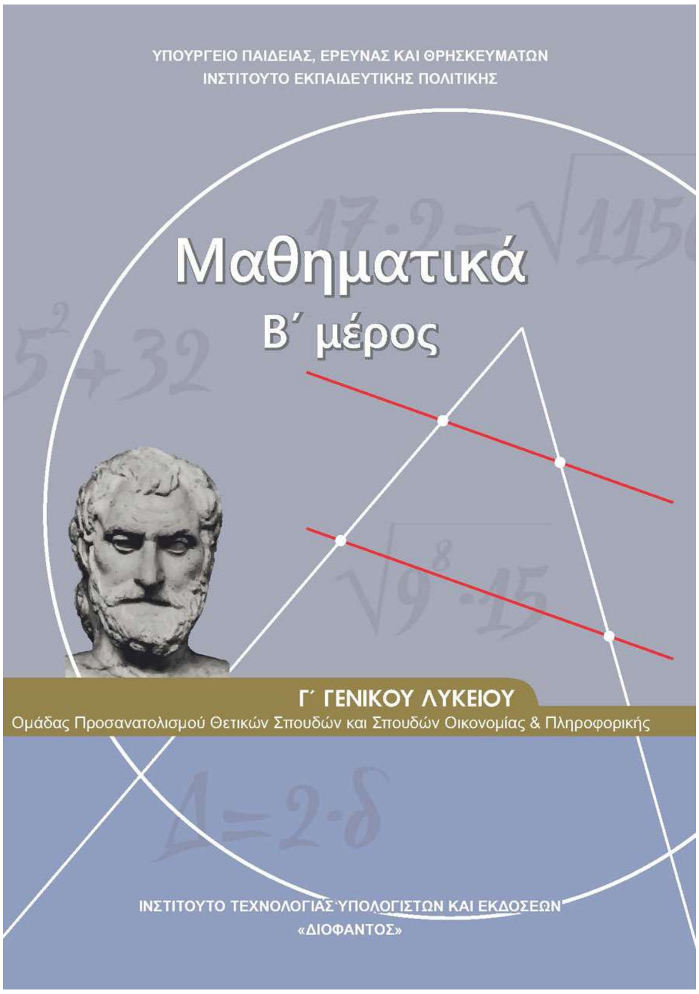
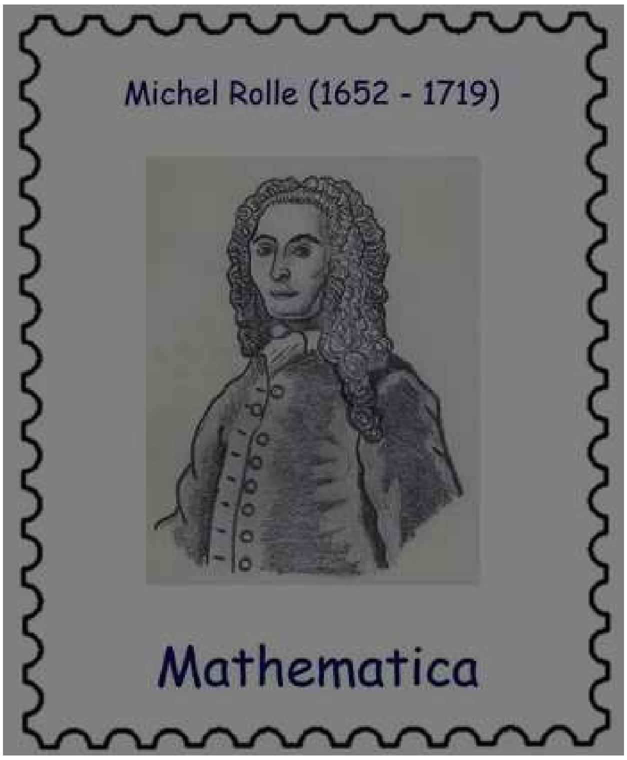


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.5



Μη βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν - Ευκλείδης

Αεί ο θεός γεωμετρεί – Πλάτων

Μη μου τους κύκλους τάραττε – Αρχιμήδης

Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου -Οδυσσέας Ελύτης

Τα καθαρά Μαθηματικά είναι, κατά κάποιο τρόπο, η ποίηση των λογικών ιδεών -Αλβέρτος Αϊνστάιν

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.5

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΘΕΜΑ Α

α) Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{x},\ x\geq 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 6

β) Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

γ) Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 4

δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $0<\alpha<1$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)>0$, τότε $f\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in D_f$.

iii. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f\left(x\right)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

iv. Η γραφική παράσταση της $\left|f\right|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σ' αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

v. Για την συνάρτηση $f\ :\ A\to \mathrm{R}$ και την αντίστροφη της f^{-1} ισχύει $f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=y,\ y\in f\left(\mathrm{A}\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Ποιο είναι το πρόσημο των τιμών της f ;

Μονάδες 6

β) Να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$

Μονάδες 8

γ) Δεδομένου ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$\ln\left(\sqrt{\pi^2+1}+\pi\right)-\ln\left(\sqrt{e^2+1}-e\right)>\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad :(1)$$

Μονάδες 5

δ) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\ln^2 x+1}+\ln x\right)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2 x+1}-\ln x}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\left(e^x+1\right)^2+4xe^x-4e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $\dfrac{9}{32}<\ln 2<\dfrac{225}{256}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\rho\in\left(-\ln 16,-\ln 4\right)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και ρ.

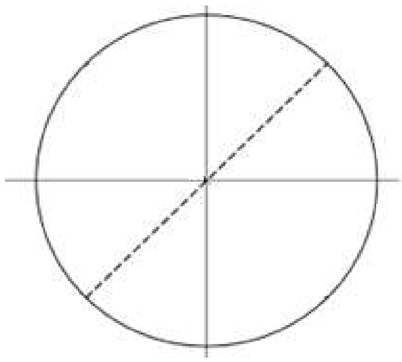
Μονάδες 9

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=-x^2-x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες που εφάπτονται στη C_f στα σημεία $A(0,1)$ και $B\left(\rho,e^{\rho}\right)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο κύκλος (c) του διπλανού σχήματος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ και μία συνεχής συνάρτηση $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στον κύκλο αυτό με $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$.

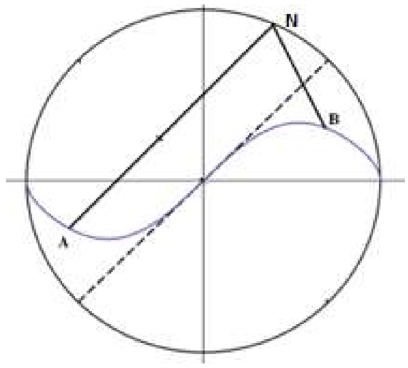


α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη διάμετρο που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε_1) με εξίσωση $y=x$.

Μονάδες 12

β) Έστω σημείο $\text{N}\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$ του κύκλου (c).

Θεωρούμε συμμετρικά σημεία $\text{A}\left(\kappa, f\left(\kappa\right)\right)$, $\text{B}\left(\lambda, f\left(\lambda\right)\right)$, ($\kappa < \lambda$), ως προς την αρχή των αξόνων O και τη συνάρτηση $d\left(x\right)=\left(\text{AN}\right)-\left(\text{BN}\right)$, $x\in\left[-1,1\right]$.



i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d έχει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι $M < 2$.

Μονάδες 4

iii. Αν η μέγιστη τιμή M παρουσιάζεται μόνο στο x_0, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{d\left(x\right)-2}{d\left(x\right)-M}$$

Μονάδες 5

Επιμέλεια: **ΧΡ. ΚΑΖΑΚΗΣ-Β. ΜΑΥΡΟΦΡΥΔΗΣ**
Σχολικός Σύμβουλος: Γ. ΚΑΡΑΒΑΣΙΛΗΣ