ΘΕΜΑ Α

δ) i. Σ ii. Λ iii. Σ iv. Σ v. Σ

ΘΕΜΑ Β

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x)=0$ τότε

$$f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow x^2+1=x^2 \Rightarrow 1=0 \text{, άτοπο.}$$

Άρα, ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=\sqrt{0^2+1}-0=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Το πρόσημο προσδιορίζεται και αλγεβρικά.

β) Η f ορίζεται στο $A_f=\mathbb{R}$ ενώ η g στο $A_g=(0,+\infty)$. Τότε :

- Η $g \circ f$ ορίζεται στο $\mathrm{A}_{g\circ f}=\{x \in A_f \ / \ f(x) \in A_g\}$ και έτσι έχουμε

  $$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2+1}-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{, άρα } \mathrm{A}_{g\circ f}=\mathbb{R}.$$

  Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(g \circ f)(x)=g(f(x))=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

- Η $f \circ g$ ορίζεται στο $\mathrm{A}_{f\circ g}=\{x \in A_g \ / \ g(x) \in A_f\}$ και έτσι έχουμε $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

  , άρα $\mathrm{A}_{f\circ g}=(0,+\infty)$.

  Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $(f \circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\ln^2 x+1}-\ln x$.

γ) $$(1) \Leftrightarrow g(f(-\pi))-g(f(e))>g(f(1))-g(f(-1))$$

$$\Leftrightarrow g(f(-\pi))+g(f(-1))>g(f(1))+g(f(e)) \text{ που ισχύει,}$$

αφού:

η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα γιατί για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \underset{\gamma\nu.\varphi\theta.}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x_1)>f(x_2) \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\overset{g}{\Rightarrow}} g(f(x_1))>g(f(x_2)) \ ,$$

και έτσι, είναι:

$$\begin{cases} -\pi<1 \\ -1<e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(f(-\pi))>g(f(1)) \\ g(f(-1))>g(f(e)) \end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} g(f(-\pi))+g(f(-1))>g(f(1))+g(f(e))$$

δ)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\ln^2 x+1}+\ln x\right) \underset{\substack{\text{όταν } x\to 0^+\\ \text{τότε } u\to -\infty}}{\overset{\text{θέτουμε } \ln x=u}{=}} \lim_{u\to -\infty}\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)$$

$$=\lim_{u\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2+1}\right)^2-u^2}{\sqrt{u^2+1}-u}$$

$$=\lim_{u\to -\infty}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}-u}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln^2 x+1}-\ln x} \underset{\substack{\text{όταν } x\to +\infty\\ \text{τότε } u\to +\infty}}{\overset{\text{θέτουμε } \ln x=u}{=}} \lim_{u\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}-u}$$

$$=\lim_{u\to +\infty}\frac{\sqrt{u^2+1}+u}{\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\cdot\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)}$$

$$=\lim_{u\to +\infty}\frac{\sqrt{u^2+1}+u}{u^2+1-u^2}=\lim_{u\to +\infty}\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)=+\infty$$

Σχόλιο: Τα ζητούμενα όρια είναι τα $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{f\left(g\left(x\right)\right)}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(-g\left(x\right)\right)$

ΘΕΜΑ Γ

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$h\left(-\ln 16\right)=\left(e^{-\ln 16}+1\right)^2-4e^{-\ln 16}\ln 16-4e^{-\ln 16}=\left(\frac{1}{16}+1\right)^2-4\cdot\frac{1}{16}\ln 2^4-4\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{289}{256}-\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{225}{256}-\ln 2>0$$

$$h\left(-\ln 4\right)=\left(e^{-\ln 4}+1\right)^2-4e^{-\ln 4}\ln 4-4e^{-\ln 4}=\left(\frac{1}{4}+1\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}\ln 2^2-4\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{25}{16}-2\ln 2-1=\frac{9}{16}-2\ln 2=2\cdot\frac{9}{32}-2\ln 2=2\left(\frac{9}{32}-\ln 2\right)<0$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\ln 16,-\ln 4\right]$ και ισχύει $h\left(-\ln 16\right)\cdot h\left(-\ln 4\right)<0$. Επειδή η h συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\ln 16,-\ln 4\right]$ έπεται ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\rho\in\left(-\ln 16,-\ln 4\right)$ τέτοιο, ώστε $h\left(\rho\right)=0$.

β) Είναι $h\left(0\right)=\left(e^0+1\right)^2+4\cdot 0\cdot e^0-4e^0=0=h\left(\rho\right)$.

Έστω ότι η εξίσωση $h\left(x\right)=0$ έχει και τρίτη ρίζα ξ διαφορετική των $0,\rho$. Ας ονομάσουμε x_1,x_2,x_3 τις ρίζες της $h\left(x\right)=0$ με $x_1<x_2<x_3$. Για τη συνάρτηση h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $\left[x_1,x_2\right]$ και $\left[x_2,x_3\right]$, αφού:

- είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}h'(x)&=2\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'+4(x)'e^x+4x\left(e^x\right)'-4\left(e^x\right)'\\&=2e^x\left(e^x+1\right)+4xe^x=2e^x\left(e^x+2x+1\right).\end{aligned}$$

- $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1)=0$ και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2)=0$.

Οπότε:

$$h'(\xi_1)=0=h'(\xi_2)\Rightarrow\begin{cases}2e^{\xi_1}\left(e^{\xi_1}+2\xi_1+1\right)=0\\2e^{\xi_2}\left(e^{\xi_2}+2\xi_2+1\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{\xi_1}+2\xi_1+1=0\\e^{\xi_2}+2\xi_2+1=0\end{cases}\Rightarrow e^{\xi_1}+2\xi_1+1=e^{\xi_2}+2\xi_2+1$$

αυτό είναι άτοπο αφού ισχύει $\xi_1<\xi_2\Rightarrow\begin{cases}e^{\xi_1}<e^{\xi_2}\\2\xi_1+1<2\xi_2+1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}e^{\xi_1}+2\xi_1+1<e^{\xi_2}+2\xi_2+1$.

Άρα, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και ρ.

Σχόλιο: Η εξίσωση $e^x+2x+1=0$ έχει το πολύ μια λύση αφού είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα).

γ) Είναι $g'(x)=-2x-1,\ x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) της C_g στο $(\alpha,g(\alpha))$ είναι

$$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y+\alpha^2+\alpha=(-2\alpha-1)x+2\alpha^2+\alpha\Leftrightarrow\boxed{y=(-2\alpha-1)x+\alpha^2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της C_f στο σημείο $\mathrm{B}\left(x_0,e^{x_0}\right)$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{x_0}=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}\Leftrightarrow\boxed{y=e^{x_0}x+e^{x_0}-x_0e^{x_0}}$$

Η ευθεία (ε_2) εφάπτεται και στη C_g, αν και μόνο αν υπάρχει α, τέτοιο, ώστε η (ε_1) να ταυτίζεται με την (ε_2). Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\begin{cases}\alpha^2 = e^{x_0} - x_0 e^{x_0} \\ -2\alpha - 1 = e^{x_0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(-\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\right)^2 = e^{x_0} - x_0 e^{x_0} \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(e^{x_0}+1\right)^2 = e^{x_0} - x_0 e^{x_0} \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(e^{\rho}+1\right)^2 + 4x_0 e^{x_0} - 4e^{x_0} = 0 \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h\left(x_0\right) = 0 \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{cases}$$

$$\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_0 = \rho \text{ ή } x_0 = 0 \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} x_0 = \rho \\ \alpha = -\dfrac{e^{x_0}+1}{2}\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ \alpha = -1\end{pmatrix}\right.$$

Και επειδή είναι $\rho < 0 \Rightarrow e^{\rho} < 1 \Rightarrow f'\left(\rho\right) < f'\left(0\right)$, οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες που εφάπτονται στη C_f στα σημεία $A\left(0,1\right)$ και $B\left(\rho, e^{\rho}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η C_f βρίσκεται ολόκληρη μέσα στον κύκλο (c) και η f είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι υποσύνολο του $\left(-1,1\right)$. Δηλαδή, ισχύει $-1 < f\left(x\right) < 1$ για κάθε $x \in \left(-1,1\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to -1^+}\left(f\left(x\right) - x\right) = 0 - \left(-1\right) = 1 > 0$ άρα $f\left(x\right) - x > 0$ κοντά στο -1 από δεξιά. Οπότε υπάρχει α κοντά στο -1 από δεξιά ώστε $f\left(\alpha\right) - \alpha > 0$. Ακόμη, είναι $\lim\limits_{x \to 1^-}\left(f\left(x\right) - x\right) = 0 - 1 = -1 < 0$ άρα $f\left(x\right) - x < 0$ κοντά στο 1 από αριστερά. Οπότε υπάρχει β κοντά στο 1 από αριστερά ώστε $f\left(\beta\right) - \beta > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right) = f\left(x\right) - x,\ x \in \left[\alpha, \beta\right]$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \beta\right]$ και ισχύει $g\left(\alpha\right)g\left(\beta\right) = \left(f\left(\alpha\right) - \alpha\right)\left(f\left(\beta\right) - \beta\right) < 0$. Η g πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ οπότε υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $g\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) = x$ στο διάστημα $\left(\alpha, \beta\right)$ και η C_f τέμνει την διάμετρο που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\left(\varepsilon_1\right)$.

Σχόλιο: Μπορεί να ζητηθεί ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαμέτρους που βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\left(\varepsilon_1\right), \left(\varepsilon_2\right)$ με εξισώσεις $y = x,\ y = -x$ αντίστοιχα.

β)

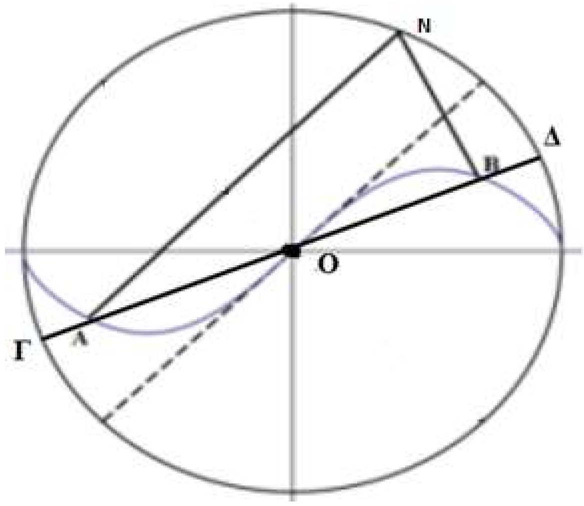
i. Είναι

$$d\left(x\right) = \left(\mathrm{AN}\right) - \left(\mathrm{BN}\right) = \sqrt{\left(x-\kappa\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2} - f\left(\kappa\right)\right)^2} - \sqrt{\left(x-\lambda\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2} - f\left(\lambda\right)\right)^2}.$$

Η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $\left[-1,1\right]$ ως διαφορά τετραγωνικών ριζών συνεχών συναρτήσεων αφού οι συναρτήσεις $h\left(x\right)=\left(x-\kappa\right)^2+\left(\sqrt{1-x^2}-f\left(\kappa\right)\right)^2$, $x\in\left[-1,1\right]$ και $\varphi\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^2+\left(\sqrt{1-x^2}-f\left(\lambda\right)\right)^2$, $x\in\left[-1,1\right]$ είναι συνεχείς ως αποτελέσματα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $\left[-1,1\right]$. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η d παίρνει στο $\left[-1,1\right]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΔ. Ισχύει

$$d\left(x\right)=\left(\mathrm{AN}\right)-\left(\mathrm{BN}\right)\leq\left|\left(\mathrm{AN}\right)-\left(\mathrm{BN}\right)\right|\leq\left(\mathrm{AB}\right)<\left(\Gamma\Delta\right)=2\rho=2.$$



iii. Από το προηγούμενο υποερώτημα είναι $M<2\Rightarrow d\left(x_0\right)-2<0$ άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left(d\left(x\right)-2\right)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{d}{=}}d\left(x_0\right)-2<0.$$

Για κάθε $x\in\left[-1,1\right]$ με $x\neq x_0$ ισχύει $d\left(x\right)<M\Rightarrow d\left(x\right)-M<0$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0}\left(d\left(x\right)-M\right)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{d}{=}}d\left(x_0\right)-M=0$ και $d\left(x\right)-M<0$ κοντά στο x_0 έπεται ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{d\left(x\right)-M}=-\infty.$$

Οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{d\left(x\right)-2}{d\left(x\right)-M}=\lim_{x\to x_0}\left[\left(\frac{1}{d\left(x\right)-M}\right)\cdot\left(d\left(x\right)-2\right)\right]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{d\left(x\right)-M}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\left(d\left(x\right)-2\right)=+\infty.$$

Σχόλιο: Για το σχήμα χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση $f\left(x\right)=xe^{-x^2}\sqrt{1-x^2}$, $x\in\left(-1,1\right)$