Γ’ Γυμνασίου

# Μαθηματικά

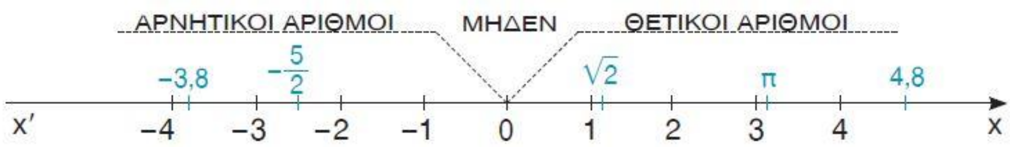
Θεωρία

## 1.1 Πράξεις με Πραγματικούς Αριθμούς

### Ρητοί και Άρρητοι αριθμοί

Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι σήμερα είναι οι εξής:

- **Φυσικοί** είναι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, ….
- **Ακέραιοι** είναι οι …., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ……
- **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{μ}{ν}$ , όπου μ και ν είναι ακέραιοι αριθμοί με ν ≠ 0. Για παράδειγμα οι αριθμοί $\frac{3}{5}$ , $\frac{-7}{4}$ ,- $\frac{8}{1}$ είναι ρητοί.
- **Άρρητοι** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή δεν μπορούν να πάρουν την μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι αριθμοί $\sqrt{2}$ , $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, κτλ. Υπάρχουν επίσης και άρρητοι αριθμοί που δεν εκφράζονται υποχρεωτικά ως ρίζες κάποιου αριθμού, όπως είναι ο αριθμός π ≈ 3,14159…..
- **<u>Πραγματικοί</u>** είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από τους <u>ρητούς</u> και τους <u>άρρητους</u> αριθμούς. Αν οι πραγματικοί αριθμοί τοποθετηθούν πάνω σε μια ευθεία, τότε την «γεμίζουν» πλήρως, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό. Η ευθεία αυτή ονομάζεται ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών.




### Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

**Απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού **α** ονομάζουμε την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό α από την αρχή Ο του άξονα των πραγματικών αριθμών.

- Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α|.
- Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α είναι πάντα ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.

*Συγκεκριμένα ισχύει ότι*:

$|α| = α$, αν $α \geq 0$ $\qquad$ $|α| = -α$, αν $α < 0$

# Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς

## Πρόσθεση πραγματικών αριθμών

- Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από την μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$+7+5=+12$$
$$-7-5=-12$$

$$+5-7=-2$$
$$-5+7=+2$$

## Πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο « + ». Ισχύουν δηλαδή οι κανόνες:

$$+\cdot+=+ \text{ και } -\cdot-=+$$

$$(+5)\cdot(+7)=+35$$
$$(-5)\cdot(-7)=+35$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο « - ». Ισχύουν δηλαδή οι κανόνες:

$$+\cdot-=- \text{ και } -\cdot+=-$$

$$(+5)\cdot(-7)=-35$$
$$(-5)\cdot(+7)=-35$$

- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$\alpha\cdot 0=0$$

| Ιδιότητα | Πρόσθεση | Πολλαπλασιασμός |
|---|---|---|
| Αντιμεταθετική | $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ | $\alpha\beta=\beta\alpha$ |
| Προσεταιριστική | $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ | $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$ |
| Ουδέτερο στοιχείο | $\alpha+0=\alpha$ | $\alpha\cdot 1=\alpha$ |
| | $\alpha+(-\alpha)=0$ | $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\quad \alpha\neq 0$ |
| Επιμεριστική | $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ | |

## Αφαίρεση πραγματικών αριθμών

Δυο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα ίσο με 0 (μηδέν). Δηλαδή, αν α και β είναι δύο αντίθετοι αριθμοί, τότε γράφουμε α + β = 0.

- Ο αντίθετος του α είναι ο –α.
- Για να κάνουμε την αφαίρεση α – β, προσθέτουμε στον μειωτέο (α) τον αντίθετο του αφαιρετέου (β). Δηλαδή:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

$$5-7=5+(-7)=-2$$
$$5-(-7)=5+(+7)=12$$

## *Διαίρεση πραγματικών αριθμών*

Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**, όταν έχουν γινόμενο 1 (μονάδα). Δηλαδή, αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, με α, β ≠ 0, αντίστροφοι, τότε γράφουμε $\alpha \cdot \beta = 1$

Ο αντίστροφος του α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$ και ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

- Για να κάνουμε διαίρεση α : β, με β≠0, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο (α) με τον αντίστροφο του διαιρέτη (β). Δηλαδή:

$$-5 : 15 = -5 \cdot \frac{1}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

- Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό, ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

**<u>Αν α · β = 0 τότε α = 0 ή β = 0</u>**

## *Προτεραιότητα Πράξεων*

***Αλγεβρική Παράσταση*** ονομάζεται μια παράσταση, η οποία εκτός από αριθμούς περιέχει και μεταβλητές (γράμματα).

*Οι πράξεις γίνονται με την εξής προτεραιότητα*

1) Εκτελούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ( εφ' όσον υπάρχουν)
2) Δυνάμεις αριθμών
3) Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις
4) Προσθέσεις και Αφαιρέσεις

## *Δυνάμεις πραγματικών αριθμών*

*Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό ν ≥ 2 συμβολίζεται με $\alpha^{\nu}$ και είναι ένα γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.*

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

| Ιδιότητες | Παραδείγματα |
| --- | --- |
| $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ | $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ |
| $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ | $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$ |
| $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$ | $(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$ |
| $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$ |
| $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ | $(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$ |
| $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ |

## *Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού*

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό x.

- Ορίζουμε επίσης ότι $\sqrt{0} = 0$
- Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικός αριθμός.
- Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

- Για κάθε x ≥ 0 ισχύει:

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

*Γενικά για δύο μη αρνητικούς αριθμούς ισχύει*

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \qquad \text{και} \qquad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

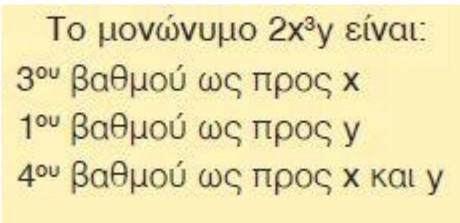
## *1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα*

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται κάθε παράσταση που περιέχει μόνο αριθμούς και πράξεις μεταξύ αυτών.
- **Αλγεβρική παράσταση** ονομάζεται κάθε παράσταση που εκτός από αριθμούς περιέχει και μεταβλητές.
- Αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές μιας αλγεβρικής παράστασης με αριθμούς, τότε ο αριθμός που θα προκύψει μετά τις πράξεις, λέγεται **αριθμητική τιμή** ή **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.
- Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της γίνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης (ή της αφαίρεσης) και του πολλαπλασιασμού και επιπλέον οι εκθέτες των μεταβλητών είναι φυσικοί αριθμοί.

## ***Μονώνυμο***

- Μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ ενός αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, ονομάζεται **μονώνυμο**.
- Ο αριθμητικός παράγοντας ενός μονωνύμου, λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου.
- Σε ένα μονώνυμο, το γινόμενο όλων των μεταβλητών του (μαζί με τους εκθέτες τους) λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.


- Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, ονομάζονται **όμοια**.
- Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** μονώνυμα.
- Δύο όμοια μονώνυμα με αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα** μονώνυμα.




- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής ενός μονωνύμου λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς την μεταβλητή αυτή.
- Το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών ενός μονωνύμου λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου **ως προς όλες τις μεταβλητές του**.

- ✓ Κάθε αριθμός θεωρείται ότι είναι και αυτός μονώνυμο, το οποίο λέμε **σταθερό** μονώνυμο. Ειδικότερα ο αριθμός 0 λέγεται μηδενικό μονώνυμο.
- ✓ Ο βαθμός ενός σταθερού και μη μηδενικού μονωνύμου είναι 0. Για παράδειγμα ο αριθμός 3 είναι ένα σταθερό μονώνυμο μηδενικού βαθμού. Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό.

# ***Πράξεις με μονώνυμα***

## Πρόσθεση (άθροισμα) μονωνύμων

- Το **άθροισμα** όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο μονώνυμο, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
- Αν δύο μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο. Για παράδειγμα, τα μονώνυμα $2xy^2$ και $3x^3y$ έχουν άθροισμα $2xy^2 + 3x^3y$ το οποίο δεν είναι μονώνυμο.

## Πολλαπλασιασμός (γινόμενο) μονωνύμων

- Το **γινόμενο** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει:
  - **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών τους.
  - **κύριο μέλος** το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη σε κάθε μεταβλητή το άθροισμα των εκθετών της.
- Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα δεν είναι απαραίτητο να είναι όμοια.
- Στον πολλαπλασιασμό μονωνύμων στηριζόμαστε στην ιδιότητα:

$$x^{\nu} \cdot x^{\mu} = x^{\nu+\mu}$$

## Διαίρεση (πηλίκο) μονωνύμων

- Η **διαίρεση** δύο μονωνύμων γίνεται με πολλαπλασιασμό του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
- Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, δεν είναι απαραίτητο τα μονώνυμα να είναι όμοια.
- Για την διαίρεση μονωνύμων στηριζόμαστε στην ιδιότητα:

$$\frac{x^{\nu}}{x^{\mu}} = x^{\nu-\mu}$$

- *Το πηλίκο δυο μονωνύμων, μπορεί να είναι μονώνυμο αλλά μπορεί και να μην είναι μονώνυμο!!!*

## *1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση Πολυωνύμων*

**Πολυώνυμο** ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση που προκύπτει ως άθροισμα μονωνύμων, τα οποία δεν είναι όμοια μεταξύ τους.

- Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.
  - *Διώνυμο, αν έχει 2 όρους,*
  - *Τριώνυμο, αν έχει 3 όρους.*

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ έχει τρεις όρους που είναι τα μονώνυμα $3x^2y$, $2xy^4$, $-5x^3y^3$.

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ είναι 3ου βαθμού ως προς x, 4ου βαθμού ως προς y, 6ου βαθμού ως προς x και y.

- Βαθμός πολυωνύμου ως προς μια μεταβλητή είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής αυτής.
- Βαθμός πολυωνύμου ως προς περισσότερες μεταβλητές είναι το μεγαλύτερο άθροισμα των εκθετών, των μεταβλητών σε κάθε όρο πολυωνύμου.

- Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα πολυώνυμο, το οποίο λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο.
- Ο βαθμός ενός σταθερού και μη μηδενικού πολυωνύμου είναι 0. Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

- Όταν ένα πολυώνυμο έχει μια μεταβλητή, για παράδειγμα x, συμβολίζεται εν συντομία **P(x)** ή **Q(x)** ή **A(x)** κλπ.
- Όταν έχουμε ένα πολυώνυμο P(x) συνήθως γράφουμε με τέτοια σειρά τους όρους, ώστε ο καθένας από αυτούς να είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον επόμενό του.
- Την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου P(x) για x = α την συμβολίζουμε P(α).

- Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοιοι όροι, δηλαδή όμοια μονώνυμα, μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Κάνουμε δηλαδή **αναγωγή όμοιων όρων**.
- Δυο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.
- Όταν δύο πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι **ίσα**, σημαίνει ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές των όμοιων όρων είναι ίσοι.

$2α^2 – 3β + 4α^2 – 5β =$

$\underbrace{2α^2 + 4α^2} – \underbrace{3β – 5β} = 6α^2 – 8β$

Η αρχική αλγεβρική παράσταση, που είχε τέσσερις όρους, συμπτύχθηκε σε μία άλλη με δύο όρους.

## Άθροισμα και Διαφορά πολυωνύμων

Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^3 – 2x^2 – 7x – 5$ και $B(x) = 2x^3 – x^2 + x$ έχουν άθροισμα ή διαφορά που βρίσκουμε ως εξής:

$A(x) + B(x) = (3x^3 – 2x^2 – 7x – 5) + (2x^3 – x^2 + x) =$ (Απαλείφουμε τις παρενθέσεις)

$= 3x^3 – 2x^2 – 7x – 5 + 2x^3 – x^2 + x =$ (Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

$= 5x^3 – 3x^2 – 6x – 5.$

# *1.4 Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων*

## Μονώνυμο με Πολυώνυμο

Ο πολλαπλασιασμός **μονωνύμου** με πολυώνυμο στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:

$$α(β + γ) = αβ + αγ$$

Συνεπώς, για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

### Πολυώνυμο με Πολυώνυμο

Για τον υπολογισμό του γινομένου **πολυωνύμων** εφαρμόζουμε την ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)\cdot\gamma + (\alpha + \beta)\cdot\delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Συνεπώς, για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

## *1.5 Αξιοσημείωτες Ταυτότητες*

**Ταυτότητα** είναι μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

| | |
|---|---|
| Τετράγωνο αθροίσματος | $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| Τετράγωνο διαφοράς | $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| Κύβος αθροίσματος | $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ |
| Κύβος διαφοράς | $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ |
| Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά | $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ |

### *Αποδείξεις:*

1. **Να αποδείξετε ότι $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{\alpha}^2 + 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^2$**

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

2. **Να αποδείξετε ότι $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{\alpha}^2 - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^2$**

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

3. **Να αποδείξετε ότι $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^3 = \boldsymbol{\alpha}^3 + 3\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta} + 3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2 + \boldsymbol{\beta}^3$**

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta)\\ &= \alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

4. **Να αποδείξετε ότι $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^3 = \boldsymbol{\alpha}^3 - 3\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta} + 3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\beta}^3$**

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^3 &= (\alpha - \beta)^2(\alpha - \beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta)\\ &= \alpha^3 - \alpha^2\beta - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3\end{aligned}$$

5. **Να αποδείξετε ότι $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2$**

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

# *1.6Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων*

**<u>Παραγοντοποίηση</u>** ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία, μια αλγεβρική παράσταση που είναι **άθροισμα**, μετατρέπεται σε **γινόμενο** παραγόντων.

Όταν μια παράσταση δεν επιδέχεται άλλη παραγοντοποίηση, θα λέμε ότι έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

*Όταν μας ζητούν να παραγοντοποιήσουμε μια αλγεβρική παράσταση, τότε θα πρέπει να την αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, δηλαδή να την φέρουμε σε μορφή που δεν επιδέχεται άλλη παραγοντοποίηση.*

**<u>Οι βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης είναι:</u>**

***α) Κοινός παράγοντας***

***β) Ομαδοποίηση***

***γ) Διαφορά τετραγώνων***

***δ) Ανάπτυγμα τετραγώνου***

***ε) Τριώνυμο***

***στ) Διαφορά ή άθροισμα κύβων***

## <u>α) Κοινός Παράγοντας</u>

Όταν όλοι οι όροι μιας αλγεβρικής παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε αυτή μετατρέπεται σε γινόμενο με την χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας

$\boxed{\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)}$ ή $\boxed{\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha(\beta - \gamma)}$

## <u>β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες - Ομαδοποίηση</u>

Όταν οι όροι μιας παράστασης, δεν έχουν όλοι κοινό παράγοντα, τότε τους χωρίζουμε σε **ομάδες** φροντίζοντας ώστε:

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα.
- Οι παραστάσεις που μένουν στις παρενθέσεις μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα κάθε ομάδας, να είναι ίδιες.

$$ax + ay + 2x + 2y = a(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(a + 2)$$

ή

$$ax + ay + 2x + 2y = x(a + 2) + y(a + 2) = (a + 2)(x + y)$$

## γ) Διαφορά τετραγώνων

Όταν μια παράσταση είναι ή μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο τετραγώνων, τότε αυτή μετατρέπεται σε γινόμενο (παραγοντοποιείται) σύμφωνα με την ταυτότητα:

$$\boxed{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$$

*παράδειγμα*

$x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$

## δ) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Όταν μια παράσταση έχει 3 όρους, θα ελέγχουμε μήπως είναι **ανάπτυγμα τετραγώνου**, οπότε και θα παραγοντοποιούμε σύμφωνα με τις ταυτότητες:

$$\boxed{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2} \quad \text{και} \quad \boxed{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2}$$

*παράδειγμα*

$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$

## ε) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου της μορφής $\mathbf{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta}$ γίνεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\boxed{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)}$$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί **μόνο** αν ο συντελεστής του $x^2$ είναι 1, δηλαδή όταν έχουμε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \lambda x + \mu$. Συγκεκριμένα ψάχνουμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα $\mathbf{\alpha + \beta = \lambda}$ και γινόμενο $\mathbf{\alpha\beta = \mu}$.

Παράδειγμα

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + (6 + 2)x + 6 \cdot 2 = (x + 6)(x + 2)$$

| | |
|---|---|
| Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους | $\alpha x + \beta x = x(\alpha + \beta)$ |
| Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παράστασης | $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (\alpha + \beta)(x + y)$ |
| Διαφορά τετραγώνων | $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ |
| Άθροισμα – Διαφορά κύβων | $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$<br>$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ |
| Ανάπτυγμα τετραγώνου | $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$<br>$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ |
| Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ | $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$ |

## *1.8Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων*

### Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αριθμών

Για να βρούμε το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** και τον **μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσοτέρων αριθμών, τους αναλύουμε αρχικά σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Στη συνέχεια:

- Το **Ε.Κ.Π.** είναι το γινόμενο **των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη**
- Ο **Μ.Κ.Δ.** είναι το γινόμενο **των κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη.**

### Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. μονωνύμων

- Το **Ε.Κ.Π.** δύο ή περισσότερων μονωνύμων, είναι ένα **μονώνυμο** που έχει:
  - **Συντελεστή** το Ε.Κ.Π. των συντελεστών των μονωνύμων.
  - **Κύριο μέρος** το γινόμενο **των κοινών και μη κοινών μεταβλητών με το μεγαλύτερο εκθέτη.**
- Ο **Μ.Κ.Δ.** δύο ή περισσοτέρων μονωνύμων, είναι ένα **μονώνυμο** που έχει:
  - **Συντελεστή** τον Μ.Κ.Δ. των συντελεστών των μονωνύμων.
  - **Κύριο μέρος** το γινόμενο **των κοινών μεταβλητών με το μικρότερο εκθέτη**.

### Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. ή τον Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσοτέρων πολυωνύμων, πρέπει αρχικά κάθε πολυώνυμο να το αναλύσουμε σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**, δηλαδή να το **παραγοντοποιήσουμε**. Στη συνέχεια:

- Το **Ε.Κ.Π.** είναι το γινόμενο **των κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη.**
- Ο **Μ.Κ.Δ.** είναι το γινόμενο **των κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη.**

## *1.9 Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις*

### Ορισμός Ρητής Αλγεβρικής Παράστασης

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι **κλάσμα**, του οποίου οι όροι είναι <u>πολυώνυμα</u>, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **αλγεβρική παράσταση**.

*Κάθε κλάσμα για να ορίζεται πρέπει να έχει <u>παρονομαστή **διάφορο** του μηδενός</u>. Έτσι σε μια ρητή παράσταση, οι μεταβλητές δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.*

### Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Αν σε ένα κλάσμα και οι δύο όροι του (αριθμητής και παρονομαστής) είναι **γινόμενα**, τα οποία έχουν ένα **κοινό παράγοντα**, τότε ο παράγοντας αυτός <u>μπορεί να απλοποιηθεί</u>. Έτσι για να απλοποιήσουμε μια ρητή παράσταση, εργαζόμαστε ως εξής:

***α) Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της.***

***β) Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.***

Για παράδειγμα, η παράσταση $\frac{5x-10}{x^2-4}$ απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{5x-10}{x^2-4}=\frac{5(x-2)}{x^2-2^2}=\frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{5}{x+2}$$

***<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>**: **Δεν κάνουμε απλοποίηση εάν δεν είναι οι όροι του κλάσματος γινόμενα***

- Σε μια κλασματική παράσταση παίρνουμε τους περιορισμούς **πριν** κάνουμε οποιαδήποτε απλοποίηση. Οι περιορισμοί ισχύουν και για την απλοποιημένη μορφή της κλασματικής παράστασης.

## 1.10 Πράξεις Ρητών παραστάσεων

### <u>Πολλαπλασιασμός Ρητών Παραστάσεων</u>

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ρητές παραστάσεις**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

- Για να **πολλαπλασιάσουμε μια ακέραια** με μια **ρητή παράσταση**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα:

$$\alpha\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

### <u>Διαίρεση Ρητών παραστάσεων</u>

- Για να **διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα:

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Δηλαδή ***αντιστρέφουμε τον διαιρέτη και κάνουμε πολλαπλασιασμό***.

### <u>Σύνθετα κλάσματα</u>

Για να μετατρέψουμε ένα **σύνθετο κλάσμα σε απλό**, χρησιμοποιούμε τον εξής κανόνα:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

*<u>Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε όταν οι **όροι** του κλάσματος είναι **ρητές παραστάσεις**!!</u>*

## Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

- **Ομώνυμα** λέγονται τα κλάσματα που έχουν ίδιους παρονομαστές
- Για να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε** ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$$

Τους ίδιους κανόνες χρησιμοποιούμε και για να **προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ρητές παραστάσεις** που έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

- Αν όμως οι ρητές αριθμητικές παραστάσεις αποτελούνται από **ετερώνυμα** κλάσματα, τότε τις μετατρέπουμε σε ομώνυμες όπως ακριβώς και στα κλάσματα.

### Παράδειγμα

Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{2}{3x^2-3x}+\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x-3}$

| | |
|---|---|
| • Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές. | $3x^2-3x=3x(x-1)$ και $3x-3=3(x-1)$ |
| • Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. | Ε.Κ.Π. $=6x(x-1)$ |
| • Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. | $\frac{2}{3x^2-3x}+\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x-3}=\frac{\overset{2}{2}}{3x(x-1)}+\frac{\overset{x-1}{5}}{6x}-\frac{\overset{2x}{2}}{3(x-1)}=$ |
| • Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις. | $=\frac{4+5(x-1)-4x}{6x(x-1)}=\frac{4+5x-5-4x}{6x(x-1)}=\frac{\cancel{x-1}}{6x\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{6x}$ |

## 2.2 Εξισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

**Εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο** ή πιο απλά **δευτεροβάθμια εξίσωση** λέμε κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{αx^2 + βx + γ = 0\ ,\ με\ α \neq 0}$$

Σε κάθε εξίσωση της μορφής αυτής:

- οι αριθμοί **α**, **β** και **γ** λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης.
- ο αριθμός **γ** λέγεται και **σταθερός όρος** της εξίσωσης.

### Α) Επίλυση με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

➢ ***Εξίσωση της μορφής $αx^2 + βx = 0$ , με $α \neq 0$***

Για να λύσουμε τις εξισώσεις αυτής της μορφής, βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα:

*Αν $α \cdot β = 0$, τότε $α=0$ ή $β=0$*

➢ **Εξίσωση της μορφής $αx^2 + γ = 0$ , με $α \neq 0$**

*$1^{ος}$ Τρόπος*

Αν το $1^ο$ μέλος μπορεί να γραφεί ως διαφορά τετραγώνων, τότε το παραγοντοποιούμε και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα:

*Αν $α \cdot β = 0$, τότε $α=0$ ή $β=0$*

*$2^{ος}$ Τρόπος*

Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή

$$x^2 = λ$$

- Αν $λ > 0$, τότε η εξίσωση $x^2 = λ$ έχει δύο λύσεις, τις $\mathbf{x = \sqrt{λ}}$ και $\mathbf{x = -\sqrt{λ}}$
- Αν $λ = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 = 0$ και έχει όπως λέμε διπλή λύση, την $\mathbf{x = 0}$
- Αν $λ < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 = λ$ είναι **αδύνατη**. *(Αυτό συμβαίνει γιατί το $x^2$ είναι πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν, οπότε δεν μπορεί να ισούται με αρνητικό αριθμό).*

*παραδείγματα*

$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \quad ή \quad x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \quad ή \quad x = -3$$

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

$$x^2 = -16$$
*Αδύνατη*

## Εξίσωση της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ , με $α \neq 0$

*1η περίπτωση: Ανάπτυγμα τετραγώνου*

Αν σε μια εξίσωση της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$, το 1ο μέλος είναι **ανάπτυγμα τετραγώνου**, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{(λx + μ)^2 = 0}$$

από την οποία προκύπτει:

$$\boxed{λx + μ = 0}$$

Η λύση που βρίσκουμε τελικά είναι **διπλή**

*Παράδειγμα*

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

*2η περίπτωση: Παραγοντοποίηση Τριωνύμου*

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ = 0$, αναζητούμε δύο αριθμούς με **γινόμενο γ** και **άθροισμα β**.

**Παράδειγμα**

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Ψάχνουμε δύο αριθμούς με γινόμενο $-10$ και άθροισμα $-3$.
Οι αριθμοί αυτοί είναι ο $-5$ και ο $+2$.

Άρα ισχύει:

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

και επομένως η εξίσωση διαδοχικά γίνεται:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$(x - 5) = 0 \text{ ή } (x + 2) = 0$$

$$\boldsymbol{x = 5} \text{ ή } \boldsymbol{x = -2}$$

## Β) Επίλυση εξισώσεων 2$^{ου}$ βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Για να επιλύσουμε οποιαδήποτε εξίσωση 2$^{ου}$ βαθμού με γενική μορφή:

$$αx^2 + βx + γ = 0 , \quad με\ α \neq 0$$

χρησιμοποιούμε την παράσταση με τύπο

$$\boxed{Δ = β^2 – 4αγ}$$

Η παράσταση αυτή ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ και συμβολίζεται με Δ.

Υπολογίζονται λοιπόν την διακρίνουσα Δ, διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

***1η περίπτωση:*** ***Δ > 0***

Λέμε τότε ότι η εξίσωση έχει ***δύο άνισες λύσεις***, τις

$$\boxed{X_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}}$$

***2η περίπτωση:*** ***Δ = 0***

Λέμε τότε ότι η εξίσωση έχει ***μια διπλή λύση***, την

$$\boxed{X_0 = \frac{-β}{2α}}$$

***3η περίπτωση:*** ***Δ < 0***

Λέμε τότε ότι η εξίσωση ***δεν έχει λύσεις*** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

## Συνοπτικά

| Εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ ,με $α \neq 0$ | | |
|---|---|---|
| *$Δ = β^2 – 4αγ$* | *Πλήθος λύσεων* | *Λύσεις* |
| $Δ > 0$ | 2 άνισες λύσεις | $X_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ |
| $Δ = 0$ | 1 διπλή λύση | $X_0 = \frac{-β}{2α}$ |
| $Δ < 0$ | Δεν έχει λύσεις | --- |

## *Παραγοντοποίηση τριωνύμου με χρήση της διακρίνουσας*

*Για την **παραγοντοποίση** ενός τριωνύμου $αx^2 + βx + γ = 0$ , με $α \neq 0$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:*

1) Αν **$Δ > 0$** , τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις $x_1$ και $x_2$ και το τριώνυμο γίνεται ως εξής:

$$αx^2 + βx + γ = α(x - x_1)(x - x_2)$$

2) Αν **$Δ = 0$**, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση $x_0$ και το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$αx^2 + βx + γ = α(x - x_0)^2$$

3) Αν **$Δ < 0$** , τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις και το τριώνυμο **δεν** παραγοντοποιείται.

## *2.3 Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού*

Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα με την βοήθεια εξισώσεων εργαζόμαστε ως εξής:

1. Επιλέγουμε ποιο από τα ζητούμενα θα συμβολίσουμε με x
2. Εκφράζουμε όλα τα ζητούμενα (αν υπάρχουν) με τη βοήθεια του x
3. Μετατρέπουμε τις εκφράσεις του προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις και σχηματίζουμε μια εξίσωση με άγνωστο τον x.
4. Λύνουμε την εξίσωση αυτή.
5. Εξετάζουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν το πρόβλημα. Αν κάποια λύση δεν ικανοποιεί το πρόβλημα, την απορρίπτουμε.

## *2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο*

### Ιδιότητες της διάταξης

| | |
|---|---|
| Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας **προσθέσουμε** ή **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά | Αν **α > β**, τότε $\begin{cases} \alpha+\gamma>\beta+\gamma \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha-\gamma>\beta-\gamma \end{cases}$ |
| Αν **πολλαπλασιάσουμε** ή **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον **ίδιο θετικό αριθμό**, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια φορά** | Αν **α > β** και **γ > 0**, τότε: <br> $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$ |
| Αν **πολλαπλασιάσουμε** ή **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον **ίδιο αρνητικό αριθμό**, τότε προκύπτει ανισότητα με **αντίθετη φορά** | Αν **α > β** και **γ < 0**, τότε: <br> $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$ |
| Αν **προσθέσουμε κατά μέλη** δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την **ίδια φορά** | Αν **α > β** και **γ > δ**, τότε: <br> $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ |
| Αν **πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη** δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν **την ίδια φορά και θετικά μέλη**, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά | Αν **α > β** και **γ > δ**, με **α, β, γ, δ > 0** τότε: <br> $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$ |
| Μεταβατική ιδιότητα | Αν **α > β** και **β > γ**, τότε **α > γ** |

### Ποιες ιδιότητες ΔΕΝ έχουν οι ανισότητες

Οι ιδιότητες που δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε στις ανισότητες, είναι οι ακόλουθες:

- **Δεν** επιτρέπεται να **αφαιρέσουμε** κατά μέλη δύο ανισότητες
- **Δεν** επιτρέπεται να **διαιρέσουμε** κατά μέλη δύο ανισότητες
- **Δεν** επιτρέπεται να **πολλαπλασιάσουμε** κατά μέλη δύο ανισότητες, **αν δεν είναι όλα τα μέλη τους θετικά**

## *3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης*

### Η εξίσωση αx + βy = γ

- Κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma}$$

λέγεται **<u>γραμμική εξίσωση με αγνώστους x και y</u>**.

- **<u>Λύση</u>** μιας εξίσωσης της μορφής αx + βy = γ λέγεται κάθε **<u>ζεύγος αριθμών ( x, y )</u>** <u>που την επαληθεύει</u>

### Η εξίσωση αx + βy = γ, με α ≠ 0 ή β ≠ 0

- Μια εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma, \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0}$$

έχει **άπειρες** λύσεις.

*Αν τα ζεύγη (x, y), που είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, τα παραστήσουμε σε μια ευθεία του επιπέδου, τότε τα σημεία αυτά θα <u>βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ε.</u>*

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση αx + βy = γ λέγεται <u>εξίσωση της ευθείας ε</u> και συμβολικά γράφουμε:

$$\boxed{\varepsilon: \alpha x + \beta y = \gamma}$$

### <u>Γενικά ισχύει ότι:</u>

- ✓ Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι **συντεταγμένες** του **<u>επαληθεύουν</u>** την εξίσωση της ευθείας.
- ✓ Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου **επαληθεύουν** την εξίσωση μιας ευθείας, <u>τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή</u>.
- ✓ Μια γραμμική εξίσωση της μορφής αx + βy = γ με αγνώστους x και y, <u>παριστάνει ευθεία **μόνο** όταν **α ≠ 0 ή β ≠ 0**.</u>

## *3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του*

- Δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x και y, των οποίων ψάχνουμε τις κοινές λύσεις, αποτελούν ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**.

  Ένα τέτοιο γραμμικό σύστημα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

- **Λύση** του παραπάνω συστήματος ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις του.

- **Επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος λέγεται η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει είτε αλγεβρικά (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) είτε γραφικά.

### Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Αν ισχύουν ($\alpha_1 \neq 0$ ή $\beta_1 \neq 0$) και ($\alpha_2 \neq 0$ ή $\beta_2 \neq 0$), τότε *καθεμία από τις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος:*

$$\begin{gathered} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{gathered}$$

*παριστάνει μια ευθεία*. Αν σχεδιάσουμε σε ένα σύστημα αξόνων τις δύο αυτές ευθείες, τότε **οι συντεταγμένες των κοινών τους σημείων** αποτελούν τις λύσεις του συστήματος.

## *3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος*

Η Αλγεβρική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη λύση (αν υπάρχει) του συστήματος. Οι τρόποι επίλυσης που θα μελετήσουμε στη Γ’ γυμνασίου είναι οι παρακάτω:

1. **Μέθοδος της αντικατάστασης**

2. **Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών**

## Παραδείγματα

*Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:*

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-2y \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο

$$\begin{cases} x=9-2y \\ 2(9-2y)-y=3 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την πρώτη εξίσωση (το x) στην δεύτερη εξίσωση

$$\begin{cases} x=9-2y \\ 18-4y-y=3 \end{cases}$$

Λύνουμε την δεύτερη εξίσωση που προκύπτει, η οποία είναι $1^{ου}$ βαθμού

$$\begin{cases} x=9-2y \\ -4y-y=3-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-2y \\ -5y=-15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-2y \\ \dfrac{-5y}{-5}=\dfrac{-15}{-5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-2y \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-2\cdot 3 \\ y=3 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε το y που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση

$$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

*Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:*

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=9 & | \\ 2x-y=3 & |\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\mathbf{2}y=9 \\ 4x-\mathbf{2}y=6 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε εξίσωση με τον κατάλληλο αριθμό, έτσι ώστε οι συντελεστές του ενός από τους δύο αγνώστους να είναι αντίθετοι αριθμοί.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις. (Αν έχουμε κάνει σωστά τα βήματα, θα προκύπτει εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο)

$$x+2y+4x-2y=9+6$$

$$x+2y+4x-2y=9+6$$

$$x+4x=9+6$$

$$5x=15$$
$$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$$
$$x=3$$

$$x+2y=9$$
$$3+2y=9$$
$$2y=9-3$$
$$2y=6$$
$$\frac{2y}{2}=\frac{6}{2}$$
$$y=3$$

Επιλέγω μία από τις δύο εξισώσεις του αρχικού συστήματος και αντικαθιστώ το $x$ που βρήκα

Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(3,3)$

# *5.1 Σύνολα*

## <u>Η έννοια του συνόλου</u>

Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε και να ταξονομούμε σε ομάδες ή σε κατηγορίες διάφορα πράγματα, όπως βιβλία, νομίσματα κ.λ.π. Σε κατηγορίες, επίσης, ταξονομούμε τους αριθμούς. Ομάδες ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω, στα Μαθηματικά ονομάζονται σύνολα.

***«Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλα ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.»***

- Ένα σύνολο πρέπει να είναι καλά <u>**ορισμένο**</u>, πχ «το σύνολο των βιβλίων που έχουν πάνω από 400 σελίδες» και όχι «το σύνολο των βιβλίων με πολλές σελίδες».

- Τα στοιχεία ενός συνόλου, πρέπει να είναι <u>**διακεκριμένα**</u>, δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου να είναι διαφορετικό από τα άλλα.

- Κάθε σύνολο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ν, κ.λ.π.).

- Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σε ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου και το συμβολίζουμε συνήθως με κάποιο μικρό γράμμα (π.χ. α, β, γ, χ κ.λ.π).

## <u>Παράσταση ενός συνόλου</u>

### *1) <u>Με αναγραφή των στοιχείων του:</u>*

- ✓ <u>Όταν γνωρίζουμε όλα τα στοιχεία</u> ενός συνόλου και το <u>πλήθος τους είναι μικρό</u>, τότε γράφουμε **μία φορά** καθένα από τα στοιχεία του (με οποιαδήποτε σειρά) και τα τοποθετούμε ανάμεσα σε **δύο άγκιστρα**.
- ✓ <u>Όταν τα στοιχεία του συνόλου είναι πολλά ή άπειρα</u>, τότε γράφουμε ορισμένα μόνο από αυτά (ανάμεσα σε δύο άγκιστρα) και τα υπόλοιπα τα παραλείπουμε βάζοντας ασποισωπητικά. Πρέπει βέβαια να εννοούνται με σαφήνεια τα στοιχεία που παραλείπονται.

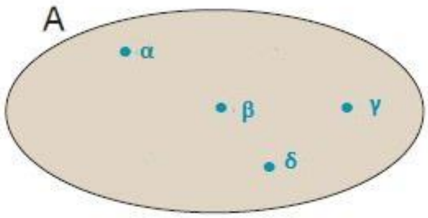
### *2) <u>Με περιγραφή των στοιχείων του:</u>*

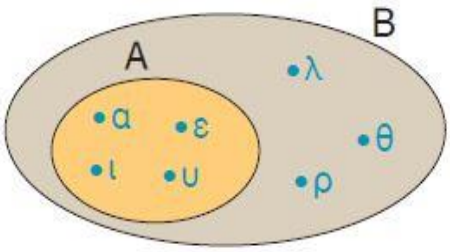
Όταν όλα τα στοιχεία ενός συνόλου ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε αντί να γράψουμε όλα τα στοιχεία, μπορούμε να περιγράψουμε την ιδιότητα αυτή ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Συγκεκριμένα, αν από ένα σύνολο Α επιλέξουμε όλα τα στοιχεία εκείνα που έχουν μια ιδιότητα Ι, τότε δημιουργούμε το σύνολο:

$$\boxed{\{\, x \in A, \text{ όπου το } x \text{ έχει την ιδιότητα I} \,\}}$$

## *3) Με διαγράμμα Venn*

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής. Το διάγραμμα που χρησιμοποιούμε γι' αυτήν την παρουσίαση ενός συνόλου ονομάζεται **διάγραμμα Venn**.
Για παράδειγμα, το σύνολο Α = {α, β, γ, δ} μπορεί να παρασταθεί με διάγραμμα Venn όπως φαίνεται στο σχήμα.




Ένα σύνολο **Α** ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε ότι:

$$\mathbf{A \subseteq B}$$

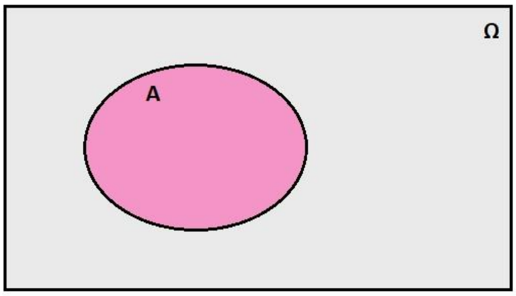
Χρησιμοποιώντας διάγραμμα Venn μπορούμε να δέιξουμε ότι $A \subseteq B$, με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι εξής ιδιότητες:

| |
|---|
| Για κάθε σύνολο Α, ισχύει $A \subseteq A$ |
| Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ , τότε $A \subseteq \Gamma$ |

Τα σύνολα με τα οποία ασχολούμαστε συνήθως, είναι υποσύνολα ενός ευρύτερου συνόλου, το οποίο ονομάζεται **βασικό σύνολο**
και συμβολίζεται με **Ω**.

*Σε ένα διάγραμμα Venn το βασικό σύνολο Ω παριστάνεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου. Κάθε υποσύνολο του Ω παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής γραμμής μέσα στο ορθογώνιο.*




Δύο σύνολα Α και Β είναι **ίσα**, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε:

$$A = B$$

Με άλλα λόγια, δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντίστροφα, κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α.

- Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται
με ∅ **ή { }.**

- Ισχύει ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου, δηλαδή $\emptyset \subseteq A$

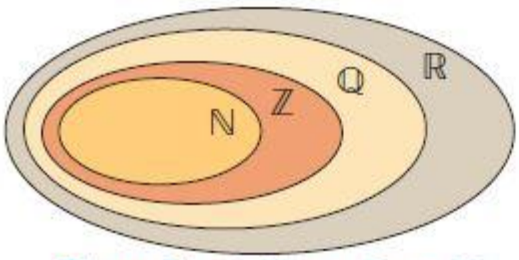
Για τα γνωστά μας σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών, πραγματικών ισχύει:

Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\alpha}{\beta}\text{, όπου } \alpha, \beta \text{ ακέραιοι, με } \beta \neq 0\right\}$

Πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R} = \{\text{ρητοί ή άρρητοι αριθμοί}\}$

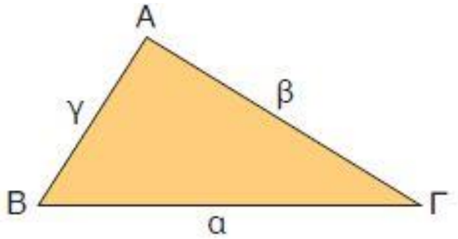



*Είναι* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

# <u>Κύρια στοιχεία τριγώνου</u>

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι:

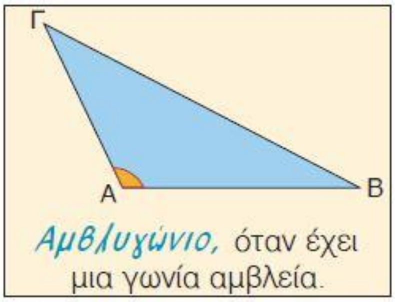
- Οι **<u>κορυφές</u>** του **Α**, **Β** και **Γ**
- Οι **<u>πλευρές</u>** του **ΑΒ**, **ΒΓ** και **ΑΓ**
- Οι **<u>γωνίες</u>** του $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ και $\hat{\mathbf{\Gamma}}$

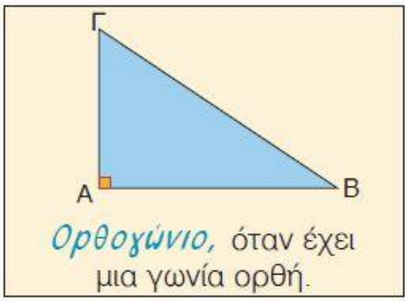



- Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ και $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ συμβολίζονται αντίστοιχα **α, β** και **γ**
- Η γωνία ενός τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία αυτών των πλευρών.
- Οι γωνίες ενός τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς, λέγονται **προσκείμενες** γωνίες της πλευράς αυτής.

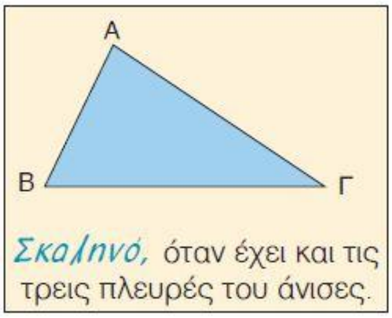
## <u>Είδη τριγώνων</u>

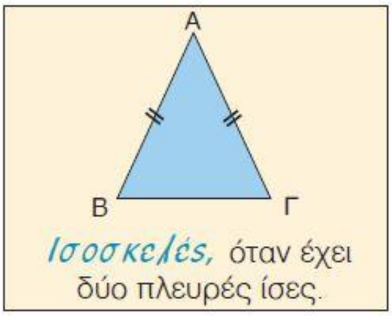
*<u>Με κριτήριο τις γωνίες:</u>*

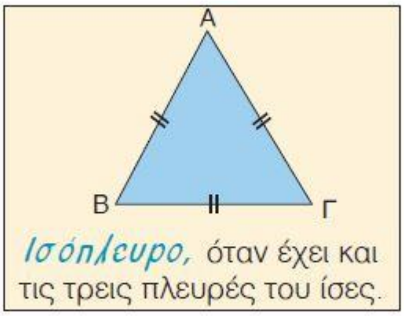



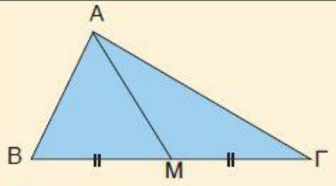

*<u>Με κριτήριο τις πλευρές:</u>*



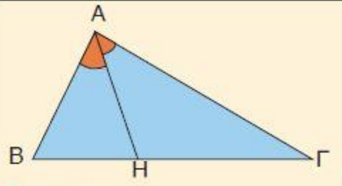



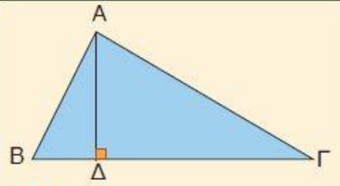
# Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου




*Διάμεσος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.




*Διχοτόμος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.




*Ύψος* ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

## Ίσα τρίγωνα

***Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ίσες μια προς μια και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.***

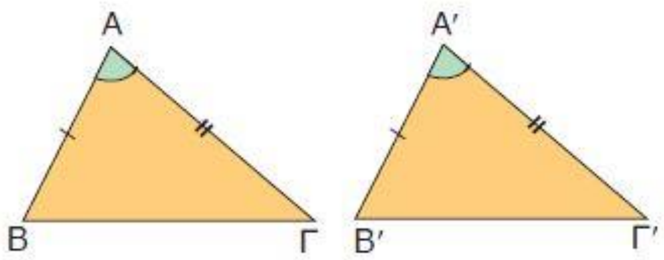
Αντίστροφα, ***αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.***

## 1$^{ο}$ Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Γ – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές ίσες** μία προς μία και την **περιεχόμενη γωνία** τους ίση, τότε είναι ίσα.

*Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ του διπλανού σχήματος ισχύουν:*

- ✓ *ΑΒ = Α’Β’*
- ✓ *ΑΓ = Α’Γ’*
- ✓ $\hat{A} = \widehat{A'}$




*Τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

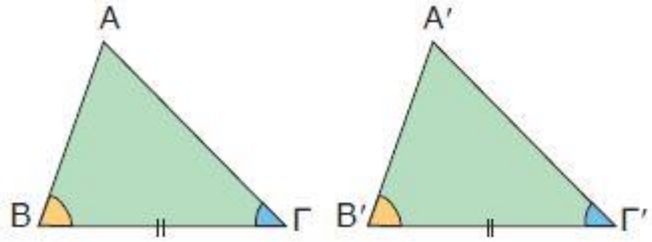
***«Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες»***

## 2$^{ο}$ Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ – Π – Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **μια πλευρά ίση** και **τις προσκείμενες στην πλευρά** αυτή γωνίες **ίσες** μία προς μία, τότε είναι ίσα.

*Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ του διπλανού σχήματος ισχύουν:*

- ✓ $\hat{B} = \widehat{B'}$
- ✓ *ΒΓ = Β’Γ’*
- ✓ $\hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$



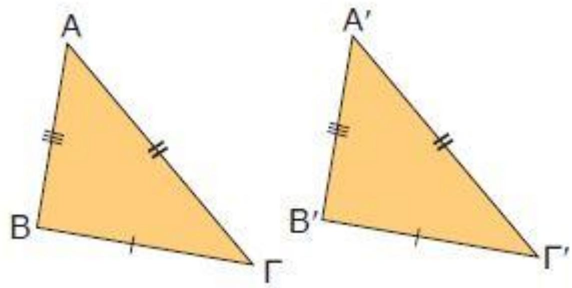

*Τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

***«Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές»***

## <u>3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Π – Π)</u>

<u>Αν δύο τρίγωνα έχουν τις **αντίστοιχες πλευρές τους μία προς μία ίσες**, τότε είναι ίσα.</u>

*Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ του διπλανού σχήματος ισχύουν:*




*ΑΒ = Α’Β’*

*ΑΓ = Α’Γ’*

*ΒΓ = Β’Γ’*

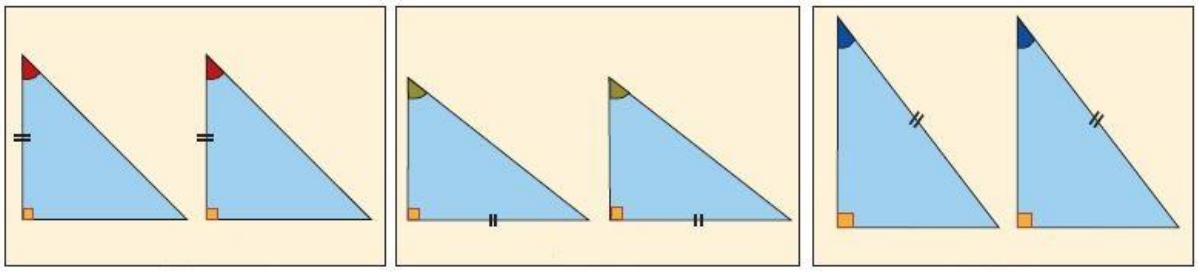
*Τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

### <u>Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων</u>

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

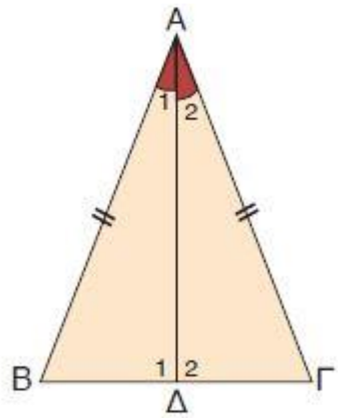
Έτσι λοιπόν, δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- ***Δύο ανίστοιχες πλευρές ίσες*** *μία προς μία*
- ***Μία*** *αντίστοιχη* ***πλευρά*** *ίση* ***και*** *μία* ***αντίστοιχη οξεία*** *γωνία ίση.*

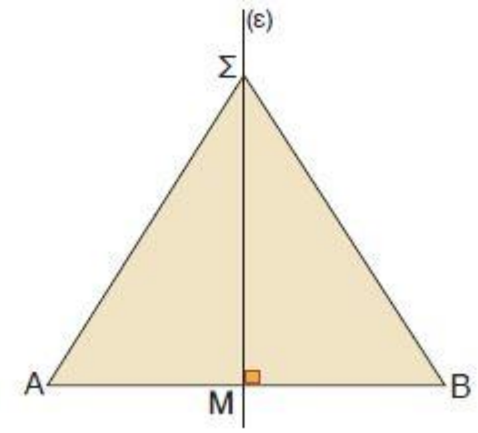


### <u>Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου</u>

1. Οι γωνίες που είναι **προσκείμενες** στη **βάση** ισοσκελούς, είναι **ίσες**
2. Η **διάμεσος** που αντιστοιχεί στη <u>βάση</u>, είναι ταυτόχρονα **ύψος** και **δίχοτόμος**




***Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όλες του οι γωνίες είναι ίσες με 60ο***




**Μεσοκάθετος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που είναι κάθετη σε αυτό και διέρχεται από το μέσο του τμήματος.

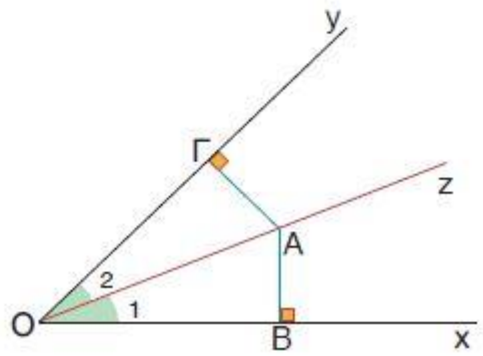
*Ισχύουν:*

1. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του τμήματος.
2. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, **είναι σημείο** της **μεσοκαθέτου** του τμήματος αυτού.

**Διχοτόμος** μιας γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες

*Ισχύουν:*

1. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές της γωνίας
2. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας **είναι σημείο** της **διχοτόμου** του.

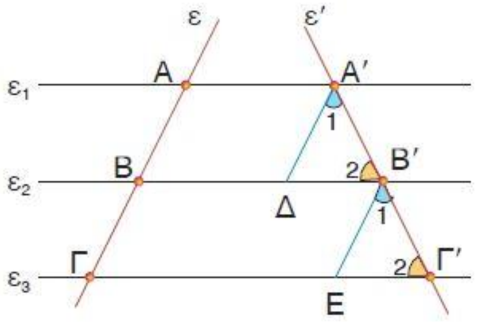



## *1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων*

### Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

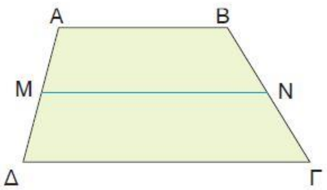
Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

*Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 // ε_2 // ε_3$ και οι ευθείες αυτές τέμνονται από τις ευθείες ζ και η. Αν είναι ΑΒ = ΑΓ, τότες και Α'Β' = Β'Γ'*



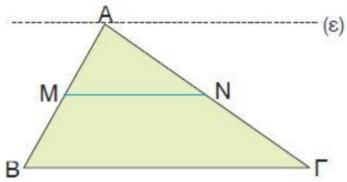
# Εφαρμογή στα τραπέζια και στα τρίγωνα

## Τραπέζια




Σε ένα τραπέζιο, αν από το μέσο της μιας μη παράλληλης πλευράς φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται και από το μέσο της άλλης μη παράλληλης πλευράς.

## Τρίγωνα




Σε ένα τρίγωνο, αν από το μέσο μιας πλευράς φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

## Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

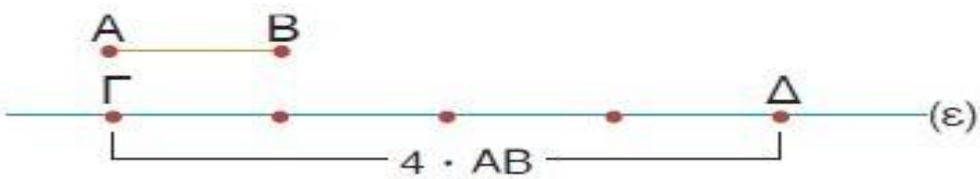
*«Στο τετράδιο θεωρίας»*

# Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων – Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

## 1. Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

- Ο **λόγος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο **αριθμός** λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ · ΑΒ, δηλαδή:

$$\boxed{\frac{ΓΔ}{ΑΒ} = λ \qquad \text{ή} \qquad ΓΔ = λ \cdot ΑΒ}$$




- Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

## 2. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει:

$$\boxed{\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}}$$

Μια ισότητα της μορφής $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται **αναλογία** με **όρους** τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα α, δ ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα β, γ ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

## 3. Ιδιότητες αναλογιών

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι οι εξής:

- Σε κάθε αναλογία τα **«χιαστί» γινόμενα** είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma$$

Σε μια αναλογία μπορούμε **να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους ακραίους όρους** και να προκύψει πάλι αναλογία. Δηλαδή:

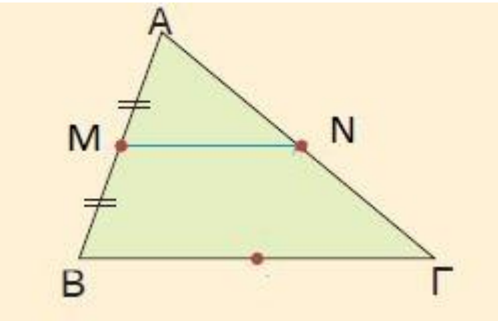
$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \qquad \text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Όταν δύο λόγοι είναι ίσοι μεταξύ τους, τότε **είναι ίσοι και με τον λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών**. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

## Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

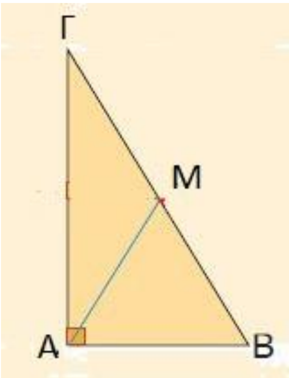
***Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.***




Δηλαδή στο τρίγωνο ΑΒΓ, αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ και Ν το μέσο της ΑΓ, ισχύει:

$$MN // B\Gamma \qquad \text{και} \qquad MN = \frac{B\Gamma}{2}$$

## Διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου




***Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.***

Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, ισχύει:

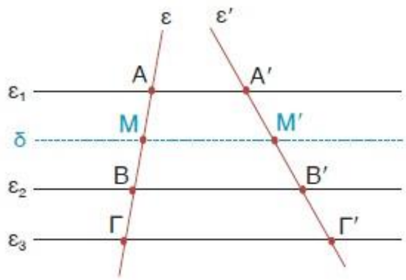
$$AM = \frac{B\Gamma}{2}$$

Δηλαδή **ΑΜ = ΜΓ** και **ΑΜ = ΜΒ**

# *1.3 Το Θεώρημα του Θαλή*

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

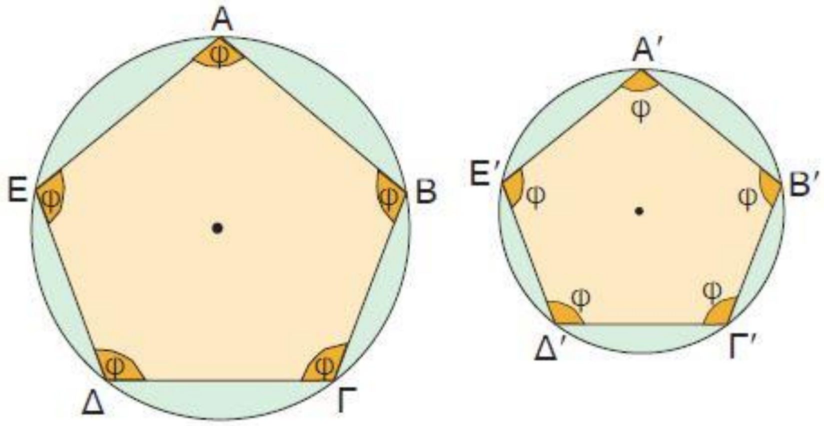
$$αν\ ε_1 // ε_2 // ε_3 \text{ τότε } \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$$




# *1.5 Ομοιότητα*

## *Α. Όμοια πολύγωνα*

***Αν έχουμε δύο πολύγωνα Π και Π’ που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου, τότε τα πολύγωνα αυτά τα λέμε όμοια και γράφουμε Π ≈ Π’.***




### Κριτήριο Ομοιότητας

*Αν δύο πολύγωνα έχουν τις **πλευρές τους ανάλογες** και τις **αντίστοιχες γωνίες τους ίσες**, τότε είναι **όμοια**.*

### Λόγος Ομοιότητας

- Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές όμοιων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι’ αυτό λέγονται **ομόλογες**.
- Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται **λόγος ομοιότητας**.
- Για να είναι δύο πολύγωνα όμοια, πρέπει να έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

### Βασική ιδιότητα όμοιων πολυγώνων

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Ο **λόγος των περιμέτρων** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

### Κλίμακα

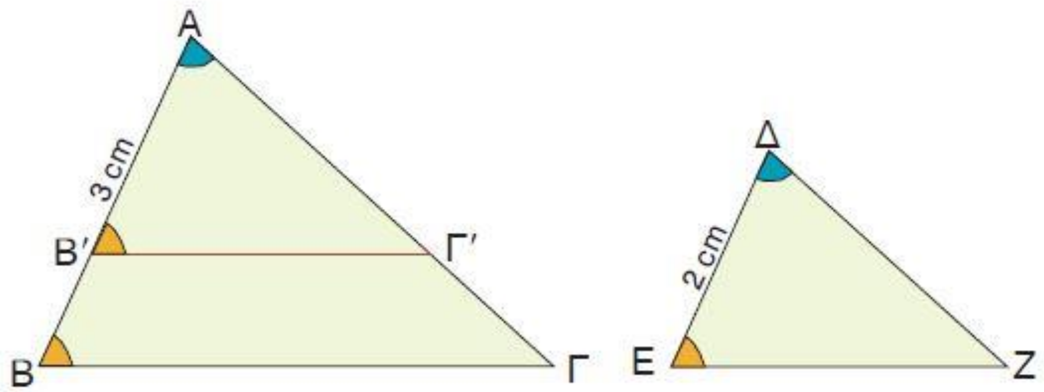
Οι χάρτες ή τα σχέδια παρουσιάζουν διάφορα αντικείμενα ή σχήματα, όμοια με τα πραγματικά, σε σμίκρυνση ή μεγέθυνση. Ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στον χάρτη ή στο σχέδιο προς το πραγματικό ονομάζεται κλίμακα. Ισχύει:

$$\text{Κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}}$$

Η απόσταση στο σχέδιο και η πραγματική απόσταση πρέπει να είναι μετρημένες με την **ίδια μονάδα.**

## *Β. Όμοια τρίγωνα*

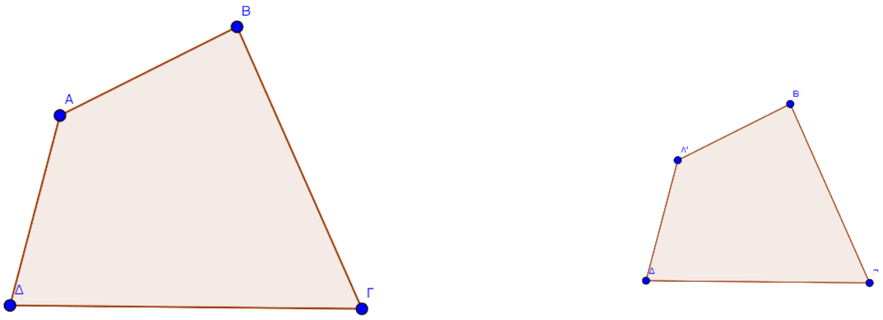
***Δύο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.***




*Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους μια προς μια ίσες, τότε είναι όμοια.*

# 1.6 Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

***<u>Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.</u>***




Για παράδειγμα, έστω ότι τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας λ, δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A'\Delta'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B'\Gamma'}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Gamma'\Delta'}} = \lambda$$

Τότε για τα εμβαδά τους (ΑΒΓΔ) και (Α'Β'Γ'Δ'), ισχύει ότι:

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'})} = \lambda^2$$

## 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^o \le \omega \le 180^o$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω ορθογωνίου τριγώνου ορίζονται ως εξής:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \qquad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

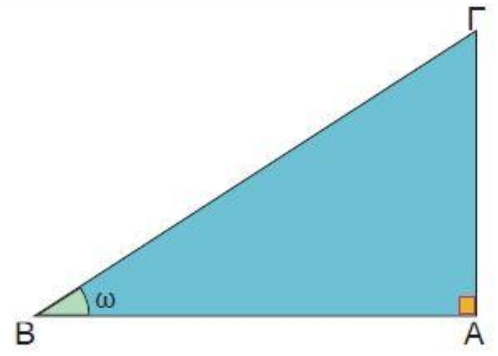
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Για παράδειγμα, στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει:

$$\eta\mu\widehat{B} = = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\widehat{B} = = \frac{AB}{B\Gamma}$$

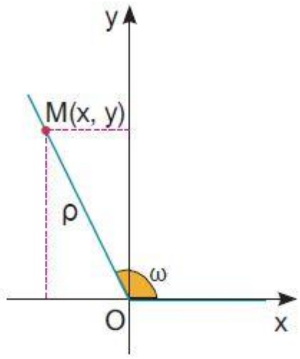
$$\varepsilon\varphi\widehat{B} = = \frac{A\Gamma}{AB}$$




### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^o \le \omega \le 180^o$

*Τοποθετούμε τη γωνία ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μια πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη πλευρά της να βρεθεί από τον άξονα x'x και πάνω.*

*Στην πλευρά αυτή παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Μ (x,y), διαφορετικό από το O. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω ορίζονται ως εξής:*




| | |
|---|---|
| $\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$ | $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$ |
| $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$ | |

Αν συμβολίσουμε με ρ την απόσταση ΟΜ του Μ(x,y) από το σημείο Ο, τότε ισχύει:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \qquad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$$

Για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, έχουμε:

| | ημω | συνω | εφω |
|---|---|---|---|
| ω οξεία | + | + | + |
| ω αμβλεία | + | - | - |

## ***Θυμίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που πρέπει να ξέρουμε:***

| ω | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ | $180^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ημω | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| συνω | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| εφω | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Δεν ορίζεται | 0 |

*Για μια γωνία ω, με $0^o \leq ω \leq 180^o$ , ισχύει ότι:*

$$0 \leq ημω \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq συνω \leq 1$$

ενώ για την εφω (**με ω ≠ 90$^o$**) **δεν υπάρχουν περιορισμοί** στις τιμές που μπορεί να πάρει.

## *2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών*

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^o – ω$ , έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή ισχύουν:

$$ημ(180^o – ω) = ημω$$

$$συν(180^o – ω) = - συνω$$

$$εφ(180^o – ω) = - εφω$$

### Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\boldsymbol{ημx = ημω},\ \ τότε\ \ \boldsymbol{x = ω}\ \ ή\ \ \boldsymbol{x = 180^o - ω}$$

$$\boldsymbol{συνx = συνω},\ \ τότε\ \ \boldsymbol{x = ω}$$

$$\boldsymbol{συνx = -συνω},\ \ τότε\ \ \boldsymbol{x = 180^o - ω}$$

$$\boldsymbol{εφx = εφω},\ \ τότε\ \ \boldsymbol{x = ω}$$

$$\boldsymbol{εφx = -εφω},\ \ τότε\ \ \boldsymbol{x = 180^o - ω}$$

## *2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας*

*Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει ότι:*

| | |
|---|---|
| $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ | $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ |

***Αποδείξεις:***

- $\boldsymbol{ημ^2x + συν^2x = 1}$

Για την απόσταση ενός σημείου $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$ρ = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; ή \;\; ρ^2 = x^2 + y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2} = \frac{x^2}{ρ^2} + \frac{y^2}{ρ^2} \;\; ή \;\; \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 = 1$$

Επειδή $ημω = \frac{y}{ρ}$ και $συνω = \frac{x}{ρ}$, η παραπάνω ισότητα γίνεται: $(συνω)^2 + (ημω)^2 = 1$ ή

$$\boxed{\boldsymbol{ημ^2x + συν^2x = 1}}$$

- $\boldsymbol{εφω = \dfrac{ημω}{συνω}}$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \frac{y}{ρ}$ και $συνω = \frac{x}{ρ}$, με την προϋπόθεση ότι $συνω \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} \; ή \; \frac{ημω}{συνω} = \frac{yρ}{xρ} \;\; ή \;\; \frac{ημω}{συνω} = \frac{y}{x} = εφω$$

*Δηλαδή, για κάθε γωνία ω, με $συνω \neq 0$ ισχύει:*

$$\boxed{\boldsymbol{εφω = \dfrac{ημω}{συνω}}}$$

## *2.4 Νόμος ημιτόνων – Νόμος συνημιτόνων*

***Νόμος ημιτόνων:*** Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{α}{ημA} = \dfrac{β}{ημB} = \dfrac{γ}{ημΓ}$

***Νόμος συνημιτόνων:*** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

| | | |
|---|---|---|
| $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA$ | $β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυνB$ | $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$ |