λ καὶ α/δ, ὥσπερ καὶ διὰ τῆς ἀναμφιβόλου μεταχειρίσεως τῶν δύο πόλεων οὕτως εὕραμεν. Καὶ ἐστὶ αὐτὴ ἱκανὴ ἀπόδειξις ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου ἐστὶ ἀληθής τε καὶ βέβαιος.

Ζήτει τὴν ρίζαν τῶν λη α/β ἥτις ἐστὶ ς καὶ ι/μθ βραχύ τι πλείω. Τὰ γὰρ ς καὶ ι/μθ, εἰς ἑαυτὰ τεχνικῶς πολλαπλασιαζόμενα, πολλαπλασιάζοσιν λη καὶ ααζη/βδυα, τουτέστι λη α/β ἔγγιστα. Ποίησόν δε τετράγωνον ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον, ἑκάστη τούτου πλευρὰν μιλίων ς καὶ ι/μθ μιλίου ἑνός, τουτέστι τὴν ρίζαν τῶν λη α/β μιλίων, ὧν ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ἕνωσόν δε τὰς δ πλευρὰς· δ-κις γ' οὖν ς καὶ ι/μθ γίνονται κδ καὶ μ/μθ, τουτέστι κδ καὶ δ/ε ἔγγιστα. Τὰ δὲ κδ μίλια τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου, ἐστὶ πλείω τῆς κυκλοτεροῦς πόλεως τῆς κατὰ περίμετρον οὔσης μιλίων κβ, μίλια β καὶ δ/ε ἔγγιστα μιλίου ἑνός. Καθ' ὅσον δὲ ἐστὶ χωρητικὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλοτεροῦς πόλεως τῶν κβ μιλίων, τοσοῦτον ἐστὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ κατὰ περίμετρον ὄντος μιλίων κδ καὶ μ/μθ. Ἕκαστον γὰρ ἐμβαδὸν τούτων, ἐστὶ χωρητικὸν λη α/β μιλίων τετραγώνων· χωρητικότερον γὰρ ὂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἢ τοῦ τετραγώνου μείζονος περιμέτρου, δεῖ τε τὸ τετράγωνον, ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἰσομερὲς σῶμα δέξασθαι. Ἀρκεῖ δὲ ἡ παροῦσα ἀπόδειξις ἀληθὴς εἶναι καὶ ἱκανὴ λύσις πρὸς τὸ ζητούμενον, οὐ μὲν ἐστί· ὁ γὰρ πολλαπλασιασμὸς τῆς περιμέτρου τῆς μείζονος πόλεως ὅστις ἐστὶ υπδ, ὡσαύτως καὶ τῆς ἐλάττονος πόλεως, ὃς ἐστὶ ις, μεριζόμενος ἕκαστος αὐτῶν διὰ τοῦ δ, καὶ οὐ διὰ τοῦ ιβ καὶ δ/ζ, γίνεται ὁ μερισμὸς τουτέστι ὁ τετραγωνισμός, τῆς μὲν μείζονος πόλεως ρκα, τῆς δὲ ἐλάττονος δ, ὅστις ἦν πρότερον τῆς μὲν μείζονος λη ια/κβ, τῆς δὲ ἐλάττονος α καὶ ς/κβ· λ-κις δὲ δ γίνεται ρκ. Τὸ δὲ α/δ τοῦ δ ἐστὶ α. Ἕνωσον τοῦτο πρὸς τὸν ρκ (117β)(1) καὶ γίνεται ὁμοῦ ρκα.

Καὶ ὅτι μὲν ἡ μείζων πόλις δέξεται πόλεις λ καὶ α/δ, ἀνὰ μιλίων δ ἔχουσας περίμετρον, εὕραμεν συμφώνως, καὶ διὰ τοῦ παρόντος τετραγωνισμοῦ, τῶν ρκα μιλίων τετραγώνων τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μείζονος πόλεως, καὶ τῶν δ μιλίων τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐλάττονος πόλεως, ὅτι δὲ ὁ τετραγωνισμὸς τῆς μείζονος πόλεως ἐστὶ μιλίων τετραγώνων λη καὶ ια/κβ, τῆς δὲ ἐλάττονος ἐστὶ μίλιον α καὶ ς/κβ, οὐκ εὕραμεν τοῦτο συμφώνως. Ὁ μὲν γὰρ ἐστὶ λη καὶ ια/κβ, καὶ α καὶ ς/κβ, ὁ δὲ ρκα καὶ δ. Μὴ μόνον δὲ διὰ τοῦ δ-ου μερίσας τὸν υπδ καὶ τὸν ις πολλαπλασιασμὸν τῆς περιμέτρου (5) τῶν δύο πόλεων γίνεται οὕτως, ἀλλὰ καὶ μετὰ ἅπαντος ἑτέρου μερίσας, τὸν υπδ καὶ τὸν ις τῶν δύο πόλεων, οὕτως συμβήσεται. Ὁ μὲν γὰρ τετραγωνισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν δύο πόλεων γίνεται ἀνόμοιος, ὅτι δὲ δέξεται πόλεις λ καὶ α/δ μιᾶς πόλεως, τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ παντὸς τετραγωνισμοῦ ψευδοῦς τε καὶ ἀληθοῦς συμφώνως. Δι' ὃ οὐδὲ ἀσφαλὴς καὶ βεβαία ἐστὶ ἡ ἀπορριφθεῖσα ἀπόδειξις, ὅτι ἀναγκαίως ἀπεδείκτη, ἀληθὴ εἶναι τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυκλοτεροῦς πόλεως μιλίων τετραγώνων λη α/β ἀναποδείκτως γὰρ γίνεται ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, διὰ τῶν τριῶν μεταχειρίσεων, ὧν εἴπομεν ἐν τῷ σα-ῳ κεφαλαίῳ. Γίνεται δ'ὅμως τῆς ἀληθείας ἔγγιστα (10)γυμνασίας δὲ χάριν ἀποδεῖξαι πειρόμενοι ἀληθὴ ὄντα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν, εἴπομεν ὅσον εἴπομεν. Ἵνα δὲ μὴ δόξῃ ἀληθὴ οὖσα ἡ ἀπόδειξις ἣν εἴπομεν, ἀπεδείξαμεν τὴν ἀπόδειξιν, οὐκ ἀπόδειξιν ἀλλὰ γυμνάσιον μᾶλλον ἀληθείας καὶ ψεύδους. Ἀληθῶς γὰρ οὐκ ἔστι τις ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη, ἡ τετραγωνῖσαι τὸν κύκλον δυνάμενη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Πηγὲς

Ἀνωνύμου, Ἀριθμητική, Μαρία Χάλκου, (Διδακτορικὴ διατριβὴ μὲ θέμα: Μελέτη τοῦ Μαθηματικοῦ περιεχομένου τοῦ Βιενναίου Ἑλληνικοῦ φιλολογικοῦ κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ. φ. (11α- 126α), εἰσαγωγή, μεταγραφή, μαθηματικὰ σχόλια), Ἐκδοτική τοῦ Ἐθνικοῦ καὶ Καποδιστριακοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, Ἀθήνα 2003.

Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, τόμ.I-III, Ἀθῆναι 1974.

L' Algèbre Al-Badî· d' Al-Karagî (MS. de la Bibliothèque Vaticane Barberini Orientale 36, 1), Trad. Anbouba Adel, Publ. de l' Université Libanaise, Beyrouth, 1964.

Collection des Anciens Alchimistes Grecs, ed. M. Berthelot, Pub. G. Steinheil, Paris 1888.

Avicenne, Le livre de Science, trad. Moh. Achena et Th. Massé, Les belles letters, 1986.

Βασιλείου Καισαρείας τοῦ Μεγάλου Ἅπαντα τὰ Ἔργα, τόμ.VII (Ὁμιλίαι καὶ Λόγοι), ἐπιμέλεια Β. Ψευτόγκα, ἐκδ. Γρηγόριος ὁ Παλαμάς, Θεσσαλονίκη 1973.

Barlaam von Seminara Logistiké, ed. P. Carelos, Ἀκαδημία Ἀθηνῶν 1966.

Διοφάντου Ἀριθμητικά, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι 1963.

Εὐκλείδου γεωμετρία, τόμ. II (θεωρία ἀριθμῶν), ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΟΕΣΒ, Ἀθῆναι 1958.

Euclidis Elementa, ed. I. L. Heiberg, Teubner, Lipsiae, 1884.
Euclid: The thirteen books of the Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Th. Heath, τόμ. II, Dover, N. York 1956.
F. G.- M., Exercices de Géomètrie, 5ème édition, μετάφρ. Δ. Γκιόκας, ἐκδ. Ἀ. Καραβία, Ἀθῆναι 1952, τόμ. III.
Heronis Alexandrini, Stereometrica et de mensuris, ed. J. Heiberg, Teubner Stutgard 1976.
H. Hunger-K. Vogel, Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15 Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis Phil. Gr. 65, H. Bohlaus, Koln Komm. d. ?sterr. Acad. D. Wissenschaften in Wien, 1963.
Herons von Alexandria, ed. Hermann Schöne, Leipzig, Druck und verlag von B. G. Teubner, 1903, τόμ. II.
Nicomachi Geraseni Pythagorei, Introductionis arithmeticae libri II, ed. Hoche, Teubner, Lipsiae 1866.
Πάππου Ἀλεξανδρέως, Μαθηματικὴ Συναγωγὴ, ἐκδ. Ε. Σπανδάγος, τόμ. I, Αἴθρα, Ἀθήνα 2001.
G. Pachymeris, De Michaele et Andronico Palaeologis bonne impensis ed. Weberi, Leyden Lipsie 1835.
Quadrivium de Georges Pachymère, ed. P. Tannery, Biblioteca Apostolica Vaticana, Vaticano 1940.

Ἱστορίες- Ἐγκυκλοπαίδειες- Λεξικά- Περιοδικά

Archive for History of Exact Sciences, Berlin 1965 κ. ἕ.
Ἱστορία Ἑλληνικοῦ Ἔθνους, Ἐκδοτικὴ Ἀθηνῶν, τόμ. IX.
Ἡ Ἱστορία τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας, ἐκδ. «Μέλισσα», Ἀθήνα 1979, (τόμ. II, κεφ. XXVIII: K. Vogel, «Ἡ βυζαντινὴ

ἐπιστήμη»). Ἑλλ. μετάφραση τοῦ: History of the Byzantine Empire, (v. II, ch. XXVIII: K. Vogel, The Byzantine Science), Univ. of Wisconsin Press, Cambridge, 1958.

Ἀκαδημαϊκὴ Ἐγκυκλοπαίδεια, Ἀκαδημία Ἐπιστημῶν τῆς Ε.Σ.Σ.Δ, τόμ.ΙΙ (Ἀστρονομία, Μαθηματικά), ἐκδ. Γιαννίκος & Σία, Ἀθηνα 1975-76.

Dictionary of Scientific Biography, ed. Ch. Coulston Gillispie, Ch. Scribner's sons, τόμ. I-XVI, N. York 1970-1980.

Ἰ. Σταματάκου, Λεξικὸ Ἑλληνικῆς γλώσσης, τόμ. I-II, Ἀθήνα 1971.

Ἴνδικτος 7 (Χειμώνας 1997).

Νεῦσις 3 (Φθιν. 1995)· 5 (Φθιν.-Χειμ. 1996).

Σύγχρονα θέματα, 35, 36, 37 (Δεκέμβριος 1988).

Πρακτικὰ Συνεδρίων

Α΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων τῆς Ἑλλάδος καὶ τῆς Κύπρου, Ἰωάννινα 1999.

Β΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων τῆς Ἑλλάδος καὶ τῆς Κύπρου, Ἀθήνα 2000.

Γ΄ Συνάντηση Βυζαντινολόγων, Ρέθυμνο 2002.

Πανελλήνιο Συμπόσιο Ἑλλήνων χημικῶν, Ἀθήνα 1994

1ο Διεθνὲς Συνέδριο ἀρχαίας ἑλληνικῆς τεχνολογίας, Θεσσαλονίκη 1997.

Διεθνὲς Ἐπιστημονικὸ Συμπόσιο, Χαλκίδα, Μάιος 1998. Βυζάντιο καὶ Δύση, «Χρῆμα καὶ ἀγορὰ στὴν ἐποχὴ τῶν Παλαιολόγων», Ἐθνικὸ Ἵδρυμα Ἐρευνῶν, Ἰνστ. Βυζ. Ἐρευνῶν, ἐπιμέλεια Ν. Γ. Μοσχονὰς, Ἀθήνα 2003.

Ἄρθρα-Βιβλία

Λ. Ἀδαμόπουλος, Μαθηματικὰ Β΄ τάξης Ἐνιαίου Λυκείου (Θετικὴ Κατεύθυνση), ΟΕΔΒ, Ἀθήνα 1998.

Δ. Ἀναπολιτάνος, Εἰσαγωγὴ στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν,ἐκδ. Νεφέλη, Ἀθήνα 1985.

Adel Anbouba, Notes sur l' Algèbre d' Al-Hwarizmî, Publ. de l' Université Libanaise, Beyrouth, 1968.

Marshall Clagett, "Archimedes", DSB, I, 213-231.

Χ. Βαλασιάδης, Ὁδηγὸς Βυζαντινῶν Νομισμάτων, Βιβλιοθήκη τῶν Ἑλλήνων, ἐκδ. Γεωργιάδης, Ἀθήνα ^{2}1995.

Φ. Βασιλείου, Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν, ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1971.

Ἁγνή Βασιλικοπούλου-Ἰωαννίδου, Ἡ ἀναγέννηση τῶν γραμμάτων κατὰ τὸν 12ο αἰ. εἰς τὸ Βυζάντιον καὶ ὁ Ὅμηρος (διδακτορικὴ διατριβή), Ἀθήνα 1971.

Στέλλα Βοσνιάδου, Κείμενα ἐξελικτικῆς ψυχολογίας, τόμ. ΙΙ, ἐκδ. Gutenberg, Ἀθήνα 1994.

Στέλλα Βοσνιάδου, Ἡ ψυχολογία τῶν Μαθηματικῶν, ἐκδ. Gutenberg, Ἀθήνα 1995.

S. Bowman, The Jews of Byzantium (1204-1453), L. Weinberger, 1985.

C. B. Boyer - Uta C. Merzbach, Ἡ Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, ἐκδ. Ἀ. Πνευματικοῦ, Ἀθήνα 1997.

C. B. Boyer, A History of Mathematics, Princeton, UP, 1968/ 1985.

I. G. Bachmakova, "Archimedes methods of integration", Archive for History of Exact Sciences, τόμ. II, N2, σελ.87-107 (1964).

David Pingree, "Brahmagupta", DSB, II, 416-418.

Νικ. Γεωργακόπουλου, Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας, ἐκδ. Φύλλα, Τρίπολη 2000.
Π. Γεωργούση, Παιδαγωγικὴ Ψυχολογία, ΟΕΔΒ, Ἀθήνα 1981.
Ἑλένη, Γλύκατζη-Ἀρβελὲρ, Ἡ πολιτικὴ ἰδεολογία τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας, ἐκδ. Ψυχογιός, [4]1992.
Δ. Γούτα, Ἡ ἀρχαία Ἑλληνικὴ σκέψη στὸν Ἀραβικὸ πολιτισμό, ἐκδ. Περίπλους, Ἀθήνα 2001.
F. Cajori, A History of Mathematics, Chelsea, N. York 1985.
R. Calinger, A Contextual History of Mathematics to Euler, Prentice Hall, 1999.
M. Gliozzi, "Cardano, Girolamo", DSB, III, 64-67.
C. N. Constantinides, Higher Education in Byzantium in the thirteenth and early fourteenth centuries (1204-1310), Cyprus Research Center, Nicosia 1982.
M. A. Cow, A short History of Greek Mathematics, Chelsea, N. York 1968.
D. R. Dicks, Ἡ πρώιμη Ἑλληνικὴ Ἀστρονομία (μετάφραση Μ. Παπαθανασίου), ἐκδ. Δαίδαλος, Ἀθήνα 1991.
K. Vogel, "Diophantus of Alexandria", DSB, IV, 110-119.
Maria, Dzielska, Ὑπατία ἡ Ἀλεξανδρινή, μετάφρ. Γ. Κουσουνέλος, ἐκδ. Ἐνάλιος, Ἀθήνα 1997.
K. Vogel, "Leonardo Fibonacci", DSB, IV, 604-613.
G. Finlay, History of the Byzantine and Greek Empires. W. Blackwood & sons, Endiburgh and London 1854.
D. H. Fowler, The Mathematics of Plato's Academy, Oxford UP 1987.
E. Grant, Οἱ Φυσικὲς Ἐπιστῆμες τὸν Μεσαίωνα, Πανεπ. ἐκδόσεις Κρήτης, Ἡράκλειο 1994.
Th. Heath, A History of Greek Mathematics, Oxford UP, τόμ. I (1921), II (1981).

M. F. Hendy, Catalogue of the Byzantine Coins, τόμ.IV, Pt 1, ed. A. Bellinger-P. Grierson, U.S.A. 1994.
M. F. Hendy, Studies in the Byzantine monetary, Cabridge UP 1985.
A. G. Drachmann, M. S. Mahoney, "Hero of Alexandria", DSB, VI, 310-315.
J. Høyrup, Sub-Scientific Mathematics (In memoriam N. I. Bukharin 1888-1938).
H. Hunger, - I. Sevcenko, Des N. Blemmydes Βασιλικὸς Ἀνδριὰς und dessen Metaphrase von G. Calesiotes und G. Oinaiotes, Verlag der Osterreichischen Academie der Wissenschaften.
H. Hunger, Βυζαντινὴ Λογοτεχνία τόμ. I-III, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994.
H. Hunger, Katalog der Griechischen Handschriften der Österreichishen National Bibliothek Teil 1 Codices Historici, Philosophici et Philologici, Georg Prachner Verlag, Wien 1961.
J. Hunter, Ἀριθμοθεωρία, μετάφρ. Ν. Κρητικοῦ, ἐκδ. Συλλόγου πρὸς διάδοσιν ὠφελίμων βιβλίων, Ἀθήνα 1974.
W. Jaeger, Early Christianity and Greek Paideia, Oxford UP, Harvard 1961.
E. Grant, "Jordanus de Nemore", DSB, VII, 171-179.
Π. Καλλιγᾶ, Μελέται Βυζαντινῆς Ἱστορίας- Περὶ φορολογικῶν διατάξεων, ἐκδ. Δημιουργία, Ἀθήνα 1997.
Σπ. Κανέλλου, Εὐκλείδειος Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι 1975.
Φ. Κουκουλέ, Βυζαντινῶν Βίος καὶ Πολιτισμός, τόμ. II, Ἀθήνα 1948.
O. Gingerich, "Kepler, Johannes", DSB, τόμ. VII, σελ. 289-312.
A. P. Youschkevitch, B. A. Rosenfeld, "Omar Khayyam (Al

Khayyâmî)", DSB, VII, 323-334.
E. Knobloch, Mathématiques et Philosophie de l' Antiquitè à l' âge Classique, hommage à Jules Vuillemin/ sous la direction de Roshdi Rashed, CNRS, Paris 1991.
W. R. Knorr, "Archimedes and the Measurement of the circle. A new interpretation", AHES, XV, N2 (1976), 115-140.
K. Krumbacher, Ἱστορία τῆς Βυζαντινῆς Λογοτεχνίας, ἐκδ. Β. Γρηγοριάδης, Ἀθήνα 1974.
A. Laiou, The Christian East its Institutions and its Thought. A Critical Reflection, Pontificio Istituto Orientale, Roma 1996.
J. Lefort, R. Bondoux, J-Cl. Cheynet, J.-P. Grélois, V. Kravari, Géomètries du fisc Byzantin, P. Lethielleux, Paris 1991.
P. Lemerle, Ὁ πρῶτος Βυζαντινὸς Οὑμανισμός, ἐκδ. MIET, Ἀθήνα 1985.
D. Pingree, "Leo the mathematician", DSB, VIII, 190-192.
G. Loria, Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, ἐκδ. Παπαζήση, Ἀθήνα 1971.
Σ. Μενάρδος, Ἐξέλιξις καὶ προφορὰ τῆς Ἑλληνικῆς. Τέσσερα Ὀξφορδιανὰ μαθήματα, Ἀθῆναι 1972.
J. F. Mattéi, Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι, μετάφρ. Καψαμπέλη, ἐκδ. Μ. Καρδαμίτσα, Ἀθήνα 1995.
P. H. Michel, De Pythagore à Euclide, Les belles letters, Paris 1950.
E. Mioni, Εἰσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία, ἐκδ. MIET, Ἀθήνα 1994.
Ν. Νικολάου, Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ Πρακτικῶν Λυκείων, ἐκδ. Δ. Τζάκα- Στ. Δελαγραμμάτικα, Ἀθήνα ^{6}1954.
O. Neugebauer, Οἱ Θετικὲς ἐπιστῆμες στὴν ἀρχαιότητα, ἐκδόσεις MIET, Ἀθήνα ^{2}1990.
M. Clagett, "Oresme Nicole", DSB, X, 223-230.

N. Πολίτη, Εἰρήνευση, Ἀθήνα 1997.
G. Polya, Πῶς νὰ τὸ λύσω, μετάφρ. Ξανθὴ Ψυακκή, ἐπιμέλεια Τ. Πατρώνης, ἐκδ. Καρδαμίτσα, [3]Ἀθήνα 1998.
S. A. Jayawardene, "Luka Pacioli", DSB, X, 269-272.
T. T. Rice, Ὁ Δημόσιος καὶ Ἰδιωτικὸς βίος τῶν Βυζαντινῶν, ἐκδ. Παπαδήμα, Ἀθήνα 1990.
T. T. Rice, Ὁ Δημόσιος καὶ Ἰδιωτικὸς βίος τῶν Βυζαντινῶν, ἐκδ. Παπαδήμα, Ἀθήνα 2000.
P. L. Rose, The Italian Renaissance of Mathematics, Librairie Droz, Genève 1975.
S. Runciman, Byzantine Civilisation, E. Arnold, 1936/Methuen, London 1975.
E. Σταμάτη, Ἑλληνικὰ Μαθηματικά, ἐκδ. Ἑταιρείας τῶν φίλων τοῦ λαοῦ, Ἀθήνα [2]1979.
E. Σταμάτη, Κριτικὴ Βυζαντινοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς H. Hunger und Kurt Vogel (Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts), ἐκδ. Σίδερη, Ἀθήνα 1965.
J. Sabatier, Monnaies Byzantines, Rollin et Feuardent, Paris 1862.
G. Sarton, A History of Science, Oxford UP, London 1953.
E. Schilbach, Byzantinische Metrologie, C. H. Beck, München, 1970.
J. Sesiano, The appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics, History of Exact Scienses 32, no 2 (4. IV. 1985) 105-149.
D. E. Smith, History of Mathematics, τόμ. I-II, Dover, New York 1958.
D. J. Struik, A concise History of Mathematics, Dover, New York [2]1948.
P. Sugar, Ἡ νοτιοανατολικὴ Εὐρώπη κάτω ἀπὸ Ὀθωμανικὴ

κυριαρχία (1354-1804), τόμ. I, ἐκδ. Σμιλή, Ἀθήνα 1994.
Δ. Τσιμπουράκη, Ἡ γεωμετρία καὶ οἱ ἐργάτες της στὴν ἀρχαία Ἑλλάδα, ἐκδ. Alien, Ἀθήνα 1997.
Ν. Τωμαδάκη, Κλεὶς τῆς Βυζαντινῆς Φιλολογίας, ἐκδ. Πουρνάρα, Θεσσαλονίκη 1963.
Ν. Τωμαδάκη, Βυζαντινὴ Ἐπιστολογραφία, ἐκδ. Μυρτίδη, Ἀθήνα 1969.
P. Tannery, Pour l' histoire de la science Hellène, Félix Alcan, Paris 1887.
A. Masotti, "Niccolo Tartaglia", DSB, XIII, 258-262.
V. M. Tikhomirov, Ἱστορίες γιὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, μετάφρ. Κ. Γαβράς- Γ. Κατσιλιέρης, ἐκδ. Κάτοπτρο, Ἀθήνα 1999.
W. Treadgold, A History of the Byzantine State and Society, Stanford UP.
B. L. Van der Waerden, A History of Algebra, Springer Verlag, Berlin 1985.
B. L. Van der Waerden, Ἡ ἀφύπνιση τῆς Ἐπιστήμης, Πανεπ. ἐκδόσεις Κρήτης, Ἡράκλειο 2000.
B. L. Van der Waerden, Geometry and Algebra in Ancient Civilisations. Springer, Berlin 1983.
M. Vegetti, Ἱστορία τῆς Ἀρχαίας Φιλοσοφίας, ἐκδ. Τραυλός, Ἀθήνα 2003.
J. H. Vincent, À la Géomètrie Pratique des Grecs. Extrait des notices des Manuscrits, τόμ. XIX pt. 2, Imr. Impériale, Paris 1858.
Μαρία Χάλκου, Τὰ Μαθηματικὰ στὸ Βυζάντιο, Λογιστική, ἐκδ. Ἐπικαιρότητα, Ἀθήνα 2006.
Κ. Σ. Χασάπη, Ὁ Ἀστὴρ τῆς Βηθλεέμ, ἐκδ. Ἀ. Καραβία, Ἀθῆναι 1970.
Γ. Χριστιανίδη, Μάθημα Ἱστορίας τῆς Ἀρχαίας καὶ Με-

σαιωνικῆς Ἐπιστήμης, ἐκδ. Πανεπ. Ἀθηνῶν, Ἀθήνα 1997.
D. A. Zakythinos, Crise Monètaire et Crise Économique à Byzance du XIII au XV siècle, L Hellenisme contemporain, Athènes 1948.
H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Ed. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, reprogr. G. Olms, Hildesheim 1996.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η Μαρία Χάλκου γεννήθηκε στὸν Πειραιά το 1952. Αφού ολοκλήρωσε τις σπουδές της στα Μαθηματικά (1977) στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, εργάστηκε ως καθηγήτρια Μαθηματικών σε φροντιστήριο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (1976-1980) και από το 1981 είναι μόνιμη εκπαιδευτικός σε δημόσιο λύκειο του Πειραιά. Είναι κάτοχος Μ.Δ.Ε. στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών (1997) και αριστούχος διδάκτωρ Μαθηματικών του ιδίου τμήματος (2004) με τριετή μετεκπαίδευση στην Παλαιογραφία στο Μ.Ι.Ε.Τ. Διετέλεσε μέλος της συγγραφικής ομάδας Μαθηματικών του Κ.Ε.Ε. του ΥΠ.Ε.Π.Θ. η οποία ασχολήθηκε με τη συγγραφή των 8 σχολικών βιβλίων αξιολόγησης των μαθητών του λυκείου στα Μαθηματικά, καθώς και εισηγήτρια επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στα Π.Ε.Κ. (1998-2000). Συμμετείχε σε ερευνητικές ομάδες του Ο.Ο.Σ.Α. του ΥΠ.Ε.Π.Θ. για τον «προσδιορισμό των συνθηκών μάθησης στα σχολεία» (2000), και στο διεθνές πρόγραμμα PISA για τον «προσδιορισμό του γνωστικού επιπέδου μαθητών στα μαθηματικά και τη φυσική» (2000). Διατέλεσε μέλος Οργανωτικής Επιτροπής του Συνεδρίου για την «αξιολόγηση σχολικής μονάδας» που διοργάνωσε το Κ.Ε.Ε. σε συνεργασία με το Βρετανικό Συμβούλιο (2000). Συμμετείχε με ανακοινώσεις σε συνέδρια της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Θεσσαλονίκης, Κρήτης, του Ιονίου Πανεπιστημίου, του Κ.Ε.Ε. του ΥΠΕΠΘ, στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών «MASSEE» στο Μπόροβετς (2003), και στο Διεθνές Συνέδριο «SEEDI» στην Οχρίδα (2005). Άρθρα της έχουν δημοσιευθεί σε ξένα επιστημονικά περιοδικά, και σε επιστημονικά περιοδικά της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών.