ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΟΔΗΓΗΣΑΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ 2500 ΧΡΟΝΙΑ ΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Οι βάσεις για τη θεωρία των κωνικών τομών, σύμφωνα με τους ερευνητές, είχαν τεθεί από τους Πυθαγόρειους περί το 500 π.Χ. χωρίς όμως να έχει χρησιμοποιηθεί εκείνη την εποχή αυτή η ονομασία[1]. Κατά τον Πρόκλο ο Εύδημος απέδιδε στους Πυθαγόρειους την *¨ανακάλυψη αυτών των αρχαίων πραγμάτων¨*, δηλαδή *¨την παραβολή των επιφανειών των σχημάτων, την υπερβολή και την έλλειψή τους¨*. Το συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο εξελίχθηκε στο πρόβλημα των κωνικών τομών αργότερα, διατυπώθηκε από τους Πυθαγόρειους ως εξής: *¨Παρά δοθείσα ευθεία και υπό γωνία ίση προς δοθείσα ευθύγραμμη γωνία, να παραβληθεί (εφαρμοσθεί) παραλληλόγραμμο ίσο προς δοθέν τρίγωνο¨*. Στο πρόβλημα αυτό, εφόσον συμβολίσουμε με S μια

[1] Ε. Σ. Σταμάτη, *Κωνικά Απολλώνιου* ,εκδ. ΤΕΕ, Αθήναι 1975-76, τόμ. Ι, σελ. 3-16.

δοθείσα επιφάνεια και με p μια δοθείσα ευθεία, το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα μήκος x, το οποίο να ικανοποιεί τις εξισώσεις: $S=px$, $S=px+x^2$, $S=px- x^2$. Ο Πρόκλος θεωρεί βέβαιον ότι η λύση αυτού του προβλήματος ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους.[2]

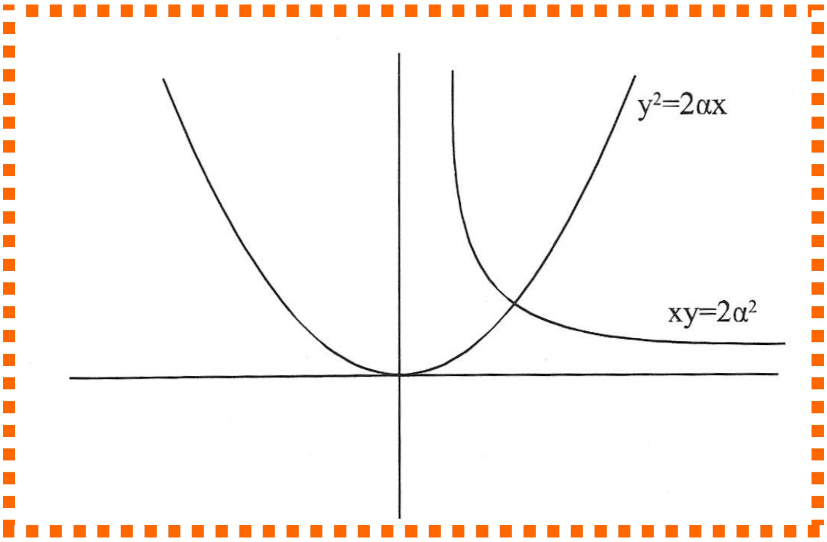
Γενικότερα οι κωνικές τομές, δηλαδή οι καμπύλες με τις ονομασίες ¨έλλειψη¨, ¨παραβολή¨, και ¨υπερβολή¨ θεωρείται ότι είχαν απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς γιατί σχετίζονταν με προβληματικές κατασκευές[3], όπως με την κατασκευή κύβου με όγκο διπλάσιο δοθέντος κύβου. Ο Ιπποκράτης ο Χίος ανήγαγε το πρόβλημα αυτό σε ζήτημα κατασκευής μέσης αναλόγου. Για την ακρίβεια ισχυρίστηκε πως αρκεί να ευρεθούν ευθύγραμμα τμήματα χ, ψ ώστε να ισχύει: (Ι) $α/χ=χ/ψ=ψ/2α$. Το ανωτέρω σύστημα δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί με τη χρήση ευθείας και κύκλου, αλλά με την χρήση άλλων γεωμετρικών καμπυλών. Η λύση που δόθηκε από το Μέναιχμο το 350 π.Χ. περιγράφεται ως εξής:

---

[2] J. F. Mattéi, *Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι,* μτφρ. Κ. Καψαμπέλη, Ινστιτούτο Βιβλίου- Μ. Καρδαμίτσα, Αθήνα 1995, σελ. 92.

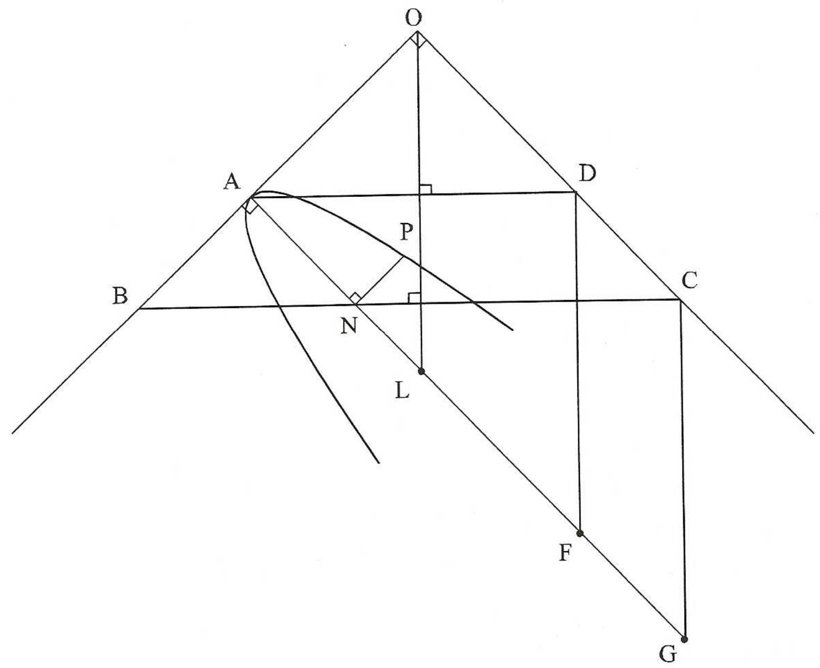
[3] Σύμφωνα με μία εκδοχή, υπάρχει η εξής ιστορική σειρά των σχετικών ιστορικών ανακαλύψεων: Η επίλυση των κύριων τύπων των δευτεροβαθμίων εξισώσεων ήταν γνωστή από την παλαιοβαβυλωνιακή εποχή. Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη γεωμετρικοποίηση αυτών των μεθόδων με τη μορφή της παράθεσης εμβαδών κατά τον 4^{ον} αιώνα π.Χ. Λίγο αργότερα ανακαλύφθηκαν οι κωνικές τομές ίσως από τη διερεύνηση των ηλιακών ρολογιών. Οι κωνικές τομές θεωρούνταν στην αρχή καμπύλες μέσα στο χώρο, οι οποίες δεν είχαν σχέση με αλγεβρικά προβλήματα. Βλ. O. Neugebauer, *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα,* εκδ. ΜΙΕΤ, μτφρ. Χ. Ζερμπίνη- Ι. Αρζόγλου, Αθήνα 1990, σελ. 227.

Από τη σχέση (Ι) προκύπτει ότι $\psi^2=2\alpha\chi$ (ΙΙ), και $\chi\psi=2\alpha^2$. Άρα $\psi=2\alpha^2/\chi$ (ΙΙΙ). Άρα οδηγούμαστε στην εύρεση του κοινού σημείου των καμπύλων (ΙΙ), και (ΙΙΙ), οι οποίες παριστάνουν μία παραβολή και μία υπερβολή αντίστοιχα.



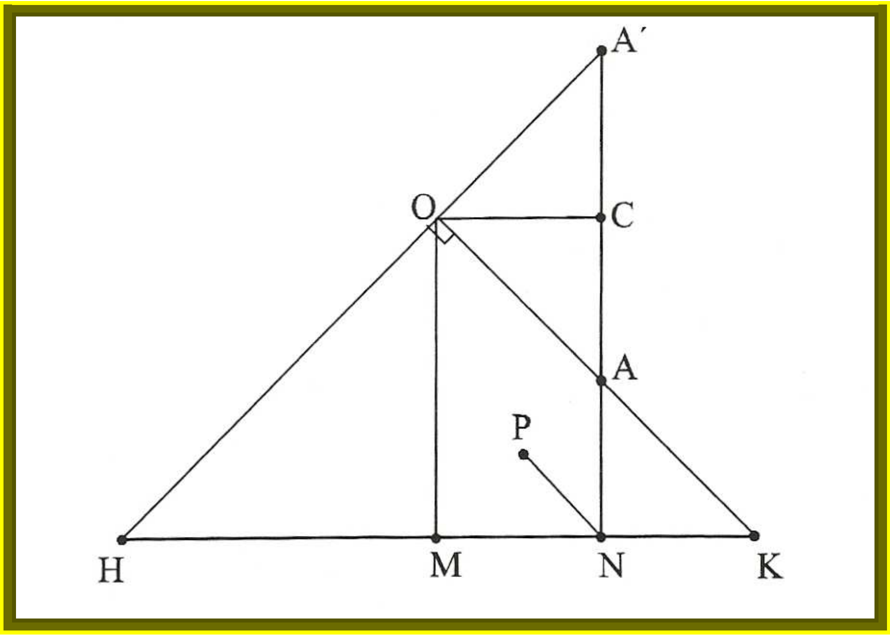
Είναι λοιπόν σαφές, ότι ο Μέναιχμος χρησιμοποιούσε στην επίλυση μαθηματικών θεμάτων τις κωνικές τομές χωρίς ωστόσο να γνωρίζουμε το πώς οδηγήθηκε να σκεφθεί τις καμπύλες αυτές ως τομές κώνου και επιπέδου. Κατά τον Heath[4], μία πιθανή πορεία που ακολούθησε ο Μέναιχμος ήταν να θεωρήσει κώνο με ορθή γωνία κορυφής και, για να δημιουργηθεί παραβολή, να τον τμήσει με επίπεδο κάθετο σε μία ακμή του. Εάν δε, το P είναι τυχόν σημείο της παραβολής, $PN \perp AG$, $BC \perp OL$, όπου με OL συμβολίζεται ο άξων του κώνου, τότε το P ευρίσκεται σε περιφέρεια κύκλου διαμέτρου BC, ο οποίος προκύπτει σαν τομή του κώνου με επίπεδο κάθετο στον άξονα OL.

[4] Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. II (1981), p. 112.

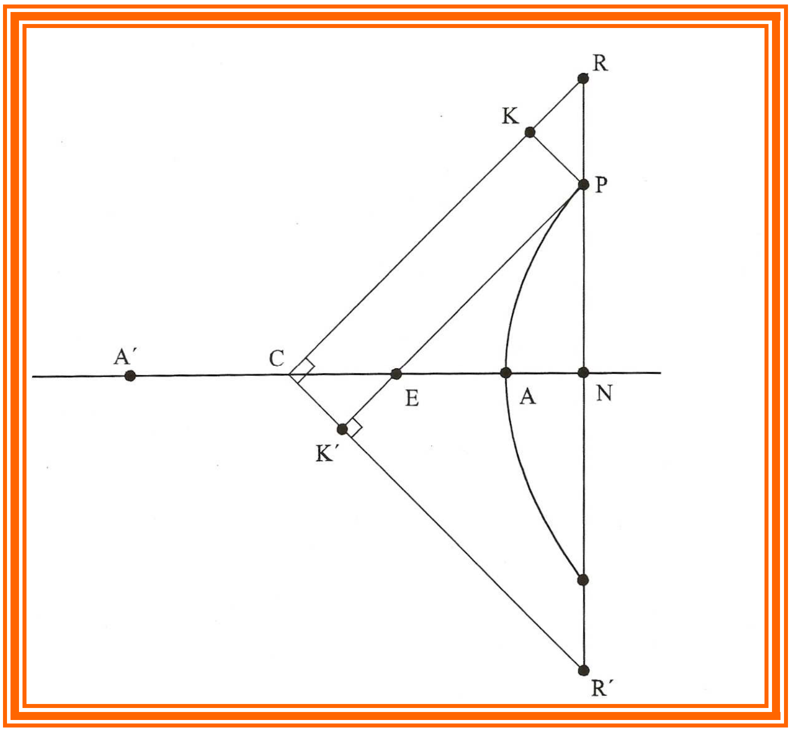


Στη συνέχεια θεωρούμε AD//BC, και DF, CG παράλληλες της OL, όπου τα σημεία F, και G ανήκουν στην προέκταση της AL. Τότε η OL θα διχοτομεί τα ευθύγραμμα τμήματα AD, AF. Εάν PN=ψ, AN=χ, τότε $ψ^2$=PN2=BN.NC (η γωνία BPC είναι ίση με μία ορθή, επειδή το τόξο BPC είναι ημιπεριφέρεια). Το τετράπλευρο BACG είναι εγγράψιμο, οπότε BN.NC=AN.NG=AN.AF (AN=DC επειδή το ANCD είναι παραλληλόγραμμο, DC=FG επειδή το DCGF είναι παραλληλόγραμμο, άρα AN=FG, οπότε AN+NF=FG+NF, δηλαδή AF=NG). Άρα BN.NC=AN.2AL, οπότε $ψ^2$=2AL.χ, και το τμήμα 2AL είναι η παράμετρος. Σύμφωνα με τον Heath[5] ο Μέναιχμος έκανε κάτι απλούστερο. Θεώρησε ορθογώνιο κώνο, τον οποίον έτμησε με επίπεδο παράλληλο προς τον άξονά του OM, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

[5] Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. II (1981), p. 115.



Ο HOK είναι ο ορθογώνιος λοιπόν κώνος και το επίπεδο Α΄ΑΝ είναι παράλληλο με το ΟΜ. Ο Μέναιχμος, κατά τον Heath, θεώρησε σημείο P της καμπύλης και το ευθύγραμμο τμήμα PN ως την ¨κυρία¨ (ordinate). Έστω OC//HK. Τότε ισχύει $PN^2=HN.NK=(MN+HM).(MK-MN)=(MN+MK).(MK-MN)=MK^2-MN^2=OM^2-CA^2=CN^2-CA^2$, γιατί MK=OM και MN=OC=CA, δηλαδή $\psi^2=CN^2-CA^2$. Αυτή η σχέση είναι ιδιότητα υπερβολής με άξονα Α΄Α. Στη συνέχεια ο Μέναιχμος αποδεικνύει την ιδιότητα της ασυμπτώτου, ως εξής:



Θεωρεί τα ευθύγραμμα τμήματα CR, CR΄, ως ασύμπτωτες οι οποίες σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία, A΄A τον άξονα της υπερβολής, και P τυχόν σημείο του άξονα A΄A, με PN την ¨κυρία¨ (ordinate), PK⊥CR, και PK΄⊥CR΄. Προεκτείνει την PN και συμβολίζει με R και R΄ τα κοινά σημεία της PN με τις CR, CR΄. Ισχύει:

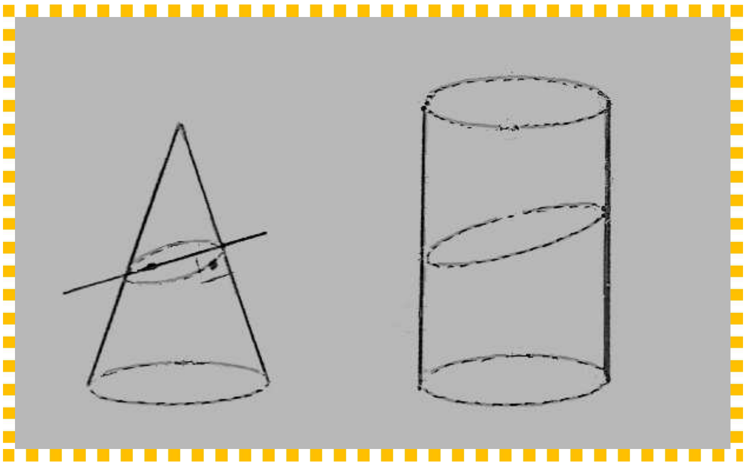
$CA^2=CN^2-PN^2=RN^2-PN^2=(RN-PN).(RN+PN)=RP.PR'$. Όμως

$RP^2.PR'^2=2PK^2.2PK'^2=4PK^2.PK'^2$, άρα

$CA^2=RP.PR'=2PK.PK'$ (γωνία PRK=45 μοίρες), οπότε

$PK.PK'=CA^2/2$.

Τα ανωτέρω εξηγούν κατά τον Heath, μία πιθανή πορεία που ακολουθήθηκε από τον Μέναιχμο. Αξίζει επιπροσθέτως να σημειωθεί, πως ο Δημόκριτος ήδη ανέφερε, ότι, θεωρώντας κώνο με ορθή γωνία κορυφής, τότε η τομή που προέκυπτε με επίπεδο παράλληλο με τη βάση του και κοντά σε αυτήν είχε το σχήμα του κύκλου. Επιπλέον, στα ¨Φαινόμενα¨ του Ευκλείδη αναφέρεται, ότι η τομή κώνου ή κυλίνδρου με επίπεδο όχι παράλληλο με τη βάση τους, μοιάζει με την τομή που προκύπτει, όταν τμήσουμε οξυγώνιο κώνο με επίπεδο κάθετο προς την ακμή του.



Σύμφωνα δε με σχόλιο του Ευτόκιου, η τομή οξυγώνιου, ορθογώνιου ή αμβλυγώνιου κώνου με επίπεδο κάθετο προς την γενέτειρα ακμή του, είναι έλλειψη, παραβολή και υπερβολή αντίστοιχα. Μετά τον Μέναιχμο η εξέλιξη ήταν ταχύτατη, αφού μέχρι το τέλος του αιώνα (300 π.Χ.) υπήρξαν σύμφωνα με τον Πάππο[6] δύο αξιόλογες εργασίες με θέμα τις κωνικές τομές. Πρόκειται για τις ¨Κωνικές¨ του Ευκλείδη, ένα έργο που αποτελείτο από 4 βιβλία, καθώς και 5 βιβλία με τίτλο ¨Solid loci¨ του Αρισταίου, στα οποία δόθηκε από τον συγγραφέα ο συγκεκριμένος αυτός τίτλος, αντί του τίτλου ¨Κωνικές τομές¨. Σύμφωνα δε με τον Πάππο, επρόκειτο για εξειδικευμένη και πρωτότυπη

[6] Ο Πάππος ήταν σημαντικός μαθηματικός ελληνικής καταγωγής που έζησε γύρω στο 300 π.Χ. Η αποδεικτική μέθοδος της σύνθεσης χρησιμοποιείτο από αυτόν με μία (κατά τον G. Polya) καλώς ορισμένη σημασία η οποία αξίζει να διατηρηθεί. G. Polya, *Πώς να το λύσω,* επιμέλεια Τ. Πατρώνη, εκδ. Καρδαμίτσα, Αθήνα [3]1998, σελ. 194.

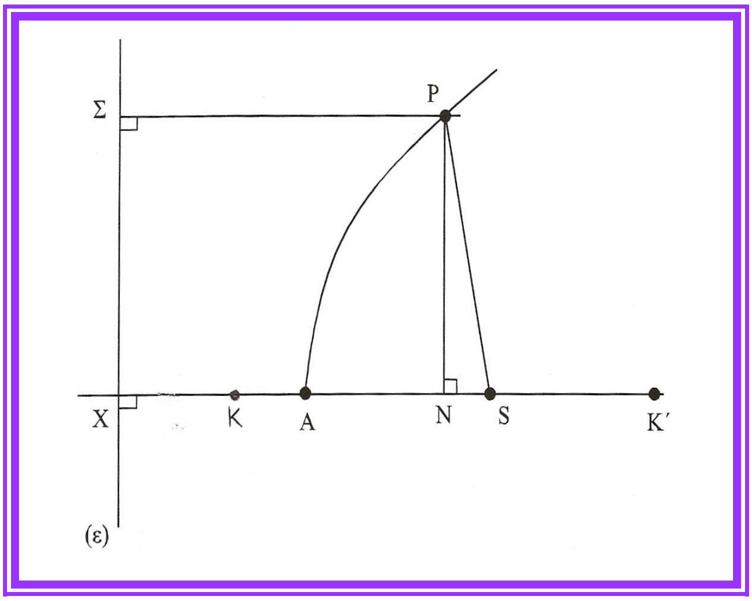
δουλειά σε σχέση με αυτήν του Ευκλείδη. Αξίζει δε να σημειωθεί πως σύμφωνα με τον Πάππο υπήρχε διαχωρισμός μεταξύ ‘επιπέδων’, ‘στερεών’, και ‘γραμμικών’ προβλημάτων. Τα ‘επίπεδα’ ήταν τα σχήματα που αντιμετωπίζονταν με τη χρήση ευθειών και περιφερειών κύκλων. Τα ‘στερεά’ (solid) σχετίζονταν με τη χρήση κωνικών τομών, όπως π.χ. το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Όσον αφορά δε στα ‘γραμμικά’, αυτά είχαν να κάνουν με άλλες καμπύλες περισσότερο σύνθετες και λιγότερο συνήθεις. Βέβαια ο Απολλώνιος στο έργο του αναφέρεται στον Ευκλείδη και όχι στον Αρισταίο, γιατί είναι πιθανόν ο Ευκλείδης να του ταίριαζε περισσότερο σε ύφος. Ωστόσο η δουλειά του Αρισταίου θεωρείται σημαντικότερη για το λόγο ότι, αφενός μεν συνέλεξε και κατέγραψε τις ιδιότητες των κωνικών τομών, αφετέρου δε ανακάλυψε καινούριες, όπως[7] ¨The focus property directrix¨. Σύμφωνα με τον Πάππο το σχετικό θεώρημα λέει πως : *Τα σημεία των οποίων οι αποστάσεις από δοθέν σημείο και από σταθερή ευθεία έχουν λόγο μικρότερο της μονάδας ανήκουν σε έλλειψη, ίσο με τη μονάδα σε παραβολή, και μεγαλύτερο της μονάδας σε υπερβολή.* Από τον ίδιο τον Πάππο δε αποδεικνύεται η περίπτωση που ο λόγος είναι διάφορος της μονάδας, ως εξής:

Θεωρούμε[8] σταθερό σημείο S, σταθερή ευθεία ε, $SX \perp ε$, και P τυχόν σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Θεωρούμε επίσης ότι $PN \perp SX$, ώστε

[7] Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. II (1981), p. 116.

[8] Ό. π., p. 120.

SP/NX δοθείς λόγος και ίσος με e. Άρα $e^2=SP^2/NX^2$, οπότε $e^2=(PN^2+SN^2)/NX^2$.



Στη συνέχεια θεωρούμε επί της SX σημείο K, τέτοιο ώστε $e^2=SN^2/NK^2$, και σημείο K΄ τέτοιο ώστε NK=NK΄.

Τότε $e^2=(PN^2+SN^2)/NX^2=SN^2/NK^2=PN^2/(NX^2-NK^2)=$

$PN^2/(NX-NK)(NX+NK)=PN^2/XK.XK΄$.

Οι θέσεις των σημείων N, K, K΄ προφανώς αλλάζουν, εφόσον εξαρτώνται από το σημείο P. Εάν A, A΄ είναι τα σημεία, τα οποία αντικαθιστούν το N όταν τα σημεία K, K΄ συμπίπτουν με το σημείο X, τότε θα ισχύει:

e/1=SN/NK=SA/AX=SN/AK=SN/NK΄=SA΄/A΄X, SX/SA=SK/SN=(1+e)/e, (1+e)/e=(SX-SK)/(SA-SN)=XK/AN.

Όμοια θα έχουμε:

(1-e)/e=XK΄/AN. Άρα

$XK.XK΄/AN.A΄N=(1-e^2)/e^2$, οπότε $1-e^2=(XK.XK΄/AN.A΄N).e^2$, δηλαδή

$1-e^2=(XK.XK'/AN.A'N).(PN^2/XK.XK')=PN^2/AN.A'N.$

Εάν e<1, τότε τα σημεία Α και Α΄ θα βρίσκονται από την ίδια πλευρά του σημείου Χ και η καμπύλη θα είναι έλλειψη. Εάν δε e>1, τότε τα μεν σημεία Α και Α΄ θα βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου Χ, το δε Ν θα βρίσκεται στην προέκταση της ΑΑ΄, και η καμπύλη θα είναι υπερβολή.

Τα βιβλία του Ευκλείδη ωστόσο αποτελούν εξαιρετική πηγή γνώσεων σχετικά με τις κωνικές τομές. Ο Αρχιμήδης δε, χρησιμοποίησε πολλές ιδιότητες από αυτά τα βιβλία, χωρίς τις αποδείξεις τους, κάνοντας αλλαγές και στην ορολογία, όπως π.χ. αντικατέστησε τον ¨άξονα¨ με τη ¨διάμετρο¨, το ¨κέντρο¨ με το ¨σημείο στο οποίο συναντώνται οι κοντινότερες γραμμές (ασύμπτωτοι) της κωνικής τομής ενός αμβλυγώνιου κώνου¨, κ.λπ.

Κάτι άλλο επίσης χαρακτηριστικό στη δουλειά του Αρχιμήδη είναι ο τετραγωνισμός τμήματος παραβολής δια της μεθόδου των μοχλών[9], καθώς και το ότι η υπερβολή δεν έχει τη γνωστή μορφή που αποτελείται από δύο καμπύλες, δηλαδή ο Αρχιμήδης θεωρεί μόνο τη μία εξ αυτών, ενώ η πλήρης μορφή με τις δύο καμπύλες σχετίζεται με τον Απολλώνιο[10]. Στον Αρχιμήδη επίσης αποδίδεται ή απόδειξη του ότι *το ορθογώνιο των αξόνων μιας έλλειψης είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της διαμέτρου ενός κύκλου που είναι*

[9] David C. Lindberg, *Οι απαρχές της Δυτικής Επιστήμης,* μτφρ. Ηλίας Μαρκολέφας, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997, σελ. 126.

[10] Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. II (1981), p. 122.

ισοδύναμος με την έλλειψη[11]. Για τον Απολλώνιο γνωρίζουμε πως γεννήθηκε στην Πέργα γύρω στο 262 π.Χ., σπούδασε στην Αλεξάνδρεια μαζί με αυτούς που διαδέχθηκαν τον Ευκλείδη, και το όνομά του αναφέρεται σαν ενός διάσημου αστρονόμου κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Φιλοπάτορα (222-205 π.Χ.). Οι κωνικές τομές του Απολλώνιου είναι το σημαντικότερο και πληρέστερο έργο που γράφηκε πάνω στο θέμα αυτό, και το οποίο απασχόλησε μεταγενέστερους συγγραφείς και σχολιαστές, όπως π.χ. τον Σερήνο, την Υπατία[12], και τον Ευτόκιο, ο οποίος μάλιστα επανεξέδωσε τα 4 πρώτα βιβλία του και τα σχολίασε ταυτόχρονα. Στην Ελλάδα δε, διασώθηκαν μόνο αυτά τα 4 βιβλία. Το 5^{ο}, το 6^{ο}, και το 7^{ο} γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αλλά είναι γραμμένα σε Αραβική διάλεκτο, και το 8^{ο} βιβλίο έχει χαθεί. Βέβαια η επιρροή του έργου του Απολλώνιου δεν περιορίζεται στους προαναφερθέντες συγγραφείς, ούτε σταματά κατά την εποχή εκείνη, αφού και σε μεταγενέστερα έργα, όπως π.χ. στο έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη αναφέρονται εκτενώς όλα τα περί των κωνικών τομών, και υπάρχει επιπλέον καταγεγραμμένη η μαρτυρία του ίδιου του Θεοτόκη στις υποσημειώσεις αρκετών σελίδων, σχετικά με το γεγονός ότι αυτά που γράφει προέρχονται από το έργο του Απολλώνιου[13].

---

[11] Ε. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* τόμ. Α, σελ. 263. Βλ. και σε: Ήρωνος Αλεξανδρέως, *Μετρικά- Διόπτρα,* επιμέλεια Χ. Κ. Κηπουρού, εκδ. Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000, σελ. 75.

[12] Η Υπατία σχολίασε το έργο του Απολλώνιου. Βλ. Maria Dzielska, *Υπατία η Αλεξανδρινή,* μτφρ. Γ. Κουσουνέλου, εκδ. Ενάλιος, Αθήνα 1997, σελ. 136.

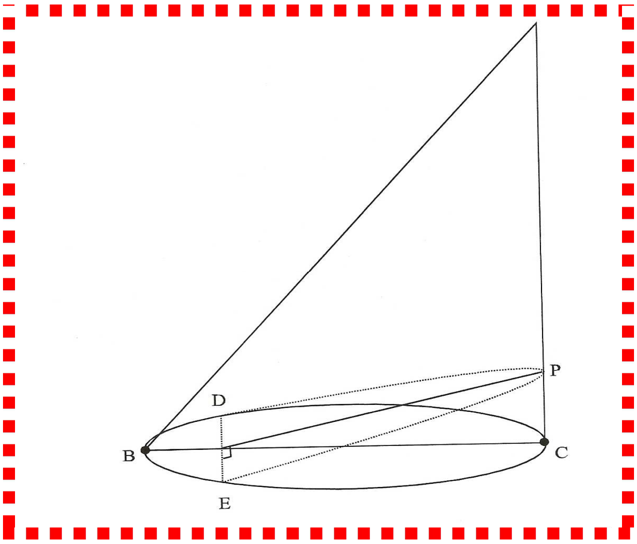
[13] Θεοτόκη Νικηφόρου, *Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεοτέρων,* εν τω της Κοινότητος Τυπογραφείω παρά Ρηδηγέρω και Κλαυδίω, Μόσχα 1798-99, τόμ. ΙΙΙ, σελ. 78- 246. Μετά το τέλος της θεωρίας και σε ξεχωριστές

Η σπουδαιότερη έκδοση έχει γίνει από τον Commandinus στη Μπολόνια κατά το 1566, και περιλαμβάνει μεταξύ των άλλων τα λήμματα του Πάππου, τα σχόλια του Ευτόκιου μαζί με αρκετές επεξηγήσεις οι οποίες καθιστούν το βιβλίο εύκολα καταληπτό. Οι πρόλογοι στα βιβλία του Απολλώνιου είναι αξιοπρόσεκτοι επειδή περιέχουν ιστορικής αξίας λεπτομέρειες που δείχνουν με σαφήνεια σε τι ακριβώς διαφέρει το έργο του από τα αντίστοιχα των προκατόχων του, και συντελούν στη διαμόρφωση της άποψης πως πρόκειται για αυθεντική δουλειά του Απολλώνιου, η οποία είναι πρωτότυπη. Έτσι η γνώμη του Πάππου, σύμφωνα με την οποία ο Απολλώνιος είναι ¨κομπορρήμων¨ και ¨αναξιόπιστος¨, πέφτουν μάλλον στο κενό. Στον πρόλογο π.χ. του 6ου βιβλίου, όπως γράφει σε επιστολή του προς τον Άτταλο, αναφέρει πως κατασκευάζει δοθείσα κωνική σε ορθογώνιο δοθέντα κώνο, και επιπλέον πως ένας ορθογώνιος κώνος μπορεί να θεωρηθεί όμοιος με δοθέντα κώνο αλλά τέτοιο ώστε να περιέχει δεδομένη κωνική τομή. Από την ίδια επιστολή μαθαίνουμε, ότι στον πρόλογο του βιβλίου VII γράφεται πως στο βιβλίο περιέχονται καινούριες προτάσεις σχετικές με τις διαμέτρους των κωνικών τομών καθώς και εφαρμογές τους σε προβλήματα. Είναι σαφές, ότι γι' αυτό το μεγάλο έργο ο Απολλώνιος δεν διεκδικεί την πρωτοτυπία όλου του περιεχομένου, εκτός από ειδικές προτάσεις, όπως π.χ. τις σχετικές προτάσεις με τις τομές παραβολής, έλλειψης και κύκλου με τα δύο σκέλη της υπερβολής, καθώς και αυτές που αφορούν στις τομές δύο υπερβολών με δύο σκέλη η κάθε μία.

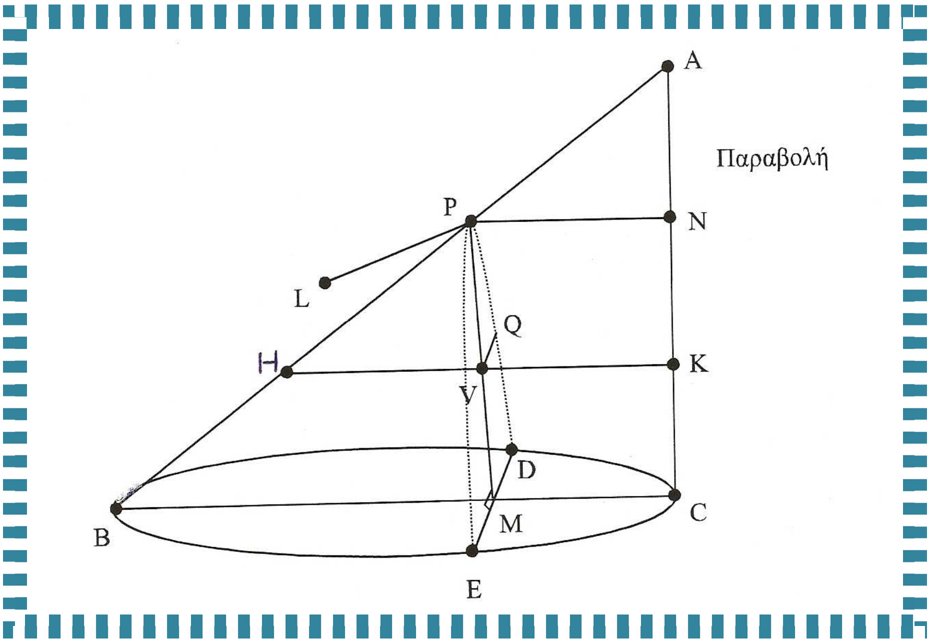
Μία άλλη επίσης καινοτομία του Απολλώνιου είναι ότι εργάζεται με τις normals θεωρώντας τες σαν maxima και minima χωρίς να αναφέρεται σε

σελίδες, ο Νικηφόρος Θεοτόκης παραθέτει όλα μαζί τα σχήματα που αφορούν στη θεωρία.

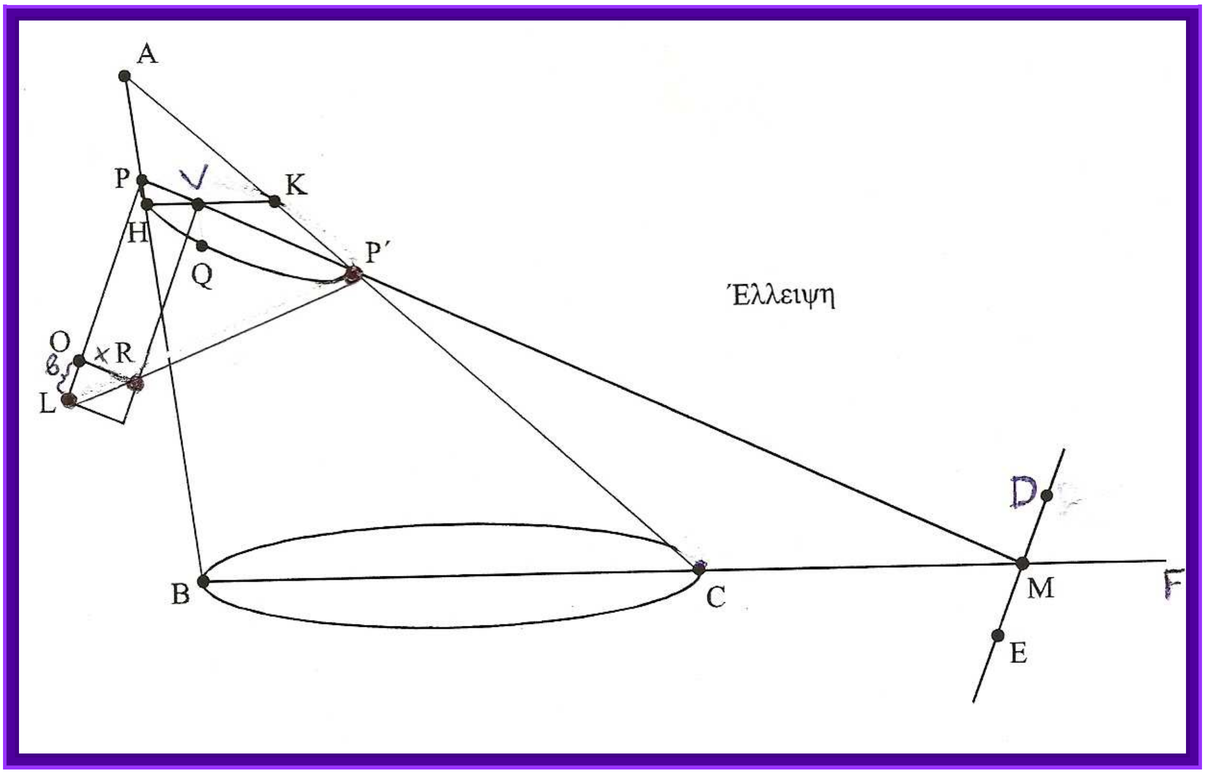
εφαπτόμενες, όπως συνέβαινε στο βιβλίο V. Κατά τα άλλα ο ίδιος ο Απολλώνιος πίστευε πως τελικά αντιμετώπισε το όλο θέμα των κωνικών τομών πιο γενικευμένα και πληρέστερα από τους προκατόχους του. Οι κωνικές τομές επιπλέον, στο έργο του προκύπτουν από τυχαίο πλάγιο κώνο όπου κατ' αρχήν αποδεικνύει ότι αν η τομή γίνει παράλληλη με τη βάση, προκύπτει κύκλος. Στη συνέχεια θεωρεί τρίγωνο με βάση μια διάμετρο κύκλου και πλευρές δύο άξονες του πλαγίου κώνου. Επιδιώκει να κατασκευάσει την κωνική τομή έτσι ώστε να τέμνει τη βάση του κώνου κάθετα με την προαναφερθείσα διάμετρο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

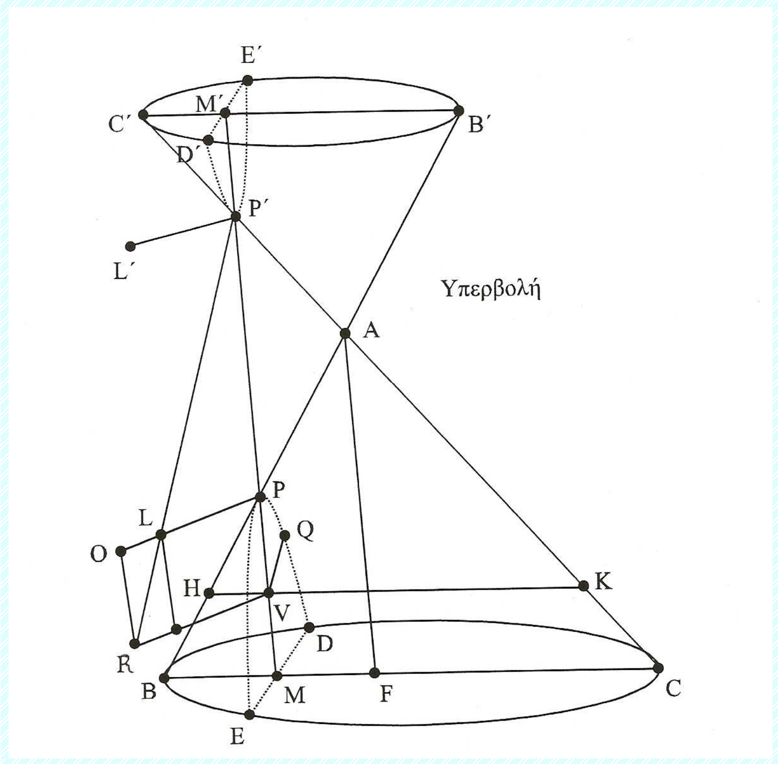


Χάριν της ιστορίας αξίζει να πούμε πως σ' αυτό το χρονικό σημείο αρχίζουν να χρησιμοποιούνται οι όροι ¨παραβολή¨, ¨υπερβολή¨ και ¨έλλειψη¨, οπότε κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν αναλυτικά όλες οι περιπτώσεις κατασκευών στις οποίες εκφράζονται οι ιδιότητες των κωνικών τομών μέσω του ευθυγράμμου τμήματος PL του καθέτου προς την PM και προς το επίπεδο EPD της κωνικής τομής.



V εστία, Q: VQ//ED, N: PN//HK (PN⊥AC).





Το PL στην περίπτωση της παραβολής λαμβάνεται τέτοιο ώστε $PL/PA=BC^2/BA.AC$, ενώ στην περίπτωση της έλλειψης και της υπερβολής: $PL/PP΄=BF.FC/AF^2$, όπου ενώνονται τα P΄, L, στη συνέχεια φέρεται η VR//PL, η οποία θα τμήσει την P΄L ή την προέκτασή της στο R. Έστω τώρα ότι η HK διέρχεται από το V με HK//BC και συναντά τα ευθύγραμμα τμήματα AB, και AC στα H και K αντίστοιχα. Το HK είναι διάμετρος της κυκλικής τομής του κώνου με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του. Οπότε επειδή το τρίγωνο HQK είναι ορθογώνιο με γωνία Q ίση με μία ορθή, προκύπτει ότι $QV^2=HV.VK$, και επειδή τα τρίγωνα HVP, BCA είναι όμοια, τότε θα έχουμε για την παραβολή:

HV/PV= BC/CA (1). Από τα όμοια τρίγωνα PNA, BCA προκύπτει ότι:

PN/PA= BC/BA, άρα VK/PA=BC/BA (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

HV.VK/PV.PA= BC^2/CA.BA, άρα PV.PA= HV.VK.CA.BA/BC^2, άρα QV^2/PV.PA= HV.VK.BC^2/HV.VK.CA.BA= BC^2/CA.BA= PL/PA (από υπόθεση)= PL.PV/PA.PV, οπότε QV^2= PL.PV.

Για την υπερβολή και την έλλειψη δε προκύπτουν τα κάτωθι: Επειδή τα τρίγωνα HVP, BFA είναι όμοια τότε θα ισχύει: HV/PV= BF/FA.Ομοίως από τα όμοια τρίγωνα P΄VK, FCA θα έχουμε ότι VK/P΄V= FC/AF, οπότε QV^2/PV.P΄V. Και επειδή QV^2= HV.VK, τότε QV^2/PV.P΄V= HV.VK/PV.P΄V=BF.FC/AF^2=PL/PP΄. Επειδή όμως τα τρίγωνα PLP΄, RVP΄ είναι όμοια, τότε PL/PP΄=RV/P΄V=PV.VR/PV.P΄V, άρα QV^2= PV.VR.

Στην περίπτωση της παραβολής λοιπόν, το εμβαδόν QV^2 είναι ίσο με το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές PL και PV. Όσον αφορά στην υπερβολή, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές PL, PV χρειάζεται να ενωθεί με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαγώνιο LR για να έχουμε εμβαδόν ίσο με το QV^2. Στην περίπτωση της έλλειψης πρέπει από το παραλληλόγραμμο με πλευρές PV, PL να αφαιρέσουμε το παραλληλόγραμμο με διαγώνιο την LR, προκειμένου το τελικό εμβαδόν να ισούται με QV^2.

Φαίνεται λοιπόν ότι λόγω κατασκευής προέκυψαν οι ονομασίες των κωνικών τομών, οι οποίες διατηρούνται μέχρι σήμερα. Αν δε συμβολίσουμε με p την παράμετρο (p= PL), και με d (d= PP΄) την αντίστοιχη διάμετρο, τότε θα ισχύει:

y^2= px (QV^2= PL.PV) (παραβολή)

y^2= px±(p/d)x^2 (υπερβολή και έλλειψη αντίστοιχα)

Και τούτο διότι για την έλλειψη π.χ. θα έχουμε:

QV^2= PV.VR= PV.PL- (LR).

Επειδή όμως τα τρίγωνα OLR, PLP΄ είναι όμοια, τότε b/x= p/d, όπου x=LO. Άρα $(b/x).x^2=(p/d)x^2$. Συνεπώς $b.x= (p/d)x^2$.Άρα $(LR)= (p/d)x^2$.

Έτσι λοιπόν γίνεται ολοφάνερη πλέον η προέλευση των γνωστών εξισώσεων των κωνικών τομών[14].

Μελετώντας το έργο του Απολλώνιου εκτιμούμε πως παρουσιάζει ενδιαφέρον το κομμάτι του βιβλίου IV όπου παρουσιάζονται θεωρήματα όπως:

- Δεν μπορεί να συμβεί δύο κωνικές τομές να έχουν κοινά κάποια τμήματα και κάποια άλλα μη κοινά.
- Δύο κωνικές που στρέφουν τα κοίλα σε αντίθετες διευθύνσεις δεν μπορεί να έχουν περισσότερα από 2 κοινά σημεία.
- Εάν μία κωνική έχει κοινό σημείο με το ένα σκέλος μιας υπερβολής, δεν μπορεί να έχει με το άλλο σκέλος περισσότερα από 2 κοινά σημεία.
- Μια παραβολή δεν μπορεί να τέμνει μια άλλη παραβολή σε περισσότερα από 1 κοινά σημεία.

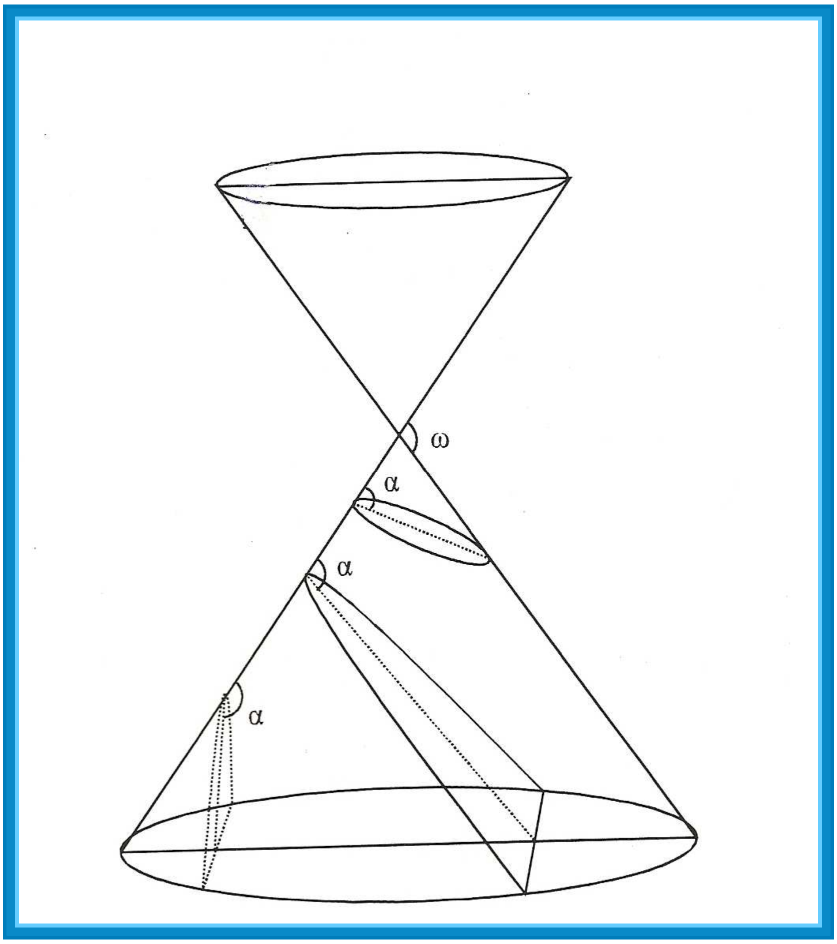
Πολλές υποθέσεις έχουν γίνει τέλος για το περιεχόμενο του βιβλίου VIII, το οποίο όπως έχει ήδη αναφερθεί θεωρείται χαμένο. Η επικρατέστερη άποψη φαίνεται να είναι πως αφορούσε στις συζυγείς διαμέτρους και τα προβλήματα κατασκευών αυτών εάν ήταν γνωστά τα μήκη τους.

---

14 Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. II (1981), p. 139.

Το έργο του Απολλώνιου αν και πληρέστατο στο είδος του δεν είναι ευκολοδιάβαστο και τούτο οφείλεται στο ύφος του συγγραφέα, το οποίο παρομοιάζεται με αυτό του Ευκλείδη. Τα βιβλία του περιέχουν πολυσύνθετες προτάσεις, δυσκολονόητες, χωρίς επαρκείς επεξηγήσεις, με αποτέλεσμα να μην έχουν ασχοληθεί με αυτό πολλοί επιστήμονες και κατά συνέπεια να μην έχει γίνει γνωστό όπως θα του άρμοζε. Ένας άλλος επιστήμων της αρχαιότητας που ασχολήθηκε με τις κωνικές τομές ήταν ο Διοκλής, ο οποίος είχε ελληνική καταγωγή. Ο προαναφερθείς απέδειξε πως εάν η επιφάνεια των κατόπτρων που χρησιμοποιούνται για την καύση αντικειμένων έχει το σχήμα της παραβολής, τότε παρατηρείται η μεγαλύτερη δύναμη και απόδοση στην καύση. Φαίνεται μάλιστα πως το συγκεκριμένο πρόβλημα υπήρξε ιδιαίτερα δημοφιλές κατά την αρχαιότητα, καθώς και ο Αρχιμήδης σχετίζεται με αυτό και μάλιστα έχει μείνει στην Ιστορία με αμφιβολίες βέβαια ως προς την πραγματοποίηση, το γεγονός της καταστροφής του Ρωμαϊκού στόλου με τη χρήση παραβολικών κατόπτρων. Ακόμη ο αρχιτέκτων Ανθέμιος απέδειξε πως υπάρχει τρόπος ώστε μία ηλιακή ακτίνα που διέρχεται από κάποιο μικρό άνοιγμα, να πέφτει σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο οποιαδήποτε ώρα και εποχή. Ο Ανθέμιος χρησιμοποίησε γι’ αυτό έναν ελλειπτικό καθρέπτη, όπου από τη μία εστία διερχόταν η ακτίνα και από την άλλη η ανακλώμενη αυτής της ακτίνας ως ανωτέρω. Η δε σχετική κατασκευή αποτελεί την πρώτη αναφορά σε κατασκευή έλλειψης με τη χρήση τεντωμένου νήματος. Την ανακάλυψη αυτή του Ανθέμιου μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε στις κατασκευές θερμοκηπίων, ή όπου αλλού χρειαζόμαστε το ηλιακό φως σε συνεχή βάση ανεξάρτητα από την ώρα και την εποχή.

ΟΡΙΣΜΟΙ



Οι κωνικές τομές[15] προκύπτουν από την τομή κώνου και επιπέδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Η καμπύλη θα λέγεται έλλειψη αν γων α<γων ω, παραβολή αν γων α= γων ω, και υπερβολή αν γων α>γων ω, όπου ω είναι η εξωτερική γωνία του κώνου. Στην ειδική δε περίπτωση που γων α= γων ω/2 η έλλειψη γίνεται κύκλος. Επειδή ο κώνος θεωρείται δίχωνος, αν γων α>γων ω, τότε το επίπεδο θα τέμνει και τους δύο κώνους, δηλαδή η υπερβολή θα έχει δύο

[15] D. Kletenik, *Problems in Analytic Geometry,* translated by O. Soroka, Mir Publishers, Moscow 1969, p. 83.

σκέλη. Καταλληλότερους όμως ορισμούς θα έχουμε αν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες που ακολουθούν[16]:

Έλλειψη ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία η απόλυτη τιμή του αθροίσματος των αποστάσεων από 2 δοθέντα σημεία -του ιδίου επιπέδου με αυτό των προαναφερθέντων σημείων- είναι σταθερή.

Υπερβολή ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από 2 δοθέντα σημεία -του ιδίου επιπέδου με αυτό των προαναφερθέντων σημείων- είναι σταθερή.

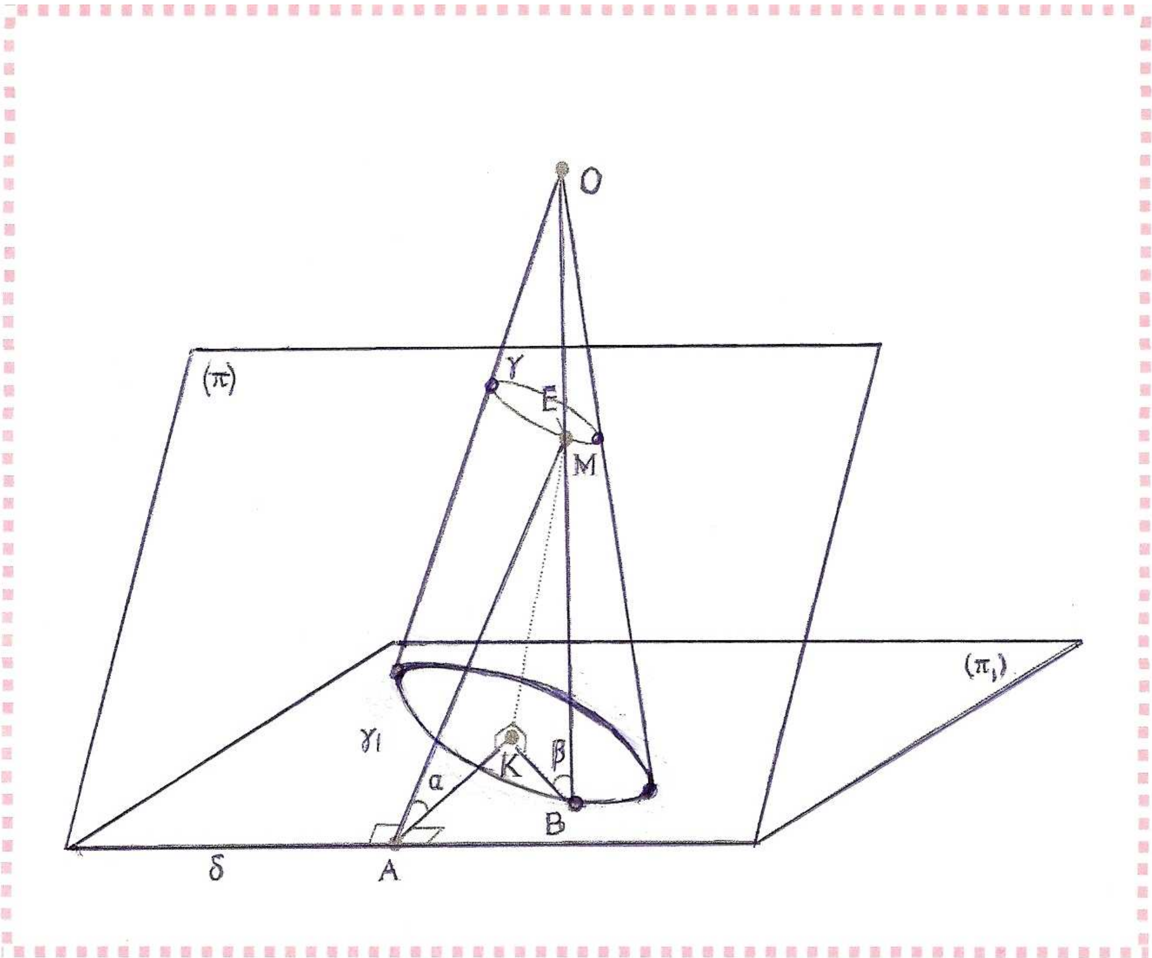
Παραβολή ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν το ίδιο από δοθέν σημείο και δοθείσα ευθεία αυτού. Το συγκεκριμένο σημείο καλείται ¨εστία¨[17] και η συγκεκριμένη ευθεία ¨διευθετούσα¨.

---

[16] Μ. Μπρίκα, *Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήναι [3]1961, σελ. 120.

[17] Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμη η αναφορά στον όρο ¨εστία¨, ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως στις κωνικές τομές. Η Εστία υπήρξε κατά τη μυθολογία θεά της Οικογένειας και ήταν κόρη του Κρόνου και της Ρέας, δηλαδή αδελφή του Δία. Λόγω της αγνότητάς της ο Δίας της έδωσε το προνόμιο να κατέχει τη σπουδαιότερη θέση στην οικογένεια, η οποία ήταν στο κέντρο της οικίας, και να τιμάται στους ναούς όλων των θεών. Η αγνότητά της συνδυάστηκε με το πυρ που εξαγνίζει τα πάντα, και κατά συνέπεια η Εστία εθεωρείτο θεά του οικογενειακού πυρός η διατήρηση του οποίου ήταν καθήκον κάθε οικογένειας. Κοινή Εστία στην Αρχαία Ελλάδα ήταν ο βωμός της Εστίας στους Δελφούς. Ο όρος λοιπόν ¨εστία¨ σχετίζεται με την οπτική ιδιότητα των κωνικών τομών, όπως θα φανεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Μεγάλη Αμερικάνικη Εγκυκλοπαίδεια, εκδ. Σ. Δημητρακόπουλου, Ε. Ε. Ε., Αθήναι 1976, τόμ. ΙΧ, σελ. 652.

Συμπληρώνοντας τους ορισμούς των κωνικών τομών θα αναφέρουμε τον τρίτο ορισμό ο οποίος σχετίζεται με την εκκεντρότητα. Θα δειχθεί ότι ο λόγος των αποστάσεων τυχαίου σημείου μιας κωνικής τομής από σταθερό σημείο και σταθερή ευθεία είναι σταθερός, συμβολίζεται με e και ονομάζεται ¨εκκεντρότητα¨.



Προς τούτο[18] θα συμβολίσουμε με γ την κωνική τομή που προκύπτει αν ο κώνος του πιο πάνω σχήματος τέμνεται από το επίπεδο (π). Στο εσωτερικό του κώνου εγγράφουμε σφαίρα η οποία εφάπτεται του (π) στο σημείο Ε και του

[18] Α. Χρυσάκη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία,* Αθήνα 1992.

κώνου κατά μήκος της γ_1. Έστω δ= (π)∩(π_1), όπου (π_1) είναι το επίπεδο του κύκλου γ_1. Τότε η καμπύλη γ θα έχει την εξής ιδιότητα:

¨Η καμπύλη γ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου της, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο Ε και την ευθεία δ είναι σταθερός.¨

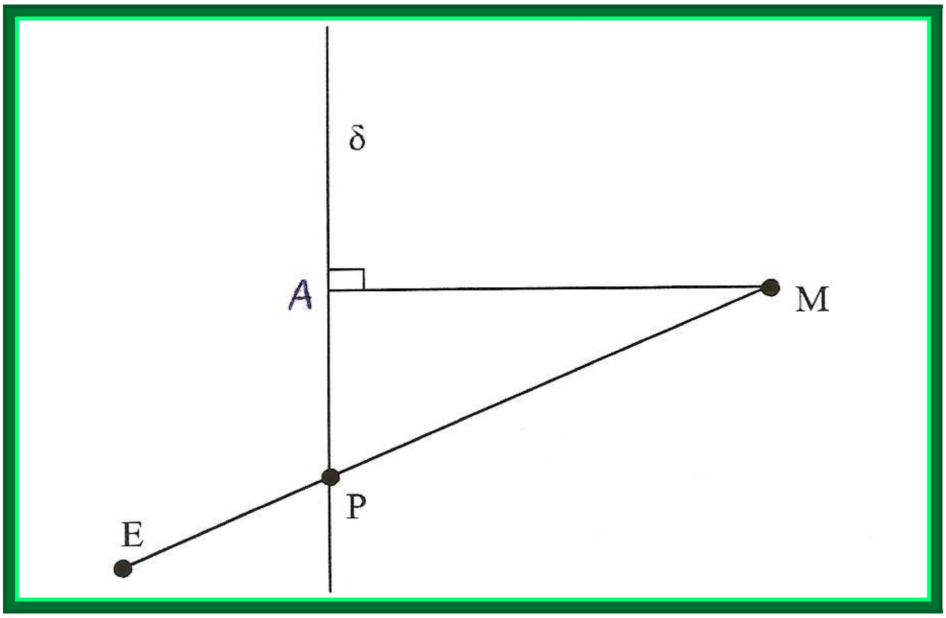
Πράγματι, αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο Μ της γ και Β= γ_1∩ΟΜ, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ θα είναι ισα, ως εφαπτόμενα της εγγεγραμμένης σφαίρας από τυχόν σημείο Μ. Έστω ΜΑ⊥δ, και ΜΚ⊥(π_1). Θεωρούμε ακόμα γων ΚΑΜ= α, και γων ΚΒΜ= β (γωνία της γενέτειρας με το (π_1)). Άρα ΜΚ= ΜΑ.ημα, και ΜΚ= ΜΒ.ημβ, άρα ΜΒ/ΜΑ= ημα/ημβ. Επειδή ΜΕ= ΜΒ, τότε ΜΕ/ΜΑ= ημα/ημβ≡e = σταθερά.

Αντίστροφα, κάθε καμπύλη που ικανοποιεί την πιο πάνω ιδιότητα είναι κωνική τομή.

Ο σταθερός λόγος e των αποστάσεων του τυχόντος σημείου Μ της κωνικής τομής από την εστία Ε και τη διευθετούσα δ λέγεται ¨εκκεντρότητα¨ της κωνικής τομής. Επιπλέον, αν e<1, e= 1, e>1, τότε η κωνική τομή θα ονομάζεται αντίστοιχα έλλειψη, παραβολή και υπερβολή.

Η έλλειψη δε και η παραβολή έχουν όλα τα σημεία τους στο ημιεπίπεδο της διευθετούσας όπου ανήκει και η εστία τους.

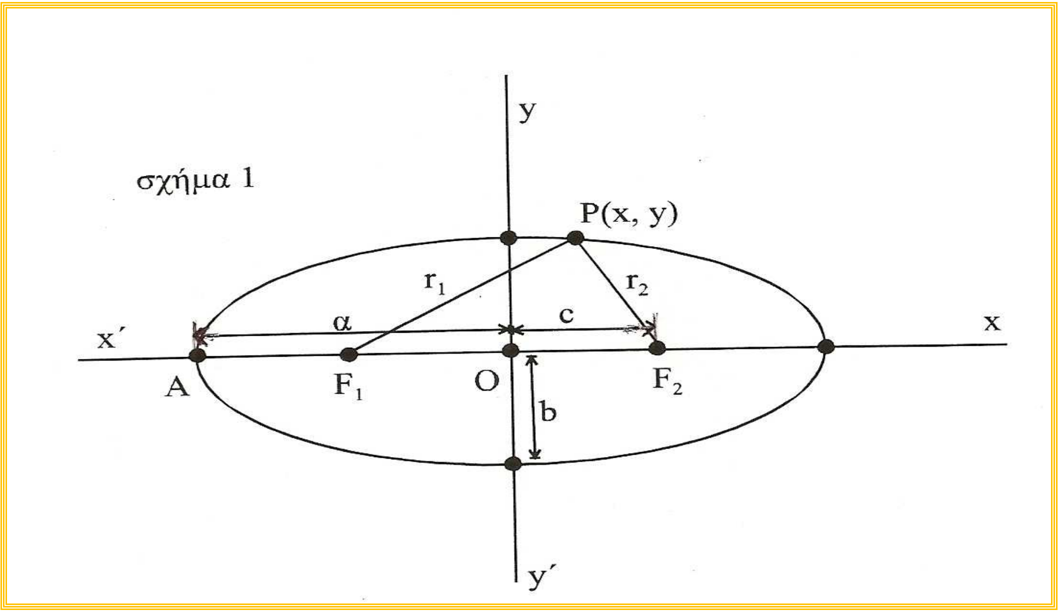
Πράγματι αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο Μ του άλλου ημιεπιπέδου με ΜΑ⊥δ, και Ρ= δ∩ΜΕ, τότε e= ΜΕ/ΜΑ>ΜΡ/ΜΑ≥1, το οποίο είναι άτοπο, διότι στην έλλειψη ισχύει η σχέση e<1, και στην παραβολή e= 1.



Τα σημεία της υπερβολής όμως βρίσκονται και στα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την ευθεία δ. Η υπερβολή έχει δύο κλάδους οι οποίοι χωρίζονται από τη διευθετούσα.

Οι αντίστοιχες εξισώσεις των κωνικών τομών είναι:

Για την έλλειψη: $x^2/\alpha^2+y^2/b^2=1$, όπου a, b είναι ο μέγιστος και ο ελάχιστος ημιάξονας αντίστοιχα, και $b^2= \alpha^2-c^2$, όπου c είναι η ημιαπόσταση των εστιών. Επιπλέον $2\alpha=r_1+r_2$, όπου r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις τυχόντος σημείου P(x,y) από τις δύο εστίες (σχ. 1).



Διότι: $PF_1+PF_2= 2α \Leftrightarrow \sqrt{}[(x+c)^2+y^2]+ \sqrt{}[(x-c)^2+y^2]= 2α \Leftrightarrow$

$x^2+2cx+c^2+y^2= 4α-4α\sqrt{}[(x-c)^2+y^2+x^2-2cx+c^2+y^2] \Leftrightarrow$

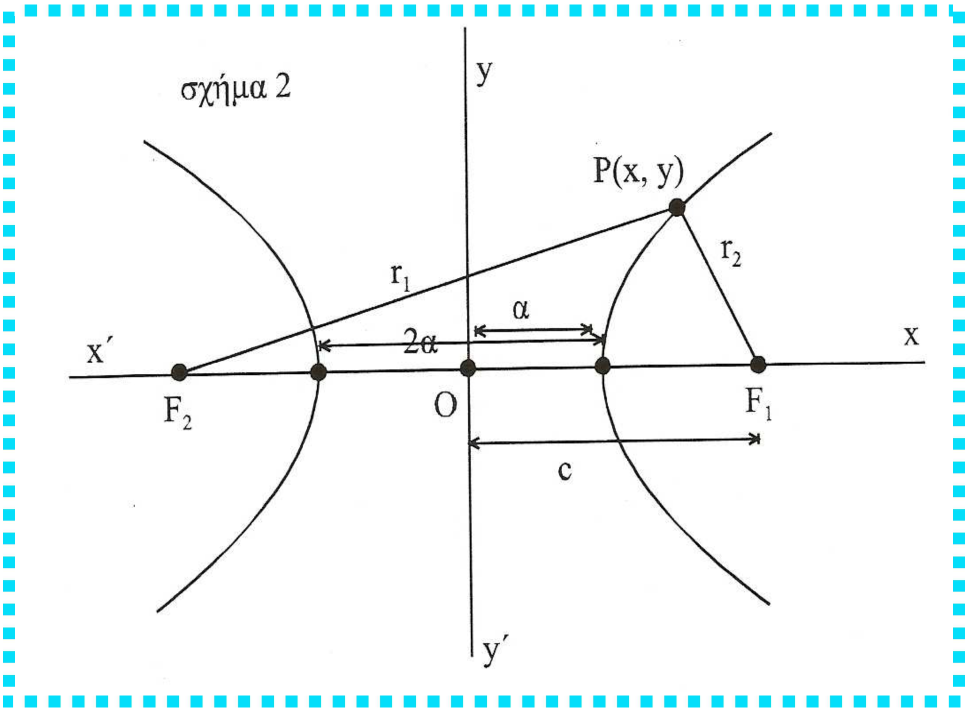
$\sqrt{}[(x-c)^2+y^2]= α-cx/α \Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2= α^2+c^2x^2/α^2-2cx \Leftrightarrow$

$x^2(1-c^2/α^2)+y^2= α^2-c^2 \Leftrightarrow x^2(α^2-c^2)/α^2+y^2= α^2-c^2 \Leftrightarrow$

$x^2/α^2+y^2/(α^2-c^2)= 1 \Leftrightarrow$

$x^2/α^2+ y^2/b^2= 1.$

Για την υπερβολή: $x^2/α^2-y^2/b^2= 1$, με $2α= r_1-r_2$, $b^2= c^2-α^2$, r_1, r_2 οι αποστάσεις τυχόντος σημείου της υπερβολής από τις εστίες, και c η ημιαπόσταση των εστιών (σχ. 2).



σχήμα 2

Διότι: $\left|PF_1 - PF_2\right| = 2\alpha \Leftrightarrow \left|\sqrt{[(x+c)^2+y^2]} - \sqrt{[(x-c)^2+y^2]}\right| = 2\alpha \Leftrightarrow$

$\sqrt{[(x+c)^2+y^2]}.\sqrt{[(x-c)^2+y^2]} = x^2 - 2\alpha^2 + c^2 + y^2 \Leftrightarrow$

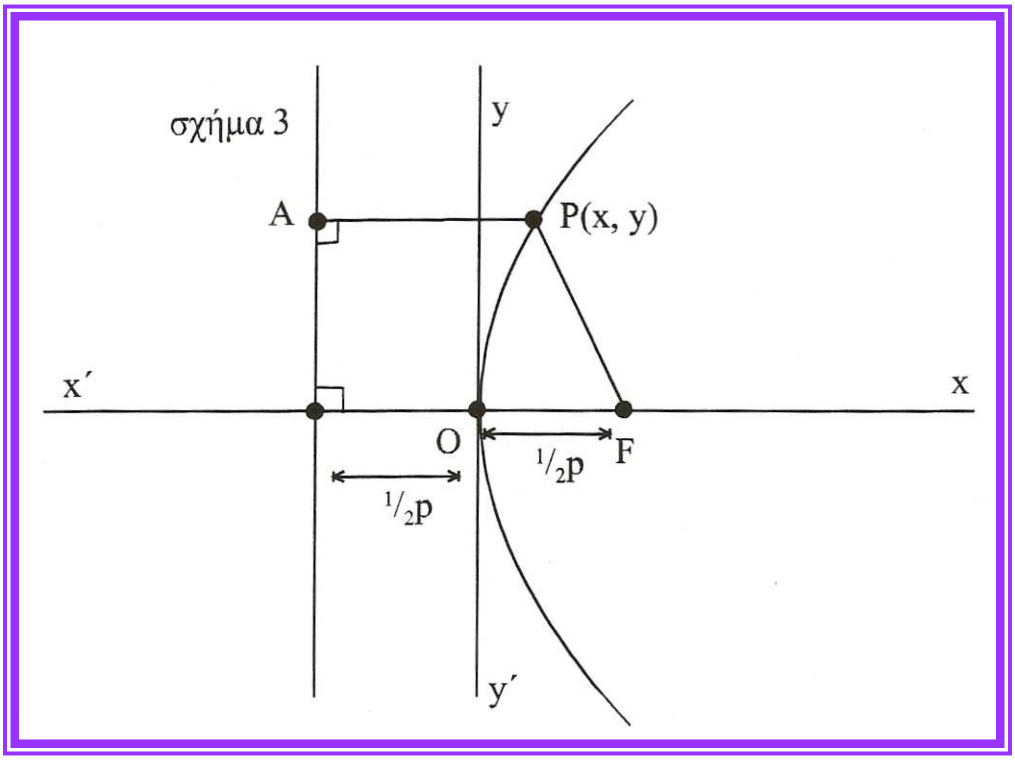
$(x^2+2cx+c^2+y^2).(x^2-2cx+c^2+y^2) = (x^2-2\alpha^2+c^2+y^2)^2 \Leftrightarrow$

$(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2=(x^2+c^2+y^2)^2+4\alpha^4-4\alpha^2(x^2+c^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^2(\alpha^2-c^2)^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-c^2) \Leftrightarrow x^2/\alpha^2+y^2/(\alpha^2-c^2)=1 \Leftrightarrow x^2/\alpha^2-y^2/b^2=1$

Για την παραβολή: $y^2=2px$, όπου με p συμβολίζεται η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα (σχ. 3).

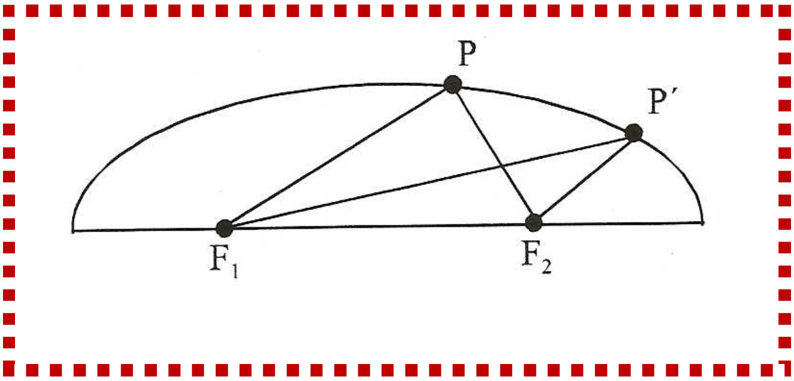
Διότι: $PF=PA \Leftrightarrow \left|x+p/2\right| = \sqrt{[(x-p/2)^2+y^2]} \Leftrightarrow (x+p/2)^2=(x-p/2)^2+y^2 \Leftrightarrow y^2=2px.$



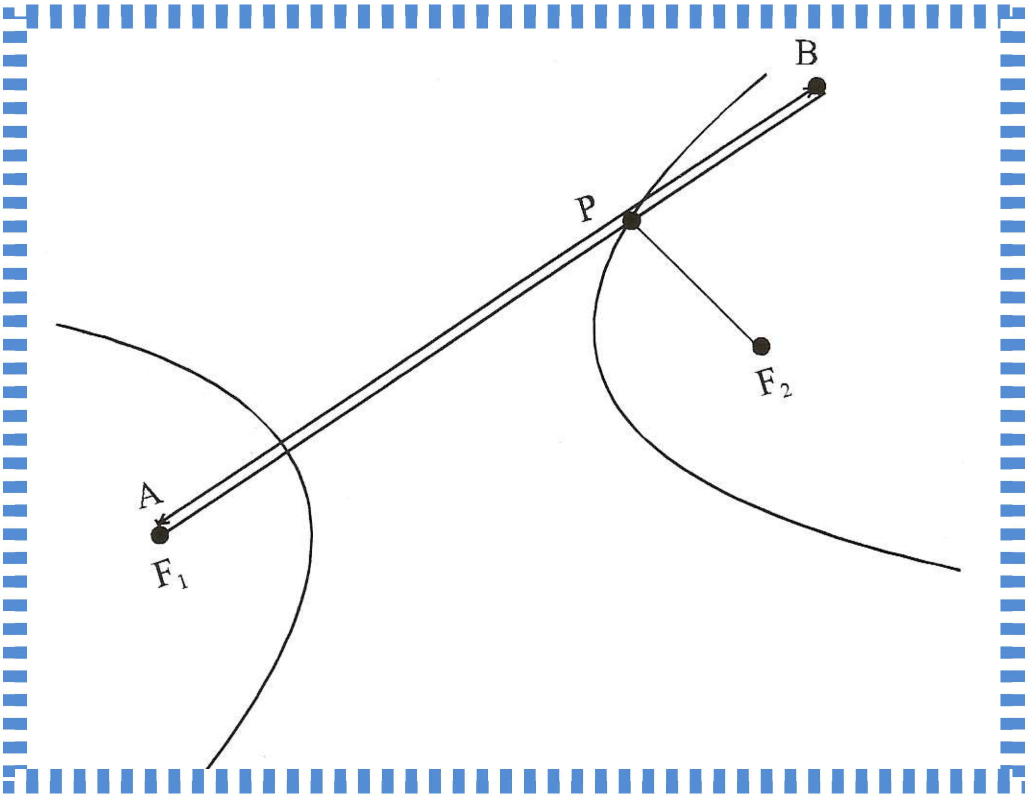
ΧΑΡΑΞΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΚΙΝΗΣΗ

Οι τρόποι χάραξης των κωνικών τομών προκύπτουν από τις προηγούμενες ιδιότητες. Τα δοθέντα στοιχεία θα είναι οι δύο εστίες, το μέγεθος α όταν πρόκειται για έλλειψη ή υπερβολή, ή η εστία και η διευθετούσα όταν πρόκειται για παραβολή. Η διαδικασία είναι η εξής:

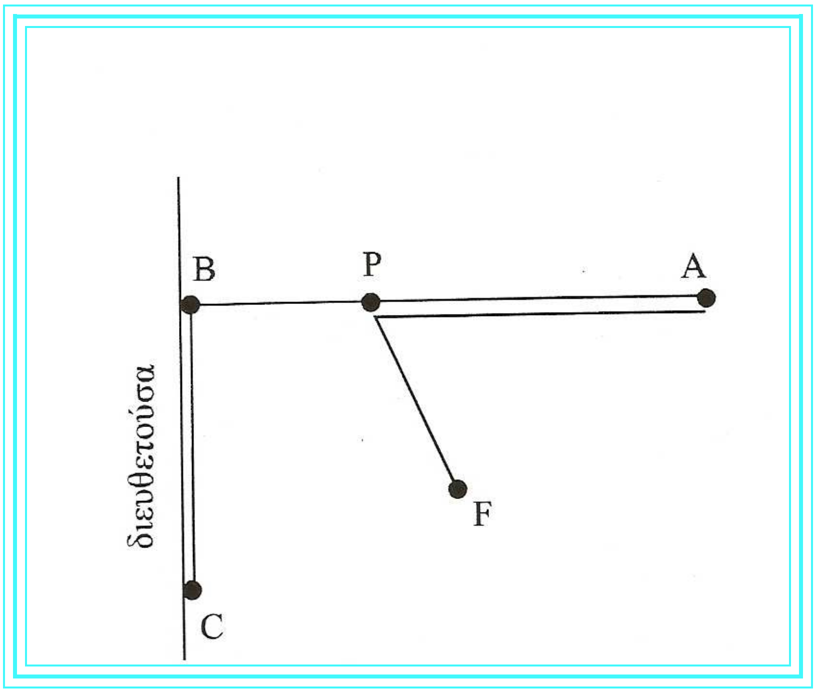
Για την έλλειψη: Λαμβάνουμε νήμα μήκους ίσου προς 2α και στερεώνουμε τα άκρα του σε σημεία F_1 και F_2, με τα οποία συμβολίζονται οι δύο εστίες της έλλειψης. Με τη μύτη μολυβιού P γράφουμε την καμπύλη, διατηρώντας το νήμα συνεχώς τεντωμένο. Αυτή η καμπύλη θα είναι έλλειψη επειδή για δύο διαφορετικά σημεία της P, P΄ θα έχουμε: $F_1.P+F_2.P= F_1.P΄+F_2.P΄= 2α$



Για την υπερβολή: Λαμβάνουμε χάρακα μήκους m. Στερεώνουμε το ένα άκρο του A στο F_1, έτσι ώστε ο χάρακας να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από αυτό το σημείο. Στερεώνουμε το ένα άκρο νήματος μήκους m- 2α στο άλλο άκρο B του χάρακα, και το δεύτερο άκρο του νήματος το στερεώνουμε στην εστία F_2. Με τη μύτη μολυβιού P κρατάμε το νήμα τεντωμένο, και στρέφουμε το χάρακα γύρω από το F_1. Τότε η καμπύλη που διαγράφει το P είναι υπερβολή γιατί $F_1.P- F_2.P=F_1.P+PB- PB- F_2.P= F_1.P+PB- (PB+F_2.P)= m- (m- 2α)= 2α$.

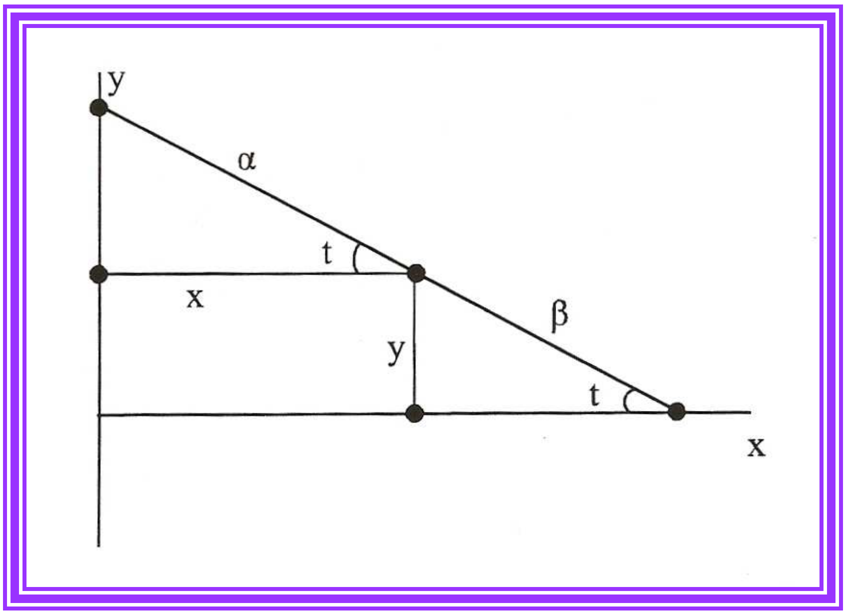


Για την παραβολή: Λαμβάνουμε κανόνα που σχηματίζει ορθή γωνία με πλευρές AB, BC, και νήμα μήκους AB. Στερεώνουμε το ένα άκρο του νήματος στο A και το άλλο άκρο στην εστία F. Τοποθετούμε την πλευρά BC του κανόνα έτσι ώστε να εφάπτεται με τη διευθετούσα και να κινείται κατά μήκος αυτής. Με τη βοήθεια της μύτης P ενός μολυβιού κρατάμε συνεχώς τεντωμένο το νήμα κατά μήκος της AB. Τότε κατά την κίνηση του κανόνα η μύτη P θα γράφει παραβολή επειδή ισχύει: BP=BA- PA= PF.



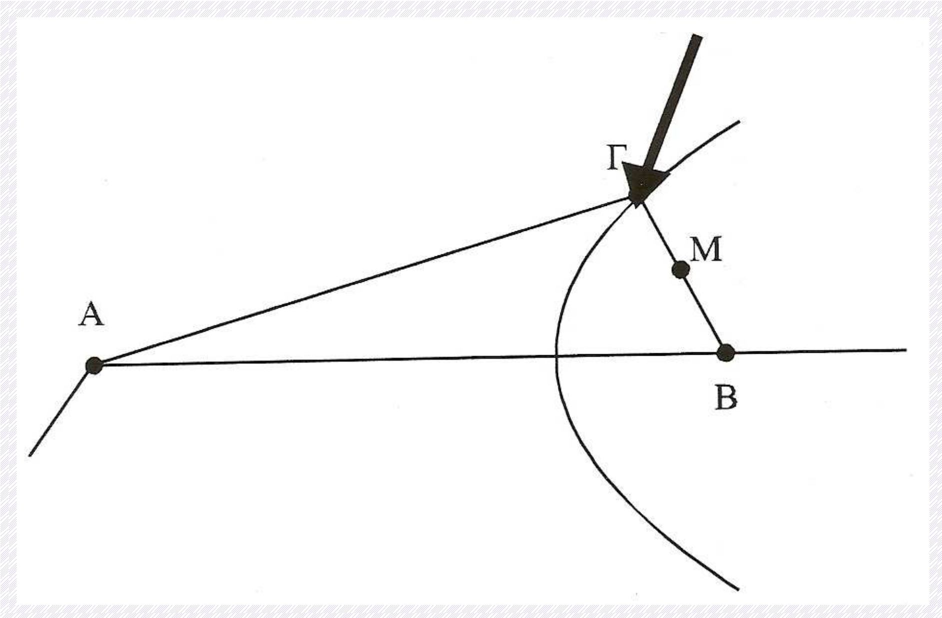
<u>ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Για την έλλειψη: Λαμβάνουμε μία ράβδο και ορίζουμε πάνω σ' αυτή σημείο M τέτοιο ώστε να απέχει από το ένα άκρο της ράβδου απόσταση ίση με α και από το άλλο απόσταση ίση με β. Θεωρούμε δύο ευθείες αμετακίνητες και μεταξύ τους κάθετες. Αν η ράβδος κινείται με τα άκρα της πάνω στις κάθετες ευθείες, τότε το σημείο M διαγράφει έλλειψη.



Πράγματι, ισχύει ότι: x= ασυνt⇒x/α= συνt, και y= βημt⇒y/β= ημt. Οπότε $x^2/α^2+y^2/β^2$= $συν^2t+ημ^2t$= 1.

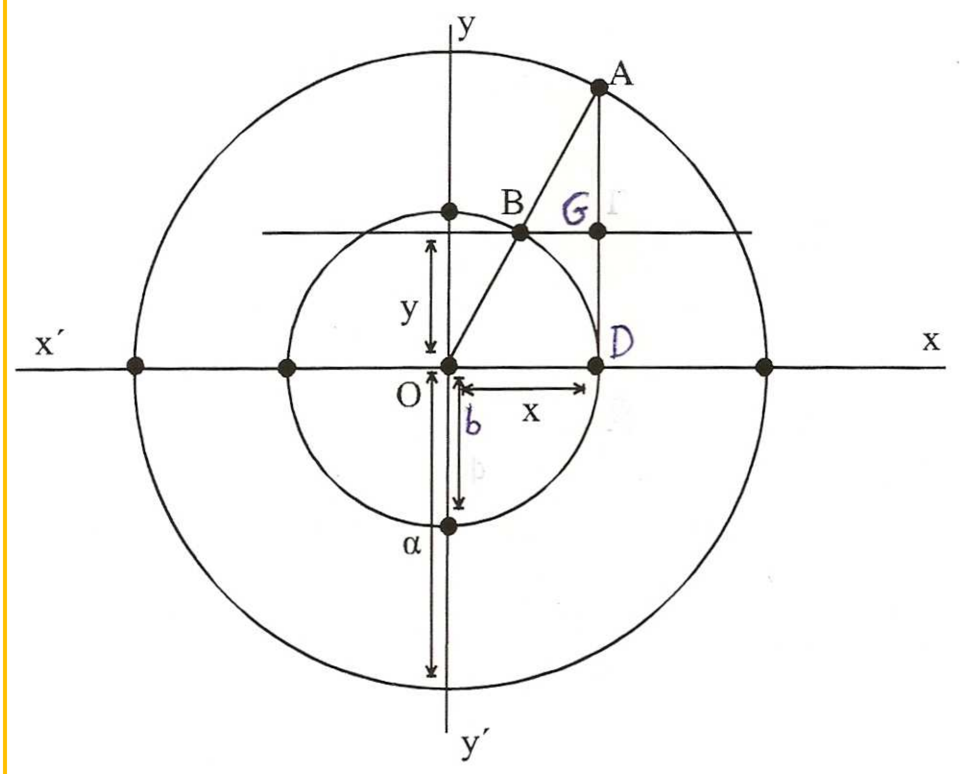
Για την υπερβολή: Λαμβάνουμε σχοινί μήκους m και δένουμε ένα μολύβι κοντά στο μέσον αυτού. Περνάμε το σχοινί γύρω από δύο ακίνητα καρφιά Α, Β με ΑΒ=c, το κρατάμε τεντωμένο με τη βοήθεια του μολυβιού, ενώ ταυτόχρονα τραβάμε από το σημείο Α τα δύο άκρα του σχοινιού. Τότε το μολύβι γράφει υπερβολή.



Πράγματι έστω Μ το μέσον του σχοινιού, δηλαδή ΑΓ+ΓΜ= ΜΒ+ΑΒ, άρα ΑΓ+ΓΜ+ΜΒ= 2ΜΒ+ΑΒ, οπότε ΑΓ+ΓΒ= ΑΒ+2ΜΒ, άρα ΑΓ+ΓΒ>ΑΒ, και ΑΓ+ΓΒ=ΑΒ+2(ΑΒ+ΒΜ- ΑΒ)= c+2(m/2-c)= m- c= σταθ.

<u>Χάραξη έλλειψης χωρίς συνεχή κίνηση</u>:

Θεωρούμε κύκλους (Ο,α), (Ο,b) με α>b. Έστω ΟΑ τυχούσα ακτίνα του κύκλου (Ο,α), η οποία τέμνει τον κύκλο (Ο,b) στο Β. Από το Β φέρω παράλληλη προς τον άξονα xx΄ και από το Α παράλληλη προς τον yy΄. Έστω ότι οι δύο αυτές παράλληλες τέμνονται στο σημείο G. Θα δειχθεί ότι το G είναι σημείο έλλειψης με άξονες α, b.



Πράγματι, ισχύει ότι: BG//OD, άρα AB/OB= AG/GD, οπότε (α- b)/b= AG/y.

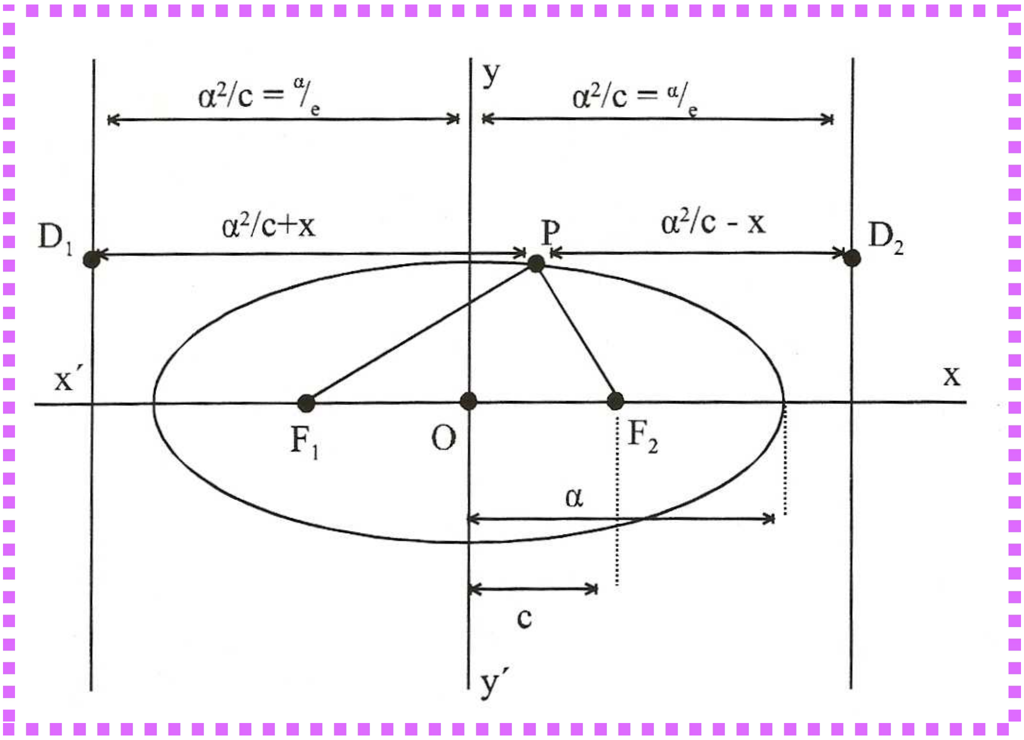
AB/OA= BG/OD, επομένως (α- b)/α= BG/x, άρα

y= b.AG/(α- b), και x= α.BG/(α- b), οπότε

$$\frac{\frac{a^2.BG^2}{(a-b)^2}}{\frac{a^2}{1}}+\frac{\frac{b^2.AG^2}{(a-b)^2}}{\frac{b^2}{1}}=\frac{BG^2+AG^2}{(a-b)^2}=1$$

ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΕΣ

Η έννοια αυτή έχει ήδη αναφερθεί στην περίπτωση της παραβολής, όπου μάλιστα χρησιμοποιήθηκε για να οριστεί η καμπύλη αυτή. Για την έλλειψη δε ισχύουν τα κάτωθι:



$PF_1^2= (c+x)^2+y^2$, $PF_2^2= (c- x)^2+y^2$, οπότε $PF_1^2- PF_2^2= 4cx$, συνεπώς

$(PF_1- PF_2)(PF_1+PF_2)= 4cx$.

Επίσης $PF_1- PF_2= 2cx/\alpha$, αλλά $PF_1+PF_2= 2\alpha$, άρα

$2PF_1= 2\alpha+2cx/\alpha$, άρα

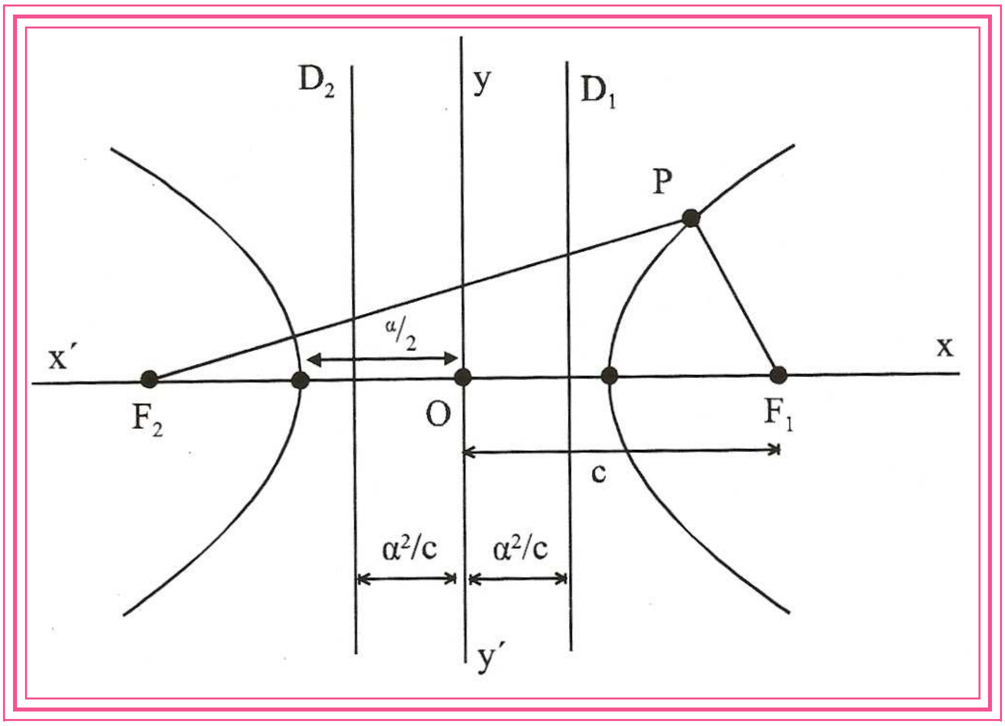
$PF_1= (\alpha^2+cx)/\alpha= (c/\alpha)(\alpha^2/c+x)= e(\alpha^2/c+x)$.

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιείται για πρώτη φορά **ο τύπος της εκκεντρότητας $e= c/\alpha$.**

Επιπλέον από τα ανωτέρω προκύπτει ότι $PF_2= e(\alpha^2- x)$. Άρα
$PF_1/(\alpha^2/c+x)= PF_2/(\alpha^2/c- x)= e$.

Η τελευταία αυτή σχέση αποτελεί ιδιότητα της έλλειψης. Δηλαδή, αν σε απόσταση $\pm\alpha^2/c= \pm\alpha/e$ από τον άξονα yy΄ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς αυτόν, τότε ο λόγος των αποστάσεων του P από την F_1, και D_1, και από την F_2, και D_2 είναι σταθερός και ίσος με $c/\alpha= e$. Οι ευθείες D_1, D_2 λέγονται **διευθετούσες της έλλειψης.** Επειδή δε α>c, τότε e<1. Λόγω του ορισμού της παραβολής ο πιο πάνω λόγος θα είναι ίσος με 1, επειδή η απόσταση του P από την εστία και τη διευθετούσα είναι ίδια.

Για την υπερβολή θα έχουμε τα εξής:



$PF_1^2= (x- c)^2+y^2$, και $PF_2^2= (x+c)^2+y^2$, άρα $PF_2^2-PF_1^2= 4cx$, άρα $(PF_2+PF_1)(PF_2-PF_1)= 4cx$, άρα $PF_2+ PF_1= 2cx/\alpha$. Όμως $PF_2- PF_1= 2\alpha$. Άρα $PF_2= cx/\alpha+\alpha= (c/\alpha)(x+\alpha^2/c)= e(x+\alpha^2/c)$.

Επίσης $PF_1= e(x- \alpha^2/c)$. Άρα $PF_1/(x- \alpha^2/c)= PF_2/(x+\alpha^2/c)= e= c/\alpha$.

Δηλαδή, σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα της υπερβολής, θα ισχύει ότι, αν σε απόσταση $\pm\alpha^2/c$ από τον άξονα yy΄ φέρουμε παράλληλες D_1, D_2 προς αυτόν, τότε ο λόγος των αποστάσεων του P από το F_1, και τη D_1 θα είναι ίσος με το λόγο των αποστάσεων του P από το F_2, και τη D_2. Επιπλέον αυτός ο σταθερός λόγος είναι ίσος με e= c/α. Επειδή δε στην περίπτωση της υπερβολής ισχύει ότι c>α, τότε e>1. Ο ορισμός της εκκεντρότητας e μπορεί ωστόσο να χρησιμοποιηθεί ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο -όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο των ορισμών- για να ορίσει τις καμπύλες των κωνικών τομών.

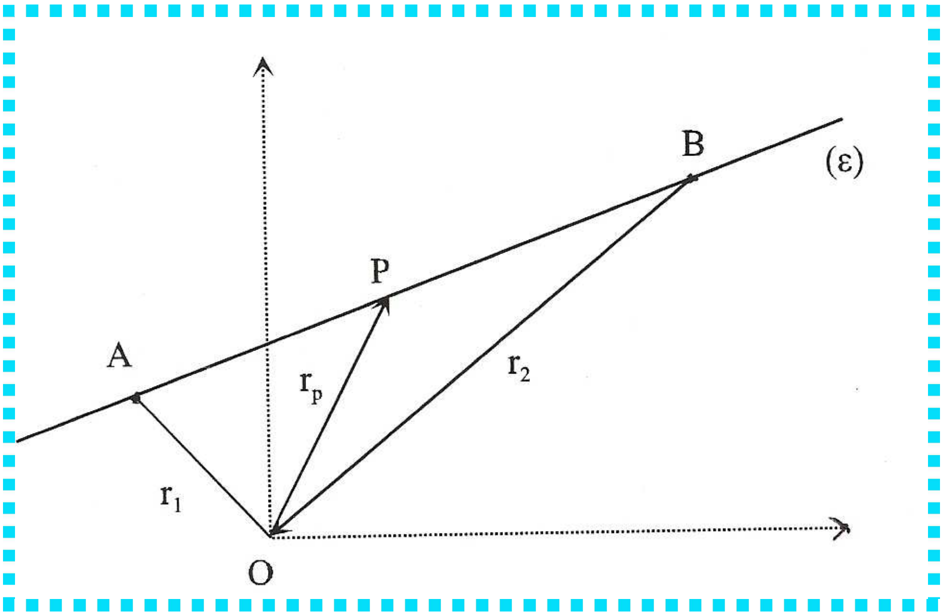
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ[19]

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περνά από τα σημεία (x_1, y_1) *και* (x_2, y_2) είναι :

$x = \dfrac{x_1 + \kappa x_2}{1+\kappa}$, $\mathrm{y} = \dfrac{y_1 + \kappa y_2}{1+\kappa}$. Θα δειχθεί ότι: $\vec{r_p} = \dfrac{\vec{r}_1 + \kappa \vec{r}_2}{1+k}, \kappa \neq -1,$ ή σε αναλυτική μορφή:

$\mathrm{x}_p = \dfrac{x_1 + \kappa x_2}{1+\kappa}, y_p = \dfrac{y_1 + \kappa y_2}{1+\kappa}, \kappa \neq -1.$

[19] Α. Χρυσάκη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα 1992.



Ισχύει ότι: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r_p} - \vec{r_1}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{r_2} - \vec{r_p}$, οπότε από τη σχέση $\overrightarrow{AP} = \kappa \overrightarrow{PB}$ προκύπτει ότι $\vec{r_p} - \vec{r_1} = \kappa\left(\vec{r_2} - \vec{r_p}\right) \Leftrightarrow \vec{r_p} = \dfrac{\vec{r_1} + \kappa \vec{r_2}}{1+\kappa} \Leftrightarrow \left(x_p, y_p\right) =$

$$\frac{\left(x_1, y_1\right) + \kappa\left(x_2, y_2\right)}{1+\kappa} \Leftrightarrow \left(x_p, y_p\right) = \left(\frac{x_1 + \kappa x_2}{1+\kappa}, \frac{y_1 + \kappa y_2}{1+\kappa}\right) \Leftrightarrow x_p = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1+\kappa},$$

$$y_p = \frac{y_1 + \kappa y_2}{1+\kappa}$$

Τα κοινά σημεία αυτής της ευθείας με έλλειψη ή υπερβολή δίδονται από την επίλυση της εξίσωσης: $\dfrac{\left(x_1 + \kappa x_2\right)^2}{a^2} \pm \dfrac{\left(y_1 + \kappa y_2\right)^2}{b^2} = \left(1+\kappa\right)^2 \Rightarrow$

$$\left(x_1^2 + \kappa^2 x_2^2 + 2x_1x_2\kappa\right)b^2 \pm \left(y_1^2 + \kappa^2 y_2^2 + 2y_1y_2\kappa\right)a^2 - a^2b^2\left(1+\kappa\right)^2 \Rightarrow$$

$$\kappa^2\left(x_2^2b^2 + y_2^2a^2 - a^2b^2\right) + \kappa\left(2x_1x_2b^2 \pm 2y_1y_2a^2 - 2a^2b^2\right) + x_1^2b^2 \pm y_1^2a^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$L\kappa^2 + 2M\kappa + N = 0$, όπου:

$$L = \frac{x_2^2}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} - 1, M = \frac{x_1x_2}{a^2} \pm \frac{y_1y_2}{b^2} - 1(1), N = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} - 1(2).$$

Επειδή δε ισχύει η σχέση: $M^2 = LN \geq 0$, τότε τα κοινά σημεία της ευθείας και της παραβολής ευρίσκονται αν θέσουμε:

$$2p\left(x_1 + x_2\kappa\right)\left(1+\kappa\right) = \left(y_1 + y_2\kappa\right)^2 \Rightarrow$$
$$2px_1 + 2px_1\kappa + 2px_2\kappa + 2px_2\kappa^2 - y_1^{\,2} - y_2^{\,2}\kappa^2 - 2y_1y_2\kappa \Rightarrow$$
$$\kappa^2\left(2px_2 - y_2^{\,2}\right) + \kappa\left(2px_1 + 2px_2 - 2y_1y_2\right) + 2px_1 - y_1^{\,2} = 0 \Rightarrow$$

$L'\kappa^2 + 2M'\kappa + N' = 0,$ όπου $L' = y_2^{\,2} - 2px_2, M' = y_1y_2 - p\left(x_1 + x_2\right)(3),$
$N' = y_1^{\,2} - 2px_1(4).$

Στην περίπτωση της εφαπτόμενης της έλλειψης, ή της υπερβολής, όπου το κοινό σημείο ευθείας και καμπύλης είναι ένα και μοναδικό, για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η διακρίνουσα της Β΄θμιας εξίσωσης να είναι ίση με 0, δηλαδή: $(2M)^2$- 4LN=0, άρα M^2- LN= 0.

Για την παραβολή θα ισχύει αντίστοιχα: M'^2- L΄N΄= 0.

Αν λοιπόν το (x_1,y_1) είναι το μοναδικό σημείο επαφής της ευθείας με την έλλειψη, ή την υπερβολή, τότε από τη σχέση (2) θα έχουμε N= 0.

Επειδή δε M^2- LN= 0, τότε M= 0, και αν X, Y οι συντεταγμένες τυχόντος σημείου της εφαπτομένης της έλλειψης, ή της υπερβολής, τότε για M= 0, από τη σχέση (1) προκύπτει ως εξίσωση εφαπτομένης:

$\dfrac{x_1X}{a^2} \pm \dfrac{y_1Y}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{x_1X}{a^2} + \dfrac{y_1Y}{b^2} - 1 = 0\ (5)$ για την έλλειψη, και $\dfrac{x_1X}{a^2} - \dfrac{y_1Y}{b^2} - 1 = 0$
(6) για την υπερβολή.

Όμοια για την παραβολή από τη σχέση (4) θα έχουμε: $N' = 0,$ και επειδή
$M'^2 - L'N' = 0,$ τότε M=0, άρα από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $y_1Y = p\left(x_1 + X\right),$
όπου X, Y είναι οι συντεταγμένες τυχόντος σημείου της εφαπτομένης της παραβολής.
Στην έλλειψη η κλίση της εφαπτομένης στο $\left(x_1, y_1\right)$ θα είναι, σύμφωνα με τη σχέση (5)
εφθ=$\dfrac{-x_1b^2}{y_1a^2}$. Άρα η κλίση της καθέτου στο ίδιο σημείο θα δίδεται από τη σχέση:

εφθ΄$=\dfrac{y_1a^2}{x_1b^2}$. Οπότε η εξίσωση της κάθετης προς την εφαπτομένη στο σημείο επαφής θα είναι: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_1a^2}{x_1b^2}\Rightarrow x_1b^2\left(y-y_1\right)-y_1a^2\left(x-x_1\right)=0$ για την έλλειψη.

Για την υπερβολή θα έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (6) εφθ$=\dfrac{x_1b^2}{y_1a^2}$,εφθ΄$=\dfrac{-y_1a^2}{x_1b^2}$, και εξίσωση καθέτου $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{-y_1a^2}{x_1b^2}\Rightarrow x_1b^2\left(y-y_1\right)+y_1a^2\left(x-x_1\right)=0$.

Στις εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών μπορούμε να οδηγηθούμε και μέσω παραγώγων ως εξής:

1) Για την παραβολή:

$y^2=2px\Rightarrow 2yy'=2p\Rightarrow y_0{}'=\dfrac{p}{y_0}\Rightarrow \lambda_\varepsilon=\dfrac{p}{y_0}$, όπου λ_ε είναι ο συντελεστής διεύθυνσης εφαπτομένης στο $\left(x_0,y_0\right)$. Άρα $yy_0-y_0{}^2=px-px_0\Rightarrow$

$yy_0-2px_0=px-px_0\Rightarrow yy_0=p\left(x+x_0\right)$.

2) Για την έλλειψη και την υπερβολή:

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=\pm b^2\mp\frac{x^2b^2}{a^2}\Rightarrow 2yy'=\mp\frac{2xb^2}{a^2}\Rightarrow yy_0{}'=\mp\frac{x_0b^2}{a^2}\Rightarrow$$

$$y_0{}'=\mp\frac{x_0b^2}{a^2y_0}\Rightarrow\frac{y-y_0}{x-x_0}=\mp\frac{x_0b^2}{a^2y_0}\Rightarrow\frac{a^2yy_0}{a^2b^2}-\frac{a^2y_0}{a^2b^2}=\mp\frac{xx_0b^2}{a^2b^2}\pm\frac{x_0b^2}{a^2b^2}\Rightarrow$$

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}=\pm\frac{x_0}{a^2}\mp\frac{xx_0}{a^2}\Rightarrow\frac{yy_0}{b^2}\pm\frac{xx_0}{a^2}=\pm\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=\pm1.$$

Τέλος για την εξίσωση καθέτου σε τυχόν σημείο της παραβολής θα έχουμε:

εφθ=$\frac{p}{y_1}$ (κλίση εφαπτομένης), άρα εφθ$' = \frac{-y_1}{p}$ (κλίση καθέτου).

Άρα η εξίσωση καθέτου θα είναι:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{y_1}{p}, \Rightarrow p\left(y-y_1\right) + y_1\left(x-x_1\right) = 0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΥ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ[20]

Έστω (γ) καμπύλη με εξίσωση y= f(x), και ευθεία ε με εξίσωση y=κx+λ. Η ε είναι ασύμπτωτη της (γ), αν $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{f(x)} - \kappa x - \lambda\right) = 0$. Αυτή η σχέση σημαίνει "εποπτικά", πως, η ε πλησιάζει "όσο θέλουμε" τη (γ).

Στην περίπτωση της υπερβολής, όπου $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(1)$ θα δείξουμε ότι οι ασύμπτωτες είναι οι: $\varepsilon_1 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$ και $\varepsilon_2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

---

[20] Α. Χρυσάκη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα 1992.

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2(1-\frac{a^2}{x^2})$, ή $y=\pm\frac{b}{a}|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$. Αν P(x,y) είναι σημείο στην πρώτη ή την τρίτη γωνία των αξόνων, τότε τα x και y είναι ομόσημα. Έτσι οι κλάδοι της υπερβολής που βρίσκονται σ' αυτές τις γωνίες έχουν την εξής εξίσωση:

$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ $(\equiv f(x))$

και τότε η εξίσωση της ε_1 θα είναι: $y=\frac{b}{a}x$.

Σύμφωνα με τον ορισμό προκύπτουν τα εξής:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-\frac{b}{a}x)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-1)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{a^2}{x^2}-1)}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+1}=$$

$$-ab\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+1)}=(-ab).0=0\Rightarrow$$ Η ευθεία $\varepsilon_1:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ είναι ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Όμοια αποδεικνύεται, πως η ευθεία $\varepsilon_2:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ είναι ασύμπτωτη των κλάδων της υπερβολής που βρίσκονται στη δεύτερη και τέταρτη γωνία των αξόνων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ- ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΙ

(I) Για την έλλειψη και την υπερβολή ισχύουν οι τύποι: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$. Άρα, αν κάποιο ζεύγος (x,y) ικανοποιεί τις δύο αυτές ισότητες, τότε το ίδιο προφανώς θα συμβαίνει και με τα ζεύγη (x,-y), (-x,y), (-x,-y). Αυτό σημαίνει ότι οι καμπύλες της έλλειψης και της υπερβολής είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα xx΄, και ως προς τον άξονα yy΄. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια βασική ιδιότητα της έλλειψης και της υπερβολής, η οποία έχει τις εξής συνέπειες:

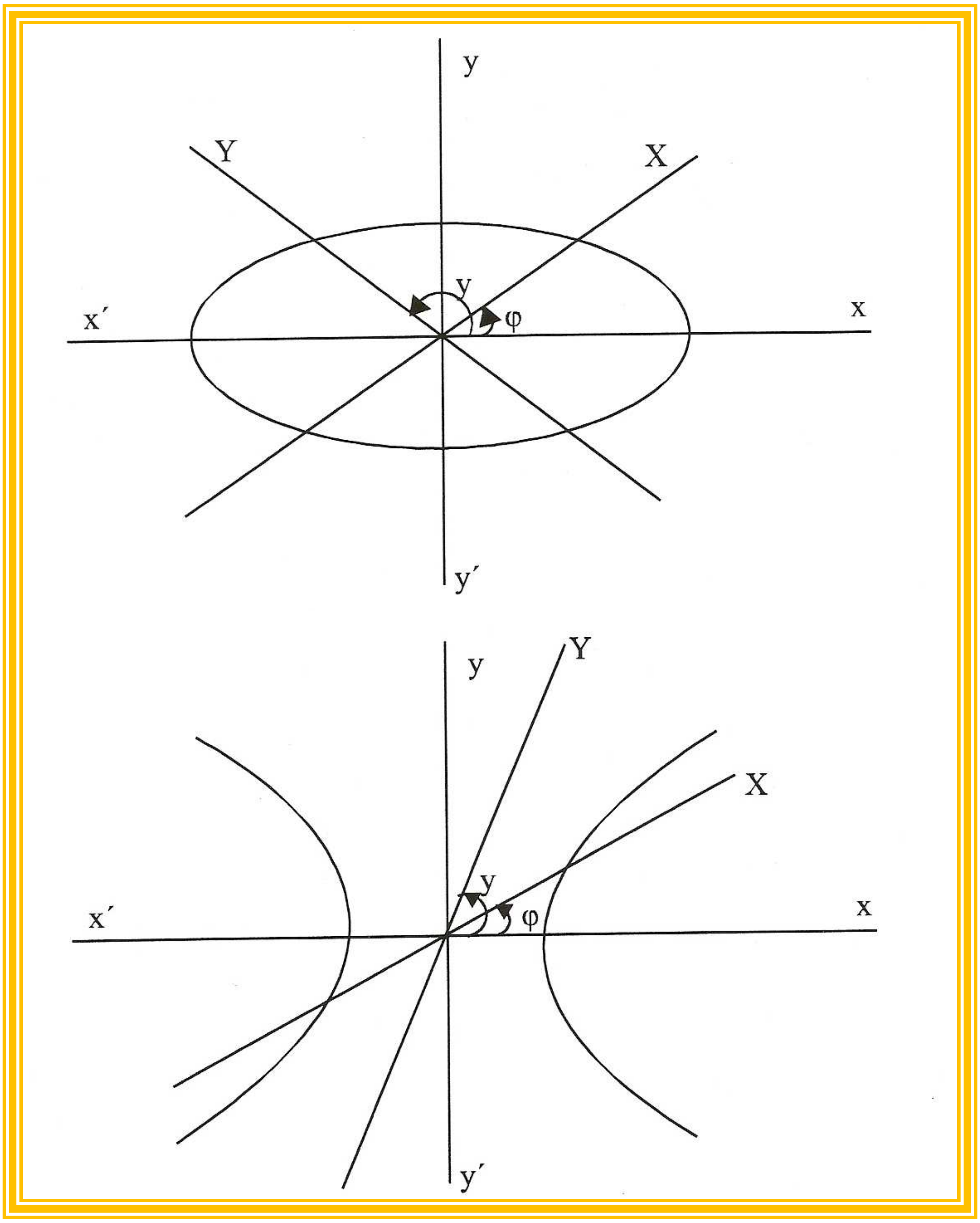
1η συνέπεια: Οποιαδήποτε παράλληλος προς τον έναν άξονα συντεταγμένων ορίζει επί της καμπύλης χορδή, η οποία διχοτομείται από τον άλλον άξονα, και

2η συνέπεια: Οποιαδήποτε διάμετρος PΟP΄ της καμπύλης, δηλαδή οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και τέμνει την καμπύλη στα σημεία P, και P΄, διχοτομείται από το κέντρο Ο, δηλαδή την αρχή των συντεταγμένων, που είναι και το κέντρο της έλλειψης αλλά και της υπερβολής.

Θα δειχθεί, ότι: Κάθε χορδή που είναι παράλληλη προς μία διάμετρο θα διχοτομείται από τη ¨συζυγή διάμετρο¨. Επειδή δε οι πιο πάνω συνέπειες ισχύουν για κάθε σύστημα συντεταγμένων X, Y, όπου οι εξισώσεις[21] έλλειψης και υπερβολής είναι $\frac{X^2}{A^2} \pm \frac{Y^2}{B^2} = 1$, ζητάμε τις γωνίες φ, y των αξόνων X, Y με τον άξονα xx΄, ώστε αν γίνει αλλαγή των αξόνων από xx΄, και yy΄ σε XX΄ και YY΄, τότε οι εξισώσεις της έλλειψης και της υπερβολής να έχουν την ίδια μορφή. Σημειωτέον, ότι υπάρχει μόνον ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, ως προς το οποίο μία έλλειψη ή μία υπερβολή είναι της μορφής $\frac{X^2}{A^2} \pm \frac{Y^2}{B^2} = 1$, ενώ όλα τα άλλα είναι πλάγια.

---

[21] Μ. Μπρίκα, *Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήναι ^{3}1961, σελ. 135.



Για την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων ισχύει γενικά:

$x = X\cos\varphi + Y\sin\varphi,\ y = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos(-\varphi) + Y\sin[-(y-\frac{\pi}{2})] \\ y &= -X\sin(-\varphi) + Y\cos[-(y-\frac{\pi}{2})] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= X\cos(\varphi) + Y\sin(-y+\frac{\pi}{2}) \\ y &= X\sin(\varphi) + Y\cos(-y+\frac{\pi}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\left.\begin{aligned} x &= X\cos(\varphi) + Y\cos y \\ y &= X\sin(\varphi) + Y\sin y \end{aligned}\right\}$. Και επειδή $\dfrac{y^2}{b^2} = \pm(\dfrac{x^2}{a^2} - 1) \Rightarrow$

$$\frac{X^2\sin^2\varphi + Y^2\sin^2 y + 2\sin\varphi.\sin y.XY}{b^2} =$$

$$= \pm\frac{X^2\cos^2\varphi + Y^2\cos^2 y + 2\cos\varphi.\cos y.XY}{a^2} \mp 1 \Rightarrow$$

$$a^2\sin^2\varphi X^2 + \alpha^2\sin^2 yY^2 + 2a^2\sin\varphi.\sin yXY =$$

$$\pm(b^2X^2\cos^2\varphi + b^2Y^2\cos^2 y + 2b^2\cos\varphi.\cos yXY) \mp \alpha^2b^2 \Rightarrow$$

$$X^2(\pm b^2 c\text{os}^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) + 2(\pm b^2\cos\varphi.\cos y - a^2\sin\varphi.\sin y)XY +$$

$$+(\pm b^2\cos^2 y - \alpha^2\sin^2 y)Y^2 = \pm\alpha^2b^2 \Rightarrow X^2(\pm\frac{c\text{os}^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}) +$$

$+2(\dfrac{\cos\varphi.\cos y}{\alpha^2} - \dfrac{\sin\varphi.\sin y}{b^2})XY + (\pm\dfrac{\cos^2 y}{\alpha^2} - \dfrac{\sin^2 y}{b^2})Y^2 = \pm 1,$ οπότε, ή

$$X^2(\frac{c\text{os}^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}) +$$

$+2(\dfrac{\cos\varphi.\cos y}{\alpha^2} - \dfrac{\sin\varphi.\sin y}{b^2})XY + (\dfrac{\cos^2 y}{\alpha^2} - \dfrac{\sin^2 y}{b^2})Y^2 = 1,$ και η καμπύλη θα

είναι υπερβολή, ή $X^2(\dfrac{c\text{os}^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}) +$

$+2(\dfrac{\cos\varphi.\cos y}{\alpha^2} + \dfrac{\sin\varphi.\sin y}{b^2})XY + (\dfrac{\cos^2 y}{\alpha^2} + \dfrac{\sin^2 y}{b^2})Y^2 = 1,$ και η καμπύλη θα

είναι έλλειψη, οπότε τελικά η αρχική εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ γίνεται:

$\Delta X^2 + 2EXY + ZY^2 = 1$, όπου $\Delta = \dfrac{c\text{os}^2 \varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2 \varphi}{b^2}$,

$E = \dfrac{\cos\varphi.\cos y}{\alpha^2} + \dfrac{\sin\varphi.\sin y}{b^2}, Z = \dfrac{\cos^2 y}{\alpha^2} + \dfrac{\sin^2 y}{b^2}$, και για να διατηρηθεί η αρχική, αρκεί: Ε=0, $\Delta = \dfrac{1}{A^2}, Z = \dfrac{1}{B^2}$, οπότε η αρχική γίνεται: $\dfrac{X^2}{A^2} \pm \dfrac{Y^2}{B^2} = 1$.

Αν όμως Ε=0, τότε $b^2 \cos\varphi.\cos y \pm a^2 \sin\varphi.\sin y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 \cos\varphi.\cos y}{\cos\varphi.\cos y} \pm \dfrac{a^2 \sin\varphi.\sin y}{\cos\varphi.\cos y} = 0 \Leftrightarrow b^2 \pm \varepsilon\varphi\varphi.\varepsilon\varphi y.a^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi.\varepsilon\varphi y = \mp \dfrac{b^2}{a^2}$, όπου το πρόσημο (-) ισχύει για την έλλειψη, δηλαδή πρέπει η μία γωνία έστω η φ να είναι οξεία, και η y αμβλεία. Το πρόσημο (+) ισχύει για την υπερβολή, το οποίο σημαίνει, ότι οι γωνίες φ, και y είναι είτε και οι δύο οξείες, είτε και οι δύο αμβλείες.

Μία επιπλέον παρατήρηση είναι ότι η εξίσωση της εφαπτομένης διατηρεί την ίδια μορφή, δηλαδή είναι η: $\dfrac{x_1 X}{A^2} + \dfrac{y_1 Y}{B^2}$=1, με (Χ,Υ) τυχόν σημείο της εφαπτομένης.

Αυτό σημαίνει πως οι εφαπτόμενες στο σημείο τομής ενός άξονα και της καμπύλης, είναι παράλληλες προς τον άλλον άξονα[22]. Από αυτήν την ιδιότητα προκύπτει ο εξής ορισμός της συζυγούς διαμέτρου:

¨Οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας τυχούσας διαμέτρου είναι παράλληλες προς τη συζυγή διάμετρο¨. Γίνεται δηλαδή κατανοητό, πως, όταν αναφερόμαστε στη ¨συζυγή διάμετρο¨ εννοούμε τον άξονα των Υ, ο οποίος έχει προκύψει από μία

[22] Μ. Μπρίκα, *Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήναι [3]1961, σελ. 138.

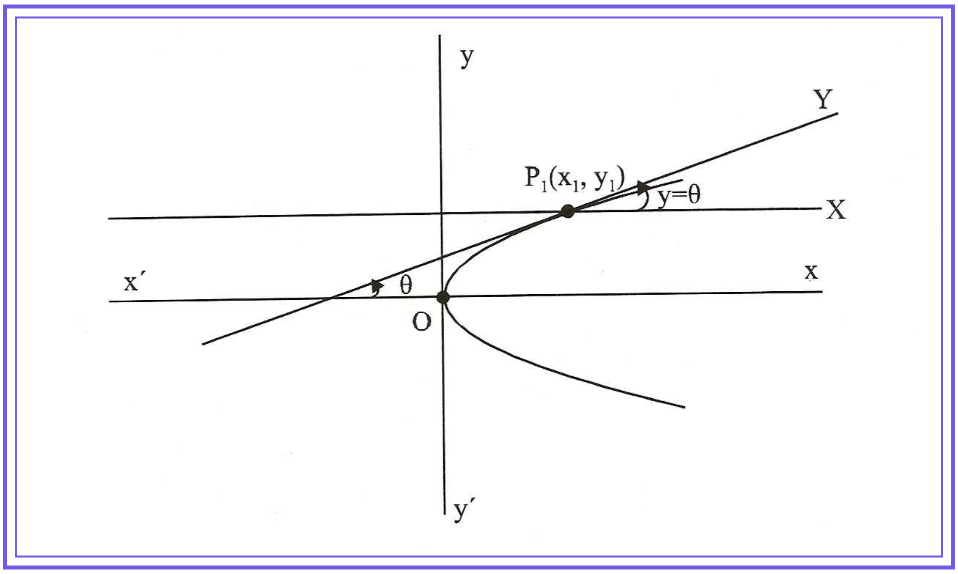
περιστροφή τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση: εφφ.εφy=$\mp(b^2/\alpha^2)$, και αυτός τότε ο άξονας των Y θα είναι η συζυγής διάμετρος του άξονα των X.

(ΙΙ) Για να ορίσουμε την έννοια της συζυγούς διαμέτρου στην παραβολή, παρατηρούμε κατ' αρχάς, ότι, αν η εξίσωση: $y^2=2px$ επαληθεύεται από το ζεύγος (x,y), τότε προφανώς θα επαληθεύεται και από το ζεύγος (x,-y), και κατά συνέπεια η καμπύλη θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x, και κάθε χορδή παράλληλη προς τον άξονα των y, θα διχοτομείται από τον άξονα των x. Αυτό αποτελεί μια ιδιότητα της παραβολής και προκύπτει από τη μορφή της εξίσωσής της. Στη συνέχεια ζητάμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο να διατηρείται η μορφή αυτής της εξίσωσης. Προς τούτο θεωρούμε το μετασχηματισμό (Μ):

$x=x_1+X\cos\varphi+Y\cos y$

$y=y_1+X\sin\varphi+Y\sin y$,

όπου (x_1,y_1) είναι οι συντεταγμένες της καινούριας αρχής συντεταγμένων.



Οπότε:

$y^2=y_1^2+X^2\sin^2\varphi+Y^2\sin^2 y+2y_1X\sin\varphi+2y_1Y\sin y+2XY\sin\varphi\sin y$.

Επειδή πρέπει να μην υπάρχουν οι όροι X^2 και XY (διότι $\sin^2\varphi=0$, και $2\sin\varphi\sin y=0$), τότε γωνία $\varphi=0^o$, οπότε θα ισχύει:

$y^2=y_1^2+Y^2\sin^2y+2y_1Y\sin y$. Άρα $y_1^2+Y^2\sin^2y= y^2- 2y_1Y\sin y$, άρα
$y_1^2+Y^2\sin^2y=2px-2y_1Y\sin y$. Οπότε

$y_1^2+Y^2\sin^2y=2px_1+2pX- 2y_1Y\sin y+2pY\cos y$ (E).

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η σχέση:

$2pX- 2y_1Y\sin y=2px_1+2pY\cos y +2pX-2y_1Y\sin y$.

Η σχέση αυτή ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με:

$(p\neq0)$ $x=x_1+Y\cos y+X \Leftrightarrow x=x_1+Y\cos y+X+X\cos\varphi$ (επειδή γωνία $\varphi=0^o$).

Η τελευταία αυτή σχέση είναι η πρώτη εξίσωση του μετασχηματισμού (Μ). Άρα από την (Ε) προκύπτει ότι:

$$y_1^2+Y^2\sin^2y=2px_1+2Y(p\cos y- y_1\sin y)+2pX.$$

Επειδή όμως το (x_1,y_1) ανήκει στην παραβολή, τότε θα ισχύει ότι:

$$Y^2\sin^2y=2Y(p\cos y- y_1\sin y)+2pX.$$

Στο κεφάλαιο όμως ¨Εφαπτόμενες και κάθετες κωνικών τομών¨ έχει ήδη αναφερθεί ότι $\varepsilon\varphi\theta=p/ x_1$, άρα: $\sin\theta/\cos\theta=p/y_1$, άρα $p= y_1\sin\theta/\cos\theta$. Οπότε:

$$Y^2\sin^2y=2Y[(y_1\sin\theta/\cos\theta)\cos y- y_1\sin y\cos\theta/\cos\theta]+2pX.$$

Άρα $Y^2\sin^2y =2Yy_1\sin(\theta- y)/\cos\theta+2pX$.

Με την προϋπόθεση ότι γων θ=γων y θα έχουμε:

$Y^2\sin^2y=2pX$, οπότε $Y^2=2pX/ \sin^2y$, δηλαδή

$Y^2=2p'X$, όπου $p'=p/\sin^2 y$.

Η σχέση $Y^2=2p'X$ αληθεύει για το ζεύγος (X,Y) αλλά και για το (X,-Y). Αυτό σημαίνει ότι ¨κάθε χορδή παράλληλη προς την εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της παραβολής, διχοτομείται από την κύρια διάμετρο της παραβολής, η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα xx΄¨. Αυτή δε η παράλληλη ονομάζεται ¨συζυγής διάμετρος¨.

Οι άλλες βασικές ιδιότητες που αφορούν τις κωνικές τομές σχετίζονται με τις εστίες αυτών, και εξετάζονται χωριστά για κάθε μία καμπύλη ως εξής:

1) Για την έλλειψη:

Έστω $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ η εξίσωση της έλλειψης, και

$y_1 a^2 X - x_1 b^2 Y - x_1 y_1 a^2 + x_1 y_1 b^2 = 0$ η εξίσωση της καθέτου αυτής στο $P(x_1,y_1)$, η οποία γράφεται και ως εξής: $y_1 a^2 X - x_1 b^2 Y - x_1 y_1 a^2 + x_1 y_1 b^2 = 0$, όπου $A_3=y_1\alpha^2$, $B_3=-x_1 b^2$, και $C_3=-x_1 y_1 \alpha^2+x_1 y_1 b^2$.

Εάν F_1, F_2 οι εστίες της έλλειψης, τότε οι εξισώσεις των PF_1, PF_2 είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ -c & 0 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 - y(x_1+c) + cy_1 = 0,\ \text{όπου}\ y_1 = \mathrm{A}_1, -(x_1+c) = \mathrm{B}_1, cy_1 = C_1$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 - y(x_1-c) - cy_1 = 0,\ \text{όπου}\ y_1 = \mathrm{A}_2, -(x_1-c) = \mathrm{B}_2, -cy_1 = C_2$$

Εάν γωνία NPZ=α, τότε εφα=εφ$(\overrightarrow{\mathrm{PN}},\overrightarrow{\mathrm{P}F_1}) = \dfrac{-A_1B_3 + A_3B_1}{A_1A_3 + B_1B_3} =$

$\dfrac{x_1y_1b^2 - y_1a^2c - x_1y_1a^2}{x_1{}^2b^2 + y_1{}^2a^2 + x_1b^2c}$. Αλλά $x_1y_1b^2 - x_1y_1a^2 = x_1y_1(b^2 - a^2) = -x_1y_1c^2, \kappa\alpha\iota$

$y_1{}^2a^2 + x_1{}^2b^2 = a^2b^2$, γιατί $\dfrac{y_1{}^2a^2}{a^2b^2} + \dfrac{x_1{}^2b^2}{a^2b^2} = \dfrac{a^2b^2}{a^2b^2} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1,$

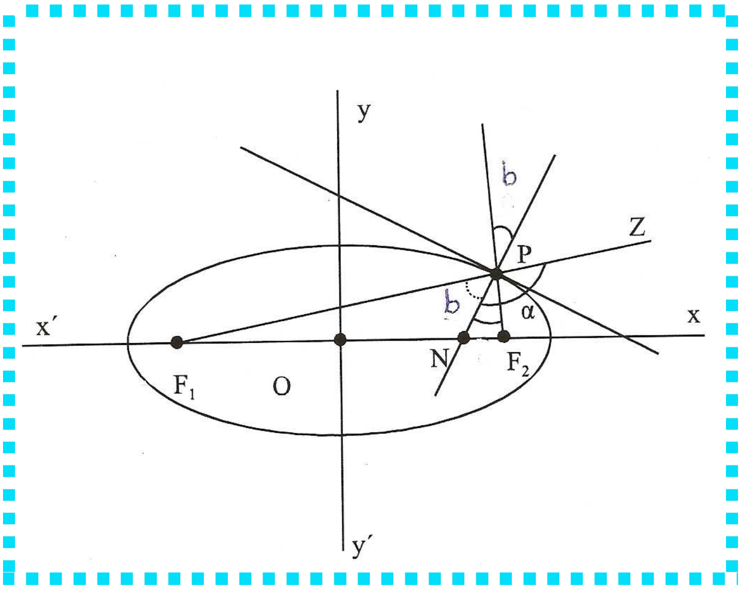
Το οποίο ισχύει γιατί το $P(x_1,y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης. Άρα

$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{-x_1y_1c^2 - y_1a^2c}{a^2b^2 + x_1b^2c} = \dfrac{-y_1c(x_1c + a^2)}{b^2(a^2 + x_1c)} = \dfrac{-y_1c}{b^2}$. Αλλά, εάν γωνία$\mathrm{NPF}_2 = b$,

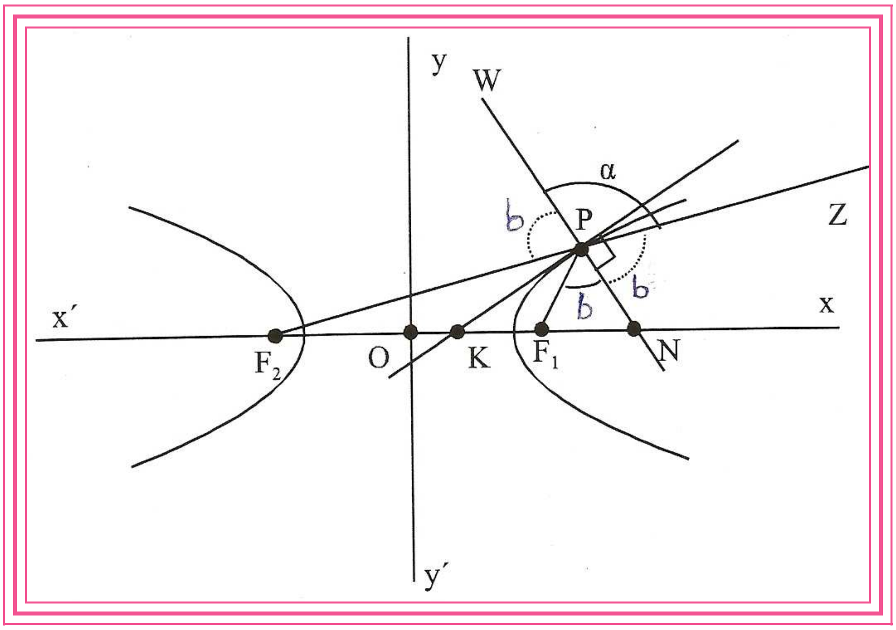
τότε εφb=$\dfrac{A_3B_2 - A_2B_3}{A_2A_3 + B_2B_3} = \dfrac{-x_1y_1a^2 + y_1a^2c + x_1y_1b^2}{y_1{}^2a^2 + x_1{}^2b^2 - x_1b^2c} = \dfrac{y_1c}{b^2}$. Δηλαδή

εφα+εφb=0, οπότε α+b=π. Άρα, επειδή γωνία α+γωνία NPF_1 =π, τότε γωνία NPF_2 = γωνία NPF_1.

Αυτό σημαίνει, πως, αν μια ακτίνα ξεκινά από την F_2, τότε ανακλάται πάνω σε εφαπτομένη, στο τυχόν σημείο (x_1,y_1), και διέρχεται από την άλλη εστία δηλαδή την F_1.



2) Για την υπερβολή:



Η εξίσωση της καθέτου στο σημείο $P(x_1,y_1)$ είναι: $y_1\alpha^2(X- x_1)+x_1b^2(Y-y_1)=0$. Η εξίσωση της F_2P: $xy_1-(c+x_1)y+cy_1=0$, και η εξίσωση της F_1P: $xy_1+(c-x_1)y-cy_1=0$, οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα θα ισχύουν οι σχέσεις: εφα$=-y_1c/b^2$, και εφb$=y_1c/b^2$. Άρα γωνία α+γωνία b=π. Αλλά γωνία α+γωνία NPZ=π, άρα γωνία b=γωνία NPZ= γωνία F_2PW, οπότε γωνία KPF_1=1ορθή- γωνία b=γωνία KPF_2.

Άρα μια ακτίνα που ξεκινά από την F_1 και ανακλάται επί της εφαπτομένης στο τυχόν σημείο $P(x_1,y_1)$ θα ακολουθεί την προέκταση της PF_2.

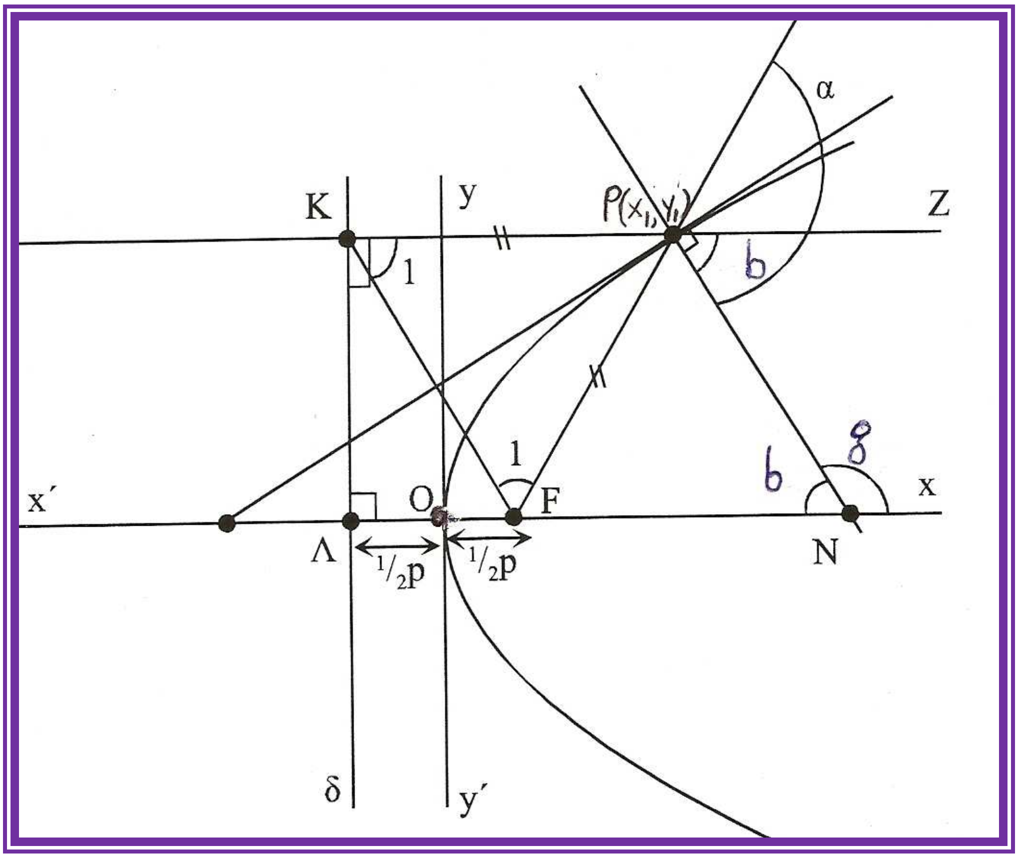
3) Για την παραβολή:

Η εξίσωση της καθέτου στο $P(x_1,y_1)$ είναι η: $y_1(x- x_1)+p(y- y_1)=0$. Επειδή δε το σημείο F είναι το $(p/2,0)$, τότε η εξίσωση της FP θα είναι:

$y_1x+(p/2- x_1)y- py_1/2=0$.

Η FP σχηματίζει με την κάθετη γωνία α, ώστε:

$$\text{εφα}=\frac{\frac{1}{2}py_1-y_1x_1-py_1}{y_1{}^2+\frac{1}{2}p-px_1}=\frac{-y_1(\frac{p}{2}+x_1)}{2px_1+\frac{1}{2}p^2-px_1}=\frac{-y_1(\frac{p}{2}+x_1)}{p(\frac{p}{2}+x_1)}=\frac{-y_1}{p}.$$



Η κάθετος PN έχει κλίση τέτοια ώστε εφg= $-y_1/p$, το οποίο έχει δειχθεί στο κεφάλαιο ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ.

Άρα εφb=y_1/p⇒εφα+εφb=0⇒γων α+γων b=π⇒γωνία FPN=γωνία b. Έχουμε υποθέσει, ότι η PZ είναι παράλληλη με την Ox, άρα μια ακτίνα παράλληλη στον άξονα xx΄ ανακλάται επί εφαπτομένης και διέρχεται από την εστία F. Στην περίπτωση 3 που η καμπύλη είναι μια παραβολή, ισχύουν επιπλέον τα εξής:

Έστω PZ//Ο x. Έχει δειχθεί ότι η κλίση της PN είναι ίση προς $-y_1/p$. Η κλίση της KF είναι $-Κ\Lambda/\Lambda F=-y_1/p$, άρα PN//KF. Επειδή PK=PF, όπου PK είναι η απόσταση του P από τη διευθετούσα δ, τότε γωνία K_1=γωνία F_1, και γωνία ZPN=γωνία K_1=γωνία F_1= γωνία FPN. Άρα η PZ ανακλώμενη διέρχεται από την εστία F.

ΕΜΒΑΔΑ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

1) Για την παραβολή που έχει τη μορφή $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, το εμβαδόν τμήματος υπολογίζεται με τη χρήση ολοκληρώματος, ως εξής:

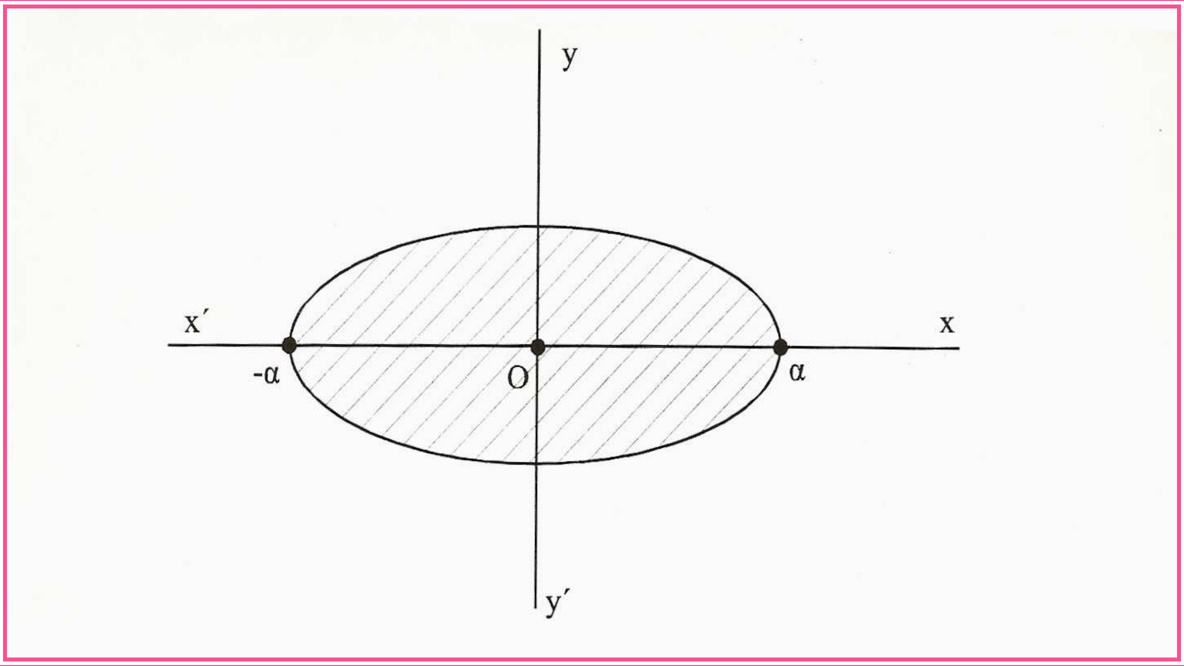
$$\int_{x_2}^{x_1}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\frac{ax_1^{\,3}}{3}+\frac{\beta x_1^{\,2}}{2}+\gamma x_1-\left(\frac{ax_2^{\,3}}{3}+\frac{\beta x_2^{\,2}}{2}+\gamma x_2\right)=$$

$$=\frac{x_1-x_2}{6}[2a(x_1^{\,2}+x_1x_2+x_2^{\,2})+3\beta(x_1+x_2)+6\gamma]=$$

$$=\frac{h}{6}[(ax_1^{\,2}+\beta x_1+\gamma)+(ax_2^{\,2}+\beta x_2+\gamma)+4\alpha(\frac{x_1+x_2}{2})^2]+\frac{h}{6}(4\beta\frac{x_1+x_2}{2}+4\gamma)=$$

$$=\frac{h}{6}(y_1+y_2+4y_\mu).$$

2) Για την έλλειψη ακολουθείται η εξής διαδικασία:



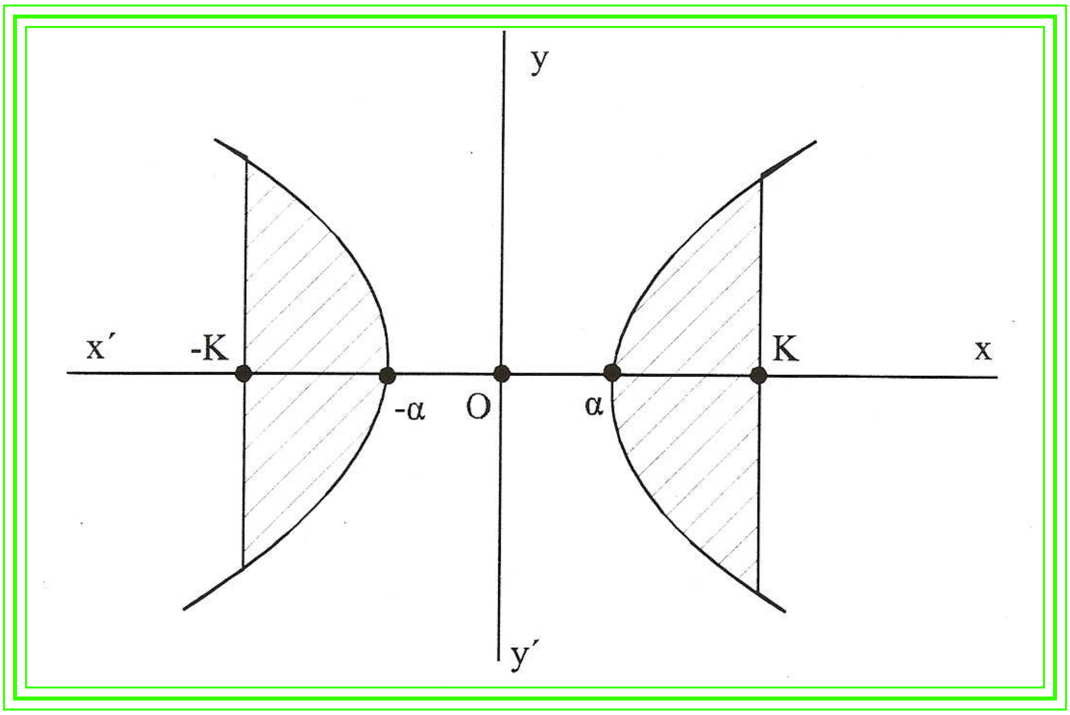
Το S=2$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$ δίνει το εμβαδόν του τμήματος της έλλειψης που βρίσκεται πάνω από τον άξονα. Το τμήμα αυτό της καμπύλης έχει εξίσωση y=$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$. Άρα $2\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=2\beta\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}dx=2\beta\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}d(at)=$ $2a\beta\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$, όπου $\frac{x}{a}=t\leq 1$. Θέτω t=ημω, με -$\frac{\pi}{2}\leq\omega\leq\frac{\pi}{2}$. Τότε θα ισχύει

$$S=2a\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\omega d(\eta\mu\omega)=2a\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega=a\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sigma\upsilon\nu 2\omega)d\omega=$$

$$a\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\omega+\frac{a\beta}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2\omega d(2\omega)=\alpha\beta[\omega]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\alpha\beta}{2}[\eta\mu 2\omega]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\alpha\beta[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]+\frac{\alpha\beta}{2}[\eta\mu\pi+\eta\mu\pi]=\pi\alpha\beta$$

3) Για την υπερβολή



Ισχύουν τα κάτωθι:

$\int \beta\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\,dx = a\beta\int\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$ (1). Θέτω $\frac{x}{a}=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ $(2)\Rightarrow$

$d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$ (3). Άρα, λόγω της (2) θα ισχύει ότι: $at^2-2tx+a=0\Rightarrow$

$t=\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$ $(4)\Rightarrow t-\frac{x}{a}=\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\Rightarrow t-[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)]=\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$ (5).

$\left(t-\frac{1}{t}\right)=2\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$ (7). Από τη σχέση (1), εφ' όσον ισχύουν οι σχέσεις (5) και (3) θα έχω:

$\alpha\beta\int\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{\alpha\beta}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2}\right)-\frac{\alpha\beta}{2}\ln t=$

$\frac{\alpha\beta}{8}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)-\frac{\alpha\beta}{2}\ln t$ (8).

Από τη σχέση (8), εφ' όσον ισχύουν οι σχέσεις (6), (7), και (4) προκύπτει ότι:

$$\alpha\beta\int\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}dx=\frac{a\beta}{8}\frac{2x}{a}2\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{a\beta}{2}\ln[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}]=$$

$$\frac{\beta}{2}x\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{a\beta}{2}\ln[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}]+c,\ \text{οπότε}\ 2\int_a^k\beta\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}dx=$$

$$\left[\beta x\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]_a^k-a\beta\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]_a^k=\beta k\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2-1}-a\beta[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2-1}]$$

ΘΕΩΡΙΑ

“cogito ergo sum” (René Descartes)

Για τις καμπύλες της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής θα θεωρήσουμε ότι τα σημεία F, F_1, F_2 είναι σταθερά, και επιπλέον ότι τα F_1, F_2 ισαπέχουν από το σημείο O. Με αυτές τις προϋποθέσεις θα διατυπωθεί και θα δειχθεί ότι ισχύει το αντίστροφο της οπτικής τους ιδιότητας. Έτσι θα έχουμε τη δυνατότητα μετά από περίπου 2500 χρόνια από όταν διατυπώθηκαν οι 3 πρώτοι ορισμοί, να χρησιμοποιήσουμε την οπτική ιδιότητα σαν τον τέταρτο ορισμό των κωνικών τομών[23].

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και την καμπύλη Y=g(X), η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Αν υπάρχει σημείο F και δέσμη παραλλήλων ακτίνων, οι οποίες ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες να

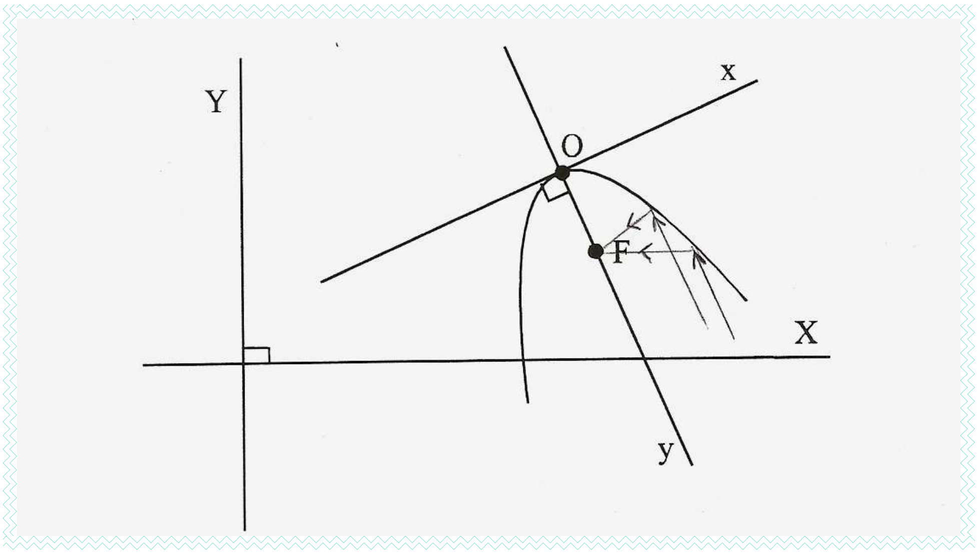
[23] Τα νέα θεωρήματα προέκυψαν κατά την εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας της συγγραφέα, για την απόκτηση του Μ.Δ.Ε. στη ¨Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών¨. Η εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του κ. Ιωάννη Αραχωβίτη, Μέλους του Σώματος Ομοτίμων Καθηγητών του ΕΚΠΑ, και με μέλη της Τριμελούς Επιτροπής τον Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ κ. Σταύρο Παπασταυρίδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του ιδίου Τμήματος κ. Αθανάσιο Χρυσάκη. Βλ. σε: Μαρία Χάλκου, ¨*Κωνικές τομές- Ιστορικό- Θεωρία*¨. Μαθηματική Επιθεώρηση της ΕΜΕ, 48 (1997), σελ. 32- 39. Βλ. και σε:

Ι. Λ. Αραχωβίτη, *Τεκμηρίωση Διδασκαλίας,* εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1998, σελ. 117.

διέρχονται από το F, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι παραβολή με εστία το F. Επεξήγηση: Έστω O το σημείο τομής της καμπύλης με την ακτίνα που διέρχεται από το F. Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων που έχει θετικό ημιάξονα των y την OF, και άξονα των x την κάθετη της Oy στο O. Τότε προκύπτει η παραβολή y=f(x) με εστία το σημείο F, όπως φαίνεται στο σχήμα Α που παρατίθεται στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι πολύ σημαντικός από παιδαγωγικής άποψης επειδή μας παρέχει τη δυνατότητα να εισαγάγουμε το μεγαλύτερο μέρος του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή τον Διαφορικό Λογισμό, παρακάμπτοντας τη δυσκολονόητη έννοια του ορίου[24].

[24] Μία συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εάν και μόνον εάν υπάρχει συνάρτηση φ(x) συνεχής στο x_0, τέτοια ώστε $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$. Το $\varphi(x_0)$ θα είναι η παράγωγος της f στο x_0, δηλαδή $\varphi(x_0) = f\,'(x_0)$. C. Carathéodory's, *Funktionentheorie,* Ester Band, Pub. Verlag Birkhäuser, Basel 1950, pp. 288 [III.6]. Βλ. και σε: 1) E. Hairer- G. Wanner, *Analysis by its History,* Pub. Springer- Verlag, N. York 1996, p. 236. 2) Stephen Kuhn, *The Derivative à la Carathéodory,* The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1 (Jan., 1991), pp. 40 - 44, Pub.:Mathematical Association of America, (Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2324035).



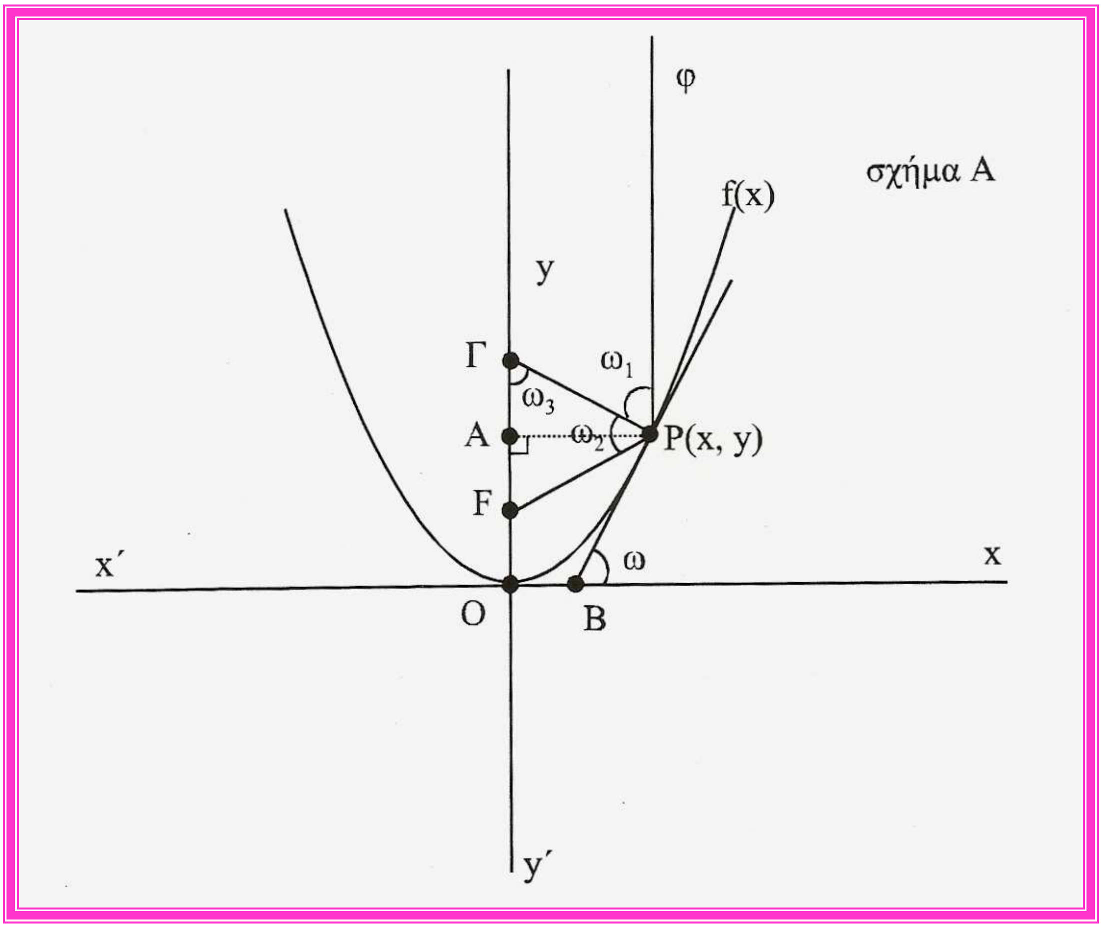
Ο προαναφερθείς ορισμός είναι συνέπεια του θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και την καμπύλη $Y=g(X)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Αν υπάρχει σημείο F και δέσμη παραλλήλων ακτίνων, οι οποίες ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F, τότε η καμπύλη θα είναι παραβολή με εστία το σημείο F.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω O το σημείο τομής της καμπύλης με την ακτίνα που διέρχεται από το σημείο F, όπως φαίνεται στο σχήμα A.



Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων που έχει θετικό ημιάξονα των y την OF και άξονα των x την κάθετη στο O της Oy. Τότε προκύπτει η παραβολή y=f(x), όπως φαίνεται στο σχήμα A.

Θεωρώ ότι η ευθεία (φ) είναι η προσπίπτουσα ακτίνα, OF=κ σταθερό ευθύγραμμο τμήμα, PB εφαπτόμενη της καμπύλης στο P, $P\Gamma \perp PB$, και $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 = \hat{\omega}$, όπου εφω είναι η κλίση της καμπύλης στο σημείο P(x,y). Άρα

$$\varepsilon\varphi(180-2\omega)=-\varepsilon\varphi 2\omega=\frac{AP}{AF}\Rightarrow AF=-\frac{AP}{\varepsilon\varphi 2\omega}\Rightarrow AF=-x\sigma\varphi 2\omega.$$

$$OA=AF+k\Rightarrow y=-x\sigma\varphi 2\omega+k\Rightarrow y=\frac{-x}{\varepsilon\varphi 2\omega}+k\Rightarrow y=\frac{-x\left(1-\varepsilon\varphi^2\omega\right)}{2\varepsilon\varphi\omega}+k$$

$$\Rightarrow y=\frac{-x\left[1-(y')^2\right]}{2y'}+k\Rightarrow 2yy'=-x+x(y')^2+2y'k\Rightarrow$$

$$2yy'+x-x\left(y'\right)^2=2y'k\Rightarrow y'=\frac{y-k}{x}\pm\sqrt{\left(\frac{y-k}{x}\right)^2+1}\,(1),\text{ και αν }\frac{y-k}{x}=\omega(x)$$

$\Rightarrow y'=\omega+x\omega'$ (Βλ. σε: Παράρτημα). Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\omega+x\omega'=\omega\pm\sqrt{\omega^2+1}\Rightarrow$$

$$x\omega'=\pm\sqrt{\omega^2+1}\Rightarrow x\frac{d\omega}{dx}=\pm\sqrt{\omega^2+1}\Rightarrow\frac{d\omega}{\pm\sqrt{\omega^2+1}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d\omega}{\pm\sqrt{\omega^2+1}}\Rightarrow$$

$$\ln|x|=\pm\ln\left|\omega\pm\sqrt{\omega^2+1}\right|+\ln|c_1|\,(2)\Rightarrow$$

$$\ln|x|=\pm\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2+1}\right|+\ln|c_1|\Rightarrow\ln|x|=\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2+1}\right|+\ln|c_1|\Rightarrow$$

$$\ln|x|=\ln\left|c_1(\omega+\sqrt{\omega^2+1})\right|(A),\text{ ή}$$

$$\ln|x|=-\ln\left|\omega+\sqrt{\omega^2+1}\right|+\ln|c_1|\Rightarrow\ln|x|=\ln\left|(\omega+\sqrt{\omega^2+1})^{-1}\right|+\ln|c_1|\Rightarrow$$

$$\ln|x|=\ln\left|\frac{c_1}{\omega+\sqrt{\omega^2+1}}\right|(B)$$

Από τη σχέση (Α) θα έχω: $|x| = \left|c_1\left(\omega + \sqrt{\omega^2+1}\right)\right| \Leftrightarrow x = \pm c_1\left(\omega + \sqrt{\omega^2+1}\right) \Leftrightarrow$

$$x = c_2\left(\omega + \sqrt{\omega^2+1}\right) \Leftrightarrow x = c_2\left[\frac{y-k}{x} + \sqrt{\left(\frac{y-k}{x}\right)^2 + 1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{c_2} = \frac{y-k}{x} + \sqrt{\left(\frac{y-k}{x}\right)^2 + 1} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{c_2} - \frac{y-k}{x}\right)^2 = \left(\frac{y-k}{x}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{c_2}\right)^2 - 1 = 2\frac{y-k}{c_2} \Leftrightarrow \frac{c_2}{2}\left[\left(\frac{x}{c_2}\right)^2 - 1\right] = y-k \Rightarrow$$

$$y = \frac{c_2}{2}\left[\left(\frac{x}{c_2}\right)^2 - 1\right] + k$$

$$(B) \Rightarrow |x| = \left|\frac{c_1}{\omega + \sqrt{\omega^2+1}}\right| \Leftrightarrow x = \frac{c_2}{\omega + \sqrt{\omega^2+1}} . c_2 = \pm c_1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{c_2}{\frac{y-k}{x} + \sqrt{\left(\frac{y-k}{x}\right)^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{y-k}{x}\right)^2 + 1} = \frac{c_2}{x} - \frac{y-k}{x} \Leftrightarrow$$

$$2(y-k)\frac{c_2}{x^2} = \left(\frac{c_2}{x}\right)^2 - 1$$

Άρα $y = k + \dfrac{x^2}{2c_2}\left[\left(\dfrac{c_2}{x}\right)^2 - 1\right]$

$$y = \frac{c_2}{2}\left(\frac{x}{c_2}\right)^2 - \frac{c_2}{2} + k = \frac{1}{2c_2}x^2 + \lambda, \text{ όπου } \lambda = -\frac{c_2}{2} + k \Leftrightarrow$$

$$y - \lambda = \frac{1}{2c_2}x^2 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2c_2}X^2 (Y = y-\lambda, X = x) \Leftrightarrow X^2 = 2c_2 Y \text{ (παραβολή)}$$

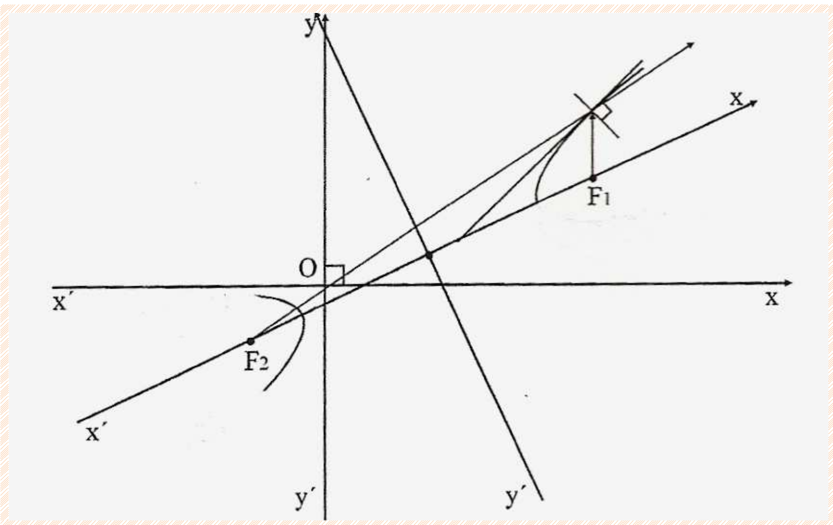
Στην περίπτωση (Α) συνεχίζουμε ως εξής:

$$y=\frac{c_2}{2}\left(\frac{x}{c_2}\right)^2-\frac{c_2}{2}+k=\frac{1}{2c_2}x^2+\lambda,\ \text{όπου } \lambda=-\frac{c_2}{2}+k \Leftrightarrow$$
$$y-\lambda=\frac{1}{2c_2}x^2 \Leftrightarrow Y=\frac{1}{2c_2}X^2(Y=y-\lambda, X=x) \Leftrightarrow X^2=2c_2Y \text{ (παραβολή)}$$

Όμοια για την περίπτωση (Β).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F_1, F_2, και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F_1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται προεκτεινόμενες από το F_2, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία F_1, F_2. Επεξήγηση:
Θεωρούμε ως άξονα των x την F_1F_2, και άξονα των y τη μεσοκάθετο του F_1F_2. Τότε η εξίσωση της υπερβολής θα είναι: y=f(x), όπως φαίνεται στο σχήμα Β που παρατίθεται στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

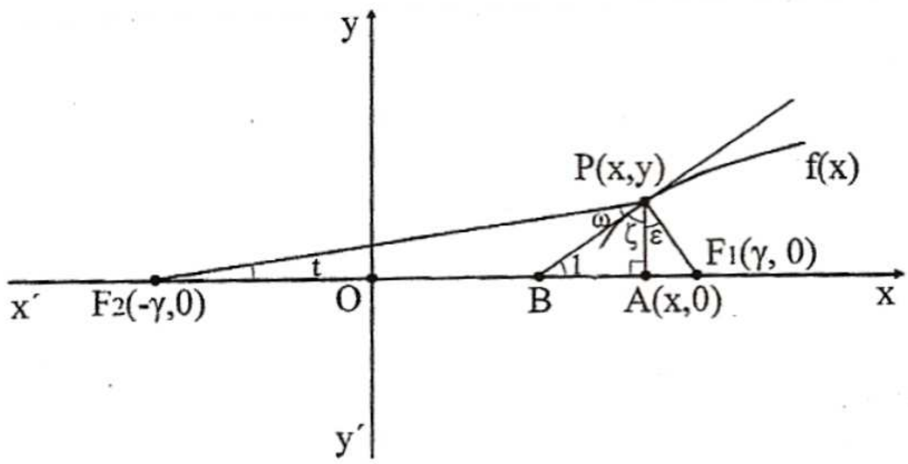


Αυτός ο ορισμός προκύπτει από το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F_1, F_2, και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F_1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται προεκτεινόμενες από το F_2, τότε η καμπύλη θα είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία F_1, F_2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα Β

Θεωρούμε ως άξονα των x την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία F_1, F_2, και ως άξονα των y τη μεσοκάθετη του F_1F_2. Τότε η εξίσωση της υπερβολής θα είναι: y=f(x) (σχήμα. Β).

$$\varepsilon\varphi B_1 = y' = \frac{y}{BA} \Rightarrow BA = \frac{y}{y'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\zeta = \dfrac{BA}{y} = \dfrac{\frac{y}{y'}}{y} = \dfrac{1}{y'} \\ \varepsilon\varphi\varepsilon = \dfrac{AF_1}{y} = \dfrac{\gamma - x}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\zeta + \varepsilon) = \frac{\varepsilon\varphi\zeta + \varepsilon\varphi\varepsilon}{1 - \varepsilon\varphi\zeta\varepsilon\varphi\varepsilon} = \frac{\frac{1}{y'} + \frac{\gamma - x}{y}}{1 - \frac{\gamma - x}{yy'}} =$$

$$\frac{y + y'\gamma - y'x}{yy' - \gamma + x} (1)$$

$$\hat{\omega} = \hat{B}_1 - \hat{t} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi B_1 - \varepsilon\varphi t}{1 + \varepsilon\varphi B_1 \varepsilon\varphi t} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{y' - \frac{y}{\gamma + x}}{1 + y'\frac{y}{\gamma + x}} = \frac{y'\gamma + y'x - y}{\gamma + x + yy'} (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{y + y'\gamma - y'x}{yy' - \gamma + x} = \frac{y'\gamma + y'x - y}{\gamma + x + yy'} \Rightarrow$$

$$\gamma y\left(y'\right)^2 + yx\left(y'\right)^2 - y^2 y' - \gamma^2 y' - \gamma x y' + \gamma y + x\gamma y' + x^2 y' - xy =$$

$$\gamma y + \gamma^2 y' - \gamma x y' + xy + xy'\gamma - x^2 y' + y^2 y' + y\left(y'\right)^2 \gamma - y\left(y'\right)^2 x \Rightarrow$$

$$2yx\left(y'\right)^2 - 2y^2 y' - 2\gamma^2 y' + 2x^2 y' - 2xy = 0 \Rightarrow$$

$yx\left(y'\right)^2 + y'\left(-y^2 - \gamma^2 + x^2\right) - xy = 0$ (Βλέπε σε: Παράρτημα)

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίδεται αμέσως μετά την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί. Αυτό γίνεται, επειδή και στην περίπτωση της έλλειψης καταλήγουμε, όπως θα διαπιστώσουμε, στην ίδια διαφορική εξίσωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F_1, F_2 και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το σημείο F_1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F_2, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία F_1, F_2.

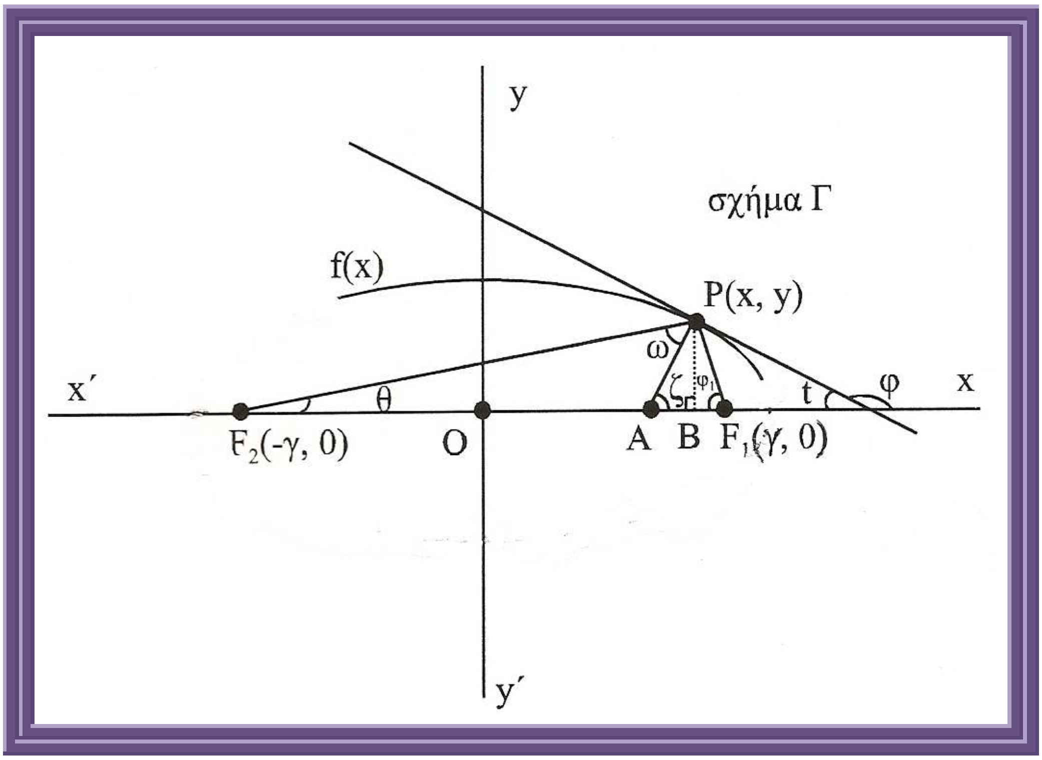
Επεξήγηση: Θεωρούμε την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία F_1, F_2 ως άξονα των x, και τη μεσοκάθετη του F_1F_2 ως άξονα των y. Τότε η έλλειψη θα έχει εξίσωση y=f(x) (Βλέπε σχήμα Γ στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί).

Αυτός ο ορισμός προκύπτει από το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F_1, F_2 και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F_1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F_2 τότε η καμπύλη θα είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία F_1, F_2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θεωρούμε την F_1F_2 ως άξονα των x και τη μεσοκάθετη στην F_1F_2 ως άξονα των y. Τότε η εξίσωση της έλλειψης θα είναι y=f(x) (σχήμα Γ).

$$P\hat{F}_1B = \hat{\varphi}_1, \varepsilon\varphi\varphi = y' = -\varepsilon\varphi t = -\varepsilon\varphi(90° - \zeta) = -\sigma\varphi\zeta = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\zeta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\zeta = \frac{-1}{y'}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{y}{\gamma - x}(2)$$

$$\text{Από } \hat{\omega}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{F}_2 \Rightarrow \hat{\omega} = 180° - \left(\hat{\zeta} + \hat{\varphi}_1\right) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\left(\zeta + \varphi_1\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\varepsilon\varphi\zeta - \varepsilon\varphi\varphi_1}{1 - \varepsilon\varphi\zeta\varepsilon\varphi\varphi_1} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\dfrac{1}{y'} - \dfrac{y}{\gamma - x}}{1 + \dfrac{y}{y'\left(\gamma - x\right)}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma - x - yy'}{y'\gamma - y'x + y}(1)$$

$\hat{\omega}=\hat{\zeta}-\hat{\theta}\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\zeta-\theta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\zeta-\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi\zeta\varepsilon\varphi\theta}$. Αλλά $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{y}{\gamma+x}\Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\dfrac{-1}{y'}-\dfrac{y}{\gamma+x}}{1-\dfrac{y}{y'(\gamma+x)}}=\dfrac{-\gamma-x-yy'}{y'\gamma+y'x-y}$(2). Από (1) και (2) έχω:

$$\frac{-\gamma-x-yy'}{y'\gamma+y'x-y}=\frac{\gamma-x-yy'}{y'\gamma-y'x+y}\Rightarrow$$
$$\gamma^2y'+y'x\gamma-\gamma y-xy'\gamma-x^2y'+xy-(y')^2y\gamma-(y')^2xy+y^2y'=$$
$$-\gamma^2y'+\gamma xy'-\gamma y-x\gamma y'+x^2y'-xy-(y')^2y\gamma+(y')^2xy-y^2y'\Rightarrow$$
$$xy(y')^2+y'(x^2-y^2-\gamma^2)-xy=0$$

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης: $xy(y')^2+y'(x^2-y^2-\gamma^2)-xy=0$ (Δ) χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Legendre:

Η εξίσωση είναι πεπλεγμένης μορφής. Θέτουμε[25] ξ=y΄(x). Άρα

$\eta(\xi)=xy'(x)-y(x)\Rightarrow y=xy'-\eta\Rightarrow y=\eta'\xi-\eta$

$\eta'(\xi)=x$ (επειδή η=xξ-y $\Rightarrow$ η′=0.ξ+1.x-0=x)

$y''(x)\neq 0$

$\eta''(\xi)\neq 0$ (επειδή $\eta''(\xi)=x'=h'(\xi)=\dfrac{1}{y''(\xi)}\neq 0$)

Άρα η διαφορική εξίσωση (Δ) γίνεται:

25

Ο μετασχηματισμός Legendre χρησιμοποιείται εάν $y''(x)\neq 0$. Εάν δε $y''(x)=0$ $\Rightarrow \dfrac{dy'(x)}{dx}=0\Rightarrow \int dy'(x)=\int 0dx\Rightarrow y'(x)=c\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=c\Rightarrow \int dy=\int cdx\Rightarrow$ $y=cx+c_1$, το οποίο είναι άτοπο, επειδή η συνάρτηση y(x) παριστά καμπύλη και όχι ευθεία.

Βλέπε σε: Δημ. Κάππου, *Διαφορικές εξισώσεις*, [2]Αθήνα 1966, σελ. 140.

$$\eta'(\eta'\xi-\eta)\xi^2+\xi\left[(\eta')^2-\gamma^2-(\eta'\xi-\eta)^2\right]-\eta'(\eta'\xi-\eta)=0\Rightarrow$$

$$(\eta')^2\xi^3-\eta\eta'\xi^2+\xi(\eta')^2-\xi\gamma^2-\xi^3(\eta')^2-\xi\eta^2+2\xi^2\eta\eta'-(\eta')^2\xi+\eta\eta'=0\Rightarrow$$

$$\eta\eta'\xi^2+\eta\eta'-\xi\eta^2-\xi\gamma^2=\eta\eta'\left(\xi^2+1\right)-\xi\eta^2-\xi\gamma^2=0\Rightarrow$$

$$\eta\frac{d\eta}{d\xi}\left(\xi^2+1\right)-\xi\eta^2-\xi\gamma^2=0\Rightarrow$$

$$\eta\left(\xi^2+1\right)d\eta=\left(\xi\eta^2+\xi\gamma^2\right)d\xi\Rightarrow$$

$$\eta\left(\xi^2+1\right)d\eta=\xi\left(\eta^2+\gamma^2\right)d\xi\quad\overset{\pi o\lambda\lambda.\ \text{με}\ \frac{1}{\left(\xi^2+1\right)\left(\eta^2+\gamma^2\right)}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\eta}{\eta^2+\gamma^2}d\eta=\frac{\xi}{\xi^2+1}d\xi\Rightarrow\int\frac{\eta}{\eta^2+\gamma^2}d\eta=\int\frac{\xi}{\xi^2+1}d\xi\Rightarrow$$

$$\ln\left(\eta^2+\gamma^2\right)=\ln\left(\xi^2+1\right)+c_1-c\quad\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ c_1-c=\ln c_2\ \text{(βλέπε παρατήρηση I)}}{\Rightarrow}$$

$$\ln\left(\eta^2+\gamma^2\right)=\ln\left[c_2\left(\xi^2+1\right)\right]\Rightarrow\eta^2+\gamma^2=c_2\left(\xi^2+1\right)\Rightarrow$$

$$\eta^2=c_2\left(\xi^2+1\right)-\gamma^2\Rightarrow\eta=\pm\sqrt{c_2\left(\xi^2+1\right)-\gamma^2}\Rightarrow$$

$$\eta'=\pm\frac{\xi c_2}{\sqrt{c_2\left(\xi^2+1\right)-\gamma^2}}=x\Rightarrow$$

$$\xi^2c_2{}^2=x^2\left(c_2\xi^2+c_2-\gamma^2\right)\Rightarrow\xi^2\left(c_2{}^2-c_2x^2\right)=x^2\left(c_2-\gamma^2\right)\ (1)\quad\overset{\beta\lambda\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\ \text{παρατήρηση II}}{\Rightarrow}$$

$$(y')^2=\frac{x^2\left(c_2-\gamma^2\right)}{c_2{}^2-c_2x^2}\Rightarrow y'=\pm x\sqrt{\frac{c_2-\gamma^2}{c_2{}^2-c_2x^2}}=\pm\sqrt{\frac{c_2-\gamma^2}{c_2}}x\sqrt{\frac{1}{c_2-x^2}}\Rightarrow$$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{c_2-\gamma^2}{c_2}}\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{c_2-x^2}}dx\Rightarrow y=\mp\sqrt{\dfrac{c_2-\gamma^2}{c_2}}\sqrt{c_2-x^2}$ πρόκειται για έλλειψη

με $\alpha=\sqrt{c_2}$, και $\beta^2=c_2-\gamma^2$ ($\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\Rightarrow$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-\gamma^2}{\alpha^2}}\sqrt{\alpha^2-x^2}$).

Παρατήρηση Ι

Αν $c_1 - c < 0$, θέτω $\ln c_3 = c - c_1$, οπότε

$$\ln c_3 + \ln\left(\eta^2+\gamma^2\right) = \ln\left(\xi^2+1\right) \Rightarrow$$

$$c_3\left(\eta^2+\gamma^2\right) = \xi^2+1 \Rightarrow \eta^2 = \frac{\xi^2+1-c_3\gamma^2}{c_3} \Rightarrow \eta = \pm\sqrt{\frac{\xi^2+1-c_3\gamma^2}{c_3}} \Rightarrow$$

$$\eta' = \pm\frac{\xi}{c_3\sqrt{\dfrac{\xi^2+1-c_3\gamma^2}{c_3}}} = x \Rightarrow \xi^2 = c_3x^2\left(\xi^2+1-c_3\gamma^2\right) \Rightarrow$$

$\xi^2\left(1-c_3x^2\right) = x^2c_3\left(1-c_3\gamma^2\right)(1)$, ή $\xi^2\left(-1+c_3x^2\right) = x^2c_3\left(-1+c_3\gamma^2\right)$ (2).

Από τη σχέση (1) θα έχουμε: $\left(y'\right)^2 = \dfrac{x^2c_3\left(1-c_3\gamma^2\right)}{1-c_3x^2} \Rightarrow$

$$y' = \pm x\sqrt{c_3\left(1-c_3\gamma^2\right)}\sqrt{\frac{1}{1-c_3x^2}} \Rightarrow y = \mp\sqrt{c_3\left(1-c_3\gamma^2\right)}\frac{1}{c_3}\sqrt{1-c_3x^2} \Rightarrow$$

$$y = \mp\sqrt{\frac{1}{c_3}-\gamma^2}\sqrt{1-c_3x^2}.$$

Από τη σχέση (2) θα έχουμε: $\left(y'\right)^2 = \dfrac{x^2c_3\left(-1+c_3\gamma^2\right)}{-1+c_3x^2} \Rightarrow$

$$y' = \pm x\sqrt{c_3\left(-1+c_3\gamma^2\right)}\sqrt{\frac{1}{-1+c_3x^2}} \Rightarrow y = \pm\sqrt{c_3\left(-1+c_3\gamma^2\right)}\frac{1}{c_3}\sqrt{-1+c_3x^2} \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{-\frac{1}{c_3}+\gamma^2}\sqrt{-1+c_3x^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{-\frac{1}{c_3}+\gamma^2}\sqrt{c_3}\sqrt{x^2-\frac{1}{c_3}} \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{c_3\gamma^2-1}\sqrt{x^2-\frac{1}{c_3}}$$

Παρατήρηση ΙΙ

Αν $c_2-\gamma^2 \prec 0$, τότε $\xi^2\left(c_2x^2-c_2{}^2\right)=x_2\left(\gamma^2-c_2\right) \Rightarrow y'=\pm x\sqrt{\dfrac{\gamma^2-c_2}{c_2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-c_2}} \Rightarrow$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{\gamma^2-c_2}{c_2}}\sqrt{x^2-c_2}$, η οποία είναι υπερβολή με α=$\sqrt{c_2}$, και $\beta^2=\gamma^2-c_2$,

επειδή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow y=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}}\sqrt{x^2-a^2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

► Η κατασκευή των παραβολικών τηλεσκοπίων βασίζεται στην οπτική ιδιότητα της παραβολής.

► Όμοια και η κατασκευή των Ραντάρ.

► Το ίδιο ισχύει για τα φανάρια των αυτοκινήτων.

► Η μέθοδος της λιθοθρυψίας βασίζεται στην οπτική ιδιότητα της έλλειψης, και εφαρμόζεται ως εξής: Η εκπομπή των ακτίνων γίνεται από τη μία εστία της έλλειψης, ενώ το μέρος του σώματος του ασθενούς, το οποίο θέλουμε να επιδράσουν οι ακτίνες τοποθετείται στην άλλη εστία.

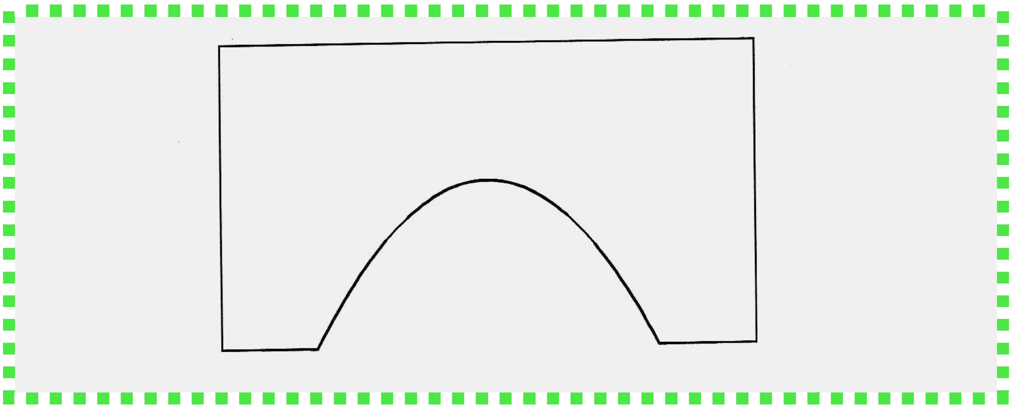
► Στη βαλλιστική, η τροχιά των βλημάτων όταν η βολή είναι επισκυπτική, είναι παραβολή, εφόσον βέβαια δεν υπολογίζεται η αντίσταση του αέρα.

► Οι πλανήτες κατά την κίνησή τους γύρω από τον ήλιο διαγράφουν ελλειπτική τροχιά της οποίας η μία εστία είναι ο ήλιος.

► Οι ζωγράφοι όταν αναπαριστούν τον κύκλο με προοπτική χρησιμοποιούν την καμπύλη της έλλειψης.

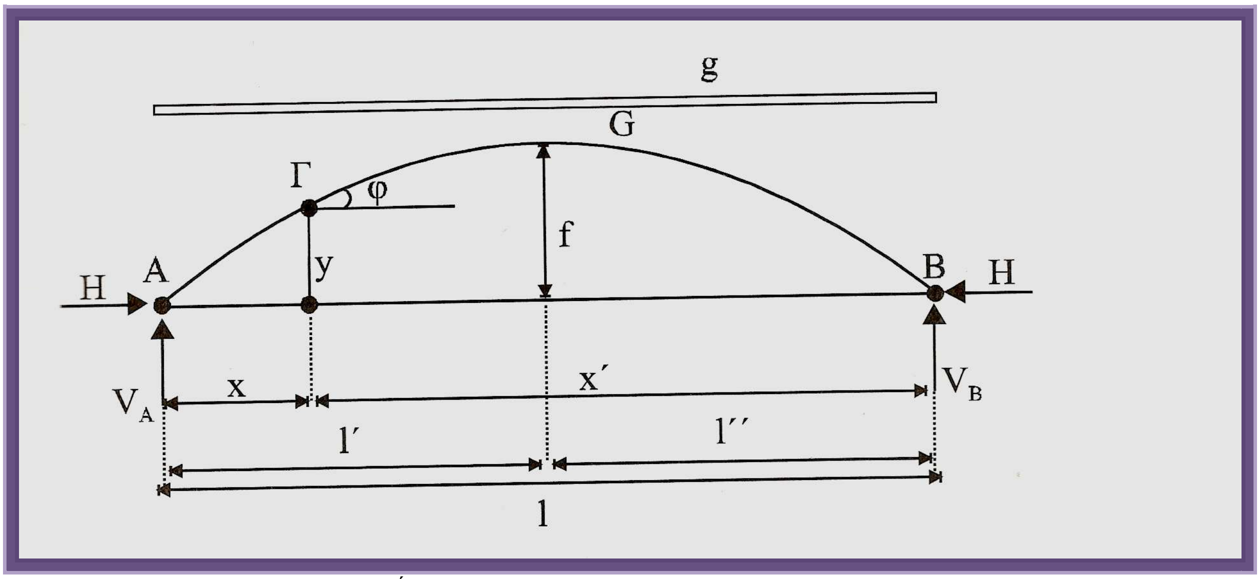
► Τα υπερβολικά παραβολοειδή που χρησιμοποιούνται στις στέγες αλλά και σε τρούλους οικοδομημάτων, σαν επιφάνειες κατασκευάζονται σχετικά εύκολα, γιατί είναι ευθειογενείς, που σημαίνει πως το καλούπωμα γίνεται με συνηθισμένες σανίδες οικοδομής[26].

► Οι πέτρινες γέφυρες έχουν ως επί το πλείστον μορφή παραβολής γιατί, όταν διερχόμενο το φορτίο ασκούνται σ’ αυτό δυνάμεις εφελκυσμού, η παραβολή τείνει να τις μετατοπίζει στα άκρα, όπου η κατασκευή είναι ενισχυμένη.



Στη συνέχεια εξετάζεται η γενική περίπτωση κατά την οποία ένα παραβολικό τριαρθρωτό τόξο φορτίζεται καθολικά από ομοιόμορφο κατακόρυφο φορτίο έντασης g ανά μονάδα μήκους του οριζόντιου ανοίγματος l. Τότε V_A=V_B=gl/2, και η οριζόντια ώθηση H θα δίνεται από τον τύπο: H=M_{G_0}/f=gl΄l΄΄/2f, όπου στη διατομή G, η κ. ρ. M_{G_0} τέθηκε ίση με gl΄l΄΄/2.

[26] Ι. Λ. Αραχωβίτη, *Τεκμηρίωση Διδασκαλίας,* εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1998, σελ. 118.



Η κ. ρ. στη διατομή Γ(x,x΄,y) του τόξου, αν υπολογισθεί ως συνιστών στοιχείο των εξωτερικών δυνάμεων που είναι αριστερά της διατομής, είναι

$$\mathrm{M}_{\Gamma} = \mathrm{M}_{\Gamma_0} - \mathrm{H}_{y} = \frac{gxx'}{2} - \frac{gl'l''}{2f}y, \text{ όπου } \mathrm{M}_{\Gamma_0} \text{ η κ. ρ. στη διατομή } \Gamma(\mathrm{x},\mathrm{x}').$$

$$\text{Έχει όμως δειχθεί ότι y=}\frac{f}{l'l''}xx' \Rightarrow \mathrm{M}_{\Gamma} = \frac{gxx'}{2} - \frac{gl'l''}{2f}\frac{f}{l'l''}xx' = 0.$$

Από την πιο πάνω σχέση προκύπτει, ότι στο παραβολικό τριαρθρωτό τόξο αυτής της περίπτωσης, οι καμπτικές ροπές μηδενίζονται σε όλες τις διατομές του. Η ιδιότητα αυτή ενισχύει την αξία αυτού του τόξου, το οποίο εμφανίζει κάτω από ορισμένες –όπως περιγράφηκαν- προϋποθέσεις, μηδενική καμπτική ένταση, ή έστω μικρή καμπτική ένταση, όταν η καμπύλη τείνει να γίνει παραβολή και η φόρτηση αποκλίνει λίγο σε σχέση με αυτή που περιγράφηκε πιο πάνω[27].

[27] Ε. Κοκκινόπουλου, *Στατική,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1997, τόμ. ΙΙ, σελ. 276-295.

► Στην κατασκευή των κεραιών εφαρμόζεται η οπτική ιδιότητα της παραβολής.

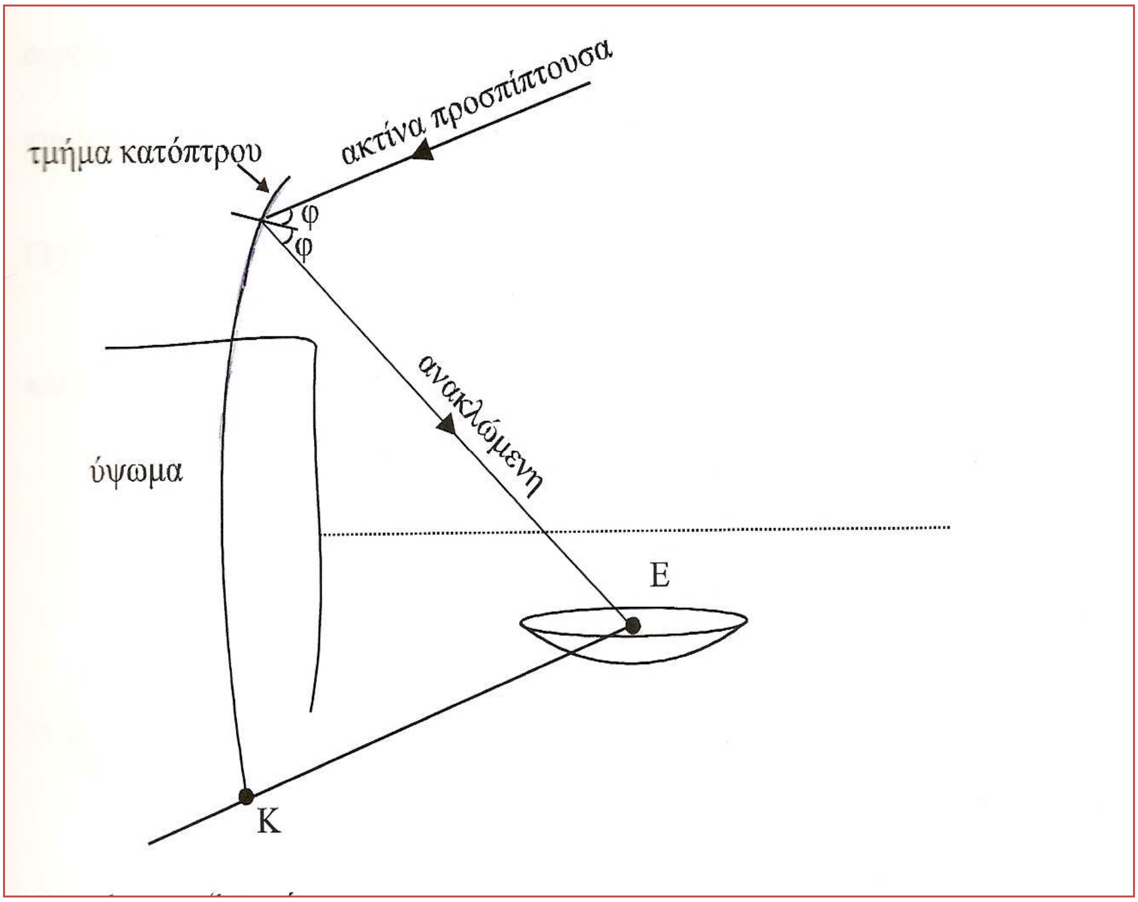
► Το ίδιο και στην κατασκευή των ηλεκτρικών θερμαστρών.

► Σχετικά με το ιστορικό πρόβλημα της καύσης του Ρωμαϊκού στόλου, πιθανολογείται ότι χρησιμοποιήθηκαν παραβολικά κάτοπτρα στραμμένα προς το πλοίο με τέτοιον τρόπο, ώστε κάποιο επιλεγμένο σημείο του πλοίου να θεωρείται ως εστία της παραβολής. Λόγω της μεγάλης απόστασης θεωρούμε ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες μεταξύ τους, οπότε, αν τα κάτοπτρα είναι τοποθετημένα έτσι ώστε οι ακτίνες του ήλιου να είναι παράλληλες με τον κύριο άξονα της παραβολής, τότε ανακλώμενες θα διέρχονται από την εστία, και έτσι θα επιτευχθεί η καύση του πλοίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι το εγχείρημα έχει επαληθευτεί[28] το 1973 στη Σαλαμίνα από τον ελληνικής καταγωγής μηχανικό Ιωάννη Σακά[29], ο οποίος χρησιμοποίησε σειρά επιπέδων και επιχαλκωμένων κατόπτρων τοποθετημένων έτσι ώστε να σχηματίζουν παραβολή.

---

[28] Ι. Σακά, *Ο Αρχιμήδης έκαυσε τον στόλον των Ρωμαίων δι' επιπέδων κατόπτρων,* Τεχνικά Χρονικά, (Σεπτέμβριος 1973), σελ. 771- 778. Βλ. και σε P. Thuillier, *Τα εμπρηστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη,* Περισκόπιο της Επιστήμης, αρ. 22 (Σεπτέμβριος 1979), σελ. 9 - 19.

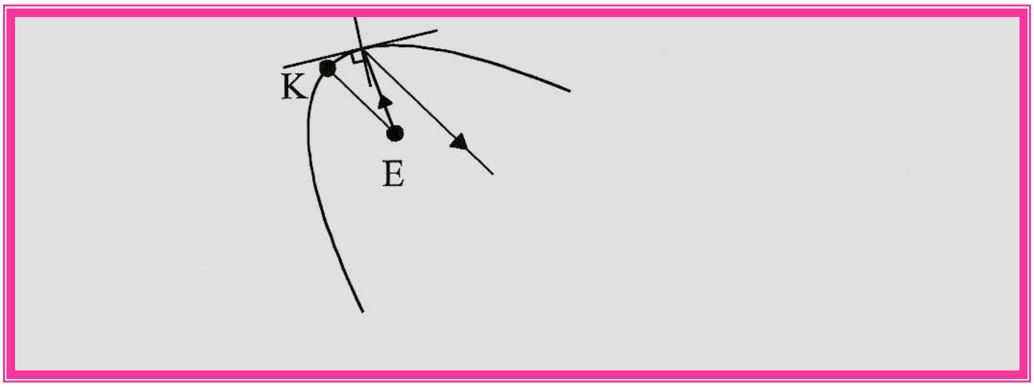
[29] Χ. Δ. Λάζου, *Μηχανική και Τεχνολογία στην Αρχαία Ελλάδα,* εκδ. Αίολος, [3]Αθήνα 1993, σελ. 85.



Το πείραμα αυτό πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του μαθηματικού Ε. Σταμάτη[30], τα δε κάτοπτρα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν επιχαλκωμένα ώστε να ομοιάζουν με τα κάτοπτρα που υποτίθεται ότι είχε στη διάθεσή του ο Αρχιμήδης. Το πείραμα επανέλαβαν το 2005 με την ίδια επιτυχία επιστήμονες του Μ.Ι.Τ., οι οποίοι χρησιμοποίησαν 100 χάλκινα κάτοπτρα και πέτυχαν σε ελάχιστα λεπτά να κάψουν ομοίωμα ρωμαϊκής γαλέρας.

[30] Ε. Σταμάτη, *Τα καυστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδους,* Αθήνα 1982, σελ. 5.

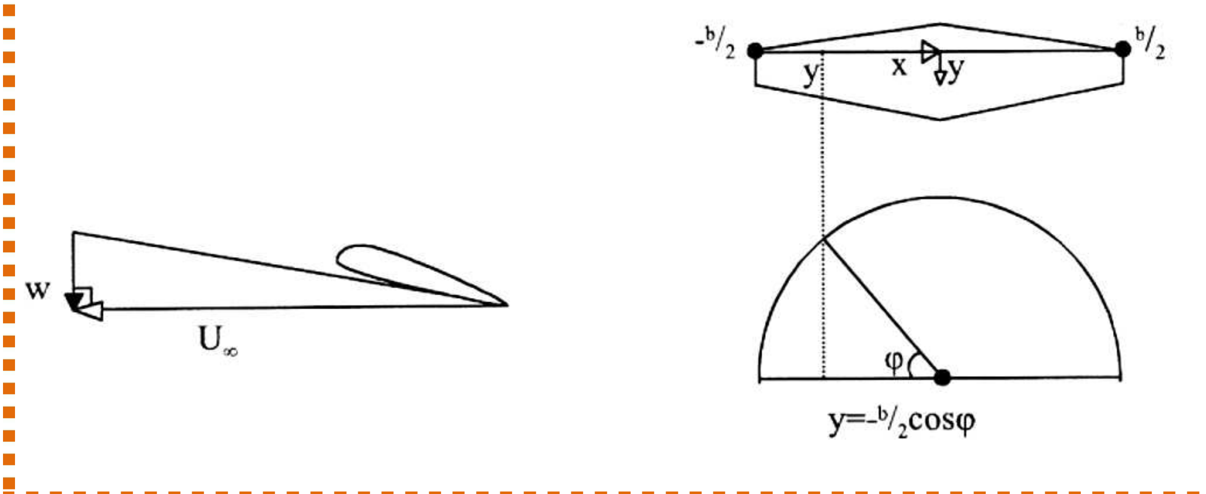
► Κατά την κατασκευή ορισμένων τζακιών η επιφάνεια στο βάθος της εστίας μπορεί να είναι τμήμα παραβολικής επιφάνειας, ώστε να επιτυγχάνεται μετάδοση της θερμότητας σε σημεία κοντά στο πάτωμα.



► Σχετικά με τις πτέρυγες του αεροπλάνου, είναι γνωστό ότι στο σχήμα τους περιλαμβάνονται ελλειπτικά τμήματα, επειδή έχει δειχθεί ότι έτσι επιτυγχάνεται η ελάχιστη οπισθέλκουσα δύναμη όταν το εκτόπισμα είναι δοθέν. Ειδικότερα σε μελέτη σχετική με συγκεκριμένο τύπο αεροσκάφους (υποηχητικό) έχει δειχθεί ότι η συνάρτηση Γ κυκλοφορίας κατά το άνοιγμα της πτέρυγας δίνεται από τον τύπο:

$\Gamma(y) = 2bU_{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n.\varphi)$ (σειρά Fourier), όπου

$y = -\frac{b}{2}\cos\varphi, 0 < \varphi < \pi,\ \kappa\alpha\iota\ (U_{\infty}, \vec{w})$ η συνισταμένη ταχύτητα.



Για ορισμένο συντελεστή άνωσης, η επαγόμενη αντίσταση γίνεται ελάχιστη όταν όλοι οι όροι της σειράς Fourier εκτός του πρώτου όρου είναι ίσοι με 0,

$A_2=A_3=\ldots\ldots\ldots=0$, ή

$$\Gamma(y)=2bU_\infty A_1\sin\varphi=\Gamma_0\sin\varphi,\ \text{όπου}\ \Gamma_0=2bU_\infty A_1.\ \text{Αλλά}\ \sin\varphi=[1-\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$$

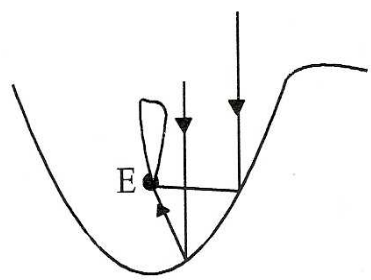
$$=[1-(\frac{2y}{b})^2]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Gamma(y)=\Gamma_0[1-(\frac{2y}{b})^2]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow(\frac{\Gamma}{\Gamma_0})^2+(\frac{y}{\frac{b}{2}})^2=1$$

Δηλαδή προκύπτει ότι η διανομή της κυκλοφορίας κατά το άνοιγμα της πτέρυγας είναι ελλειπτική. Επειδή δε και η τοπική δυναμική άνωση είναι ανάλογη της κυκλοφορίας, τότε η φόρτιση της πτέρυγας, δηλαδή το κλάσμα με αριθμητή την τιμή της στοιχειώδους άνωσης και παρανομαστή την τιμή του εμβαδού της στοιχειώδους πτέρυγας, είναι επίσης ελλειπτική. Η δε ¨χορδή¨ c(y) της πτέρυγας μεταβάλλεται και αυτή κατά τρόπο ελλειπτικό ως εξής:[31]

$$\left(\frac{c(y)}{2\frac{\Gamma_0}{c_1 U_\infty}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = 1$$

► Το ελλειπτικό σχήμα χρησιμοποιήθηκε το 1784 από το στρατηγό Μενιέ στην κατασκευή αερόστατων.

► Για να δημιουργηθεί η Ολυμπιακή φλόγα χρησιμοποιείται αντικείμενο το οποίο έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, στο οποίο οι ακτίνες του ήλιου προσπίπτουν παράλληλα και ανακλώμενες διέρχονται από την εστία Ε. Η φλόγα ανάβει σχετικά εύκολα με τη χρήση ίσως κάποιου βοηθητικού εύφλεκτου υλικού.



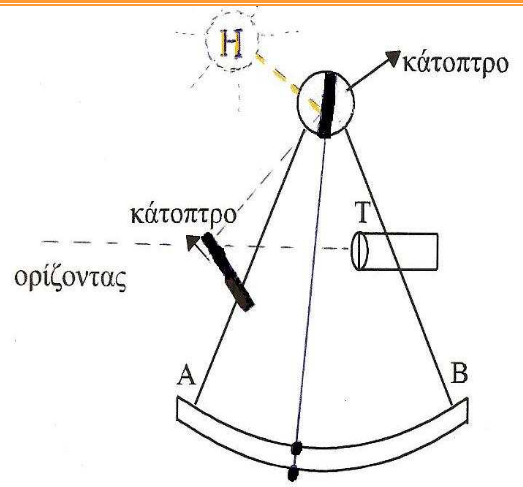
► Προσδιορισμός στίγματος πλοίων.

Είναι γνωστό ότι η γωνιακή απόσταση δύο αντικειμένων μετριέται με ένα φορητό όργανο τον ¨εξάντα¨, και η όλη διαδικασία στηρίζεται στην εξής αρχή: *Όταν φωτεινή ακτίνα ανακλάται διαδοχικά επί δύο επιπέδων κατόπτρων τα*

---

[31] Γ. Μπεργελέ, *Αεροδυναμική υποηχητικού αεροσκάφους,* εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα 1995, σελ. 186- 204.

οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ, τότε η γωνία των διευθύνσεων αρχικής και τελικής ακτίνας είναι ίση προς 2φ. Στον εξάντα βασικό ρόλο κατέχει το τηλεσκόπιο Τ.



► Με βάση τα αρχαιολογικά ευρήματα και μετά από μελέτες ειδικών επιστημόνων εξάγονται ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τη γεωμετρία της ασπίδας που χρησιμοποιούσαν στους πολέμους οι αρχαίοι Έλληνες. Βάσει λοιπόν αξιόπιστων στοιχείων γνωρίζουμε σήμερα ότι το σχήμα της γενέτειρας της διατομής μιας ασπίδας ήταν έλλειψη με μήκος μεγάλου και μικρού ημιάξονα 300 και 120 χιλ. αντίστοιχα. Επιπλέον επιβεβαιώνεται ότι οι κατασκευαστές ασπίδας κατά την αρχαιότητα είχαν όλες τις απαραίτητες γνώσεις των δυναμικών- μηχανικών ιδιοτήτων των πολύστρωτων σύνθετων κατασκευών, που αφορούν στη σύγχρονη τεχνολογία[32].

[32] Σ. Α. Παϊπέτη, *Η άγνωστη τεχνολογία στον Όμηρο,* εκδ. Έσοπτρον, Αθήνα 2005, σελ. 170- 176.

► Ένα πρόβλημα γνωστό από την αρχαιότητα είναι αυτό της κατασκευής κύβου με όγκο διπλάσιο του όγκου κύβου δοθείσης ακμής α. Ζητείται λοιπόν το μέγεθος x της ακμής του νέου κύβου, ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $x^3=2\alpha^3$, όπου α η ακμή του δοθέντος κύβου.

Κατ' ουσία ζητάμε μεγέθη x, y τέτοια ώστε $\alpha/x=x/y=y/(2\alpha)$ (γιατί $x^2=\alpha y$, $y^2=2\alpha x$, $x^2=\alpha\sqrt{(2\alpha.x)}\Rightarrow x^4=\alpha^2.2\alpha x\Rightarrow x^3=2\alpha^3$), οπότε προκύπτει:

(I) $y^2=2\alpha x$, και

$xy=2\alpha^2\Rightarrow y=2\alpha^2/x$ (II).

Η καμπύλη (I) είναι παραβολή και η (II) υπερβολή[33].

► Κατά τη λύση εξισώσεων ανωτέρου βαθμού χρησιμοποιείται η ¨Μέθοδος με Νομογραφήματα¨[34]. Σύμφωνα με αυτή, για να προσδιορίσω τις λύσεις μιας ελλιπούς εξίσωσης 4ου π. χ. βαθμού σχεδιάζω μια παραβολή και μια περιφέρεια κύκλου, βρίσκω τις τεταγμένες y των κοινών τους σημείων, και λαμβάνοντας τα y/t βρίσκω τις ρίζες. Με κατάλληλη επιλογή του t λαμβάνω κύκλο που δίνει καθαρά τα σημεία τομής των κωνικών τομών, ώστε με καλή προσέγγιση να

---

[33] Το αντίστοιχο σχήμα ευρίσκεται στη 3η σελίδα του κεφ. ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ του παρόντος βιβλίου.

[34] Ι. Λ. Αραχωβίτη, *Τεκμηρίωση Διδασκαλίας,* εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1998, σελ. 129. Βλ. και σε Μαρία Χάλκου, *Κώνου τομαί, Θεωρία και Πράξη με έμφαση στις εφαρμογές για τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια,* Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση ΜΔΕ στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ, Αθήνα 1997, σελ. 78.

βρίσκονται τα y, από τα οποία τελικά προκύπτουν οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης 4ου βαθμού.

Έστω ότι δίδεται η εξίσωση: $υ^4 + α΄υ^3 + β΄υ^2 + γ΄υ + δ΄ = 0$. Θέτω $υ = z - α΄/4$, οπότε στην εξίσωση δεν θα υπάρχει τριτοβάθμιος όρος, και κατά συνέπεια θα μπορεί να λυθεί με την προαναφερθείσα μέθοδο.

Έστω λοιπόν $y^2=2x$ (I), και

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (II).

Από τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων προκύπτει ότι:

$y^4+4(1-h)y^2-8ky+4(h^2+k^2-r^2)=0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{y}{t}\right)^4 + \frac{4(1-h)}{t^2}\left(\frac{y}{t}\right)^2 - \frac{8k}{t^3}\left(\frac{y}{t}\right) + 4\frac{h^2+k^2-r^2}{t^4} = 0,$$

και επειδή $z=y/t$, τότε

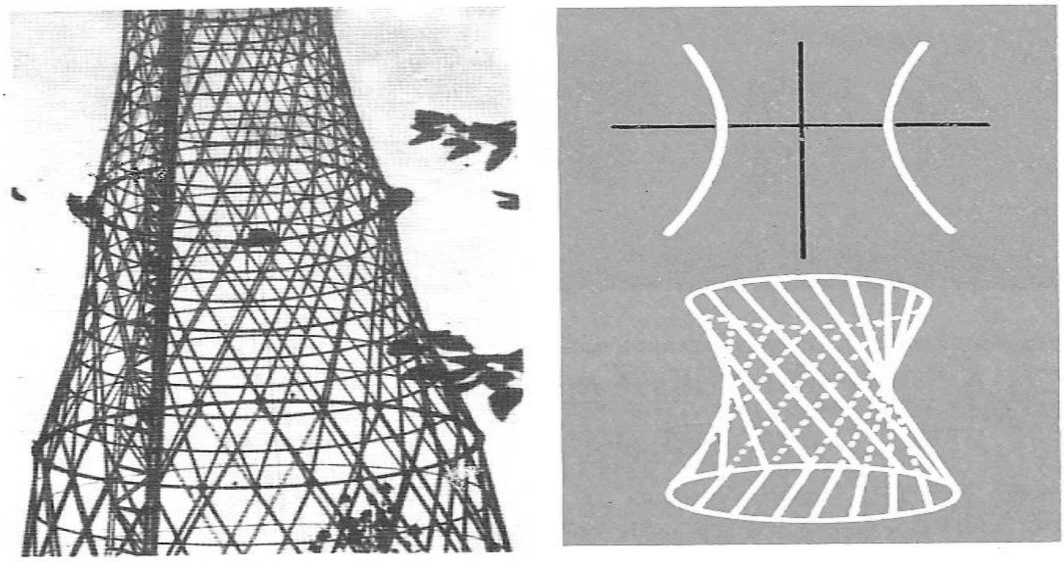
$z^4+αz^2+bz+c=0$.

Στη συνέχεια βρίσκω τις ρίζες αυτής της εξίσωσης, οπότε έχω τα κοινά σημεία των (I) και (II).

► Οι κεραίες που φέρουν συστήματα εκπομπής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην κορυφή τους είναι κατασκευασμένες από ¨μονόχωνα υπερβολοειδή¨[35]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κεραία του σταθμού της Μόσχας στην

[35] Α. Γ. Φελλούρη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία,* Αθήνα 2006, σελ. 177.

τοποθεσία Σαμπόλοφκα, η οποία κατασκευάστηκε με σχέδιο του σοβιετικού και ακαδημαϊκού Β. Γ. Σούχωφ. Τα δε μονόχωνα υπερβολοειδή είναι ευθειογενείς επιφάνειες, όπως φαίνεται στο σχήμα[36].



► Σχετικά με τις αντισεισμικές κατασκευές, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος της παρούσας εφαρμογής ισχύουν γενικά τα εξής:

Το **ελλειψοειδές αδρανείας** ενός υλικού συστήματος ως προς σημείο Ο έχει γενικά 3 άξονες συμμετρίας, τους οποίους ονομάζουμε **πρωτεύοντες άξονες αδρανείας του συστήματος ως προς Ο.** Τα επίπεδα των αξόνων αυτών τα ονομάζουμε **πρωτεύοντα επίπεδα αδρανείας του συστήματος ως προς Ο.** Η **μεγίστη ροπή αδρανείας** του υλικού συστήματος ως προς άξονες διερχόμενους δια του αυτού σημείου του, είναι η **ροπή αδρανείας** του συστήματος ως προς το μικρό άξονα του ελλειψοειδούς αδρανείας του συστήματος ως προς αυτό το σημείο.

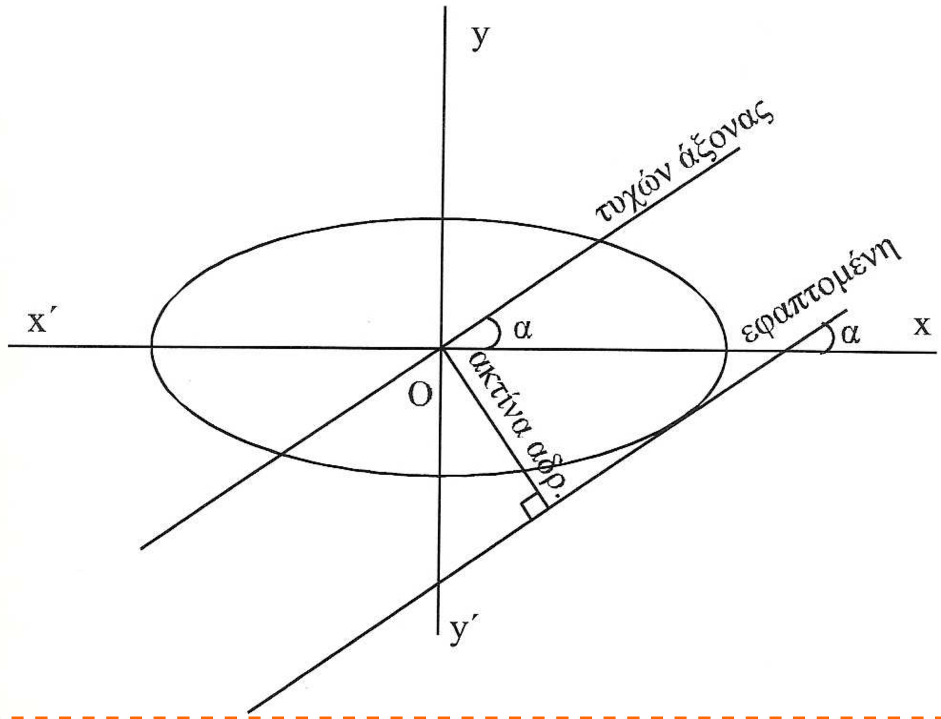
[36] Ακαδημαϊκή Εγκυκλοπαίδεια της Ακαδημίας Επιστημών Ε.Σ.Σ.Δ., εκδ. Ι. Γιαννίκος & Σια τόμ. ΙΙ, Αθήνα 1975-76, σελ. 297.

Προφανώς η αντίστοιχη **ελαχίστη ροπή αδρανείας** είναι η **ροπή αδρανείας** ως προς το **μεγάλο άξονα** του ελλειψοειδούς αδρανείας. Εάν, αντί για τυχόν σημείο Ο λάβουμε το κέντρο βάρους Κ του υλικού συστήματος, τότε το ελλειψοειδές αδρανείας[37] ονομάζεται **κεντρικό ελλειψοειδές αδρανείας** του συστήματος.

Σε μια διατομή αντίστοιχα, η έλλειψη που έχει ημιάξονες r_x, r_y λέγεται **έλλειψη αδρανείας**, και γίνεται **κεντρική** αν Ο είναι το κέντρο βάρους της επιφάνειας της διατομής. Η έλλειψη αδρανείας επιτρέπει το γραφικό προσδιορισμό της **ακτίνας αδρανείας** της διατομής ως προς τυχόντα άξονα με κλίση α ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας x. Η ακτίνα ισούται με την απόσταση του άξονα από την εφαπτόμενη της έλλειψης αδρανείας, η οποία είναι παράλληλη προς

[37] F. P. Beer- E. R. Johnston, *Στατική: Τεχνική Μηχανική,* μτφρ. Γ. Χ. Φούντα, εκδ. Fountas, τόμ. I, Αθήνα 2003, σελ. 475. Βλ. και σε: Δ. Παναγιωτουνάκου- Γ. Παπαδόπουλου, *Θεωρητική Μηχανική,* εκδ. Fountas, Αθήνα 2010, σελ. 130.

αυτόν τον άξονα.



Με την κεντρική έλλειψη αδρανείας βρίσκουμε τη **ροπή αδρανείας** ως προς τυχόντα άξονα S ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής. Φέρουμε την εφαπτόμενη της έλλειψης, η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα S και λαμβάνουμε δια της εκ του κέντρου της έλλειψης καθέτου σ' αυτήν, την ακτίνα αδρανείας i_s. Ισχύει ότι: $J_s=F.i_s^2$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη **ροπή αντοχής** W, η οποία χρησιμεύει για τον υπολογισμό της **μεγίστης τάσης στη θλίψη** στις τοιχοποιίες, όπου maxσ =N/F+Ne/W=(N/b)(1+6e/b), με

F=1.b η επιφάνεια της εξεταζόμενης διατομής

N, η εφαρμοζόμενη επί της διατομής κάθετη δύναμη

W, η ροπή αντοχής της διατομής

e, η από του κέντρου της διατομής απόσταση της N

b, η επιφάνεια της εξεταζόμενης διατομής

Βέβαια οι μηχανικοί έχουν στη διάθεσή τους πίνακες που τους ενημερώνουν σχετικά με την τιμή της επιτρεπόμενης τάσης στη θλίψη διαφόρων υλικών, π. χ.

$\sigma_{επιτρ}$=5 kgr/cm^2, όταν πρόκειται για τοιχοποιία με καλή ασβεστοκονία.

$\sigma_{επιτρ}$=12 kgr/cm^2, όταν πρόκειται για τοιχοποιία με παχιά ασβεστοτσιμεντοκονία.

$\sigma_{επιτρ}$=50 kgr/cm^2, όταν πρόκειται για τοιχοποιία από σκυρόδεμα.

Τα ανωτέρω στοιχεία είναι χρήσιμα, διότι κατά τον Α. Ρουσσόπουλο ισχύουν τα εξής: *Για κάθε επίπεδο ελαστικό σύνδεσμο υπάρχει ένα κύριο σύστημα αναφοράς. Μία δύναμη, η οποία διέρχεται από το κέντρο αυτού του συστήματος προκαλεί μόνο μετάθεση, χωρίς να στρέφει το σύστημα. Μία δύναμη δε, η οποία ενεργεί κατά τους άξονες του κυρίου συστήματος, προκαλεί μετάθεση της αυτής διεύθυνσης.*

Η ροπή η οποία ενεργεί μόνη, προκαλεί στροφή γύρω από το κέντρο του κυρίου συστήματος χωρίς μετάθεση. **Εάν η δύναμη διαγράφει κύκλο γύρω από το κέντρο του ελαστικού συνδέσμου,** τότε η αντίστοιχη μετάθεση διαγράφει **έλλειψη** και αντίστροφα. Γενικότερα, αν μια δύναμη που ενεργεί σε τυχόν σημείο του ελαστικού συμπλέγματος διαγράφει κύκλο επί του επιπέδου του συμπλέγματος, <u>πράγμα το οποίο συνήθως συμβαίνει κατά τη διάρκεια ενός σεισμού</u>, τότε κάθε σημείο του ελαστικού συμπλέγματος διαγράφει έλλειψη επί του αυτού, ή παραλλήλου επιπέδου (**έλλειψη μεταθέσεως** τυχόντος σημείου του ελαστικού συμπλέγματος), κ. λπ[38].

---

[38] Βλέπε σε: 1) Π. Σ. Θεοχάρη, *Μηχανική: Αντοχή υλικών,* εκδ. ΕΜΠ, Αθήνα 1976, τόμ. ΙΙ, σελ. 115-117.

► Στις κατασκευές, για το σχεδιασμό υποστυλωμάτων χάλυβα κάτω από ένα κεντρικό φορτίο, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τύπους οι οποίοι ευρίσκονται στις προδιαγραφές του Αμερικάνικου Ινστιτούτου Κατασκευών Χάλυβα[39]. Η παραβολική διατομή χρησιμοποιείται για να προβλέψει την επιτρεπόμενη τάση όταν πρόκειται για κοντά και μεσαίου μήκους υποστυλώματα από χάλυβα[40].

► Η μετατόπιση του περιηλίου του πλανήτη Ερμή εξηγείται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, το δε επίπεδο της τροχιάς που διαγράφει κατά τη μετατόπισή του θεωρούμε ότι συμπίπτει με το επίπεδο του φύλλου αυτού του χαρτιού. Χάριν ευκολίας η εκκεντρότητα της τροχιάς καθώς και η μετατόπιση ανά περιφορά, έχουν μεγεθυνθεί αρκετά. Αν δεν λάβουμε υπ’ όψιν μας τη μετατόπιση, τότε η εικόνα είναι μια στάσιμη έλλειψη[41].

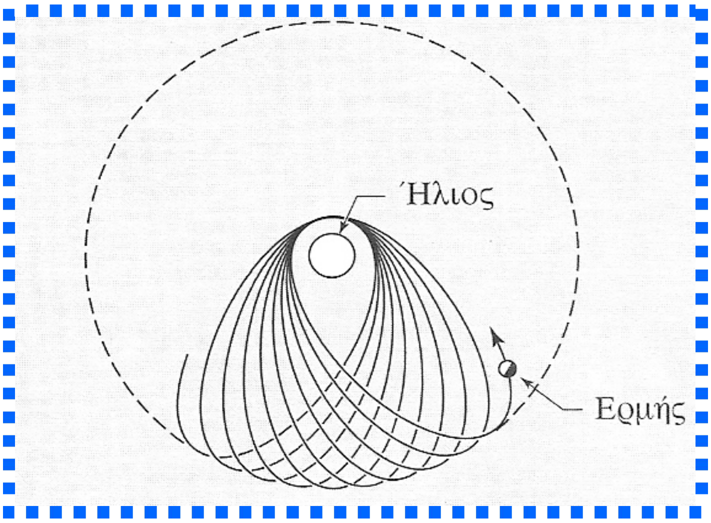
---

2) Α. Δ. Κωστέα, *Τεχνολογία του πολιτικού μηχανικού,* [3]Αθήναι 1959, τόμ. Ι, σελ. 171-196. 3) Κ. Π. Παπαϊωάννου, *Μηχανική,* εκδ. Αθ. Καραβία, Αθήνα 1952-54, τόμ. Ι, σελ. 175-182. 4) Α. Ρουσσόπουλου, *Θεωρία ελαστικών συμπλεγμάτων,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1967, σελ. 58-70.

[39] American Institute of Steel Construction (AISC), *Manual of Steel Construction,* ed. AISC, [9]New York 1989.

[40] F. P. Beer- E. R. Johnston, *Μηχανική των υλικών,* μτφρ. Σ. Παπαργύρη-Πέγιου, επιμέλεια μτφρ. Δ. Μπέσκου, εκδ. Τζιόλα, τόμ. ΙΙ, [2]Αθήνα 1999, σελ. 818.

[41] C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz, B. J. Moyer, *Μηχανική,* μτφρ. διδακτικό προσωπικό τ. εργαστηρίου φυσικής του Ε.Μ.Π., επιμέλεια Γ. Βουδούρης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., τόμ. Ι, Αθήνα [2]1998, σελ. 436.



► Σχετικά με πυθμένες δεξαμενών:

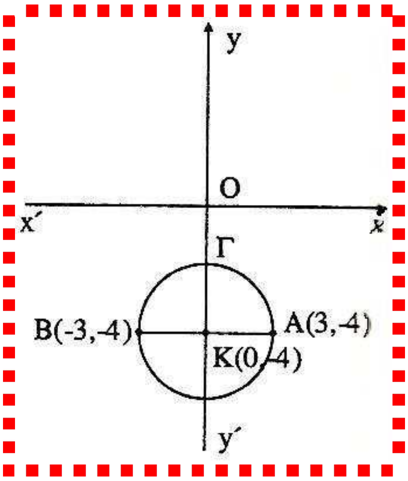
Εάν στην κατασκευή τέτοιου είδους πυθμένων χρησιμοποιηθούν καμπύλες κωνικών τομών, τότε προσεγγίζεται το μέγεθος **μεμβρανική ένταση**, το οποίο επιδιώκεται, επειδή στο **δακτύλιο εδράσεως** δεν πρέπει να μεταδίδονται εφελκυστικές αλλά ούτε και θλιπτικές τάσεις. Στην περίπτωση δε της χρήσης κωνικών τομών έχει δειχθεί ότι η κάμψη εκτείνεται σε πολύ μικρές περιοχές[42].

► Τα κυκλικά, ή κυλινδρικά σχήματα όταν χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των τρούλων, ή οροφών κτιρίων, χρειάζονται ενίσχυση στην κορυφή, ενώ στα παραβολικά αυτό δεν συμβαίνει, επειδή η λειτουργία σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι κελυφωτή αλλά τοξωτή, αφού το αντίστοιχο τόξο δίνει

[42] Ε. Κοκκινόπουλου, *Στατική,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1997.

μηδενικό διάγραμμα ροπών (π.χ. σε χιόνι). Το Πλανητάριο στη Μόσχα αποτελεί παράδειγμα τέτοιας κατασκευής[43].

Αυτή η εφαρμογή οδήγησε τη συγγραφική ομάδα του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ. ώστε να διατυπώσει την εξής εκφώνηση προβλήματος για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου: «Η κάθετη τομή του θόλου ενός πλανηταρίου είναι το ημικύκλιο ΒΓΑ όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Ο θόλος πρόκειται να αντικατασταθεί με άλλον του οποίου η αντίστοιχη διατομή να δίνει παραβολικό σχήμα με κορυφή το σημείο Ο(0,0), επειδή αυτό είναι πιο ανθεκτικό σε φορτία, όπως χιονιού κ.λπ. Να εξετάσετε αν η κατασκευή του καινούριου τρούλου καλύπτει από πάνω την παλιά» [44].



[43] Ε. Κοκκινόπουλου, *Στατική,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1997.

[44] Συλλογικό έργο, *Αξιολόγηση των μαθητών της Β΄ Λυκείου στα Μαθηματικά*, εκδ. Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., τεύχος Γ΄, Αθήνα 1999, σελ. 204.

► Ο Β. Κωνσταντέλλος στη διατριβή του με τίτλο ¨Μελέτη πεδίου μετατοπίσεων σε άπειρες πλάκες με εσωτερικές ρωγμές¨ απέδειξε ότι η παραμόρφωση μιας ρωγμής κατά τη διάρκεια σεισμού είναι έλλειψη[45].

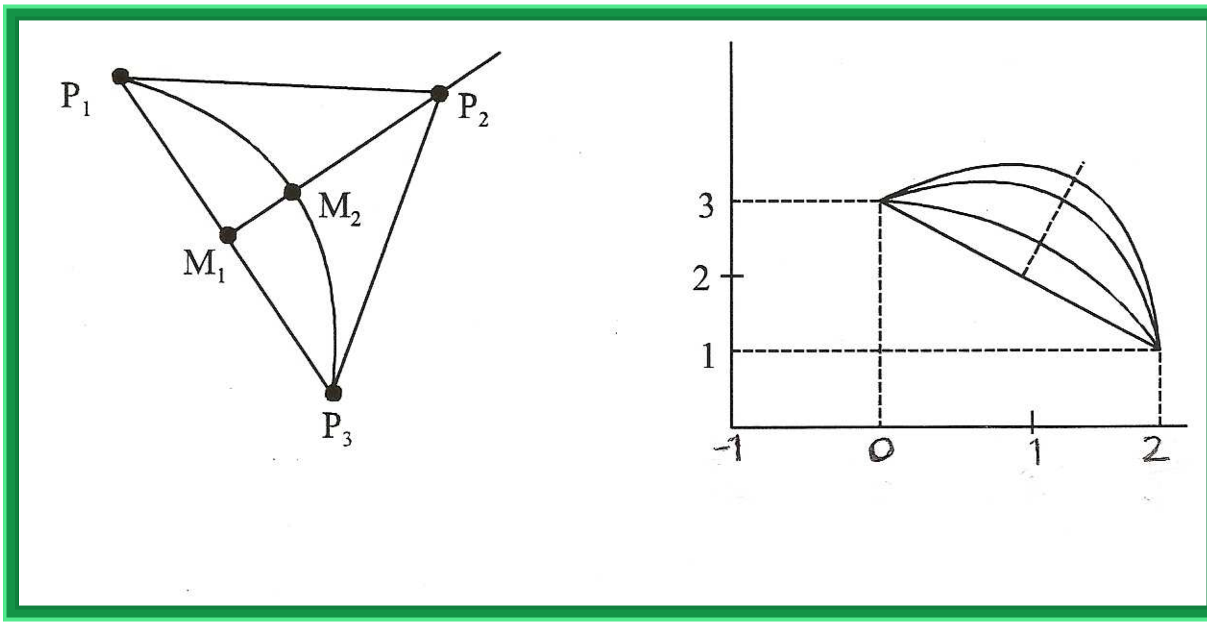
► Στην αυτοκινητοβιομηχανία RENAULT[46] ο P. Bézier ανέπτυξε σύστημα παραμετρικών εξισώσεων καμπύλων, με τη χρήση των οποίων οι σχεδιαστές σχεδιάζουν μοντέλα αυτοκινήτων χωρίς να έχουν απαραίτητα μαθηματικές γνώσεις. Η παραμετρική εξίσωση του τόξου μιας καμπύλης 2^{ου} βαθμού που χρησιμοποιήθηκε από τον P. Bézier έχει τη μορφή:

$\upsilon(t)=(1- t)^2\upsilon_1+\lambda t(1- t)\upsilon_2+t^2\upsilon_3$, $0\leq t\leq 1$ (1), όπου υ_1 , υ_2 , υ_3 τα διανύσματα θέσης των P_1, P_2, και P_3 αντίστοιχα. Ο P. Bézier παρατήρησε ότι με τη μετατόπιση του P_2 επιτυγχάνεται αλλαγή του σχήματος της καμπύλης.

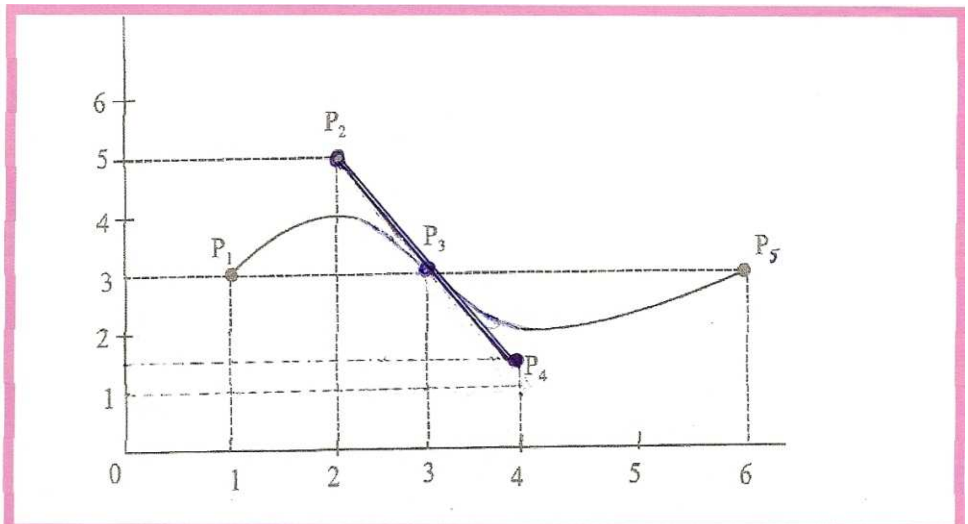
---

[45] Β. Κωνσταντέλλου, *Μελέτη πεδίου μετατοπίσεων σε άπειρες πλάκες με εσωτερικές ρωγμές*, Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π., Αθήνα 1986.

[46] N. C. Harisson, *Parametric curves: Introduction to curve design,* Teaching Mathematics and Applications, vol. XII , n. 4, 1993, pp. 167- 173.



Στην πράξη, για να σχεδιαστεί το αυτοκίνητο δεν χρησιμοποιείται μια και μόνο πολύπλοκη καμπύλη αλλά γίνεται συνδυασμός τμημάτων πολλών εξ αυτών. Αυτό επιτυγχάνεται με το ηλεκτρονικό καμπυλόγραμμο. Έτσι π.χ. λαμβάνοντας δύο διαδοχικά τόξα που προκύπτουν από τη σχέση (Ι) σχηματίζεται το διάγραμμα του σχήματος, όπου P_1=(1,3), P_2=(2,5), P_3=(3,3), P_4=(4,1.5), P_5=(6,3).



Εάν θέλουμε στο σημείο P_3 η καμπύλη να είναι πιο ομαλή, λαμβάνουμε $P_4=(4,1)$, οπότε τα P_2, P_3, P_4 ανήκουν στην ίδια ευθεία, δηλαδή το P_3 να είναι σημείο καμπής. Κάποιες φορές επίσης χρειάζεται να έχουμε την ίδια καμπυλότητα και στα δύο τόξα.

Επιπλέον, από τη σχέση (I) για $0\leq t\leq 1$, και $P=(x_1,y_1)$ δοθέν σημείο, προκύπτουν οι εξής παραμετρικές εξισώσεις:

$x=(1-t)^2x_1+2t(1-t)x_2+t^2x_3$ και

$y=(1-t)^2y_1+2t(1-t)y_2+t^2y_3$

Θεωρούμε ότι τα P_1, P_3 είναι σταθερά σημεία και μεταβάλουμε το σημείο P_2. Έστω δηλαδή $P_1=(0,3)$, $P_3=(2,1)$, και το $P_2=(2,3)$, και στη συνέχεια (3,4). Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x=4t-2t^2 \\ y=3-2t^2 \end{array}\right\} (1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6t-4t^2 \\ y=3+2t-4t^2 \end{array}\right\} (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$x-y=4t-3$, και από τη σχέση (2) ότι:

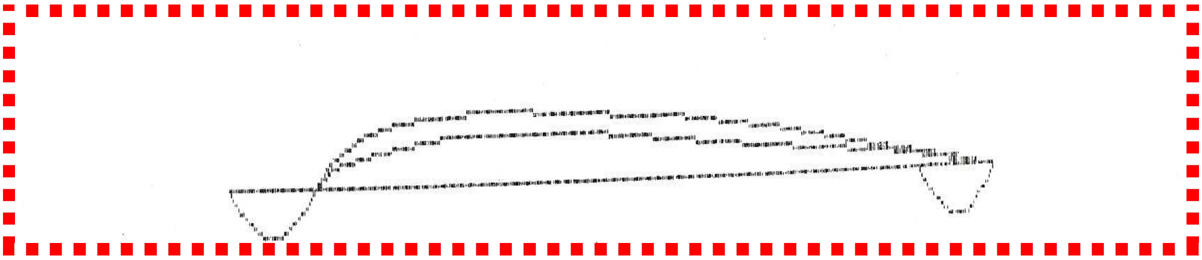
$x-y=4t-3$, άρα $t=(x-y+3)/4$.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το t στις σχέσεις (1) και (2), οπότε:

$x^2+y^2-2xy+6x+2y-15=0$

$x^2+y^2-2xy+4x-9=0$

Οι δύο αυτές καμπύλες είναι παραβολές γιατί $J_2=0$, $J_3\neq 0$. Στη συνέχεια με κατάλληλο πρόγραμμα μέσω του Η/Υ (Παράρτημα 1β) βλέπουμε το ¨τράβηγμα¨, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί[47].



Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι:

Αν θεωρήσουμε την καμπύλη με εξίσωση: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, και ορίσουμε τα μεγέθη:

$$J_1 = A + C, J_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},\ \text{Τότε ισχύουν τα εξής:}$$

$$(\text{A})\ \text{J}_2 \succ 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} J_1 J_3 \prec 0,\ \text{η καμπύλη είναι πραγματική έλλειψη} \\ J_1 J_3 = 0,\ \text{προκύπτουν 2 ευθείες φανταστικές} \\ J_1 J_3 \succ 0,\ \text{η καμπύλη είναι φανταστική έλλειψη} \end{Bmatrix}$$

$$(\text{B})\ \text{J}_2 = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} J_3 \neq 0,\ \text{η καμπύλη είναι παραβολή} \\ J_3 = 0,\ \text{τότε προκύπτουν 2 ευθείες παράλληλες} \end{Bmatrix}$$

---

47 Μαρία Χάλκου, *Κώνου τομαί, Θεωρία και Πράξη με έμφαση στις εφαρμογές για τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια,* Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση ΜΔΕ στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ, Αθήνα 1997, σελ. 85.

Στη δεύτερη περίπτωση : $\left\{\begin{array}{c} E^2 - CF \succ 0, D^2 - AF \succ 0 \text{ πραγματικές \& διακεκριμένες} \\ E^2 - CF = 0, D^2 - AF = 0 \text{ συμπίπτουν} \\ E^2 - CF \prec 0, D^2 - AF \prec 0 \text{ φανταστικές} \end{array}\right\}$

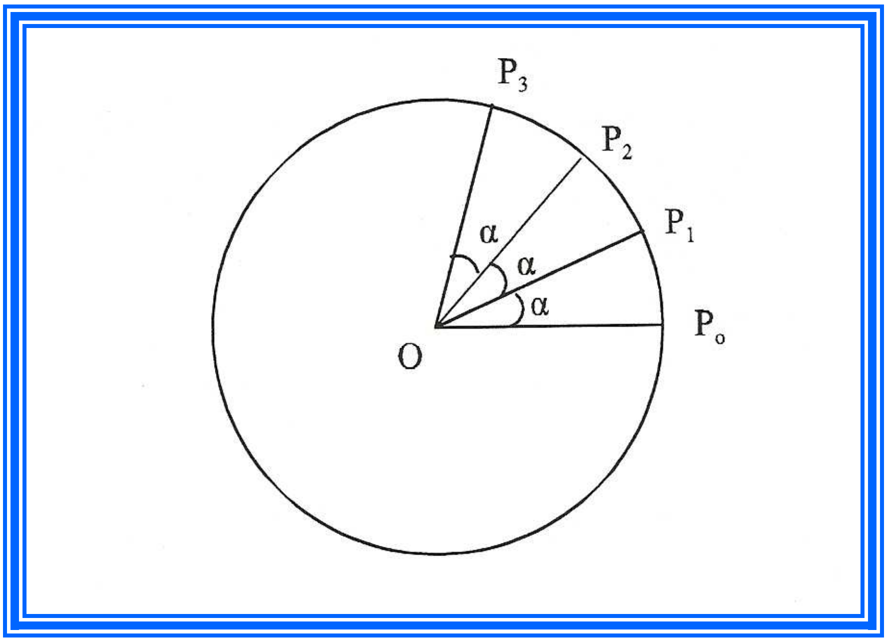
(C) $J_2 \prec 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} J_3 \neq 0 \text{ υπερβολή} \\ J_3 = 0 \text{ δύο ευθείες πραγματικές συγκλίνουσες} \end{array}\right.$

► Σχεδίαση με τη βοήθεια Η/Υ (CAD)[48]

Όπως γνωρίζουμε, ο πίνακας Μ=$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv^{t} \upsilon Q \upsilon = 1\ (2)\,(1)$ παριστάνει στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων Ο, κατά γωνία α. Θεωρούμε το σημείο P_o=(1,0) με διάνυσμα θέσης υ_o=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε η εικόνα του υ_o μέσω της Μ δίνει διάνυσμα υ_1=Μ υ_o, η εικόνα του υ_1 μέσω της Μ ένα διάνυσμα υ_2=Μ υ_1 κ.ο.κ., τα οποία είναι αντίστοιχα διανύσματα θέσης σημείων P_1, P_2, κ.ο.κ., τα οποία κείνται επί περιφέρειας, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

---

[48] A. Oldknow, *Micromaths: using matrices to generate circles and ellipses,* Teaching Mathematics and Applications, vol. XII, n. 4, 1993, pp. 186- 189.



Θέτοντας α=2π/κ, όπου κ είναι φυσικός αριθμός, και ενώνοντας τα σημεία που έχουν προκύψει, δηλαδή τα σημεία P_o, P_1, P_2,……με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζουμε ένα κανονικό πολύγωνο με κ κορυφές. Όταν το κ είναι αρκετά μεγάλο, π.χ. αν κ=40, όπου ο αριθμός αυτός θεωρείται αρκετά μεγάλος για ένα P.C., τότε το πολύγωνο που προκύπτει, δηλαδή το 40-γωνο προσεγγίζει ικανοποιητικά την περιφέρεια κύκλου. Με αυτόν τον τρόπο αντιλαμβανόμαστε εποπτικά ότι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου είναι το όριο στο οποίο τείνει η περίμετρος κανονικού κ-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό. Οι δε συναρτήσεις συνα και ημα αναπτύσσονται σε σειρά ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - ......$$

$$\eta\mu\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - ....$$

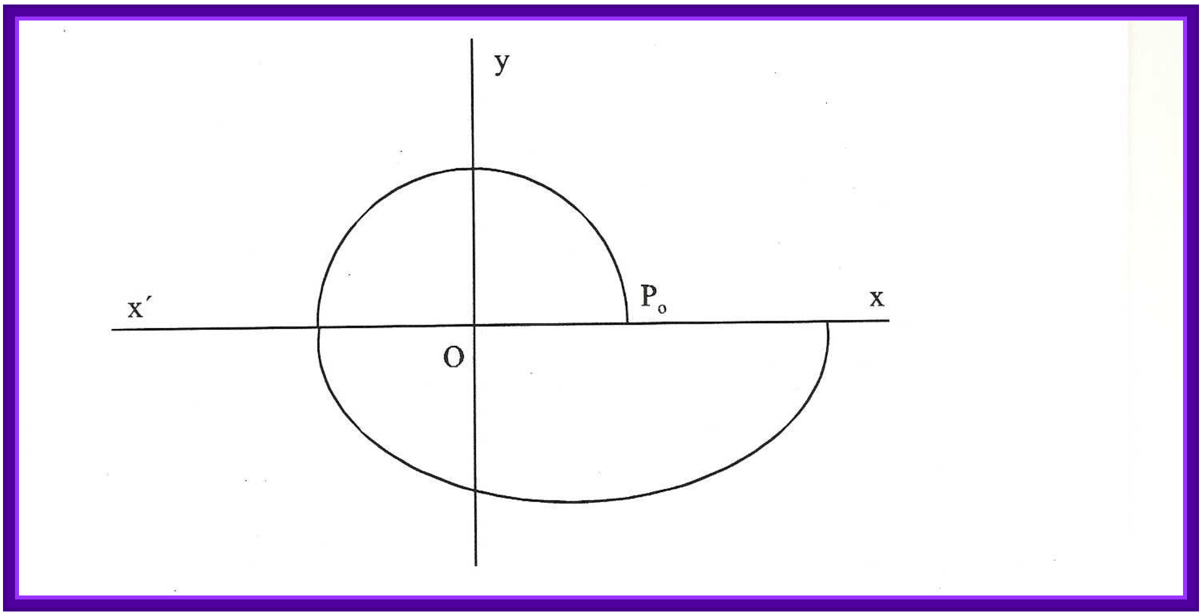
Άρα μία πρώτη προσέγγιση γι’ αυτές είναι αντίστοιχα συνα≈1, και ημα≈α, οπότε ο πίνακας Μ της στροφής γίνεται:

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, και δεν παριστάνει πλέον στροφή, αφού det(M)=1+α^2.

Με αυτόν τον πίνακα, τα διανύσματα θέσης υ_1, υ_2,…..κ.ο.κ. που προκύπτουν ορίζουν σημεία τα οποία πλέον δεν βρίσκονται πάνω σε περιφέρεια. Πράγματι

$\upsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, άρα το P_1 απέχει από το O απόσταση $\|\upsilon_1\|=\sqrt{(1+\alpha^2)}$.

Εξάλλου $\upsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ και επομένως το P_2 απέχει από το O απόσταση $\|\upsilon_2\| = \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(1+\alpha^2)^2} = 1+\alpha^2 \succ \sqrt{1+\alpha^2}$.



Εάν επανέλθουμε στον πίνακα M και θεωρήσουμε ότι

$M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$, όπου, όπως και για τη στροφή (1) ισχύει det(M)= 1, τότε ο πίνακας M θα είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του θα είναι ο πίνακας:

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε το διάνυσμα θέσης υ_o του σημείου $P_o=(1,0)$ και βρίσκουμε τις εικόνες $M\upsilon_o$ και $M^{-1}\upsilon_o$, οι οποίες ορίζουν τα σημεία $P_1=(1,\alpha)$ και

$P_{-1}=(1-\alpha^2,-\alpha)$ αντίστοιχα. Βρίσκουμε στη συνέχεια την κωνική με κέντρο, η οποία ορίζεται από αυτά τα 3 σημεία, προσδιορίζοντας τους συντελεστές της εξίσωσης 2ου βαθμού: $Ax^2+2Cxy+By^2=1$. Συνεπώς θα έχουμε:

$A=1$

$A+2\alpha C+\alpha^2 B=1$

$(1-\alpha^2)^2 A-2\alpha(1-\alpha^2)C+\alpha^2 B=1$

Από τη λύση του γραμμικού αυτού συστήματος προκύπτει ότι:

$A=1=B$ και $C=-\alpha/2$, οπότε η ζητούμενη κωνική τομή θα έχει την εξίσωση:

$x^2-\alpha xy+y^2=1$, ή

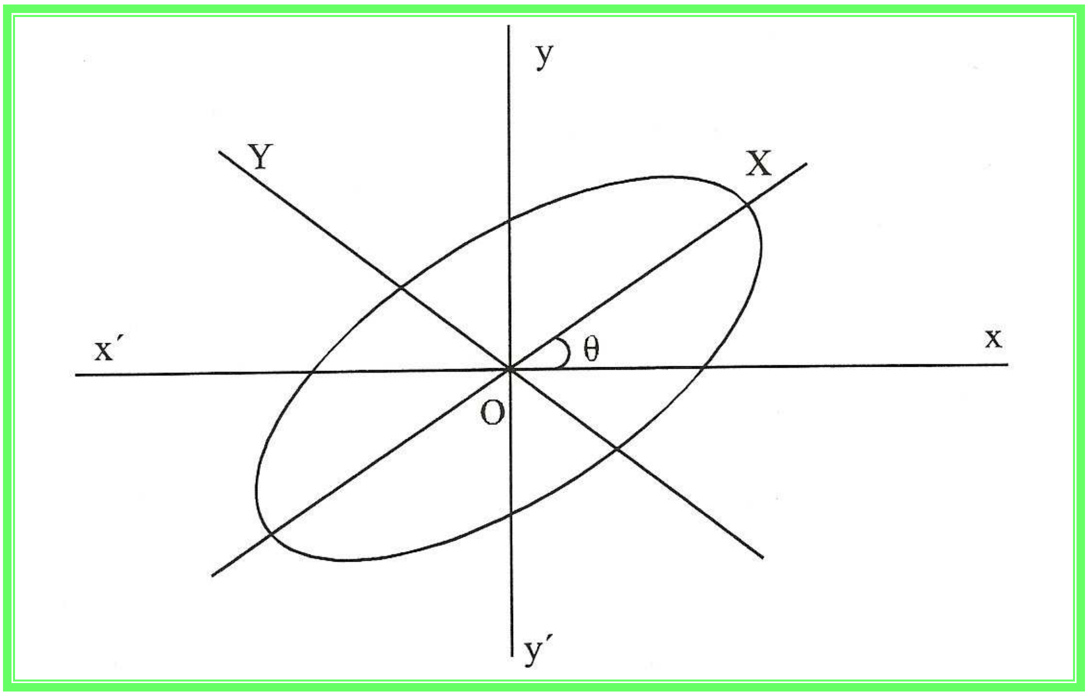
$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv {}^t\upsilon Q \upsilon = 1 \quad (2),$$

όπου Q είναι συμμετρικός, οπότε έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1=1-\alpha/2$, και $\lambda_2=1+\alpha/2$ στις οποίες αντιστοιχούν τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα

$u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $u_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας Q είναι όμοιος προς το διαγώνιο πίνακα

$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, και η κανονική μορφή της εξίσωσης (2) θα είναι:

$x^2/a^2+y^2/b^2=1$, όπου $a^2=1/\lambda_1=2/(2-\alpha)$, και $b^2=1/\lambda_2=2/(2+\alpha)$. Πρόκειται δηλαδή για έλλειψη με άξονα των X την ευθεία $x=y$, η οποία παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα u_1, άξονα των Y την ευθεία $y=-x$, η οποία παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα u_2, και γωνία στροφής $\theta=\pi/4$. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $e^2=2\alpha/(2+\alpha)$ και έχει όριο το 0 – οπότε και η έλλειψη έχει όριο την περιφέρεια του κύκλου – όταν α→0.



Παρατηρούμε, ότι αν το υ επαληθεύει τη σχέση (2), τότε και το Μυ θα την επαληθεύει εάν ${}^{t}MQM=Q$, επειδή:

${}^{t}(M\upsilon)Q(M\upsilon)={}^{t}\upsilon({}^{t}MQM)\upsilon=1$, εάν ${}^{t}MQM=Q$. Είναι πράγματι:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1-a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{a^2}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a^3}{2}-\frac{3a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1-a^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα αν το υ_o ανήκει στην έλλειψη, τότε και τα $\upsilon_1=M\upsilon_o$, $\upsilon_2=M\upsilon_1$, κ.ο.κ. θα ανήκουν επίσης στην έλλειψη. Άλλωστε αυτό επαληθεύεται και ως εξής:

Κατασκευάζουμε με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή τη γραφική παράσταση των σημείων που έχουν διανύσματα θέσης υ_o, υ_1, κ.λπ., καθώς και τη γραφική παράσταση των σημείων που προκύπτουν από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$x = \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{2-a}} - \frac{\eta\mu t}{\sqrt{2+\alpha}}$, $y = \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{2-a}} + \frac{\eta\mu t}{\sqrt{2+\alpha}}$ της έλλειψης. Τότε οι δύο γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν.

Με ένα πολύ απλό πρόγραμμα γίνεται με Η/Υ η γραφική παράσταση της ακολουθίας υ_o, $\upsilon_1=M\upsilon_o$, $\upsilon_2=M\upsilon_1$, ……. για κάθε έναν από τους προαναφερθέντες πίνακες Μ (Παράρτημα 1α).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ[49]

Διαφορική εξίσωση είναι η εξίσωση, η οποία περιέχει τουλάχιστον μία άγνωστη συνάρτηση, καθώς και την παράγωγο της, μέχρι μιας ορισμένης τάξης. Όταν οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι μιας μεταβλητής, τότε η εξίσωση λέγεται ¨**συνήθης διαφορική εξίσωση**¨, και όταν είναι περισσοτέρων μεταβλητών ¨**μερική διαφορική εξίσωση**¨.

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών: Έχουν τη μορφή

y΄= f(x)g(y). Για την επίλυση:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$ με A_x το πεδίο ορισμού της f και A_y το πεδίο ορισμού της g.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$$

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: Έχουν τη μορφή

[49]Γ. Α. Λεγάτου, *Συνήθεις Διαφορικαί Εξισώσεις,* Αθήνα 1967. Βλ. και σε: Γ. Ν. Παντελίδη- Δ. Χ. Κραββαρίτη- Ν. Σ. Χατζησάββα, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις,* εκδ. Ζήτη, Αθήνα ^{2}1990. Βλ. και σε: W. E. Boyce- R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών,* επιμέλεια μτφρ. Θ. Γραμμένου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1999.

y΄= f(x,y), όπου f(x,y) συνάρτηση συνεχής και ομογενής μηδενικού βαθμού[50]. Για την επίλυση:

y=ux, άρα y΄=u΄x+u, άρα

$u'x+u=f\left(x,ux\right)=\begin{cases} f\left(1,u\right), x\succ 0 \\ f\left(-1,-u\right), x\prec 0\end{cases}$, επομένως για x θετικό η εξίσωση μετασχηματίζεται σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών:

$u'=\frac{1}{x}\left(f\left(1,u\right)-u\right)$. Ανάλογα επιλύεται και για x αρνητικό.

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: Έχουν τη μορφή

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ (1), όπου P(x), Q(x) είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Α.

Αν $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$, τότε η Δ. Ε. λέγεται ομογενής γραμμική πρώτης τάξης, και δέχεται σαν λύσεις μη μηδενιζόμενες στο Α: y=C$e^{-\int P(x)dx}$.

Η γενική λύση της (1) είναι:

$$y(x)=\left(C+\int_{x_0}^{x} Q(t)\mu(t)dt\right)\frac{1}{\mu(x)}, C\in R, x_0, x\in A,$$

όπου $\mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}=: \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(t)dt\right)$

---

50 Η συνάρτηση f(x,y) με πεδίο ορισμού το A⊆R^2 που είναι τέτοιο ώστε για κάθε (x,y) που ανήκει στο A και τ>0, να ισχύει: (τx,τy)϶A, θα λέγεται **ομογενής βαθμού α,** όταν για κάθε (x,y) που ανήκει στο A και τ>0, ισχύει f(τx,τy)=τ^{α}f(x,y). Γ. Ν. Παντελίδη- Δ. Χ. Κραββαρίτη- Ν. Σ. Χατζησάββα, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις,* εκδ. Ζήτη, Αθήνα [2]1990, σελ. 33.

Οι δύο μορφές εξισώσεων που ακολουθούν **μετασχηματίζονται σε γραμμικές Δ. Ε. πρώτης τάξης:**

α) **Διαφορική Εξίσωση Bernoulli:**

$y' + P(x)y + Q(x)y^{\alpha} = 0$, $\alpha \in R - \{0,1\}$, με $P(x)$, $Q(x)$ συνεχείς σε διάστημα Α.

Η επίλυση γίνεται με τη χρήση του μετασχηματισμού $u(x) = (y(x))^{1-\alpha}$, όταν το x ευρίσκεται σε μια περιοχή του $x_0 \in A$, με $y(x_0) = y_0 > 0$.

Τότε θα έχουμε: $u' + (1-\alpha)P(x)u(x) + (1-\alpha)Q(x) = 0$, $u(x_0) = y_0^{1-\alpha}$.

Η ζητούμενη λύση που είναι τότε και μοναδική στο υποδιάστημα του Α που περιέχει το x_0 θα είναι η $y(x) = u(x)^{1/(1-\alpha)}$.

β) **Διαφορική Εξίσωση Riccati:**

$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$, όπου $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ συνεχείς σε ένα διάστημα Α.

Αν γνωρίζουμε μια λύση αυτής, έστω $y_1(x)$, τότε χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $y(x) = y_1(x) + 1/u(x)$, οπότε θα έχουμε: $u' - (2y_1P + Q)u - P = 0$, η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση.

Διαφορική εξίσωση ολικού διαφορικού:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. Για τη λύση: 1) Ελέγχουμε αν $P_y(x,y)=Q_x(x,y)$ $\sigma\varepsilon$ διάστημα

2) Υπολογίζουμε μια αρχική F(x,y)=$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$

3) Το γενικό ολοκλήρωμα είναι: F(x,y)=C, και
4) Όταν το $Q(x_0,y_0)\neq 0$ (ή $P(x_0,y_0)\neq 0$), τότε η λύση που περνά από το (x_0,y_0) είναι y(x) (ή x(y)), και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0)=y_0$, (ή $x(y_0)=x_0$).

Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, πεπλεγμένης μορφής:

F(x,y,y΄)=0 (A)

(I) Όταν δύναται να λυθεί αλγεβρικά ως προς y΄, με λύσεις:

$y'=f_k(x,y)$ (B), k=1,2,…,m, τότε προκύπτουν m το πλήθος Δ. Ε. υπό κανονική μορφή, και το σύνολο των γενικών λύσεων $y=\varphi_k(x,C_k)$ k=1,2,…,m της (B) ονομάζεται γενική λύση της (A).

(II) Όταν δύναται να λυθεί αλγεβρικά ως προς y, τότε η επίλυσή της ανάγεται στην επίλυση των εξισώσεων y=f(x,y΄) (Γ).

Θέτουμε στη (Γ) y΄=p, και την παραγωγίζουμε ως προς x:

$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ Αυτή είναι μια Δ. Ε. πρώτης τάξης, και, αν η γενική λύση της είναι p=φ(x,C), τότε η γενική λύση της (Γ) είναι η y=f(x,φ(x,C)). Αν δε η γενική λύση της Δ. Ε. πρώτης τάξης είναι x=g(p,C), τότε η γενική λύση της (Γ) είναι η: x=g(p,C), y=f(g(p,C),p), όπου p είναι παράμετρος.

(III) Όταν δύναται να λυθεί αλγεβρικά ως προς x, τότε επιλύουμε την

x=f(y,y΄) (Δ). Θέτουμε δηλαδή y΄=p, οπότε έχουμε x=f(y,p), άρα:

$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$, και, αν μεν η γενική λύση της τελευταίας είναι η p=g(y,C), τότε η γενική λύση της (Δ) είναι η x=f(y,q(y,C)), όπου το x είναι συνάρτηση του y. Αν δε η γενική λύση είναι η y=φ(p,C), τότε η γενική λύση της (Δ) είναι η x=f(φ(p,C),p), y=φ(p,C), όπου p παράμετρος.

Γραμμική διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης[51]:

1) $\alpha_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+.....+a_0(x)y=g(x)$, όπου οι συναρτήσεις $\alpha_i(x)$, i=1,…..,n και g(x) είναι συνεχείς σε διάστημα A.

Όταν g(x)=0, τότε η εξίσωση λέγεται **ομογενής,** και έχει προφανή λύση y(x)=0.

2) $y^{(n)}+p(x)y^{(n-1)}+......+q(x)y=g(x)$ Αυτή ονομάζεται **Γραμμική Δ. Ε. κανονικής μορφής.** Είναι προφανές, ότι η Δ. Ε. της περίπτωσης (1), μετατρέπεται σε Δ. Ε. της περίπτωσης (2), σε ένα διάστημα τέτοιο ώστε $\alpha_n(x)\neq 0$.

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+.....+a_1y'+a_0y=f(x)$$
$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+.....+a_1y'+a_0y=0$$

[51] Για την επίλυση βλέπε σε: Γ. Ν. Παντελίδη- Δ. Χ. Κραββαρίτη- Ν. Σ. Χατζησάββα, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις,* εκδ. Ζήτη, Αθήνα [2]1990, σελ. 96.

Το $X(\sigma)=\sigma^n+a_{n-1}\sigma^{n-1}+......+a_1\sigma+\alpha_0$, ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της δεύτερης εξίσωσης. Συμβολίζω με
$L[\ ]=\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+......+a_0$ το γραμμικό διαφορικό τελεστή.

Για να είναι η $y=e^{\sigma x}$ λύση της δεύτερης εξίσωσης, πρέπει $L[y]=0 \Leftrightarrow$
$L\left[e^{\sigma x}\right]=0$.

Έστω $y'=\sigma e^{\sigma x},........, y^{(n)}=\sigma^n e^{\sigma x}$. Και τότε, για να ισχύει η ισότητα
$e^{\sigma x}\left[\sigma^n+a_{n-1}\sigma^{n-1}+.....+\alpha_0\right]=0$, θα πρέπει το σ να είναι ρίζα του X(σ).
Άρα η $\varphi(x)=e^{\sigma x}$ είναι μια λύση της δεύτερης εξίσωσης.
Εάν δε $\sigma_1,\sigma_2,........,\sigma_n$ είναι ρίζες του X(σ), τότε η γενική λύση της δεύτερης εξίσωσης είναι: $y(x)=c_1e^{\sigma_1 x}+.....+c_ne^{\sigma_n x}$.
Εάν σ_i είναι ρίζα του X(σ) πολλαπλότητας λ_i, τότε σ' αυτήν αντιστοιχούν λ_i λύσεις της δεύτερης εξίσωσης γραμμικά ανεξάρτητες, και είναι οι συναρτήσεις: $e^{\sigma_i x}, xe^{\sigma_i x},.......,x^{\lambda_i-1}e^{\sigma_i x}$. Τότε με τις λύσεις που προκύπτουν από τις υπόλοιπες ρίζες του X(σ), θα αποτελούν βάση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1[52]

α) Σχετικός αλγόριθμος βρίσκεται στο σύνδεσμο που φαίνεται στην υποσημείωση 52. Για το συγκεκριμένο θέμα ενδιαφέρον παρουσιάζει και το υλικό που είναι καταχωρημένο στους συνδέσμους: http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Bezier.java , http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/More.htm , http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Lagrange.htm

[52] Πηγή Internet: http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Bezier.htm

β)

```
INPUT "what is the number of pieces"; p%
FOR k = 1 TO p%
INPUT "init.p."; a%, b%
INPUT "term.p."; e%, f%
INPUT "no tr."; n
SCREEN 2
SHELL "graphics"
FOR i = 1 TO n
INPUT "tr.p."; c%, d%
PSET (a%, b%)
FOR j = 1 TO 10
t = j / 10
x% = (1 - t) ^ 2 * a% + 2 * t * (1 - t) * c% + t ^ 2 * e%
y% = (1 - t) ^ 2 * b% + 2 * t * (1 - t) * d% + t ^ 2 * f%
LINE -(x%, y%)
PSET (x%, y%)
NEXT j
NEXT i
NEXT k
VIEW SCREEN (0, 0)-(140, 199)
CLS 1
```

N^o pieces 4

Int. p. 150, 100

term. p. 600, 100

N^o tr. 1

Tr. p. 150, 100

Int. p. 200, 100

Term. p. 600, 100

N^o tr. 2

Tr. p. 230, 70

Tr. p. 240, 80

Int. p. 550, 100

Ter. p. 600, 100

N^o tr. 1

Tr. p.	375, 120
Int. p.	150, 100
Ter. p.	200, 100
N° tr.	1
Tr. p.	175, 120

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ακαδημαϊκή Εγκυκλοπαίδεια της Ακαδημίας Επιστημών Ε.Σ.Σ.Δ., εκδ. Ι. Γιαννίκος & Σια τόμ. ΙΙ, Αθήνα 1975-76.

Μεγάλη Αμερικάνικη Εγκυκλοπαίδεια, εκδ. Σ. Δημητρακόπουλου, Ε. Ε. Ε., Αθήναι 1976, τόμ. ΙΧ.

American Institute of Steel Construction (AISC), *Manual of Steel Construction,* ed. AISC, [9]New York 1989.

Ι. Λ. Αραχωβίτη, *Τεκμηρίωση Διδασκαλίας,* εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1998.

F. P. Beer- E. R. Johnston, *Στατική: Τεχνική Μηχανική,* μτφρ. Γ. Χ. Φούντας, εκδ. Fountas, τόμ. Ι, Αθήνα 2003.

F. P. Beer- E. R. Johnston, *Μηχανική των υλικών,* μτφρ. Σ. Παπαργύρη- Πέγιου, επιμέλεια μτφρ. Δ. Μπέσκος, εκδ. Τζιόλα, τόμ. ΙΙ, [2]Αθήνα 1999.

C. Carathéodory’s, *Funktionentheorie,* Ester Band, Pub. Verlag Birkhäuser, Basel 1950.

Γ. Δάσιου- Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Αθήνα 1994.

Maria Dzielska, *Υπατία η Αλεξανδρινή,* μτφρ. Γ. Κουσουνέλος, εκδ. Ενάλιος, Αθήνα 1997.

Ήρωνος Αλεξανδρέως, *Μετρικά- Διόπτρα,* επιμέλεια Χ. Κ. Κηπουρός, εκδ. Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000.

E. Hairer- G. Wanner, *Analysis by its History,* Pub. Springer- Verlag, N. York 1996.

N. C. Harisson, *Parametric curves: Introduction to curve design,* Teaching Mathematics and Applications, vol. XII, n. 4, 1993, pp. 167- 173. Βλ. και σε πηγές Internet: http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Bezier.java, http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/More.htm, http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Lagrange.htm

Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, vol. I (1921), II (1981).

Θεοτόκη Νικηφόρου, *Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεοτέρων,* εν τω της Κοινότητος Τυπογραφείω παρά Ρηδηγέρω και Κλαυδίω, Μόσχα 1798- 99, τόμ. III.

Π. Σ. Θεοχάρη, *Μηχανική: Αντοχή υλικών,* εκδ. ΕΜΠ, Αθήνα 1976, τόμ. II.

Δ. Κάππου, *Διαφορικές εξισώσεις,* [2]Αθήνα 1966.

Ε. Κοκκινόπουλου, *Στατική,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1997, τόμ. II.

Β. Κωνσταντέλλου, *Μελέτη πεδίου μετατοπίσεων σε άπειρες πλάκες με εσωτερικές ρωγμές*, Διδακτορική διατριβή Ε.Μ.Π., Αθήνα 1986.

Α. Δ. Κωστέα, *Τεχνολογία του πολιτικού μηχανικού,* [3]Αθήναι 1959, τόμ. I.

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz, B. J. Moyer, *Μηχανική,* μτφρ. διδακτικό προσωπικό τ. εργαστηρίου φυσικής του Ε.Μ.Π., επιμέλεια Γ. Βουδούρης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., τόμ. I, Αθήνα [2]1998.

D. Kletenik, *Problems in Analytic Geometry,* translated by O. Soroka, Mir Publishers, Moscow 1969.

St. Kuhn, *The Derivative à la Carathéodory, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1 (Jan., 1991), pp. 40-44,* Pub.: Mathematical Association of America, (Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2324035).

Χ. Δ. Λάζου, *Μηχανική και Τεχνολογία στην Αρχαία Ελλάδα,* εκδ. Αίολος, [3]Αθήνα 1993.

Γ. Α. Λεγάτου, *Συνήθεις Διαφορικαί Εξισώσεις,* Αθήνα 1967.

David C. Lindberg, *Οι απαρχές της Δυτικής Επιστήμης,* μτφρ. Ηλία Μαρκολέφα, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997.

Γ. Μπεργελέ, *Αεροδυναμική υποηχητικού αεροσκάφους,* εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα 1995.

Μ. Μπρίκα, *Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήναι ^{3}1961.

Μ. Μπρίκα, *Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητος,* Αθήνα 1970.

J. F. Mattéi, *Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι,* μτφρ. Κ. Καψαμπέλη, Ινστιτούτο Βιβλίου- Μ. Καρδαμίτσα, Αθήνα 1995.

O. Neugebauer, *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα,* εκδ. Μ.Ι.Ε.Τ., μτφρ. Χ. Ζερμπίνη- Ι. Αρζόγλου, Αθήνα 1990.

A. Oldknow, *Micromaths: Using matrices to generate circles and ellipses,* Teaching Mathematics and Applications, vol. XII, n. 4, 1993, pp. 186- 189.

Σ. Α. Παϊπέτη, *Η άγνωστη τεχνολογία στον Όμηρο,* εκδ. Έσοπτρον, Αθήνα 2005.

Γ. Ν. Παντελίδη- Δ. Χ. Κραββαρίτη- Ν. Σ. Χατζησάββα, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις,* εκδ. Ζήτη, Αθήνα ^{2}1990.

Κ. Π. Παπαϊωάννου, *Μηχανική,* εκδ. Αθ. Καραβία, Αθήνα 1952-54, τομ. Ι.

Δ. Παναγιωτουνάκου- Γ. Παπαδόπουλου, *Θεωρητική Μηχανική,* εκδ. Fountas, Αθήνα 2010.

G. Polya, *Πώς να το λύσω,* επιμέλεια Τ. Πατρώνης, εκδ. Καρδαμίτσα, Αθήνα ^{3}1998.

Α. Ρουσσόπουλου, *Θεωρία ελαστικών συμπλεγμάτων,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1967.

Ι. Σακά, *Ο Αρχιμήδης έκαυσε τον στόλον των Ρωμαίων δι' επιπέδων κατόπτρων,* Τεχνικά Χρονικά, (Σεπτέμβριος 1973), σελ. 771- 778.

Ε. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* τόμ. Ι, Αθήνα 1970-1974.

Ε. Σ. Σταμάτη, *Κωνικά Απολλώνιου,* εκδ. ΤΕΕ, Αθήναι 1975-76, τόμ. Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV.

Ε. Σταμάτη, *Τα καυστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδους,* Αθήνα 1982.

Συλλογικό έργο, *Αξιολόγηση των μαθητών της Β΄ Λυκείου στα Μαθηματικά,* εκδ. Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., τεύχος ΙΙΙ, Αθήνα 1999.

P. Thuillier, *Τα εμπρηστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη,* Περισκόπιο της Επιστήμης, αρ. 22 (Σεπτέμβριος 1979), σελ. 9 - 19.

Α. Γ. Φελλούρη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία,* Αθήνα 2006.

W. E. Boyce- R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών,* επιμέλεια μτφρ. Θ. Γραμμένος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1999.

Μαρία Χάλκου, *Κώνου τομαί, Θεωρία και Πράξη με έμφαση στις εφαρμογές για τα Τεχνικά και Επαγγελματικά Λύκεια,* Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση ΜΔΕ στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ, Αθήνα 1997.

Μαρία Χάλκου, *Κωνικές τομές- Ιστορικό- Θεωρία,* Μαθηματική Επιθεώρηση της ΕΜΕ, 48 (1997), σελ. 32- 39.

Α. Χρυσάκη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα 1992.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Α

Β

Γ

Δ

Θ

Ι

Κ

Λ

Μ

Φ

Χ

ΑΛΛΑ ΕΡΓΑ ΤΗΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΑΡΘΡΑ

1) ¨Κωνικές τομές- Ιστορικό- Θεωρία¨. Μαθηματική Επιθεώρηση της ΕΜΕ, 48 (1997),
2) ¨Αξιολόγηση Παιδαγωγικών Συστημάτων¨. Ευκλείδης Γ' της ΕΜΕ, 52 (1999) (Συνεργασία με την κ. Αθηνά Πέτρου).
3) ¨Ο δειγματοληπτικός έλεγχος για τον προσδιορισμό του ποσοστού κάποιου ονόματος με τη χρήση του τηλεφωνικού καταλόγου¨. Μαθηματική Επιθεώρηση της ΕΜΕ, 56 (2001) (Συνεργασία με την κ. Μαρία Μπούρικα).
4) ¨Διδακτική προσέγγιση των προόδων και αναλογιών κατά τον 15ον αιώνα¨. Πρακτικά του Β' Συνεδρίου Βυζαντινολόγων, Αθήνα, Σεπτέμβριος 1999.
5) ¨Η διδασκαλία των ριζών δευτέρας και τρίτης τάξεως. Μία διδακτική προσέγγιση που βρέθηκε σε ελληνικό χειρόγραφο της Βιέννης¨. Πρακτικά του Γ' Συνεδρίου Βυζαντινολόγων, Ρέθυμνο, Σεπτέμβριος 2000.
6) ¨Αλληλεπιδράσεις Μαθηματικής Παιδείας και Βυζαντινής Κοινωνίας του 15ου αι. κατά τον Βιενναίο Ελληνικό φιλ. Κώδικα 65¨. Πρακτικά του 19ου Πανελλαδικού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε. με θέμα ¨Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού¨, Κομοτηνή, Νοέμβριος 2002.
Αναφορά στο άρθρο αυτό έγινε από τον κ. Δημ. Πατσόπουλο στη σελ. 15 της Διδακτορικής του Διατριβής με θέμα: ¨Διδακτικές Ανακατασκευές της Ιστορίας των Μαθηματικών¨, Τμ. Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2006.
7)¨Θέματα Τεχνικής Εκπαίδευσης σε πρόγραμμα διδασκαλίας Μαθηματικών του 15ου αι.¨. Πρακτικά του Δ' Συνεδρίου Βυζαντινολόγων, Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2002.
8) ¨Προβληματισμός και προτάσεις σχετικά με παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας των κλασμάτων. Επίδραση των «πιστεύω» του διδάσκοντα¨. Παιδαγωγικός Λόγος, τ.χ. 1 (2002),(Συνεργασία με τις κκ. Μπούρικα Μαρία, Πέτρου Αθηνά).
9)¨Αλληλεπιδράσεις μεταξύ Δύσης και Βυζαντίου στον τομέα της Μαθηματικής Επιστήμης¨. Πρακτικά Ε' Συνεδρίου Βυζαντινολόγων, Κέρκυρα, Οκτώβριος 2003.
10) ¨Η Μαθηματική Παιδεία και η ορολογία της στο Βυζάντιο κατά τον 15ον αι.¨ Εώα και Εσπέρια , 5, (2001-2003).
Αναφορά στο άρθρο αυτό έχει γίνει στα περιοδικά:

α) Byzantinische Zeitschrift, band 101/2 (2008) : III. Abteilung, ed. Walter de Gruyter, Berlin, New York, p. 1066. Η αναφορά έγινε από τον Ιστορικό του Ε.Ι.Ε. κ. Χαράλαμπο Γάσπαρη.

β) Byzantinische Zeitschrift. Volume 97, Issue 1, pp. 263–515, ISSN (Print) 0007-7704, DOI: 10.1515/BYZS.2004.263, /October/2004, Published Online: 07/02/2008 από τον P. Schreiner.

11) ¨Problems of Technical Education in a programme of teaching Mathematics in the 15th century according to the codex Vindobonensis phil. Gr. 65 (f.11r-126r)¨. History and Education in Mathematics and Informatics, ed. University of Latvia, 2003.

12) ¨The Pythagorean Rule and its application, according to a Greek Manuscript of the 15th cen. in Wien¨, Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Pub. Faculty of Mathematics, Belgrade, τεύχος 9 (2006).

Αναφορά στο άρθρο έχει γίνει

1) Στον Σερβικό Εθνικό Κατάλογο Επιστημονικών Άρθρων στην ιστοσελίδα http://scindeks.nb.rs/article.aspx?query=RELAAU%26and%264774&page=2&sort=1&stype=0&backurl=/Related.aspx%3fartaun%3d4774

2) Στο Newsletter of History and Pedagogy of Mathematics (H.P.M.), τεύχος 66, Νοέμβριος 2007, σελ. 10.

3) http://www.gogetpapers.com/Explore/Ferdinand_Maria_1_Tutorials/1**, όπου μπορείτε να το διαβάσετε ολόκληρο.**

13) ¨Τα Μαθηματικά των Βυζαντινών χρυσοχόων σύμφωνα με τον Βιενναίο Ελληνικό φιλολογικό κώδικα 65 (φ. 11α-126α) του 15ου αι.¨. Πρακτικά (υπό έκδοση) ΣΤ' Συνεδρίου Βυζαντινολόγων, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2005.

14) ¨Η Βυζαντινή Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια¨, τομέας "Ιστορία-Λαογραφία" στην ιστοσελίδα: www.arcadians.gr .

Το άρθρο αυτό της ιστοσελίδας www.arcadians.gr. επελέγη απο την ιστοσελίδα μαθηματικών της Πάτρας www.mathsforyou.gr. για τον τομέα ‘Έλληνες και Μαθηματικά’. Το άρθρο δημοσιεύθηκε επίσης και στην εφημερίδα του παραρτήματος Ροδόπης της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στο φύλλο 1 Μαρτίου- Απριλίου 2008, σελ. 6. Η αντίστοιχη ιστοσελίδα είναι: http://apeironews.blogspot.com.

15) ¨Transcription, Introduction and Mathematical comments (in Greek)¨, Newsletter of History and Pedagogy of Mathematics (H.P.M.), τεύχος 66, Νοέμβριος 2007.

16) "Η Ιστορία των μεθόδων των αργυροχρυσοχόων", τομέας "Ιστορία-Λαογραφία" στην ιστοσελίδα: www.arcadians.gr.

17) ¨Η Ελληνική Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια των Βυζαντινών¨, Βυζαντινά τόμ. 27ος, εκδ. Κέντρου Βυζαντινών Ερευνών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2007.

18) ‘The Mathematical Encyclopaedia of the 15th century, Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Pub. Faculty of Mathematics, Belgrade, τεύχος 12 (2008),

Αναφορά στο άρθρο έχει γίνει στον Σερβικό Εθνικό Κατάλογο Επιστημονικών Άρθρων: http://scindeks.nb.rs/article.aspx?artid=1820-01090812119C〈=en

19) ¨Ιστορικές Μαθηματικές Μέθοδοι κατά την Ελληνική Βιενναία Μαθηματική Πραγματεία¨, Ευκλείδης Γ’ της ΕΜΕ, 69 (2008).

20) “Arithmetical operations, fractions, progressions, linear equations, and roots of real numbers, according to the codex Vindobonensis phil. Gr. 65 of the 15th century”, Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Pub. Faculty of Mathematics, Belgrade, τεύχος 14 (2009).

Αναφορά στο άρθρο έχει γίνει στον Σερβικό Εθνικό Κατάλογο Επιστημονικών Άρθρων:
http://scindeks.nb.rs/article.aspx?query=RELAAU%26and%264774&page=0&sort=1&stype=0&backurl=/Related.aspx%3fartaun%3d4774

21) "Η διδασκαλία των Μαθηματικών από την εποχή του Βυζαντίου έως τα χρόνια της τουρκοκρατίας και η συμβολή του Νικηφόρου Θεοτόκη, σύμφωνα με το υπ' αριθμ. 72 χειρόγραφο της βιβλιοθήκης της Δημητσάνας", Ευκλείδης γ' της ΕΜΕ, 71 (2009).

ΒΙΒΛΙΑ

(I) ΜΟΝΟΓΡΑΦΙΕΣ

1) Τα Μαθηματικά στο Βυζάντιο, *Λογιστική*, εκδ. Επικαιρότητα, Αθήνα 2006.
Β' Έκδοση: Ιστορία Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά στο Βυζάντιο, *Λογιστική*, εκδ. Παύλος, Αθήνα 2007.

2) Τα Προβλήματα της Γεωμετρίας στο Βυζάντιο, *Γεωδαισία*, εκδ. Επικαιρότητα, Αθήνα 2006.
Β' Έκδοση: Ιστορία Μαθηματικών, Τα Προβλήματα της Γεωμετρίας στο Βυζάντιο, *Γεωδαισία*, εκδ. Παύλος, Αθήνα 2007.

3) Μελέτη του Μαθηματικού περιεχομένου του Βιενναίου Ελληνικού φιλ. κώδικα 65 του 15ου αι. Εισαγωγή, Μεταγραφή και Μαθηματικά Σχόλια, (Διδακτορική Διατριβή) εκδ. Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 2003.
Το βιβλίο αυτό έχει χαρακτηρισθεί διεθνώς ΕΡΓΟ- ΠΗΓΗ (Μαθηματικά- Ιστορία- Μελέτη και Διδασκαλία- Βυζαντινά Μαθηματικά).

4) Το Μαθηματικό περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια, εκδόσεις Κέντρου Βυζαντινών Ερευνών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 2006.
Το βιβλίο ψηφιοποιήθηκε το 2009 με αντίτυπο που προσέφερε το *Πανεπιστήμιο του Michigan*, και ανάλογα με τον όρο αναζήτησης χαρακτηριστικά αποσπάσματά του είναι στη διάθεση των αναγνωστών.
Το βιβλίο έχει χαρακτηρισθεί διεθνώς ΕΡΓΟ- ΠΗΓΗ (Μαθηματικά- Ιστορία- Μελέτη και Διδασκαλία- Βυζαντινά Μαθηματικά) και *ευρίσκεται στις βιβλιοθήκες πολλών Πανεπιστημίων της Ελλάδας και του εξωτερικού*.
Επαινετικά σχόλια για το βιβλίο έχουν γίνει**:**
α) Σε επιστολή της **Πρυτάνεως του Πανεπιστημίου της Σορβόννης Δρ. Ελένης Γλύκατζη- Αρβελέρ.**
β) Σε επιστολή του **Καθηγητή του Πανεπιστημίου της Βιέννης Dr. Wolfram Hoerandner.**
γ) Σε επιστολή της **Ακαδημαϊκού και Καθηγήτριας του Πανεπιστημίου του Harvard Δρ. Αγγελικής Λα□ου.**
Αναφορά στο βιβλίο και περιγραφή του έχει γίνει στα περιοδικά
α) Byzantinische Zeitschrift, band 101 heft 1 (2008), ed. Walter de Gruyter, Berlin, New York, p. 502, από τον **Ομότιμο Καθηγητή της Νομικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Σπυρίδωνα Τρωιάνο.**
β) Byzantinische Zeitschrift, band 101/2 (2008) : III. Abteilung, ed. Walter de Gruyter, Berlin, New York, p. 1066, **από την Καθηγήτρια Βυζαντινής Φιλολογίας του Α.Π.Θ. κ. Σοφία Κοτζάμπαση.**
γ) Byzantinische Zeitschrift. Volume 101, Issue 2, pp. 857–1105, ISSN (Online) 1864-449X, ISSN (Print) 0007-7704, DOI: 10.1515/BYZS.2008.026, /March/2009 από R. Tocci. Published Online: 28/04/2009.)

5) <u>Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα κατά τα τελευταία χρόνια της τουρκοκρατίας, σύμφωνα με τον κώδικα 72 της Βιβλιοθήκης της Δημητσάνας, Εισαγωγή, Έκδοση και Σχόλια</u>, εκδ. Μαρία Χάλκου, Αθήνα 2009.
Το βιβλίο μόλις τέθηκε σε κυκλοφορία ψηφιοποιήθηκε από τη βιβλιοθήκη "Ανέμη" του Πανεπιστημίου της Κρήτης και είναι στη διάθεση των αναγνωστών στην ιστοσελίδα (www.anemi.uoc.gr). Χαρακτηρίστηκε δε ΕΡΓΟ- ΠΗΓΗ για την Ιστορία, τη μελέτη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, τόσο από το *Πανεπιστήμιο της Κρήτης*, όσο και από το *Πανεπιστήμιο του Harvard*.

(ΙΙ) ΣΥΛΛΟΓΙΚΑ ΕΡΓΑ

Συγγραφέας (σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μέλη της συγγραφικής ομάδας των μαθηματικών του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ.) των βιβλίων:
1) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Β’ Λυκείου, τεύχος Β’</u>, εκδ. ΚΕΕ του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 1998.
2) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Β’ Λυκείου, τεύχος Γ’</u>, εκδ. ΚΕΕ του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 1999.
3) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Α’ Θετικής κατεύθυνσης</u>, εκδ. ΚΕΕ του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 1999.
4) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Β’ Θετικής κατεύθυνσης</u>, εκδ. ΚΕΕ του , Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 2000.
5) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Α’ Τεχνολογικής κατεύθυνσης</u>, εκδ. ΚΕΕ του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 1999.
6) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Β’ Τεχνολογικής κατεύθυνσης</u>, εκδ. ΚΕΕ του Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 2000.
7) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Α’ Γενικής Παιδείας</u>, εκδ. ΚΕΕ του , Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 1999.
8) <u>Αξιολόγηση των μαθητών στα Μαθηματικά Γ’ Λυκείου, τεύχος Β’ Γενικής Παιδείας</u>, εκδ. ΚΕΕ του, Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ., Αθήνα 2000.