

Ε.Π. Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση, ΕΣΠΑ (2007 – 2013)

**ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ  
ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΤΠΕ ΣΤΗ  
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ**

**Επιμορφωτικό υλικό  
για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα  
Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης**

**Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03**

**Α' έκδοση**

**(05.02.2010)**



*Τομέας Επιμόρφωσης & Κατάρτισης*

**Πάτρα, Φεβρουάριος 2010**



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

## Προοίμιο

Το επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης, εκπονήθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στη χρήση και αξιοποίηση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διδακτική διαδικασία» του ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ, Γ' ΚΠΣ και περιλαμβάνει 5 τεύχη: ένα τεύχος για το γενικό μέρος και τέσσερα ακόμη τεύχη για τους 4 κλάδους του ειδικού μέρους. Το κείμενο του Τεύχους 4 που ακολουθεί περιλαμβάνει το επιμορφωτικό υλικό για το Ειδικό Μέρος της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών του κλάδου ΠΕ03 στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης (ΚΣΕ).

Το επιμορφωτικό υλικό αυτό επικαιροποιήθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών για την Αξιοποίηση και Εφαρμογή των ΤΠΕ στη Διδακτική Πράξη» του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ (2007-2013).

Το υλικό του παρόντος τεύχους δημιουργήθηκε και επικαιροποιήθηκε από συγγραφική ομάδα με επικεφαλής τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Χρόνη Κυνηγό. Συγκεκριμένα στη συγγραφική ομάδα περιλαμβάνονταν οι: Καθ. Χ. Κυνηγός, Δρ. Γ. Ψυχάρης, Κ. Γαβρίλης, Σ. Κείσογλου.

Το υλικό αυτό συντάχθηκε στο πλαίσιο των αρμοδιοτήτων της ειδικής επιστημονικής επιτροπής, αποτελούμενης από τους:

- Χαράλαμπο Ζαγούρα, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, ο οποίος έχει την ευθύνη συντονισμού των εργασιών της επιτροπής
- Βασίλειο Δαγδιλέλη, Αναπληρωτή Καθηγητή Πανεπιστημίου Μακεδονίας
- Βασίλειο Κόμη, Αναπληρωτή Καθηγητή Πανεπιστημίου Πατρών
- Δημήτριο Κουτσογιάννη, Επίκουρο Καθηγητή Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
- Χρόνη Κυνηγό, Καθηγητή Πανεπιστημίου Αθηνών
- Δημήτριο Ψύλλο, Καθηγητή Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

μελών της δεκαεξαμελούς Επιστημονικής Επιτροπής της αρχικής Πράξης. Η ως άνω ειδική επιστημονική επιτροπή λειτουργεί στην παρούσα Πράξη ως Επιστημονική Επιτροπή του ΕΑ.ΙΤΥ, συμπράττοντος επιστημονικού φορέα υλοποίησης του έργου.

Το παρόν επιμορφωτικό υλικό αποτελεί ιδιοκτησία του ΥπεΠΘ και καλύπτεται από την ισχύουσα νομοθεσία για την προστασία των πνευματικών δικαιωμάτων των δημιουργών.

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή .....	6
2. Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση.....	10
3. Εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά.....	14
3.1 Κύρια χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την διδακτική των μαθηματικών.....	16
3.2 Κατηγορίες εκπαιδευτικού λογισμικού για τη διδακτική των μαθηματικών .....	17
4. Θεωρητική Επισκόπηση: Συνοπτικά Στοιχεία Διδακτικής Μαθηματικών με τη χρήση Ψηφικών Τεχνολογιών.....	20
4.1 Συνοπτικά στοιχεία εξέλιξης της Διδακτικής των Μαθηματικών .....	20
4.2 Η Εξέλιξη της ΔτΜ με εργαλεία Ψηφιακής Τεχνολογίας .....	23
5. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Άλγεβρας με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών.....	32
5.1 Οι δυσκολίες στην Άλγεβρα .....	32
5.2 Η διδασκαλία της Άλγεβρας και η ψηφιακή τεχνολογία.....	35
5.3 Σύνοψη.....	41
6. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Γεωμετρίας με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών .....	42
6.1 Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας. ....	42
6.1.1 Τι είναι η δυναμική γεωμετρία. ....	42
6.1.2 Το περιβάλλον των λογισμικών της δυναμικής γεωμετρίας.....	43
6.1.3 Οι λειτουργικότητες των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων και εργαλείων.....	43
6.1.4 Ο δυναμικός μετασχηματισμός των κατασκευών.....	45
6.2 Τα λογισμικά της συμβολικής έκφρασης .....	48
6.2.1 Τι είναι η ‘Γεωμετρία της Χελώνας’ .....	48
6.2.2 Οι εγγενείς ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. ....	51

6.2.3 Η εντολή «Αναδρομή» (Recursion).....	53
6.3 Βασικά στοιχεία της διδακτικής της Γεωμετρίας. ....	54
7. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών.....	59
7.1 Κατασκευή νοημάτων από τα δεδομένα.....	60
7.2 Τοπική και συνολική κατανόηση των δεδομένων και των αναπαραστάσεών τους. .	62
7.3 Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα διερευνητικής επεξεργασίας των δεδομένων. ....	63
8. Τα Σενάρια ως σχέδια αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών.....	67
8.1 Η προβληματική σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική πράξη.....	67
8.2 Η έννοια του σεναρίου.....	69
8.2.1 Τι είναι ένα σενάριο.....	69
8.2.2 Τα χαρακτηριστικά ενός σεναρίου μαθηματικών.....	69
8.2.3 Η δομή ενός σεναρίου.....	70
8.3 Τα προτεινόμενα σενάρια ως εργαλεία διδακτικής παρέμβασης και αναστοχασμού ...	71
9. Παραδείγματα σεναρίων με βάση τις κατηγορίες λογισμικού.....	73
9.1 Συμβολική έκφραση μέσω του προγραμματισμού.....	73
9.1.1 Σενάριο 1. Σκιτσάροντας με Παραλληλόγραμμα.....	73
9.1.2 Σενάριο 2. Κατασκευή δυναμικής γραμματοσειράς.....	83
9.2 Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων. ....	98
9.2.1 Σενάριο 3. Τα μέσα των πλευρών τριγώνου.....	98
9.2.2 Σενάριο 4. Η μέτρηση του εμβαδού ενός παραβολικού οικοπέδου.....	107
9.2.3 Σενάριο 5. Συμμεταβολές στο ισοσκελές τρίγωνο.....	116
9.3 Χειρισμός αλγεβρικός ψηφιακών συστημάτων.....	126
9.3.1 Σενάριο 6. Η γραμμική συνάρτηση $\psi = \alpha x$ .....	126

9.3.2 Σενάριο 7. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .....	137
9.3.3 Σενάριο 8. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.....	148
9.4 Διαχείριση δεδομένων. ....	159
9.4.1 Σενάριο 9. Μελέτη του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα .....	159
9.5 Πειραματισμός με μοντέλα μαθηματικών αντικειμένων ή φαινομένων που διέπονται από μαθηματικούς κανόνες συμπεριφοράς.....	172
9.5.1 Σενάριο 10. Ελάχιστη Απόσταση δυο Τρένων .....	172
10. Προτάσεις για ένταξη στο σχολικό πρόγραμμα .....	183
11. Βιβλιογραφία .....	186
12. Παράρτημα – Ενδεικτικά σενάρια επιμορφωτών Β΄ επιπέδου.....	193
Σενάριο 1: Σκάλες .....	193
Σενάριο 2: Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ_ΚΑΡΕΤΑ .....	210

# 1. Εισαγωγή

---

Οι σημειώσεις αυτές εκπονήθηκαν με στόχο στόχο να αποτελέσουν βοήθημα στη διαδικασία ευρείας επιμόρφωσης για το ειδικό μέρος των μαθηματικών ΠΕ03 η οποία και θα έχει έκταση 78 ωρών. Προορίζονται για τον επιμορφούμενο εκπαιδευτικό αλλά και ως εργαλείο των επιμορφωτών του συγκεκριμένου μέρους της επιμόρφωσης. Το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών είναι οργανωμένο σε τρία μέρη.

Στο πρώτο που έχει ως αντικείμενο τη Διδακτική των μαθηματικών υπό το πρίσμα των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας αντιστοιχούν κυρίως οι πρώτες επτά ενότητες (2-8) του παρόντος. Αναφέρονται σε βασικά στοιχεία διδακτικής των μαθηματικών στο πλαίσιο της αξιοποίησης των ψηφιακών τεχνολογιών ώστε το μάθημα των μαθηματικών να αποκτά πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Αναλύονται πέντε βασικές κατηγορίες μαθηματικών δραστηριοτήτων με ψηφιακά εργαλεία και προτείνονται ένα ή δύο λογισμικά από την κάθε κατηγορία ως βασικά για την ένταξη των τεχνολογιών αυτών στο μάθημα. Το σκεπτικό είναι, αντί ο επιμορφούμενος να πληροφορηθεί για μεγάλο αριθμό λογισμικών που υπάρχουν, να εμβαθύνει στη χρήση και την διδακτική αξιοποίηση επιλεγμένων εκπροσώπων από τις πέντε αυτές κατηγορίες. Έτσι, αποφοιτώντας από το σεμινάριο των 96 συνολικά ωρών, να έχει στη διδακτική του ‘φαρέτρα’ συγκεκριμένες προτάσεις για χρήση των ψηφιακών εργαλείων στο μάθημά του. Θα έχει επίσης και πηγές αναζήτησης άλλων λογισμικών αλλά κυρίως θα έχει αναπτύξει τα κριτήρια επιλογής και το σκεπτικό διδακτικής αξιοποίησής τους.

Το δεύτερο και μεγαλύτερο σε έκταση μέρος του προγράμματος σπουδών αναφέρεται στη διδακτική αξιοποίηση εκπαιδευτικού λογισμικού για τα μαθηματικά, καθώς και στην αξιολόγηση και προσαρμογή ‘σεναρίων’. Στις 51 ώρες επιμόρφωσης που προβλέπονται, θα ήταν αναποτελεσματικό τα ψηφιακά εργαλεία να διδαχθούν σε απομόνωση από τις διδακτικές τους εφαρμογές. Για το λόγο αυτό, στην ενότητα 9 που αποτελείται από 10 υποενότητες περιγράφονται αντίστοιχα δέκα προτάσεις αξιοποίησης των βασικών ψηφιακών εργαλείων. Στόχος είναι οι συνάδελφοι μαθηματικοί να εξοικειωθούν με τις λειτουργικότητες των εργαλείων μέσα από τις προτάσεις αυτές που ονομάζουμε ‘σενάρια’. Οι προτάσεις πάλλι είναι επιλεγμένες ώστε να καλύπτουν όλες τις τάξεις Γυμνασίου – Λυκείου και μεγάλο εύρος από την ύλη των μαθηματικών, ενώ υποστηρίζονται από όλα τα βασικά λογισμικά (βλ. τον πίνακα που ακολουθεί).

Με τον τρόπο αυτό οι επιμορφούμενοι θα είναι έτοιμοι για τη συμμετοχή τους στο τρίτο μέρος, όπου θα διατίθενται 15 ώρες για την αναπτυξη από τους ίδιους και την αξιολόγηση μικρο-εφαρμογών και σεναρίων βασισμένων στα δέκα που αποτελούν τον κορμό της επιμόρφωσης. Στόχος βέβαια είναι ο επιμορφούμενος να μην είναι απλά σε θέση να εφαρμόσει τις δέκα αυτές προτάσεις αλλά κυρίως να είναι σε θέση να επινοεί ο ίδιος τρόπους διδακτικής αξιοποίησης των ψηφικών τεχνολογιών με στόχο να αναβαθμίσει το μάθημά του.

<i>Τίτλος Σεναρίου</i>	<i>Γνωστική Περιοχή</i>	<i>Γνωστικό Θέμα</i>	<i>Τάξη</i>	<i>Εργαλείο</i>
<b>1</b> Σκισάροντας με παραλληλόγραμμα	Γεωμετρικά Σχήματα, Μεταβλητές	Ιδιότητες παραλληλογράμμων	Γυμνάσιο Α	ΣΕ - ΔΓ Αβάκιο - Χελωνόκοσμος
<b>2</b> Κατασκευή Δυναμικής Γραμματοσειράς	Μεταβλητές	Λόγοι και Αναλογίες	Γυμνάσιο Β	ΣΕ - ΔΓ Αβάκιο - Χελωνόκοσμος
<b>3</b> Μέσα πλευρών τριγώνου	Γεωμετρικά Σχήματα	Ιδιότητες τμήματος που ενώνει τα μέσα πλευρών	Γυμνάσιο Γ	ΔΓ Geometer's Sketchpad IV
<b>4</b> Εμβαδό Παραβολικού οικοπέδου	Ολοκληρώματα	Εξάντληση, μέτρηση εμβαδού χωρίου	Λύκειο Γ	ΔΓ - ΑΣ Geogebra
<b>5</b> Συμμεταβολές στο ισοσκελές	Γεωμετρία, Συναρτήσεις	Συμμεταβολή, γρ. Παραστάσεις, μέγιστο, ελάχιστο	Λύκειο Α, Λύκειο Γ	ΔΓ Cabri Geometry II
<b>6</b> Η γραμμική συνάρτηση $\psi = ax$	Άλγεβρα, Συναρτήσεις	Συνάρτηση $\psi = ax$ , Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας.	Λύκειο Α	ΑΣ Function Probe

7	Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+\gamma$	Συναρτήσεις	Γραφ. παράσταση, μονοτονία, ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+\gamma$	Λύκειο Α	ΔΓ - ΑΣ Geogebra
8	Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις;	Κυκλικές Συναρτήσεις	Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	Λύκειο Β	ΑΣ Function Probe
9	Πληθυσμός Μεταναστών στην Ελλάδα	Στατιστική	Διαχείριση στατιστικών δεδομένων	Λύκειο Γ	ΔΔ Αβάκιο Ταξινομούμε -
10	Ελάχιστη απόσταση δυο τρένων	Συναρτήσεις	Μελέτη μεγίστου, ελαχίστου	Λύκειο Α,Β	Πειρ. Modellus

Κατά τη διάρκεια των επιμορφώσεων, προτείνεται τα θεωρητικά στοιχεία της διδακτικής να συζητηθούν και να μελετηθούν μέσα από παραδείγματα όπου θα περιγράφονται πιθανές δραστηριότητες μαθητών με τα εργαλεία αυτά και η σημασία τους. Προτείνεται επίσης να δοθεί χρόνος στους επιμορφούμενους να χρησιμοποιήσουν τα λογισμικά και για δική τους επιστημονική ενασχόληση και συζήτηση γύρω από θέματα μαθηματικών που τους ενδιαφέρουν. Μια λογική οργάνωση της πορείας της επιμόρφωσης θα ήταν η σύντομη εισαγωγή στα θεωρητικά θέματα (κεφ. 2,3,4,8) και μετά, μέσα από τα παραδείγματα των 10 σεναρίων, η εμβάθυνση σε ειδικά θέματα γνωστικών περιοχών όπως η Άλγεβρα, η Γεωμετρία και η Στατιστική (κεφ. 5,6,7) μετά από κάθε αντίστοιχη ενότητα σεναρίων. Ειδικά το κεφάλαιο 4 είναι γραμμένο στην έκδοση αυτή του βοηθήματος με το ύφος επιστημονικού – ακαδημαϊκού κειμένου με αυστηρή αναφορά σε επιστημονικές έρευνες και μελέτες. Στόχος των συγγραφέων βέβαια είναι να δώσουν μια σύνοψη του τι ξέρουμε μέχρι σήμερα για τη μάθηση των μαθηματικών και την αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών γι αυτήν. Δευτερεύων στόχος όμως είναι επίσης να δώσει στον αναγνώστη την αίσθηση ότι ο χώρος της διδακτικής των μαθηματικών έχει μια αυτονομία και ταυτότητα ανάμεσα στις διδακτικές



επιστήμες και ότι υπάρχει σημαντική γνώση πια για τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές μας να κατανοήσουν τα μαθηματικά. Στο τελευταίο κεφάλαιο (10) προτείνονται πρακτικοί τρόποι εφαρμογής των ψηφιακών τεχνολογιών στη σημερινή σχολική τάξη. Τέλος, στο παράρτημα του βοηθήματος δίνονται ενδεικτικά σενάρια που αναπτύχθηκαν από δύο επιμορφώτριες Β΄ επιπέδου που αποφοίτησαν από τμήματα μαθηματικών των ΠΑΚΕ 7 και 6 αντίστοιχα (ΕΚΠΑ). Τα σενάρια αυτά παρατίθενται ώστε να δοθεί στους επιμορφούμενους εκπαιδευτικούς και μια εικόνα των σεναρίων που αναπτύχθηκαν από συναδέλφους τους στο πλαίσιο της επιμόρφωσής τους ως επιμορφωτών.

Επιπρόσθετα με το παρόν βοήθημα ο επιμορφούμενος εκπαιδευτικός θα πρέπει βέβαια να συμβουλευτεί και υλικό που διατίθεται από τις πηγές του Υπ.Ε.Π.Θ..

## 2. Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

---

Πριν εμπλακούμε με το πώς θα εντάξουμε τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στη Μαθηματική Παιδεία πρέπει να εξετάσουμε το ‘γιατί’. Εκατοντάδες χρόνια, στο κάτω κάτω, στη βασική παιδεία διδάσκονται τα μαθηματικά με τα στατικά μέσα του πίνακα/χαρτιού και κιμωλίας/στυλού και του χάρτινου βιβλίου. Η πρώτη τεχνολογία, οι αριθμητικοί υπολογιστές, προκάλεσαν ‘θόρυβο’, ότι δηλαδή θα γίνουν απαραίτητο εργαλείο για κάθε μαθητή και ότι θα αντικαταστήσουν την ανάγκη να κάνουμε πράξεις με το χέρι. Πολύ γρήγορα, ήρθε ο αντίλογος ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν τους κανόνες και τη σημασία των πράξεων και ο μόνος τρόπος να τις καταλάβουν είναι να κάνουν πράξεις οι ίδιοι. Οι υπολογιστές αυτοί δεν χρησιμοποιούνται σήμερα επίσημα στα μαθήματα ούτε βέβαια στις εξετάσεις. Φαινομενικά οι λόγοι ήταν διαδικαστικοί. Στην πραγματικότητα όμως δεν υπήρξε πειστικό επιχείρημα ότι θα προσθέσουν κάτι στον τρόπο που οι μαθητές καταλαβαίνουν μαθηματικές έννοιες. Υπάρχουν επιχειρήματα για την χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών αρκετά πειστικά ώστε τουλάχιστο να αξίζει η επένδυση κυρίως σε χρόνο και προσπάθεια;

Θεωρούμε ως αφετηρία την θέση ότι η ένταξη της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στο εκπαιδευτικό μας σύστημα έχει νόημα μόνο όταν στοχεύει σε κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Παρά τις σημαντικές προσπάθειες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου τα τελευταία χρόνια, τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό μας σύστημα συνεχίζουν να εκλαμβάνονται από την κοινωνία ως ένα κατακερματισμένο γνωστικό αντικείμενο, μια θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων της θεωρίας και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και δεν βλέπουν σε τια κριβώς μπορεί να τους χησιμέψουν στη ζωή τους μιας και συχνά φαίνονται αποστασιοποιημένες από την καθημερινότητά τους ή από κάτι χειροπιαστό στη ζωή τους. Αναπόφευκτα, χρησιμοποιείται ο τυπικός μαθηματικός φορμαλισμός και τα στατικά προ-τεχνολογικά μέσα έκφρασης μαθηματικών εννοιών με αποτέλεσμα να δημιουργείται ακόμα ένα εμπόδιο κατανόησης των εννοιών στους μαθητές, μιας και εκτός από τις έννοιες έχουν να μάθουν και το πώς τις αναπαριστούμε (πόσο μάλλον το γιατί να τις αναπαριστούμε με τον τρόπο αυτό). Εάν προσθέσει κανείς και το άγχος που

δημιουργείται από την ανάγκη ετοιμασίας για τις εξετάσεις, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πολύ λίγες ευκαιρίες δίνονται στο αντικείμενο αυτό να το αγαπήσουν και να το κατανοήσουν οι περισσότεροι μαθητές μας.

Η επιστημονική γνώση στη διδακτική των μαθηματικών από τη δεκαετία του '90 μέχρι σήμερα δίνει ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αναπτύσσουν συνειδητή μαθηματική σκέψη, λειτουργώντας σε ένα κοινωνικό περιβάλλον, δηλαδή όταν λειτουργούν σε περιστάσεις επικοινωνίας με τους συμμαθητές και τους εκπαιδευτικούς τους. Παράλληλα με το στόχο της κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών, η γενικότερη παιδαγωγική τάση είναι να μελετήσουμε πώς μέσα από την εκπαίδευση μπορούμε να ενισχύσουμε στους μαθητές έναν επιστημονικό, μαθηματικό τρόπο σκέψης. Επομένως ο στόχος δεν είναι τόσο η κατανόηση εννοιών που αναφέρονται ρητώς μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου, προκειμένου να ανταποκρίνονται στις εξετάσεις του εκπαιδευτικού συστήματος. Είναι, πολύ ευρύτερα, η ενίσχυση της λογικομαθηματικής πτυχής της σκέψης και έκφρασης των μαθητών ως αναπόσπαστο μέρος της κουλτούρας και του πολιτισμού μας. Η λογικο-μαθηματική σκέψη θεωρείται όλο και περισσότερο πολιτισμικό χαρακτηριστικό, όπως και η έκφραση, η συλλογικότητα και η δημοκρατία. Όσο αφορά στη διδακτική των μαθηματικών είναι επομένως έντονη η ανάγκη δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός, η επιστημονική στάση απέναντι στη γνώση και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες. Στο πλαίσιο αυτό τα ίδια τα μαθηματικά εκλαμβάνονται ως μια επιστήμη που η εξέλιξή της συνίσταται στη συνεχή αμφισβήτηση και στον επαναπροσδιορισμό των αξιωματικών συστημάτων, των προβλημάτων και των λύσεών τους. Η μάθηση δε των μαθηματικών ως μια εμπειρική, υποθετικο-παραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2007).

Για την περίπτωση των μαθηματικών η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο όταν χρησιμοποιούνται ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας (Χρονάκη, 2000, Ματσαγγούρας, 1987, Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης, 2002). Με τον όρο 'εκφραστικά εργαλεία' εννοούμε εργαλεία λογισμικού που είναι

σχεδιασμένα ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν μοντέλα με μέσο τις πολλαπλές και αλληλεξαρτώμενες μαθηματικές αναπαραστάσεις, να πειραματίζονται με τη συμπεριφορά τους και να τα αλλάζουν συχνά και με ευκολία, να χειρίζονται, να αναλύουν και να συσχετίζουν δεδομένα. Τα εργαλεία αυτά επίσης υποστηρίζουν τη διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών που είναι κατακερματισμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση, η Ευκλείδεια, η διαφορική, η διανυσματική και η αναλυτική γεωμετρία και η τριγωνομετρία στην γεωμετρική και την αλγεβρική της έκφανση. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικο-μαθηματική σκέψη τις οποίες είναι αδύνατο να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα. Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη διδακτική των μαθηματικών (Κυνηγός, 2007).

Η πραγματικότητα αυτή δεν σημαίνει ότι η προσέγγιση στη διδακτική των μαθηματικών είναι τεχνο-κεντρική και επομένως εργαλειο-κεντρική. Η έμφαση βρίσκεται στη διαδικασία χρήσης της τεχνολογίας αυτής για τον εμπλουτισμό της κουλτούρας των μαθητών με περισσότερη και πιο ποιοτική λογικομαθηματική σκέψη.

Η αξιοποίηση της τεχνολογίας με τον τρόπο αυτό συνιστά μια πρόκληση για σας τους μαχόμενους εκπαιδευτικούς και για το εκπαιδευτικό μας μοντέλο έτσι όπως έχει εγκαθιδρυθεί στην πράξη στο εκπαιδευτικό μας σύστημα. Οι πόροι που διατίθενται για το εγχείρημα της ένταξης της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδακτική των μαθηματικών αξιοποιούνται πολύ καλύτερα εάν δοθεί έμφαση στην απαιτούμενη αναβάθμιση της ποιότητας της διδασκαλίας του μαθήματος παρά εάν απλά χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία αυτή για αναπαραγωγή του παραδοσιακού και γεμάτου προβλήματα μοντέλου διδακτικής που εκ των πραγμάτων συχνά κυριαρχεί στα σχολεία μας. Γι' αυτό και η επιμόρφωση στην αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών εστιάζει στο πώς θα χρησιμοποιηθούν σε πλαίσιο που να χαρακτηρίζεται από πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Αναμένεται βέβαια στα επόμενα χρόνια να διατεθούν και εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας σχεδιασμένα για τεχνική υποστήριξη παραδοσιακών πρακτικών, δηλαδή συμπεριφοριστικά ασκησιολόγια υποστηριγμένα από συστήματα διαχείρισης και 'αξιολόγησης' της μορφής 'σωστό-λάθος'. Αυτά όμως δεν απαιτούν ιδιαίτερες πρόσθετες τεχνικές ή παιδαγωγικές γνώσεις από τους εκπαιδευτικούς ώστε να έχει νόημα να χρησιμοποιηθούν πόροι επιμόρφωσης εκπαιδευτικών για την εκμάθηση της χρήσης τους. Μπορούν να

χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά σε συγκεκριμένο ρόλο όταν η ψηφιακή τεχνολογία είναι πολύ πιο ευρέως διαθέσιμη και οι απαραίτητες υποδομές σε λειτουργία.

Καλούμαστε λοιπόν όλοι να δούμε πώς με αφορμή και εργαλείο τις ψηφιακές τεχνολογίες θα μπορέσουμε να συνεισφέρουμε στην ποιοτική βελτίωση του εκπαιδευτικού μας έργου. Για τους λόγους αυτούς η επιμόρφωση εστιάζει στο αντικείμενο της σύγχρονης διδακτικής των μαθηματικών με την ψηφιακή τεχνολογία. Στην πορεία αυτής της επιμόρφωσης θα αποκτήσετε βέβαια και την απαραίτητη τεχνική κατάρτιση που αφορά στις λειτουργικότητες, τα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες συγκεκριμένων εργαλείων που εκπροσωπούν όλους τους τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία αυτή μπορεί να υπηρετήσει τη διδακτική των μαθηματικών. Η ουσία όμως είναι ότι θα υποστηριχθείτε στο πώς να αξιοποιήσετε την σύγχρονη γνώση για να αναβαθμίσετε το διδακτικό σας έργο αξιοποιώντας τα ψηφιακά εργαλεία και παράλληλα να συνεισφέρετε στην αναβαθμιση του ρόλου σας απέναντι στους μαθητές σας και στην κοινωνία ευρύτερα.

### 3. Εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά

---

Το σκεπτικό της επιλογής του εκπαιδευτικού λογισμικού για την ευρεία επιμόρφωση για τους συναδέλφους μαθηματικούς είναι άμεσα συνδεδεμένο με την προβληματική της χρήσης της τεχνολογίας που έχει αναπτυχθεί στην επιστημονική κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών. Όπως είπαμε και προηγούμενα, ο ρόλος της υπολογιστικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει ως κύριο άξονα την προσέγγιση των υπολογιστών ως αναπαραστασιακών εργαλείων έκφρασης μαθηματικών εννοιών. Η χρήση των εργαλείων αυτών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μαθησιακή διαδικασία και με τη διαμόρφωση ενός σύγχρονου διδακτικού ‘παραδείγματος’ το οποίο υποστηρίζει την καλλιέργεια μεθοδολογικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων, τη διερεύνηση μέσα από το πείραμα, την ομαδική εργασία και επικοινωνία των μαθητών στα πλαίσια συνεργατικών δραστηριοτήτων. Στοχεύει δηλαδή στη δημιουργία νέων ρόλων για τον εκπαιδευτικό και το μαθητή. Επιπρόσθετα, η εξέλιξη της τεχνολογίας των υπολογιστών που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών εμφανίζεται να ενισχύει την άρση παλιών εμποδίων (π.χ. αναπαράστασης) και τη διάθεση μέσων που περιλαμβάνουν δυνατότητες για μοντελοποίηση από μέρους των μαθητών, για χρήση πολλαπλά διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων, για δυναμικό χειρισμό και κιναισθητική διαχείριση των εικονιζομένων στη οθόνη. **Τα ψηφιακά εργαλεία είναι επομένως εργαλεία κυρίως για να κάνει μαθηματικά με αυτά ο μαθητής. Παράλληλα είναι εργαλεία με τα οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάσει δραστηριότητες για τους μαθητές του. Τέλος με τα ίδια αυτά εργαλεία ο μαθηματικός μπορεί να ασχοληθεί επιστημονικά ο ίδιος με τα μαθηματικά στο δικό του επίπεδο.**

Σε αυτό το πλαίσιο η πρόσθετη παιδαγωγική αξία της χρήσης ενός λογισμικού στη διδασκαλία των μαθηματικών αναζητείται στις δομές και στις σχέσεις που διέπουν τις ενέργειες των μαθητών με ψηφιακά αντικείμενα που να είναι σχεδιασμένα να επιδέχονται χειρισμό και να ευνοούν ένα πλήθος αλληλεπιδράσεων μεταξύ των υπολογιστικών εργαλείων και όλων των εμπλεκομένων στη διδακτική πράξη. Τα μαθηματικά που αναδεικνύονται στο πλαίσιο των αλληλεπιδράσεων σε τέτοια περιβάλλοντα μπορεί να περιγραφούν ως μια δραστηριότητα διασυνδέσεων μέσα από επαγωγικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς παρά ως μια άκαμπτη ακολουθία υλοποίησης διδακτικών οδηγιών. Για τους παραπάνω λόγους στον επιστημονικό χώρο της διδακτικής των μαθηματικών ο όρος

‘εκπαιδευτικό λογισμικό’ συχνά αντικαθίσταται από περιγραφές όπως ‘δυναμικά ψηφιακά μέσα’, ‘δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα’, ‘αλληλεπιδραστικά μαθησιακά περιβάλλοντα’ κλπ.

Η οπτική αυτή βρίσκεται στον αντίποδα της απλουστευτικής αποδοχής κάθε υπολογιστικής εφαρμογής ανεξάρτητα από την απαραίτητη εκτίμηση της παιδαγωγικής της αξίας και της επιστημολογικής της συμβατότητας με τη μελέτη συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Η ‘καταλληλότητα’ ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος νοείται ως παιδαγωγική συνιστώσα και έτσι η εκπαιδευτική αξία και τα παιδαγωγικά χαρακτηριστικά ενός εργαλείου ανακύπτουν από την προσαρμογή τους στους στόχους της μάθησης και στις προσπάθειες κατανόησης από τη μεριά των μαθητών. Στο επίκεντρο της θεώρησης αυτής βρίσκεται η επιδίωξη ενός τύπου μάθησης της οποίας ο χαρακτήρας είναι βιωματικός και τα αποτελέσματά της δεν αποτιμώνται πάντοτε με τα παραδοσιακά κριτήρια της παραδοσιακής σχολικής τάξης των μαθηματικών, η οποία κυριαρχείται συχνά από οδηγίες προς τους μαθητές με σκοπό την ‘απόκτηση’ τεχνικών επίλυσης ασκήσεων ή απόδειξης.

Για τους λόγους αυτούς, για το αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών, χρησιμοποιήθηκε ένας προσεκτικά επιλεγμένος μικρός αριθμός λογισμικών τα οποία θα παίξουν το ρόλο των εργαλείων έκφρασης μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς. Το κάθε τέτοιο εργαλείο είναι σχεδιασμένο ώστε να εμπεριέχει ευρύτατο πεδίο μαθηματικών εννοιών. Δεν έχει λοιπόν έννοια η ‘κάλυψη συγκεκριμένης ύλης ή ωρών διδασκαλίας’ από ένα λογισμικό. Επίσης, το κάθε εργαλείο απαιτεί ειδική εκμάθηση του διακειμένου και των λειτουργικοτήτων του τα οποία συνιστούν τα ίδια αναπόσπαστο μέρος της μαθηματική έκφρασης. Δεν στέκει λοιπόν στο συγκεκριμένο αντικείμενο η επιλογή λογισμικών ‘φιλικών προς το χρήστη’ με την έννοια της ελαχιστοποίησης της δυσκολίας εκμάθησης της χρήσης του. Η ίδια η εκμάθηση της χρήσης του είναι άμεσα συνυφασμένη με τη μάθηση των μαθηματικών. Τέλος, τα εργαλεία αυτά είναι επιλεγμένα έτσι ώστε για το καθένα να υπάρχει σαφής και ευρεία εμπειρία από την εφαρμογή τους σε σχολεία της Ελλάδας και του εξωτερικού και επιστημονική γνώση για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να αξιοποιηθούν διδκατικά.

### **3.1 Κύρια χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την διδακτική των μαθηματικών**

Με δεδομένη την εστίαση σε δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα, το εκπαιδευτικό λογισμικό που χρησιμοποιείται στο πλαίσιο της επιμόρφωσης στοχεύει στην αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας σε όλο το εύρος του προγράμματος σπουδών της Ελληνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ αναμένεται να αποτελέσει παιδαγωγικό εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των μαθητών στις νέες συνθήκες ραγδαίας ανάπτυξης της τεχνολογίας. Για το λόγο αυτό, έχει ληφθεί υπόψη τόσο η ύπαρξη του διεθνώς πλούσιου και αξιοποιήσιμου λογισμικού γενικής χρήσης (όπως π.χ. το excel), όσο και οι ιδιαίτερες δυνατότητες σχεδιασμού και αξιοποίησης της σύγχρονης υπολογιστικής τεχνολογίας που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Keisoglou & Kynigos, 2006, Kynigos & Gavrilis, 2006, Psycharis & Kynigos, 2009).

Με βάση την οπτική αυτή τα κύρια χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την επιμόρφωση αφορούν τόσο τις τεχνολογικές όσο και στις παιδαγωγικές παραμέτρους που θα πρέπει να διαθέτει ώστε να μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά στο μάθημα των μαθηματικών. Ο όρος 'τεχνολογικές παράμετροι' αναφέρεται κυρίως στις προσφερόμενες λειτουργικότητες ενός εκπαιδευτικού λογισμικού και εξετάζεται αλληλένδετος με την παιδαγωγική βαρύτητα που αυτές κατέχουν στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησής τους στο μάθημα των μαθηματικών. Τέτοιες παράμετροι αφορούν δυνατότητες όπως:

**Η έκφραση μαθηματικών ιδεών και νοημάτων**, που σχετίζεται με τη μελέτη μιας γνωστικής περιοχής των μαθηματικών και μπορεί να αφορά ένα σύνολο μαθηματικών εννοιών. Ο σχεδιασμός των λογισμικών που έχουν επιλεγεί στοχεύει στη δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων.

**Η ύπαρξη πολλαπλών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων** με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη δυνατότητα συμβολικής έκφρασης μέσω γλωσσών προγραμματισμού και την ύπαρξη γραφικών αναπαραστάσεων, όπου οι αλλαγές στη μια αναπαράσταση επιφέρουν αλλαγές και στις υπόλοιπες που συνδέονται με αυτή. Οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις μπορεί να αφορούν διαφορετικές γνωστικά περιοχές των μαθηματικών (όπως άλγεβρα-ανάλυση, γεωμετρία, στατιστική, πιθανότητες). Η παιδαγωγική



αξία τέτοιων αναπαραστάσεων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη χρήση της τεχνολογίας ως εργαλείου που ευνοεί την αλληλεπίδραση με το χρήστη μέσα από τη διάθεση λειτουργικοτήτων που δεν απαντώνται με τον ίδιο τρόπο και στα στατικά μέσα.

**Διερεύνηση-πειραματισμός.** Το λογισμικό πρέπει να αφήνει περιθώρια ανάπτυξης εικασιών και υποθέσεων για όσα συμβαίνουν στη οθόνη, ενισχύοντας παράλληλα τις προϋποθέσεις για αφαιρετική σκέψη και αναστοχασμό. Ο μαθητής πρέπει να μπορεί να πειραματιστεί με διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλλάζοντας παραμέτρους, αποδομώντας και μετασχηματίζοντας μαθηματικά αντικείμενα και κατασκευές, βασιζόμενος κυρίως στην ανατροφοδότηση του υπολογιστή. Ο μαθητής έχει έτσι τη δυνατότητα να ελέγχει τις δράσεις του και να επαναπροσδιορίζει τις στρατηγικές του, να διερευνά δηλαδή τους τρόπους επίτευξης των ζητούμενων μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

**Υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας.** Το λογισμικό πρέπει να υποστηρίζει τη δυνατότητα σχεδιασμού δραστηριοτήτων που ενισχύουν την επικοινωνιακή διάσταση της μάθησης των μαθηματικών με άξονα τη συνεργατική μάθηση ανάμεσα και μεταξύ ομάδων μαθητών.

### **3.2 Κατηγορίες εκπαιδευτικού λογισμικού για τη διδακτική των μαθηματικών**

Οι μαθησιακές δραστηριότητες με το διερευνητικό λογισμικό μπορούν να περιγραφούν με βάση βασικές περιοχές των μαθηματικών όπως η γεωμετρία, η άλγεβρα, η στατιστική και οι πιθανότητες. Σημαντικό μέρος των δυσκολιών κατανόησης των μαθηματικών μπορεί να εξηγηθεί ενιαία και ανεξάρτητα από τη μαθηματική περιοχή. Σημαντικό όμως μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται επίσης στην ιδιοτυπία των εννοιών στις τέσσερις αυτές μαθηματικές περιοχές και των αναπαραστάσεών τους, καθώς και στον τρόπο που εμφανίζονται και διδάσκονται στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών στα σχολεία. Επίσης, η πρόσθετη παιδαγωγική αξία από τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων έχει διαφορετικό χαρακτήρα για την καθεμία από τις περιοχές αυτές που εν μέρει προέρχεται και από την αξιοποίηση διαφορετικών λειτουργικοτήτων και χαρακτηριστικών της τεχνολογίας. Αυτό ακριβώς δίνει και τη σκοπιμότητα οργάνωσης των μαθησιακών δραστηριοτήτων με βάση κατηγορίες διερευνητικών δραστηριοτήτων με διάφορες λειτουργικότητες ψηφιακών εργαλείων. Η ταξινόμηση αυτή μας δίνει τις εξής κατηγορίες.

- της συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού,
- του δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων,
- του χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων
- της διαχείρισης δεδομένων και
- των προσομοιώσεων μοντέλων και καταστάσεων

Παράλληλα η ταξινόμηση αυτή αντανακλά σε κατηγορίες ψηφιακών εργαλείων που αναπτύχθηκαν στην πράξη και με τη χρήση των οποίων έχουμε ερευνητικά δεδομένα για το είδος των μαθησιακών δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν οι μαθητές με αυτά.

Εκτός από τα βασικά εργαλεία έκφρασης μαθηματικών εννοιών για τις ανάγκες της επιμόρφωσης έχει σημασία να χρησιμοποιηθούν και λογισμικά που βρίσκονται στο στάδιο ανάπτυξης σε εξειδικευμένες ερευνητικές ομάδες ανά τον κόσμο και τα οποία συνιστούν επινοήσεις αιχμής για την αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική των μαθηματικών. Ο στόχος είναι να δοθεί μια βαθύτερη γνώση και εποπτεία του χώρου σε σας τους εκπαιδευτικούς αλλά και έναυσμα για την υποστήριξη κοινότητας δράσης μεταξύ σας όπου θα μπορείτε να παρακολουθείτε τις εξελίξεις και να συνεργάζεστε επιστημονικά με κοινό στόχο την προετοιμασία για μελλοντική αξιοποίηση της τεχνολογίας αυτής.

Ας επικεντρωθούμε όμως στα ψηφιακά εργαλεία στα οποία θα βασιστεί η επιμόρφωσή σας. Το κάθε ένα από τα εργαλεία αυτά επιλέχθηκε ως ένας καλός και ευρέως διαθέσιμος εκπρόσωπος μιας από τις βασικές κατηγορίες που είπαμε. Είναι τα εξής:

Κατηγορία: συμβολική έκφραση μέσω του προγραμματισμού.

Λογισμικό: **Χελωνόκοσμος** (Αβάκιο)

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το MaLT, η τρισδιάστατη έκδοση του Χελωνόκοσμου, που είναι υπό ανάπτυξη

Κατηγορία: δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων.

Λογισμικό: Geometer's Sketchpad ή GSP, Cabri Geometre ή Cabri, Geogebra

Αυτά τα τρία λογισμικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ισοδύναμα και εναλλακτικά.

Κατηγορία: χειρισμός αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων

Λογισμικό: Function Probe ή FP

Κατηγορία: διαχείριση δεδομένων

Λογισμικό: **Ταξινομούμε** (Αβάκιο)

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Tabletop, όπου αυτό είναι διαθέσιμο

Κατηγορία: προσομοιώσεις μοντέλων και καταστάσεων

Λογισμικό: **Modelus**,

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το MoPiX που είναι υπό ανάπτυξη<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Τα λογισμικά ανοικτού κώδικα 'Χελωνόκοσμος', 'Ταξινομούμε', 'Geogebra', 'MaLT' και 'MoPiX' είναι διαθέσιμα και στο <http://etl.ppp.uoa.gr>.

## 4. Θεωρητική Επισκόπηση: Συνοπτικά Στοιχεία Διδακτικής Μαθηματικών με τη χρήση Ψηφικών Τεχνολογιών<sup>2</sup>

---

### 4.1 Συνοπτικά στοιχεία εξέλιξης της Διδακτικής των Μαθηματικών

Εξελικτικά είναι δύσκολο να προσδιορίσει κανείς από πότε η διδακτική των μαθηματικών ('ΔτΜ' από δω και εμπρός) διαμορφώθηκε σε επιστημονικό χώρο με αυτονομία και ταυτότητα. Μια ενδεικτική ημερομηνία θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί το 1976, έτος ίδρυσης της κοινότητας "Ψυχολογία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης" και διεξαγωγής του ομώνυμου συνεδρίου, που από τότε γίνεται κάθε έτος ανελλιπώς μέχρι σήμερα (βλ. το Gutierrez & Boero, 2006 για μια σύνοψη της τριακονταετούς έρευνας καθώς και την σχετική ιστοσελίδα, <http://www.igpme.org>). Μέχρι τότε, όσα γνωρίζαμε για τη μάθηση των μαθηματικών βρίσκονται κυρίως στις παρυφές γενικότερων θεωριών μάθησης, όπως του συμπεριφορισμού ή, αργότερα, του δομισμού, που εμφανίζεται κυρίως ως εφαρμογή της γνωστικής ψυχολογίας στη μάθηση των μαθηματικών. Στην μετα-Πιαζετιανή εποχή, το κυρίαρχο μοντέλο ήταν αυτό της διάγνωσης των παρανοήσεων των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες και κατά την Πιαζετιανή παράδοση, η επινόηση γενικών διαγνωστικών μοντέλων με άξονα την ηλικιακή ωρίμανση (π.χ. Van Hiele, 1959). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η διδακτική αντιμετωπίστηκε ως επιστήμη διάγνωσης και 'θεραπείας' των παρανοήσεων αυτών και συνειρμικά ο μαθητής αντιμετωπιζόταν ως 'ασθενής' ως προς τις έννοιες που δεν καταννοούσε (Hart, 1981). Η οπτική αυτή όμως είχε ορισμένα ριζικά προβλήματα για την κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας. Αντιμετώπιζε τα μαθηματικά ως αυθύπαρκτη οντότητα και δεν πρότεινε έτσι τρόπο να μελετηθούν οι έννοιες που οι ίδιοι οι μαθητές ανέπτυσαν.

Κατά τα μέσα της δεκαετίας του '80 διατυπώθηκαν οι πρώτες θέσεις για τη δομική θεώρηση της διδακτικής των μαθηματικών και σηματοδότησαν την αυτονόμηση του χώρου (Freudenthal, 1983). Η θεώρηση αυτή έτυχε έντονης υποστήριξης από την κοινότητα της

---

<sup>2</sup> Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί σύνοψη μέρους του κεφαλαίου 3 του (Κυνηγός, 2007).

ΔτΜ (παραδόξως πηγάζει κι αυτή από τον Piaget όπως θα δούμε), κυρίως διότι έθεσε θέματα επιστημολογίας και προσέγγισης της μαθησιακής διαδικασίας μέσα από τις επιστήμες της αγωγής και όχι στενά της γνωστικής ψυχολογίας. Από πλευράς επιστημολογίας, η θεώρηση αυτή συνεκτιμά τη διαλεκτική φύση των μαθηματικών, που διατυπώνεται ανάγλυφα από τους Davis and Hersh, 1981 και τον Ούγκρο μαθηματικό και φιλόσοφο Imre Lakatos, 1976 όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η θεώρηση για τα μαθηματικά, που συμβαδίζει με τη δομική θεωρία μάθησης, προσδιορίζει το γνωστικό αυτό τομέα ως **μια έκφανση του ανθρώπινου λογισμού**, ως ένα πεδίο της ανθρώπινης διάνοησης που -από τη στιγμή που είναι ανθρώπινο κατασκεύασμα- ενέχει λάθη. Απορρίπτει δηλαδή οποιαδήποτε φαινομενολογική διάσταση και αδιαμφισβήτητη υπόσταση του αντικειμένου (diSessa, 1987). Η θεώρηση αυτή υποδηλώνει ότι τα μαθηματικά δεν έχουν υπόσταση ως φυσικό αντικείμενο, δεν βρίσκονται "κάπου εκεί έξω", ώστε να ευσταθεί ο ισχυρισμός ότι ο στόχος του μαθηματικού επιστήμονα είναι "να τα καταλάβει" και ότι εφόσον τα κατανόησε δεν μπορεί να αμφισβητηθεί (ούτε ο ίδιος ούτε τα μαθηματικά). Αντίθετα, αποτελούν κατασκεύασμα του καθενός από μας και άρα αυτός που κάνει μαθηματικά είτε είναι μαθηματικός επιστήμονας είτε μαθητής, κτίζει πάνω στη δική του θεωρία, κάνοντας συνεχώς λάθη, πισωγυρίσματα και διορθώσεις. Βέβαια, υπάρχουν τα μαθηματικά που όλοι ξέρουμε και τα οποία βρίσκονται γραμμένα σε τόσα δοκίμια και έχουν πολυάριθμες εφαρμογές. Αυτά είναι τα μαθηματικά για τα οποία έχουμε συμφωνήσει από κοινού ότι τα εννοούμε με παραπλήσιο τρόπο. Ωστόσο ακόμη και τα μαθηματικά με αυτή την έννοια δεν υπάρχουν ως αντικειμενική οντότητα. Η δομική θεώρηση των μαθηματικών επομένως βλέπει το μαθητή όπως ακριβώς και τον επιστήμονα των μαθηματικών. Ο μαθητής κατασκευάζει, δομεί έννοιες μέσα από μια διαδικασία εικασιών, υποθέσεων, ανταπόκρισης από το κοινωνικό και φυσικό περιβάλλον, διατύπωσης θεωρημάτων και αναθεώρησής τους, όταν η ορθότητά τους απορρίπτεται στην πράξη (Κολέζα, 2006).

Το κύμα αυτό της δομικής θεώρησης της μάθησης των μαθηματικών επηρέασε και τη γνωστική ψυχολογία, καθώς οι εκπρόσωποι και οι υποστηρικτές της διέβλεψαν ότι με την αυστηρή θεώρηση της μάθησης ως παρανόηση εννοιών μόνο ένα μικρό μέρος της πραγματικότητας θα μπορούσε να ερμηνευθεί (Confrey, 1995, Vergnaud, 1987). Ένας ευρύτατα διαδεδομένος όρος της εποχής εκείνης είναι αυτός της **εγκαθιδρυμένης μάθησης** (Lave, 1988), δηλαδή της μάθησης που γεννιέται μέσα από ανθρώπινες καταστάσεις, στις

οποίες συμπεριλαμβάνονται η κοινωνικότητα, οι προθέσεις, οι αντιλήψεις για το ρόλο του καθενός και η χρήση των εννοιών σε συγκεκριμένες πραγματικές συνθήκες.

Η δομική θεώρηση είχε μια σχετικά γρήγορη εξέλιξη προς τα άκρα στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών, που επικρίθηκε έντονα. Η εξέλιξη αυτή ήταν ο ριζικός δομισμός που αρνείται οποιαδήποτε υπόσταση στα μαθηματικά πέρα από τα δομήματα του καθενός από μας (von Glasersfeld, 1991). Αυτή η ώθηση επιτάχυνε και την έλευση της επόμενης θεώρησης, η οποία -ξεκινώντας από τη θεωρία του Vygotsky (1978, βλέπε και Ράπτης&Ράπη, 1997)- συνεκτίμησε τις κοινωνικές επιστήμες και ονομάστηκε κοινωνικό-δομική (socio-constructivism). Τρεις είναι οι βασικές σχολές της θεώρησης αυτής: η Γαλλική σχολή της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων (Chevallard, 1992, Brousseau, 1997), η θεωρία δράσης (Kartelinin, 1997) και το δόμημα των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών (Cobb et al, 1996). Κύριο χαρακτηριστικό και των τριών Σχολών είναι ότι θεωρούν κυρίαρχο στοιχείο **την ανθρώπινη κοινότητα μέσα στην οποία αναπτύσσεται η μαθηματική νόηση** και αντιμετωπίζουν την νόηση αυτή ως παράγωγο της ανθρώπινης δραστηριότητας, είτε πρόκειται για κοινωνική συμπεριφορά είτε για καθημερινή πρακτική, δηλαδή τη χρησιμοποίηση μαθηματικών εννοιών για την επίτευξη κάποιου στόχου πρακτικού ή με προσωπικό νόημα. Το στοιχείο αυτό αντικατοπτρίζεται έντονα και στη χώρα μας όπου ένα περίπου χρόνο πριν την έκδοση του παρόντος είχε ιδρυθεί η Ένωση Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών από επιστήμονες της Ελλάδας και της Κύπρου (βλ. Κυνηγός, 2005, <http://garme.ppp.gr>).

Στο σημείο αυτό περίπου βρισκόμαστε ακόμη και σήμερα. Υπάρχουν, δηλαδή, μια σειρά από θεωρήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών που εντάσσονται στις τρεις αυτές σχολές, και καθεμία είχε τη δική της πορεία ανάπτυξης, ανάλογα με τον ιδιότυπο πολιτισμικό και ερευνητικό περικείμενο μέσα από το οποίο αναδύθηκε. Οι θεωρίες αυτές είναι βέβαια πολύ συγκεκριμένες και τα δομήματά τους αποκρυσταλλωμένα σε σχέση με την εποχή των γενικών θεωριών μάθησης. Είναι όμως ταυτόχρονα και κατακερματισμένες, χωρίς συνοχή ή σχέση μεταξύ τους και χωρίς δυνατότητα ευρύτερης αποδοχής και εφαρμογής στην εκπαίδευση ακριβώς λόγω της επιρροής του πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύχθηκε καθεμία (Artigue, et al., 2006). Μπορεί κανείς να τις κατατάξει στα τρία πλαίσια που αναφέρθηκαν, δηλαδή της Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων (ΘΔΚ), την Θεωρία Δράσης (ΑΘ) και αυτή των Κοινωνικο-μαθηματικών Νορμών (ΚΜΝ). Σε αυτές προστίθεται και το πλαίσιο των θεωριών που έχουν έναν πιο εξατομικευμένο χαρακτήρα, δηλαδή θεωρίες που περιγράφουν

τη μάθηση του ατόμου, ακόμα κι αν αυτό δρα ως μέλος μιας κοινωνικής ομάδας, όπως η θεωρία των Εγκαθιδρυμένων Αφαιρέσεων (Noss and Hoyles, 1996) ως εστίαση της θεωρίας της Lave για τη διδακτική των μαθηματικών και μάλιστα σε περιβάλλοντα όπου χρησιμοποιείται η τεχνολογία με την οπτική του παρόντος βιβλίου, στην οποία θα αναφερθούμε εκτενέστερα στη συνέχεια. Αυτό που δεν θα έπρεπε να κάνει κανείς είναι να θεωρήσει ότι η τελευταία δεν έχει πια ενδιαφέρον, αποκλειστικά και μόνο επειδή είναι προγενέστερη των υπόλοιπων. Πώς μπορούμε να μελετήσουμε την μαθησιακή διαδικασία ως συλλογικό μόνο φαινόμενο; Δεν πρέπει να έχουμε θεώρηση για το πώς μαθαίνει το άτομο, αναγνωρίζοντας, βέβαια, ότι μαθαίνει ως κοινωνικό όν; Η εύλογη αυτή απορία δεν είχε διατυπωθεί ρητά την εποχή που γράφτηκε το βιβλίο, όπου υπήρχε μια άρρητη υποβάθμιση της σημασίας της μελέτης του πώς μαθαίνει το άτομο.

## **4.2 Η Εξέλιξη της ΔτΜ με εργαλεία Ψηφιακής Τεχνολογίας**

Για να κατανοήσει λοιπόν κανείς το τι ξέρουμε για τη μαθησιακή διαδικασία που αφορά τον κλάδο των μαθηματικών σε περιβάλλοντα όπου αξιοποιείται η ψηφιακή τεχνολογία, χρειάζεται να τοποθετήσει τις εξελίξεις στο γενικότερο πλαίσιο της εξέλιξης των θεωριών ΔτΜ, που αναφέραμε παραπάνω.

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα βασισμένα σε εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας αρχίζουν με τη θεώρηση του αμερικανού μαθηματικού και παιδαγωγού από το Media Lab του MIT, S. Papert (1980). Το βασικό χαρακτηριστικό της θεώρησης του Papert είναι η σχέση της με τη θεωρία του J. Piaget και η προσέγγιση που προσδίδεται στην αξιοποίηση της σύγχρονης τεχνολογίας, καθώς αντιμετωπίζεται ως πολιτισμικό εργαλείο. Ο S. Papert ανέπτυξε τη θεωρία του στα μέσα της δεκαετίας του 60 μετά από μια πενταετή περίπου επίσκεψή του στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης και τη συνεργασία του με τον Piaget. Η προσέγγιση του Piaget για τη μελέτη της μάθησης ενθουσίασε τον Papert, ακριβώς διότι αποτελούσε μια εναλλακτική θεώρηση σε σχέση με αυτή του συμπεριφορισμού, που επικρατούσε στις ΗΠΑ εκείνη την εποχή. Ο Papert ήθελε να περιγράψει τη μάθηση ως δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση. Προσέγγισε τη εκμάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασία φυσιολογικής εξέλιξης της λογικο-μαθηματικής σκέψης, παραλληλίζοντάς την με την εκμάθηση της γλώσσας. Τόνισε ότι μαθαίνουμε να μιλάμε και να σκεφτόμαστε λογικά πολύ πριν πάμε σχολείο, σε καταστάσεις, όπου η μάθηση αυτή πραγματοποιείται καθώς

αποκτούμε ικανότητες επιβίωσης και επικοινωνίας στο κοινωνικό και φυσικό μας περιβάλλον (Papert, 1980).

Ο Papert συμφώνησε πολύ στενά με τον πυρήνα της θεωρίας του Piaget, που -σε αντίθεση με τον επικρατούντα τότε συμπεριφορισμό- χαρακτηρίζεται από μια ανθρωποκεντρική διάσταση της σκέψης και από μια θεώρηση του ανθρώπου ως αυτο-ρυθμιζόμενης οντότητας. Ο Piaget βλέπει την ανθρώπινη σκέψη να επηρεάζεται από την οργανική φύση του ανθρώπου και τον φυσικό και κοινωνικό του περίγυρο. Βλέπει ως έμφυτες ανθρώπινες τάσεις την εξισορρόπηση (equilibration), την αυτο-ρύθμιση (self-regulation) και την αυτοεξέταση / αναστοχασμό (reflection). Στο πλαίσιο αυτό θεωρεί ότι η ανθρώπινη σκέψη αποτελεί μια περίπλοκη δομή από γνωστικά σχήματα (cognitive schemes), δηλαδή δομικούς γνωσιακούς λίθους βασισμένους στην εμπειρία. Κάνει επίσης την πρώτη προσπάθεια περιγραφής του τρόπου εξέλιξης ή ανάπτυξης της δομής αυτής προτείνοντας δύο τρόπους με τους οποίους αυτό συμβαίνει: την αφομοίωση (assimilation), όπου ένα καινούργιο γνωστικό σχήμα εντάσσεται στην υπάρχουσα δομή και τη συμμόρφωση (accommodation), όπου, επειδή το γνωστικό σχήμα δεν μπορεί να ενταχθεί στην υπάρχουσα γνωσιακή δομή, προκαλείται από τον άνθρωπο κάποια δομική αλλαγή ή αναπροσαρμογή της δομής αυτής.

Ο Papert βασίζεται στη θεώρηση αυτή θεωρώντας την ως τη σημαντικότερη συνεισφορά του Piaget. Διαφοροποιείται όμως σημαντικά από τον Piaget σχετικά με τη θεωρία του για τη γνωστική ωρίμανση του ανθρώπου, δηλαδή τα στάδια γνωσιακής εξέλιξης, που είναι ίσως το πιο γνωστό μέρος της θεωρίας του (για μια εξαιρετική κριτική θώριση της θεωρίας του Piaget, βλέπε Donaldson, 1978). Ο Papert ισχυρίστηκε ότι αυτό που δεν έχουν κάνει οι επιστήμες της αγωγής είναι να μελετήσουν το **τι μπορεί να κάνει το παιδί**. Υποστήριξε δηλαδή ότι ο Piaget επικεντρώθηκε στο να εξηγήσει τις λογικές διεργασίες που δεν μπορεί να κάνει ο άνθρωπος στα διάφορα στάδια ωρίμανσής του. Επιστρέφοντας από τη Γενεύη, ο Papert ήταν πεπεισμένος ότι τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν με πολύ ανώτερους τρόπους από ό,τι υποστηρίζεται και ότι **μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πιο πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων** (Papert, 1980).

Η προβληματική του Papert είναι ριζικά αντίθετη με αυτήν που, προερχόμενη από τη γνωστική ψυχολογία, επικράτησε τις δεκαετίες του 70 και του 80, σύμφωνα με την οποία δόθηκε έμφαση στη μελέτη των παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες που εμφανίζονταν στα αναλυτικά προγράμματα εκείνης της εποχής. Το πρόβλημα με



την προσέγγιση αυτή είναι ότι προσδίδει μια οντολογία στα μαθηματικά, τα θεωρεί ως κάτι που υπάρχει στη φύση και το οποίο ο άνθρωπος το καταλαβαίνει προοδευτικά. Η δομική (constructivist) θεώρηση της μάθησης, που διατυπώθηκε για πρώτη φορά πολύ πριν τον Piaget, (π.χ. από τον Dewey, 1933), την προσεγγίζει ως μια διαδικασία που συμβαδίζει με την ανθρώπινη έκφραση, δηλαδή ως κάτι που ο άνθρωπος οικοδομεί. Αν προσεγγίσουμε με τον τρόπο αυτό την ερμηνεία του πώς μαθαίνουμε μαθηματικά, τότε πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ποιά νοήματα δομεί το παιδί και όχι στο αν ‘καταλαβαίνει ή παρανοεί’ νοήματα που υπάρχουν. Αυτό ακριβώς κάνει ο Papert: ουσιαστικά ‘αναποδογυρίζει’ την προσέγγιση και μελετάει τα **μαθηματικά νοήματα που δομούν τα παιδιά**, δηλαδή τι καταλαβαίνουν (αντί για το τι παρανοούν) και πώς η κατανόηση αυτή αναπτύσσεται (αντί για το ποιές παρανοήσεις ‘διορθώνονται’).

Η θεώρηση του Papert έχει και ένα δεύτερο σκέλος, τη φιλοσοφία του για τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας. Αυτή πηγάζει από τη πρωτόγνωρη τότε φιλοσοφία σχεδιασμού και χρήσης μιας γλώσσας προγραμματισμού, που τότε ήταν το βασικό εργαλείο στην εξέλιξη της επιστήμης της τεχνητής νοημοσύνης, την LiSP. Οι χρήστες της LiSP, υψηλά εξειδικευμένοι πληροφορικοί επιστήμονες, είχαν θέσει ως στόχο να αναπτύξουν προγράμματα που απαιτούσαν σύλληψη και λύση εξαιρετικά δύσκολων γι’ αυτούς προβλημάτων. Για ένα τέτοιο πρόγραμμα συνήθως εργαζόνταν αρκετοί επιστήμονες. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούσαν τη γλώσσα προγραμματισμού ως εργαλείο σκέψης, προτάσεων και δημιουργίας αλληπάλληλων υπο-προγραμμάτων τα οποία άλλαζαν και διόρθωναν συνεχώς. Ο προγραμματισμός δηλαδή ήταν αναπόσπαστο εργαλείο σκέψης και δημιουργίας και όχι απλώς ένας κώδικας καταχώρησης έτοιμων αλγορίθμων στην μηχανή. Ο Papert σκέφτηκε ότι η δραστηριότητα αυτών των επιστημόνων ήταν μια γνήσια δραστηριότητα μάθησης. Γιατί να μην υπάρχει μια γλώσσα προγραμματισμού κατάλληλη, ώστε να μπορούν ακόμα και μικρά παιδιά να εμπλακούν σε τέτοιου είδους δραστηριότητα (στο δικό τους επίπεδο σκέψης, φυσικά); Έτσι συνέλαβε την γλώσσα Logo και την ανέπτυξε μαζί με τους συνεργάτες του στο Media Lab (Feurzig & Papert, 1971).

Στο πλαίσιο αυτό ο προγραμματισμός ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να τις εκφράσουν με τη χρήση συμβόλων, να τις ‘εκτελέσουν’ στον Η/Υ και να παρατηρήσουν άμεσα το αποτέλεσμά τους συγκρίνοντάς το με το αποτέλεσμα που επιδίωκαν πριν από την ‘εκτέλεση’. Τους δίνει επίσης τη δυνατότητα να ομαδοποιήσουν ένα σύνολο ιδεών και μετά είτε να τις χρησιμοποιήσουν ως ένα αντικείμενο, με ορισμένη ονομασία, σε

ένα υψηλότερο αφαιρετικό επίπεδο, είτε να στοχαστούν πάνω σε μια συγκεκριμένη ιδέα που ‘ενυπάρχει’ σ’ αυτό το αντικείμενο. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια ιδέα με εναλλακτικούς τρόπους: ως εργαλείο, αλλά και ως αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να στοχαστούν (για να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία της Douady, 1985).

Ο προγραμματισμός για τη ΔτΜ επιμένως προσεγγίζεται ως μέσο έκφρασης, διερεύνησης, δόμησης και αποκάλυψης ιδεών, στο πλαίσιο μικρών ομάδων εργασίας οι οποίες ασχολούνται με κάποιο project, μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές ευκαιρίες για την κοινωνική κατασκευή του νοήματος μέσα στη σχολική τάξη.

Για να καταλάβει κανείς τα νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές δεν μπορεί να αγνοήσει το περιβάλλον στο οποίο εργάζονται και το πώς η αλληλεπίδραση που έχουν με τα συγκεκριμένα εργαλεία επηρεάζει τη σκέψη τους. Είναι επομένως ιδιαίτερα χρήσιμη η προσέγγιση της εγκαθιδρυμένης μάθησης και ειδικότερα η δουλειά των Άγγλων ερευνητών Hoyles και Noss οι οποίοι διατύπωσαν ένα θεωρητικό δόμημα για να περιγράψουν καλύτερα αυτή τη διαδικασία της γενίκευσης εννοιών (Noss & Hoyles, 1996). Το δόμημα αυτό το ονόμασαν ‘εγκαθιδρυμένες αφαιρέσεις’ (situated abstractions). Ο όρος αυτός υποδηλώνει ότι καταρχήν συμφωνούν με τον Papert ότι οι μαθητές κάνουν μαθηματικές αφαιρέσεις και ότι έχει ιδιαίτερη σημασία να βρούμε εργαλεία και τρόπους για να τις περιγράψουμε. Ταυτόχρονα όμως δείχνουν ότι οι αφαιρέσεις αυτές είναι μερικές, γιατί αναδύονται μέσα από πολύ συγκεκριμένες καταστάσεις, όπως τα συγκεκριμένα τεχνολογικά εργαλεία, τις δραστηριότητες, τα κατασκευάσματα (μοντέλα γεωμετρικών σχημάτων στη προκειμένη περίπτωση), το διάλογο με τους συμμαθητές τους και την παρέμβαση του διδάσκοντα στις δράσεις των μαθητών. Φαίνεται επομένως ότι συνεκτιμούν την τάση της γνωστικής ψυχολογίας, που επικρατούσε τη δεκαετία του ’80, να συμπεριλάβει τέτοιες πτυχές στη μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας με την προσέγγιση της εγκαθιδρυμένης μάθησης. Όμως, όπως ακριβώς και ο Papert, αντιστρέφουν την στοχοπροσήλωση στις παρανοήσεις εννοιών και εστιάζουν στις έννοιες που δημιουργούν οι ίδιοι οι μαθητές. Μόνο αν καταλάβουμε τις έννοιες αυτές και τη διαδικασία με την οποία παράγονται, θα μπορέσουμε να διαμορφώσουμε μαθησιακά περιβάλλοντα που δίνουν πιο πλούσιες ευκαιρίες στους μαθητές να τις παράγουν.

Εδώ πρέπει να συζητηθεί η έννοια της ‘μαθηματικής έννοιας’. Εάν ακολουθήσουμε το παραδοσιακό για τη δεκαετία του ‘80 μοντέλο των παρανοήσεων, τότε δεν χρειάζεται συζήτηση: οι μαθηματικές έννοιες είναι αυτές του αναλυτικού προγράμματος, οι οποίες

έχουν προκύψει από βασικές υπαρκτές έννοιες-οντότητες της μαθηματικής επιστήμης. Εάν όμως χρησιμοποιήσουμε το δομικό μοντέλο για τη μάθηση, τότε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τι σημαίνει ‘μαθηματική έννοια’; Είναι οποιαδήποτε έννοια δομεί ο μαθητής; Πώς μπορούμε να διακρίνουμε μια έννοια, έτσι ώστε να μπορούμε να συνεννοηθούμε γι’ αυτήν; Φαίνεται πάντως ορθότερο να αντιμετωπίσουμε τις έννοιες ως **κατασκευάσματα των μαθητών μέσα από τη δράση τους σε κοινωνικές ομάδες στο περικείμενο της μαθησιακής κατάστασης.**

Σ’ αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικός ο τρόπος που προσδιόρισε την μαθηματική έννοια ο Γάλλος ψυχολόγος G. Vergnaud (1991). Υποστήριξε ότι **δεν έχει νόημα η αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας σε απομόνωση.** Νόημα έχει η θεώρησή της σε σχέση α) με άλλες έννοιες που συνδέονται στενά μ’ αυτήν, β) με μία ομάδα καταστάσεων στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και γ) με μία ομάδα διαθέσιμων αναπαραστάσεών της. Για το λόγο αυτό, ο Vergnaud ονόμασε την τριάδα αυτή **νοητικό πεδίο** και υποστήριξε ότι στη διδακτική των μαθηματικών αυτός πρέπει να είναι ο τρόπος αναφοράς στις μαθηματικές έννοιες. Μετά από χρόνια, οι Balacheff και Goldin (2002), συμπλήρωσαν την πρόταση του Vergnaud, προσθέτοντας μια τέταρτη πτυχή στον ορισμό του νοητικού πεδίου το οποίο προσδιόρισαν ως εξής:

- P ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων / προβλημάτων
- R ένα σύνολο πράξεων, σχέσεων και αξιωμάτων
- L ένα αναπαραστασιακό σύστημα
- Σ μία δομή ελέγχου

Στην πραγματικότητα, οι Balacheff και Goldin επεκτείνουν την έννοια του νοητικού πεδίου του Vergnaud, η οποία περιλαμβάνει τα πρώτα τρία στοιχεία, προκειμένου να εντάξουν σ’ αυτά ρητά το Σ, το οποίο δηλώνει αυτό που απαιτείται, προκειμένου να γίνουν από τους μαθητές κρίσεις, επιλογές, και να ληφθούν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Οι Balacheff και Goldin συνδυάζουν το Σ με το θεωρητικό δόμημα των **‘θεωρημάτων εν δράσει’** (theorems in action) του Vergnaud, δηλαδή τα συμπεράσματα που παράγουν οι μαθητές, τα οποία αφορούν σταθερές μέσα σε μία ομάδα αντικειμένων σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται μ’ αυτά. Η ανοιχτή αυτή θεώρηση ως προς το τι μπορεί να χαρακτηριστεί **‘νόημα σε χρήση’** (conception in use) διατυπώθηκε αρχικά από το Vergnaud, από μία γνωστική οπτική και επικεντρώθηκε σε μαθηματικές έννοιες περισσότερο, παρά στις

γνώσεις των μαθητών (1991). Η προσθήκη των Balacheff και Goldin μετατρέπει τον όρο ώστε να είναι κεντρικά χρήσιμος για την περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας μεν αλλά σε σχέση με μαθηματικές έννοιες.

Παρότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμα τα δομήματα αυτά για τη μελέτη της εκμάθησης των μαθηματικών με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, ο Vergnaud δεν τα διατύπωσε με βάση το πλαίσιο αυτό, ενώ και οι Balacheff και Goldin μόνο περιφερειακά το έλαβαν υπόψη στην θεωρητική προσέγγιση που προαναφέραμε. Αντίθετα, η Mariotti (2002) παρέχει ένα χρήσιμο πλαίσιο κατανόησης της δημιουργίας νοημάτων, που πηγάζει από τις έρευνές της σε μαθησιακά περιβάλλοντα που αξιοποιούν τα εργαλεία της ψηφιακής τεχνολογίας. Με βάση την έννοια της **κοινωνικής διαμεσολάβησης του νοήματος** (Vygotsky, 1978), η Mariotti εντάσσει τη δραστηριότητα αναπαράστασης με ψηφιακά εργαλεία στο παραδοσιακό ρεπερτόριο μέσων αναπαράστασης της ανθρώπινης νόησης, όπως αυτό της γραπτής και προφορικής γλώσσας. Εκλαμβάνει έτσι τη μαθηματική δραστηριότητα με ψηφιακά εργαλεία ως κοινωνική διαμεσολάβηση του μαθηματικού νοήματος που μπορεί να επιτευχθεί εναλλακτικά με αυτά και με το γραπτό και προφορικό λόγο.

Για τα εργαλεία αυτά οι Hoyles και Noss χρησιμοποιούν τον όρο **εκφραστικά μέσα** (expressive media, 2003). Βέβαια οι συγκεκριμένοι ερευνητές του προσδίδουν μια κάπως ιδιόμορφη σημασία σε σχέση με αυτή που είπαμε. Χρησιμοποιούν τον όρο εκφραστικά μέσα για να κάνουν τη διάκριση μεταξύ των διερευνητικών λογισμικών για τα μαθηματικά και των μικρόκοσμων, προκειμένου να υπογραμμίσουν ότι στην περίπτωση των 'μικρόκοσμων' δίδεται ιδιαίτερη έμφαση στη δραστηριότητα της κατασκευής (Kafai and Resnick, 1996) και στον προγραμματισμό, δηλαδή στη χρήση τυπικού φορμαλισμού για την έκφραση μαθηματικών νοημάτων.

Ένα κεντρικό στοιχείο που αφορά στη μάθηση των μαθηματικών με τα εκφραστικά ψηφιακά μέσα είναι η διερευνητική δραστηριότητα με 'μικρόκοσμους'. Αρχικά ο Papert δανείστηκε τον όρο από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης, του έδωσε όμως ένα ιδιότυπο νόημα το οποίο εξελίχθηκε μέσα στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών. Περιέγραψε τον 'μικρόκοσμο' ως έναν αυτοτελή κόσμο, όπου οι μαθητές μπορούν να 'μάθουν να μεταφέρουν συνήθειες διερεύνησης από την προσωπική τους εμπειρία στο τυπικό χώρο της επιστημονικής δημιουργίας' (Papert, 1980, σ. 177). Ένας μικρόκοσμος είναι ένα λογισμικό μεν, αλλά επειδή επιδέχεται διερεύνησης, αναδημιουργίας και επέκτασης μπορεί να χαρακτηριστεί ευρύτερα ως 'υπολογιστικό περιβάλλον'. Είναι λοιπόν ένα υπολογιστικό

περιβάλλον, το οποίο ενσωματώνει ένα συνεκτικό σύνολο από μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, σχεδιασμένο έτσι ώστε συνοδευόμενο από ένα σύνολο κατάλληλων ασκήσεων και διδακτικής καθοδήγησης οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε διερευνητική και δημιουργική δραστηριότητα παραγωγής μαθηματικών νοημάτων.

Η η ανάγκη βέβαια διαχωρισμού των μικρόκοσμων από τα άλλα ψηφιακά εργαλεία για την ΔτΜ δεν συνεπάγεται ότι οι μικρόκοσμοι δεν συνιστούν μέσα έκφρασης νοημάτων. Για παράδειγμα, σε έρευνα του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του ΕΚΠΑ οι μαθητές χρησιμοποίησαν έναν μικρόκοσμο που από την αρχή σχεδιάστηκε ως εκφραστικό μέσο, με την έννοια που δίνει στον όρο η Mariotti, δηλαδή ως μέσο με το οποίο οι μαθητές εξέφρασαν νοήματα μέσα σ' ένα κοινωνικό περιβάλλον, καθώς ασχολούνταν με δραστηριότητες κατασκευής. Η ιδιαιτερότητα στη μελέτη αυτή είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν ένα εργαλείο που σχεδιάστηκε στο εργαστήριο έτσι ώστε οι αναπαραστάσεις που θα μπορούσαν να 'φτιάξουν' με το μικρόκοσμο αυτό να περιλαμβάνουν συνδυασμένα τόσο τον τυπικό φορμαλισμό όσο και το δυναμικό χειρισμό, όπως φαίνεται στην επιστημολογική ανάλυση του 'Χελωνόκοσμου', ενός από τα εργαλεία του αναλυτικού σας προγράμματος σπουδών (Κυνηγός 2007). Εύλογα θα αναρωτηθεί κανείς: αφού τα σύγχρονα διακείμενα των ψηφιακών εργαλείων μας επιτρέπουν να απαλλαγούμε από την ανάγκη χρήσης κειμενικών χαρακτήρων για να κάνουμε διάφορες δραστηριότητες με τον υπολογιστή, δεν θάπρεπε να είναι πρωταρχικός στόχος να παρακάμψουμε την ανάγκη οι μαθητές να μαθαίνουν τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό για να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα; Γιατί να μην αρκεί ο δυναμικός χειρισμός των αντίστοιχων εργαλείων (π.χ. του Cabri ή του Geometry Sketchpad) για να ασκηθούν στη μαθηματική σκέψη; Η άποψη ότι η εκμάθηση του τυπικού φορμαλισμού όχι μόνο δεν εμποδίζει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αλλά με τα κατάλληλα εργαλεία, δραστηριότητες και διδακτική υποστήριξη, μπορεί να την ενισχύσει, έχει σημαντικά υπέρ αυτής επιχειρήματα. Κάθε φορά που επινοείται ένας καινούργιος τρόπος αναπαράστασης εννοιών δεν σημαίνει ότι οι διαθέσιμες μέχρι τότε αναπαραστάσεις πρέπει άκριτα να εγκαταλειφθούν. Εάν ήταν έτσι, τότε θα είχαμε εγκαταλείψει τον προφορικό λόγο με την έλευση του γραπτού κ.ο.κ. Όταν καταλαγιάσει το φαινόμενο του νεωτερισμού, η καινούργια αναπαράσταση καταλαμβάνει μια θέση ανάμεσα στις προηγούμενες και παράλληλα αυτές αναπροσδιορίζονται ώστε να λειτουργούν συμπληρωματικά με τις καινούργιες. Τα εικονοστροφά διακείμενα έχουν κάνει τον προγραμματισμό να μην είναι ο μόνος ή ο πιο πρόσφατος τρόπος έκφρασης με τη χρήση

ψηφιακών εργαλείων. Δεν σημαίνει αυτό όμως ότι δεν είναι χρήσιμος για τον άνθρωπο και ειδικότερα για την ανάπτυξη της μαθηματικής εκφραστικής του ικανότητας.

Σύμφωνα με τον diSessa (2000) οι διεπιφάνειες συμβολικής γλώσσας στα υπολογιστικά εκφραστικά μέσα παρέχουν στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες εμπλοκής σε δραστηριότητες όπου ο φορμαλισμός έχει νόημα. Ο φορμαλισμός θεωρείται ευρέως ως εμπόδιο στις προσπάθειες των μαθητών να δημιουργήσουν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες, ενώ οι μαθητές δεν βρίσκουν κάποιο νόημα στη χρήση του μαθηματικού φορμαλισμού. Τον θεωρούν απλώς ως επιβεβλημένο κώδικα για τη διεξαγωγή τυπικών, συνηθισμένων δραστηριοτήτων χωρίς νόημα (meaningless routines) (Dubinsky, 2000). Αντίθετα, οι δυναμικές διεπιφάνειες που επιτρέπουν τον εικονο-κεντρικό χειρισμό δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να έχουν **πρόσβαση σε μαθηματικές ιδέες παρακάμπτοντας την τυπική αναπαράσταση** (Laborde και Laborde, 1995, Laborde et al, 2006). Άραγε αυτό σημαίνει ότι ο φορμαλισμός είναι χρήσιμος μόνο σε καταξιωμένους μαθηματικούς, οι οποίοι μπορούν, μέσω αυτού, να εκφράσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες; Μία βασική παραδοχή στη μελέτη μας είναι ότι, όπως η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει τα μέσα για να παρακαμφθεί ο φορμαλισμός, έτσι μπορεί και να ενισχύσει έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο χρήσης του από τους μαθητές, **δηλαδή η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα χρησιμοποιώντας ως μέσο τον τυπικό φορμαλισμό** (Kynigos, 2002).

Μόνο πρόσφατες έρευνες υιοθετούν σαφές κοινωνιο-δομικό πλαίσιο για τις συνεργατικές μαθησιακές διαδικασίες, δηλαδή για την κατανόηση της φύσης της μάθησης σε συνεργατικό περιβάλλον, τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Οι θεωρητικές αυτές προοπτικές έχουν σημαντικά επηρεαστεί από προσπάθειες να συνθέσουν τις Πιαζετιανές απόψεις για την ατομική μάθηση με το κοινωνιοπολιτισμικό παράδειγμα του Vygotsky, ή να τις επεκτείνουν, αξιοποιώντας επιμέρους στοιχεία τους (Light & Mevarech, 1992). Η Confrey, για παράδειγμα, προσέγγισε τη μελέτη ενός ζεύγους μαθητών που εργάζονταν στις συναρτήσεις με αναπαραστασιακά μέσα (Smith & Confrey, 1991), συνδυάζοντας ξεκάθαρα Πιαζετιανές και Βιγκοτσκιανές θεωρίες και επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στο μαθηματικό περιεχόμενο και στο υπολογιστικό εργαλείο. Εν τούτοις, τόσο ο Piaget όσο και ο Vygotsky, δεν επικεντρώνονται σε μια θεωρία για τη μάθηση μέσω της δράσης και της επικοινωνίας με συνεργάτες, ως μια πολιτισμική δραστηριότητα ενταγμένη σε συγκεκριμένο χωροχρονικό πλαίσιο. Μ' αυτή την έννοια, η απλή προσπάθεια συγκερασμού των θεωριών τους με σκοπό

την κατανόηση της μάθησης από κοινωνιο-δομική σκοπιά μπορεί να φτάσει μόνο μέχρι ενός σημείου στην κατανόηση του είδους των παραγόντων που επηρεάζουν τη δημιουργία μηνυμάτων σε κοινωνικές συνθήκες.

Προσπάθειες δημιουργίας ενός συνθετικού πλαισίου έχουν γίνει από τους Mercer και Wegerif, οι οποίοι έχουν μελετήσει την ομιλία σε συνεργασιακά περιβάλλοντα βασισμένα σε μια **‘διαλογική’ άποψη της συνεργασίας**. Την άποψη αυτή την αντιπαραθέτουν στις Πιαζετιανές και Βιγκοτσκιανές θεωρίες, τις οποίες χαρακτηρίζουν ως μονολογικές (Wegerif & Mercer, 1996), και προτείνουν τρόπους με τους οποίους η γλώσσα μπορεί να γίνει αντιληπτή και να χρησιμοποιηθεί ως κοινωνικός τρόπος σκέψης (Mercer, 1996). Ειδικότερα όσον αφορά την εκμάθηση των Μαθηματικών, οι Cobb, Yackel & Wood (1995) πραγματοποίησαν μία σειρά διδακτικών πειραμάτων, συγκλίνοντας στην ανάπτυξη ενός σαφούς συγκερασμού των αλληλεπιδραστικών και δομικών απόψεων ως βάση για την ενσωμάτωση της έννοιας των **κοινωνικο-μαθηματικών ρυθμιστικών κανόνων**, δηλαδή των συμβάσεων στις κοινές δραστηριότητες της τάξης, που έχουν συμφωνηθεί από κοινού από το δάσκαλο και τους μαθητές. Υπογραμμίζουν ότι η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών είναι κατ’ εξοχήν κοινωνική, αφού δεν αναπτύσσεται πέρα από τη συμμετοχή σε κοινότητες δράσης. Επίσης υιοθετούν δύο αναλυτικές απόψεις, εκ των οποίων η μία λαμβάνει ως σημείο αναφοράς το άτομο και η άλλη το σύνολο και προσπαθούν να τις συγκεράσουν (Cobb et al, 1997). Τέτοιες μελέτες, εντούτοις, διαφοροποιούνται από την κυρίαρχη τάση. Υπάρχει ανάγκη να περιγράψουμε συνεργατικές μαθησιακές διαδικασίες, με σκοπό να διαμορφώσουμε θεωρίες που να επικεντρώνονται περισσότερο στη μάθηση μέσα σε κοινωνικά περιβάλλοντα.

Όσον αφορά την τρίτη οπτική των κοινωνικών προτύπων, ένα πρόβλημα στην ενθάρρυνση της συνεργασίας εγείρεται από τη δυναμική της σχολικής τάξης, επειδή η συνήθως απαίτηση είναι οι μαθητές να μη μιλούν στους συμμαθητές τους και να απαντούν στις ερωτήσεις του δασκάλου γρήγορα και σωστά. Η καθιέρωση στην τάξη προτύπων (Cobb et al., 1992· Hershkowitz & Schwarz, 1997), τα οποία ενθαρρύνουν και δίνουν αξία στον κοινωνικό τρόπο σκέψης (Mercer, 1996) είναι ακόμη κάτι που δεν έχει πραγματοποιηθεί, και έχει σημειώσει θετικά αποτελέσματα μόνο σε πειραματικές καταστάσεις (Chronaki & Kynigos, 1999).

## 5. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Άλγεβρας με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών

---

Οι ψηφιακές τεχνολογίες που έχουν μέχρι τώρα αναπτυχθεί για τη διδασκαλία και τη μάθηση εννοιών της Άλγεβρας μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες. Η πρώτη αποτελείται από τα Ψηφιακά Άλγεβρικά Συστήματα (Computer Algebra Systems) ή CAS. Χαρακτηριστικός εκπρόσωπος είναι το λογισμικό FP. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τα υπόλοιπα λογισμικά, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την διδασκαλία και τη μάθηση αλγεβρικών εννοιών τόσο λογισμικά συμβολικής έκφρασης, όπως ο Χελωνόκοσμος, όσο και λογισμικά δυναμικού χειρισμού γραφικών παραστάσεων όπως το GSP, το CABRI και το Geogebra. Μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν και προσομοιωτές, όπως το Modelus ή το MoPiX ή ακόμα και λογισμικά φύλλα όπως το Excel. Από το σύνολο των λογισμικών αυτών, μόνο τα CAS είναι σχεδιασμένα κατ' αποκλειστικότητα για τη διδακτική της Άλγεβρας. Ποιά μαθησιακά ζητήματα μπορούν όμως να αντιμετωπιστούν με τα εργαλεία αυτά;

### 5.1 Οι δυσκολίες στην Άλγεβρα

Η Άλγεβρα αποτελεί μία περιοχή των μαθηματικών που παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες που σχετίζονται με την κατανόηση των εννοιών της, δυσκολίες που αφορούν τόσο τον μαθητή όσο και τον διδάσκοντα. Πού όμως οφείλονται η δυσκολίες αυτές; Ποιά είναι η φύση τους; Ποια εμπόδια καλείται να ξεπεράσει ο μαθητής και πώς η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει την διδασκαλία της;

Η Άλγεβρα, μέσα στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου και τα εγχειρίδια, προβάλλεται ως μία γενίκευση της αριθμητικής και από το σημείο αυτό εμφανίζονται και οι πρώτες δυσκολίες. Η αριθμητική αποτελεί έναν τομέα μέσα στον οποίο τα μαθηματικά αντικείμενα είναι μια τάξη μεγέθους πιο συγκεκριμένα από την Άλγεβρα. Στο χώρο της Άλγεβρας τα αντικείμενα είναι γενικευμένοι αριθμοί και οι σχέσεις είναι σχέσεις μεταξύ γενικευμένων αριθμών ή αλλιώς, ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζουν οι τιμές που μπορεί να πάρει ένας γενικευμένος αριθμός σε σχέση με κάποιον άλλο.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα ανεπτυγμένου επιπέδου αφαίρεσης. Ένα πολυώνυμο, π.χ ένα τριώνυμο, αποτελεί μία έκφραση, μία παράσταση της μορφής  $P(x) = 2x^2+3x+1$ . Η



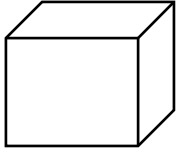
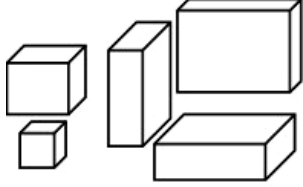
παράσταση αυτή αποτελεί ήδη μία γενίκευση αφού ορίζει μία ισότητα η οποία μπορεί να ισχύει για άπειρα ζεύγη αριθμών  $(x_0, P(x_0))$ . Το νόημα όμως του πολωνύμου δεν περιορίζεται εδώ αφού μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του συνόλου των πολωνύμων, το οποίο μπορώ να προσθέσω, να αφαιρέσω και γενικά να εμπλέξω σε αλγεβρική επεξεργασία με άλλα πολωνύμα.

Τι συμβαίνει όμως όταν στην θέση των συντελεστών του πολωνύμου τοποθετήσω παραμέτρους; Δηλαδή, ποιο είναι το νόημα της έκφρασης  $P(x) = ax^2+bx+\gamma$ ; Εδώ πλέον έχουμε μία πολλαπλότητα πολωνύμων που εκφράζεται μέσα από έναν γενικευμένο τύπο και στο σημείο αυτό εντοπίζεται η δυσκολία κατανόησης εκ μέρους των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου.

Αυτός ο τυπικός, αυστηρός και αφηρημένος μαθηματικός συμβολισμός εμφανίζεται στους μαθητές ως αυθαίρετος και πολλοί ειδικοί περί την διδακτική των μαθηματικών υπογραμμίζουν τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τα γράμματα της αλφαβήτου τα οποία χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν άλλοτε μια μεταβλητή, άλλοτε μία παράμετρο και άλλοτε έναν άγνωστο.

Εάν επιχειρούσαμε να συνοψίσουμε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στην διδασκαλία της Άλγεβρας θα έπρεπε να εστιάσουμε στο πρόβλημα της νοηματοδότησης των αλγεβρικών συμβόλων, των αλγεβρικών εκφράσεων και των μετασχηματισμών που οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν. Συγκεκριμένα το νόημα που ο μαθητής αποδίδει στις μαθηματικές οντότητες όταν επιχειρεί να λύσει ένα πρόβλημα Άλγεβρας, μπορεί να προέρχεται είτε αποκλειστικά και μόνο από τον χώρο της Άλγεβρας (π.χ. σωστή εφαρμογή των κανόνων σύνταξης) είτε από έναν άλλο χώρο (αριθμητική, γεωμετρία, πραγματικός κόσμος κ.λ.π). Το νόημα, για παράδειγμα, της ταυτότητας  $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$  πηγάζει από το γεγονός ότι η σωστή εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας και στα δύο μέλη οδηγεί στην ίδια αλγεβρική έκφραση, δηλαδή το νοημα προέρχεται από την σωστή εφαρμογή των κανόνων αλγεβρικής επεξεργασίας. Το νόημα όμως της ταυτότητας αυτής θα μπορούσε να προέρχεται από το γεγονός ότι οι αριθμητικές τιμές των δύο μελών της ταυτότητας ταυτίζονται κάθε φορά που κάνουμε αντικατάσταση των  $a, b$  με συγκεκριμένους αριθμούς. Τέλος, η ταυτότητα αυτή θα μπορούσε να αντλήσει νόημα από μία γεωμετρική παράσταση των εκφράσεων που περιέχουν τα δύο μέλη της. Συγκεκριμένα ένας κύβος πλευράς  $(a+b)$  θα μπορούσε να αναλυθεί σε έναν κύβος πλευράς  $a$ , σε έναν κύβο πλευράς  $b$ , και σε τρία ίσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με διαστάσεις  $a, b, (a+b)$ .

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι τρεις τρόποι νοηματοδότησης της ταυτότητας.

Αλγεβρική προσέγγιση	Αριθμητική προσέγγιση				Γεωμετρική προσέγγιση
	$\alpha$	$\beta$	$(\alpha+\beta)^3$	$\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$	$(\alpha+\beta)^3$
$(\alpha+\beta)^3=$	1	2	27	27	
$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=$	-2	3	1	1	
.....=	0	2	8	8	
$\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$	....	....	.....	.....	
	.....	.....	.....	.....	

Η αλγεβρική προσέγγιση αποτελεί και την αυστηρή, τυπική απόδειξη της ταυτότητας ενώ οι δύο άλλες αποτελούν διαισθητικές προσεγγίσεις από τις οποίες όμως πηγάζει πλούσιο νόημα για τον μαθητή.

Έχει θεωρηθεί ότι ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων είναι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις. Φαίνεται ότι η επίλυση προβλημάτων δεν έχει αποδώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα αφού παρατηρήθηκε το φαινόμενο οι μαθητές να περιορίζονται σε αποστήθιση κανόνων και μεθόδων αντιμετώπισης των προβλημάτων χωρίς να κατανοούν τις έννοιες που χρησιμοποιούν.

Τον εύλογο ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι πού οφείλεται αυτή η υστέρηση σε αποτελεσματικότητα και γιατί τα προβλήματα κατανόησης εκ μέρους των μαθητών παραμένουν; Μία απάντηση θα μπορούσε να αναζητηθεί στον χώρο των εργαλείων που διαθέτουν οι μαθητές, συγκεκριμένα στο γεγονός ότι τα προ-τεχνολογικά στατικά μέσα αναπαράστασης των εννοιών έχουν περιορισμένη διδακτική εμβέλεια. Η χρήση του τετραδίου και του πίνακα στην αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών απαιτεί ιδιαίτερες νοητικές και αφαιρετικές δεξιότητες καθώς τα συγκεκριμένα στατικά μέσα δεν διαθέτουν διαδραστικά χαρακτηριστικά, δηλαδή δεν αντιδρούν στις ενέργειες του μαθητή.

## 5.2 Η διδασκαλία της Άλγεβρας και η ψηφιακή τεχνολογία

Η υποστήριξη της διδασκαλίας της Άλγεβρας από τα ψηφιακά εργαλεία θα μπορούσε να αποτελέσει μία πρόταση για το ξεπέρασμα πολλών δυσκολιών που σχετίζονται με τα υψηλά επίπεδα αφαίρεσης και τα στατικά μέσα που χρησιμοποιούνται στην παραδοσιακή διδασκαλία της.

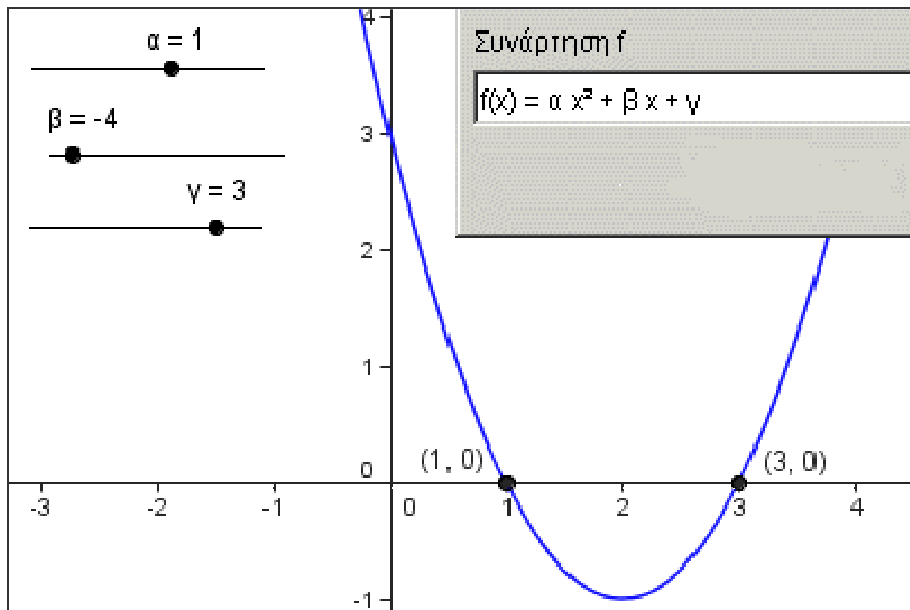
Ας δούμε όμως ποια χαρακτηριστικά των λογισμικών που υποστηρίζουν την διδασκαλία της Άλγεβρας συμβάλλουν σε μία διαφορετική προσέγγιση της διδασκαλίας της.

### Διάδραση

Τα ψηφιακά εργαλεία για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, καθώς διαθέτουν δυνατότητες επικοινωνίας με τον χρήστη, μπορούν επίσης να μετασχηματίσουν τη διδακτική διαδικασία. Η διάδραση, δηλαδή η άμεση ανταπόκριση της μηχανής, και ο δυναμικός χαρακτήρας της τεχνολογίας αλλάζουν θεμελιακά αυτά που η διδακτική μπορεί να προσφέρει στην υποστήριξη της μαθησιακής διαδικασίας.

Για παράδειγμα η δυνατότητα να αλλάζουμε δυναμικά τους συντελεστές ενός τριωνύμου και η μηχανή να μας αναφέρει άμεσα το πρόσημο του τριωνύμου ή το πλήθος των ριζών δίνει νέα διάσταση στην διδασκαλία της έννοιας. Η διάσταση αυτή ενισχύει μία σημαντική στάση των μαθητών για την μάθηση των μαθηματικών, αυτήν της διερεύνησης και του πειραματισμού.

Ο καθηγητής έχει την δυνατότητα τώρα να σχεδιάσει μία διδακτική πορεία η οποία μπορεί αφενός να υποστηρίξει το τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα και αφετέρου να το επεκτείνει σε θέματα τα οποία δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με τα στατικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα δεν είναι δυνατόν να γίνει διερεύνηση μέσα σε μία παραδοσιακή τάξη για τον τρόπο που μεταβάλλεται η γραφική παράσταση του τριωνύμου όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\beta$  ή και ο συντελεστής  $\alpha$ .



Εικόνα 1: Καθώς αλλάζουμε τις τιμές των συντελεστών η μηχανή δίνει όλες τις πληροφορίες που αφορούν στο τριώνυμο.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε και ένα άλλο τεχνικό χαρακτηριστικό των ψηφιακών μέσων, την ταχύτητα απόκρισης. Αν στο παράδειγμα της διδασκαλίας της ταυτότητας  $(a+b)^3$  θελήσουμε να ακολουθήσουμε την αριθμητική προσέγγιση τότε οι αλεπάλληλες αντικαταστάσεις και αριθμητικές πράξεις θα δημιουργήσουν αρνητική στάση των μαθητών. Αν καταφύγουμε σε ένα ψηφιακό μέσον (π.χ το FP) τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε στον μαθητή την αντίληψη ότι σε κάθε περίπτωση τα δύο μέλη της ταυτότητας δίνουν το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα μετά από θεωρητικά άπειρες δοκιμές.

Πίνακας				
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα	Πίνακας
a	b	$(a+b)^3$	$a^3+b^3+3*a*b*(a+b)$	
-2	0	-8	-8	
-1	1	0	0	
0	2	8	8	
1	3	64	64	
2	4	216	216	
3	5	512	512	
-1	2.5	3.375	3.375	

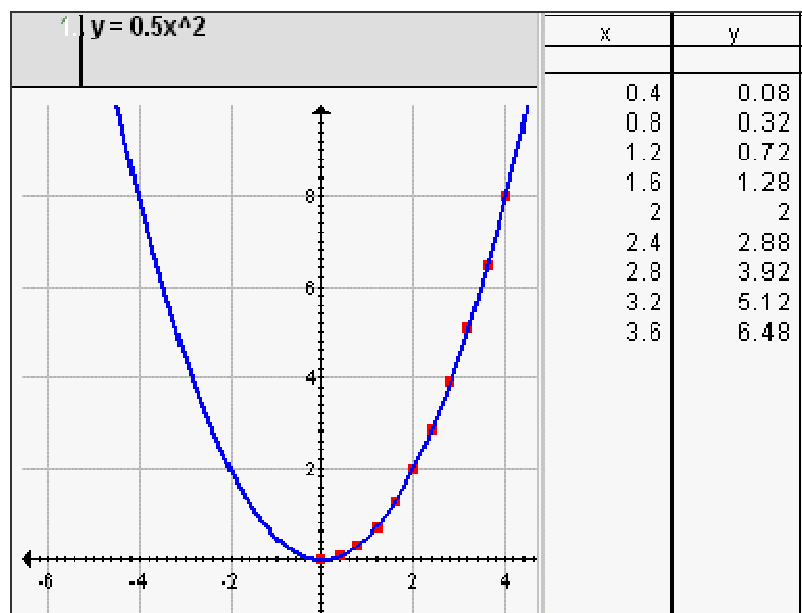
## Πολλαπλές αναπαραστάσεις

Ας έρθουμε τώρα σε ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των ψηφιακών μέσων υποστήριξης της διδασκαλίας της Άλγεβρας, την δυνατότητα πολλαπλών και δυναμικά συνδεδεμένων αναπαραστάσεων μιας αλγεβρικής έννοιας.

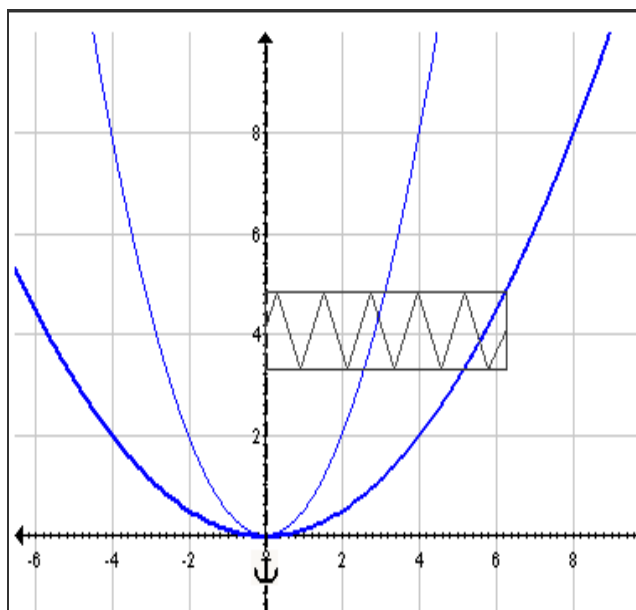
Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μίας μαθηματικής έννοιας αποτελούν μία δυνατότητα των ψηφιακών τεχνολογιών η οποία συμβάλει στον μετασχηματισμό της αντίληψής μας για την έννοια αυτή με χαρακτηριστικό παράδειγμα την συνάρτηση.

Η παρουσίαση της έννοιας της συνάρτησης στην σχολική πρακτική βασίζεται σε μία αυστηρά καθορισμένη σειρά ενεργειών: Χρήση του τύπου - κατασκευή πίνακα τιμών - αναπαράσταση σε άξονες. Τα σύγχρονα λογισμικά για την Άλγεβρα δίνουν την δυνατότητα κατάργησης της σειράς αυτής και ενοποίησης όλων των αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης.

Για παράδειγμα στο λογισμικό Function Probe (FP) ο πίνακας επικοινωνεί με το γράφημα και αντιστρόφως, μπορούμε να αποκόψουμε σημεία από το γράφημα και να τα στείλουμε στον πίνακα. Ο τύπος της συνάρτησης όταν αλλάζει μεταφέρει τις αλλαγές στην γραφική παράσταση και αντιστρόφως, όταν επεμβαίνουμε στην γραφική παράσταση προβάλλονται οι μεταβολές που υφίσταται ο τύπος της συνάρτησης.



Εικόνα 2: Πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης



Εικόνα 3: Δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων της αρχικής και της νέας συνάρτησης  $y=0.5(0.5x^2)$

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά ενός αλγεβρικού λογισμικού δίνουν την δυνατότητα διερεύνησης και πειραματισμού με τις αλγεβρικές έννοιες και μελέτης του τρόπου με τον οποίο συνδέονται.

### Ανάδειξη των πολλαπλών πτυχών μιας έννοιας

Μία μαθηματική έννοια συχνά διαθέτει ένα πλήθος από πτυχές οι οποίες περιγράφονται και αναλύονται σε διαφορετικά σημεία του ωρολογίου προγράμματος ίσως δε και σε διαφορετικά εγχειρίδια. Ένα σύγχρονο αλγεβρικό λογισμικό επιτρέπει την ανάδειξη των πτυχών αυτών μέσα από διαφορετικές λειτουργικότητες που διαθέτει. Το σημαντικό λοιπόν κατά την χρήση του λογισμικού είναι η αναζήτηση τρόπων διδακτικής αξιοποίησης των λειτουργιών του λογισμικού και η εμπλοκή των μαθητών με τρόπο που αυτές θα τους επιτρέψουν την προσέγγιση και σύνδεση των πτυχών της μαθηματικής έννοιας.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η έννοια της παραγώγου. Αν επιχειρήσουμε να απαριθμήσουμε τις πολλαπλές πτυχές της έννοιας τότε θα έπρεπε να αναφέρουμε ότι η παράγωγος είναι:

Όριο ενός λόγου.

Κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης.

Η εικόνα της συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο, δηλαδή η μεγέθυνσή της σε μία περιοχή του σημείου αυτού.

Τιμή μιας συνάρτησης (της παραγώγου) σε ένα σημείο  $x_0$ .

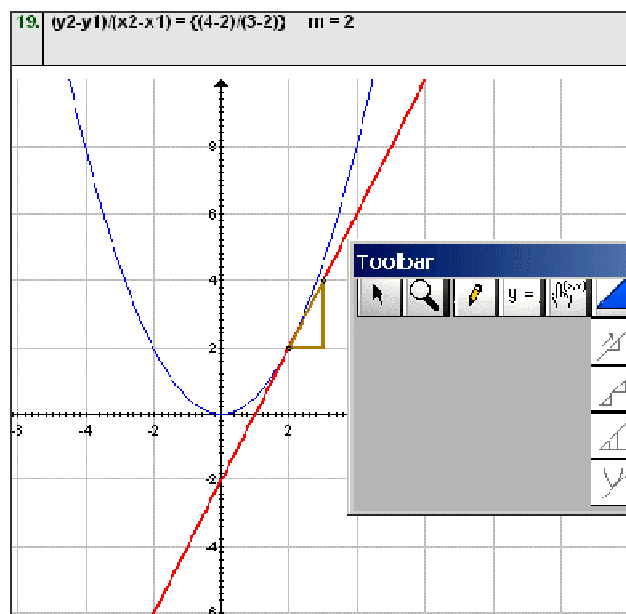
Ας δούμε τώρα με ποιον τρόπο, με ποιες λειτουργικότητες ενός αλγεβρικού λογισμικού, όπως είναι το FP, αναδεικνύονται οι πτυχές αυτές.

Όριο ενός λόγου

Ο πίνακας τιμών του λογισμικού και η δυνατότητα να εκτελούμε πράξεις μεταξύ των τιμών δύο στηλών του επιτρέπει τον υπολογισμό του πηλίκου  $(\psi_2 - \psi_1)/(\chi_2 - \chi_1)$  για πολύ κοντινές τιμές των  $\chi_1$  και  $\chi_2$ .

Κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης.

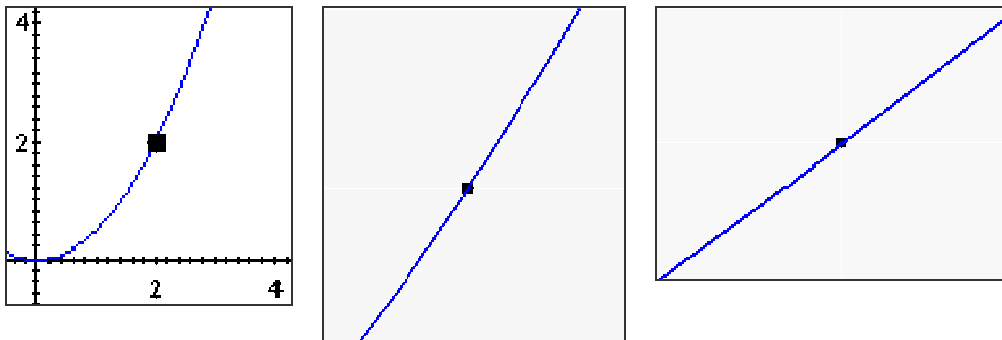
Το λογισμικό διαθέτει λειτουργία κατασκευής εφαπτομένης σε ένα σημείο και στην συνέχεια με άλλη λειτουργικότητα μετρά την κλίση της.



Εικόνα 4: Η εφαπτομένη και η κλίση της

Η εικόνα της συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο, δηλαδή η μεγέθυνσή της σε μία περιοχή του σημείου αυτού.

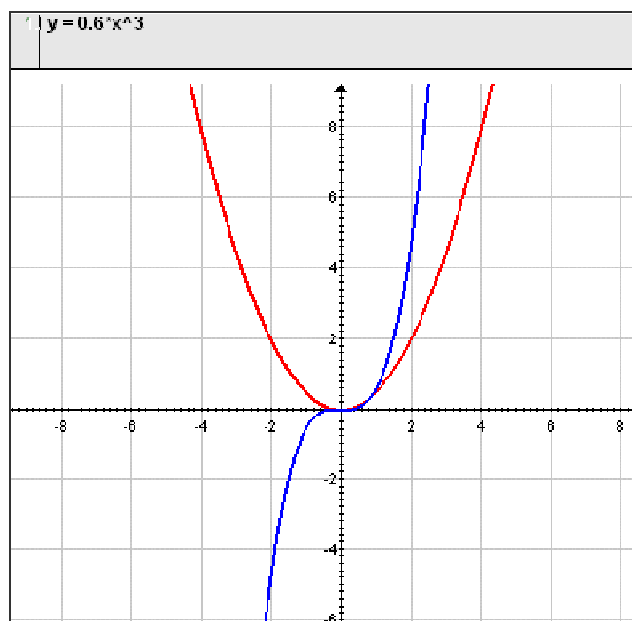
Το λογισμικό διαθέτει την λειτουργικότητα της μεγέθυνσης (zooming) οπότε ο μαθητής έχει την δυνατότητα να διερευνήσει την μορφή της γραφικής παράστασης κοντά σε ένα σημείο της.



Εικόνα 5:  $0 \leq \chi \leq 4$  και  $0 \leq \psi \leq 4$        $1,5 \leq \chi \leq 2,5$  και  $1,5 \leq \psi \leq 2,5$        $1,9 \leq \chi \leq 2,1$  και  $1,8 \leq \psi \leq 2,2$

Τιμή μιας συνάρτησης (της παραγώγου) σε ένα σημείο  $x_0$ .

Το λογισμικό έχει την δυνατότητα κατασκευής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αλλά και της παραγώγου της συνάρτησης στο ίδιο σύστημα αξόνων οπότε δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να μελετά τις τιμές της συνάρτησης σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες τιμές της παραγώγου.



Εικόνα 6: Γραφική παράσταση της  $f$  και της  $f'$

Προφανώς οι δυνατότητες που παρέχει στην διδασκαλία της Άλγεβρας ένα κατάλληλο λογισμικό δεν εξαντλούνται στις παραπάνω περιπτώσεις. Αυτό που θα πρέπει να υπογραμμιστεί για μία επιπλέον φορά είναι ότι το σημαντικό κατά την χρήση της ψηφιακής



τεχνολογίας στην διδασκαλία είναι οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες με το λογισμικό και όχι μόνο οι λειτουργικότητες του λογισμικού.

### 5.3 Σύνοψη

Ανακεφαλαιώνοντας την μικρή αυτή αναφορά στην διδασκαλία της Άλγεβρας με χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι:

Οι διδακτικές δυσκολίες στην κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών και προτάσεων εκτός των άλλων εντοπίζονται:

α) Στο υψηλό επίπεδο αφαίρεσης των συμβόλων

β) Στην έλλειψη σύνδεσης των συμβόλων με άλλες έννοιες ώστε να αποκτήσουν νόημα.

γ) Τα στατικά μέσα που χρησιμοποιούνται κατά την διδασκαλία της άλγεβρας.

Οι δυνατότητες των ψηφιακών μέσων υποστηρίζουν την διδασκαλία της Άλγεβρας μέσα από τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

α) Είναι διαδραστικά, δηλαδή αντιδρούν στις ενέργειες του χρήστη

β) Δίνουν την δυνατότητα πολλαπλών συνδεδεμένων αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας

γ) Δίνουν την δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων της έννοιας.

δ) Δίνουν την δυνατότητα διερεύνησης και πειραματισμού με τις αλγεβρικές έννοιες.

ε) Επιτρέπουν την ανάδειξη πολλαπλών πτυχών της ίδιας μαθηματικής έννοιας μέσα από τις διαφορετικές λειτουργίες που διαθέτουν.

## **6. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Γεωμετρίας με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών**

---

Οι ψηφιακές τεχνολογίες που μέχρι τώρα έχουν αναπτυχθεί για την διδασκαλία και τη μάθηση της Γεωμετρίας μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες. Στην πρώτη ανήκουν τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Cabri II, το Sketchpad και το Geogebra και στη δεύτερη τα λογισμικά της συμβολικής έκφρασης, όπως ο Χελωνόκοσμος.

Πριν αναλύσουμε τα βασικά στοιχεία της διδακτικής της Γεωμετρίας με τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών παρουσιάζουμε μερικές βασικές πτυχές των λογισμικών αυτών οι οποίες σηματοδοτούν κατά κάποιο τρόπο και την κατεύθυνση της διδακτικής που αναπτύσσεται σ' αυτά.

### **6.1 Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας.**

#### **6.1.1 Τι είναι η δυναμική γεωμετρία.**

Ο όρος δυναμική γεωμετρία, αρχικά επινοήθηκε από τους Jackiw και Rasmussen, για να χαρακτηρίσει το βασικό χαρακτηριστικό που διακρίνει λογισμικά όπως το Geometer Sketchpad και το Cabri II που είναι: ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων που συχνά αποκαλείται «σύρσιμο».

Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στους χρήστες, αφού κάνουν μια κατασκευή, να κινήσουν ορισμένα στοιχεία του σχήματος ελεύθερα για να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία του σχήματος πώς αποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Καθώς αυτά τα στοιχεία μεταβάλλονται το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών. Μερικά από τα πιο γνωστά λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (DGS) που έχουν αναπτυχθεί είναι το Geometer Sketchpad (Jackiw, 1991,2006), το Cabri II (Baulac, Bellemain, & J. M. Laborde, 1992 ..2006) και το Geogebra ( 2001-2008).

### **6.1.2 Το περιβάλλον των λογισμικών της δυναμικής γεωμετρίας.**

Το περιβάλλον εργασίας στα λογισμικά, GSP, Cabri II και Geogebra, προσομοιώνει κατά κάποιο τρόπο την αξιωματική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και από αυτή την άποψη μπορούν να είναι κατάλληλα εργαλεία για τη διδασκαλία της.

Συγκεκριμένα, τα λογισμικά αυτά παρέχουν στον χρήστη ορισμένα αρχικά αντικείμενα, (π.χ. σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθ. τμήμα, κύκλο τόξο, πολύγωνο) για να σχεδιάζει τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα, μερικά βασικά γεωμετρικά εργαλεία (π.χ. σχεδίαση κάθετης/παράλληλης από σημείο σε ευθεία, σχεδίαση διχοτόμου γωνίας, σχεδίαση μεσοκαθέτου ευθ. τμήματος) με τα οποία μπορεί να σχεδιάζει σύνθετα σχήματα και εργαλεία μέτρησης (π.χ. μέτρηση απόστασης, μέτρηση εμβαδού, μέτρηση κλίσης ευθείας) με τα οποία μπορεί να μετρά μέρη τους σχήματος και να παρατηρεί τις μεταβολές τους κατά το σύρσιμό του. Παρέχει ακόμα εργαλεία μετασχηματισμών (π.χ. συμμετρίες, περιστροφή, ανάκλαση) για διάφορους μετασχηματισμούς σχημάτων καθώς και εργαλεία εμφάνισης των γεωμετρικών αντικειμένων στην επιφάνεια εργασίας (π.χ. επιλογή χρώματος, πάχους γραμμών, απόκρυψης αντικειμένων) με τα οποία ο χρήστης διευκολύνεται στο να εστιάζει σε ορισμένες πτυχές του σχήματος που έχει κατασκευάσει.

### **6.1.3 Οι λειτουργικότητες των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων και εργαλείων.**

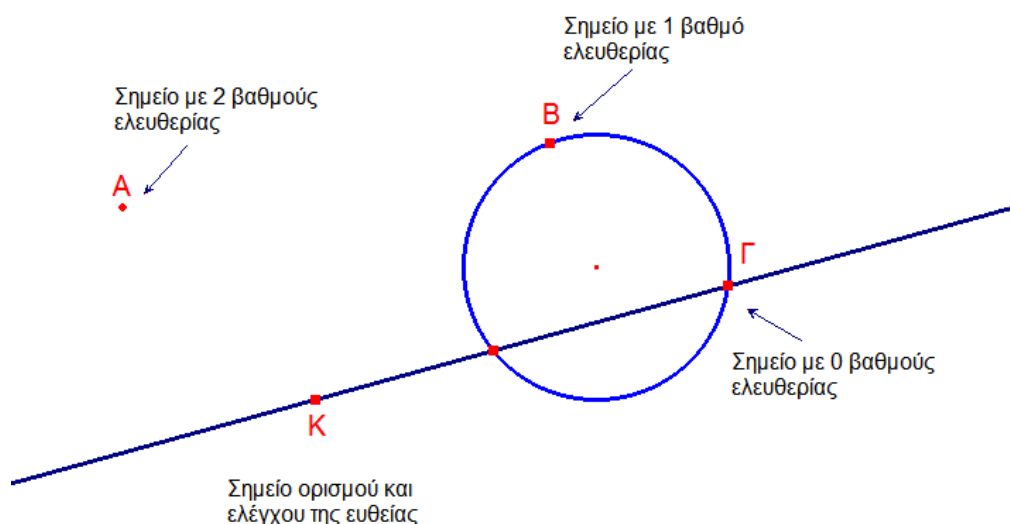
Με τον όρο «λειτουργικότητα» ενός αντικειμένου ή ενός εργαλείου εννοούμε τις δυνατότητες και τον τρόπο χρησιμοποίησής του από στον χρήστη (εγγενής λειτουργικότητες) και την συμπεριφορά του κατά τους χειρισμούς στην επιφάνεια εργασίας (προσαρμοσμένες λειτουργικότητες).

Από αυτή την άποψη οι εγγενείς λειτουργικότητες των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων, όπως η ευθεία, είναι εκ κατασκευής συμβατές με τις απαιτήσεις της αξιωματικής οργάνωσης της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Για παράδειγμα, η σχεδίαση μιας ευθείας απαιτεί τον προσδιορισμό είτε δυο σημείων είτε ενός σημείου και της κλίσης (κατεύθυνσης) αυτής, τα οποία ορίζουν την θέση της στο επίπεδο. Αυτό έχει σαν συνέπεια οι χειρισμοί της ευθείας για να μεταβληθεί η κατεύθυνσή της να γίνονται από τα σημεία ορισμού της ενώ μπορεί να κινηθεί παράλληλα με τον εαυτόν της αν συρθεί η ίδια και όχι τα σημεία ορισμού της.

Οι προσαρμοσμένες λειτουργικότητες προκύπτουν από τις δεσμεύσεις των αντικειμένων κατά την κατασκευή του σχήματος. Για παράδειγμα, όταν ένα σημείο σχεδιαστεί ώστε να

είναι σημείο ενός κύκλου, οι λειτουργικότητές τους προσαρμόζονται στον κύκλο με την έννοια ότι οι εγγενείς του λειτουργικότητες περιορίζονται ενώ το ίδιο ακολουθεί τις μεταβολές του κύκλου. Αντίστοιχα οι λειτουργικότητες ενός ευθυγράμμου τμήματος που θα σχεδιαστεί να έχει τα άκρα του σε ένα κύκλο, προσαρμόζονται ώστε να μπορεί να μεταβάλλεται μόνο ως χορδή του κύκλου.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η περιγραφή της διάκρισης των λειτουργικότητων των αντικειμένων της δυναμικής γεωμετρίας, καθιερώθηκε ο όρος βαθμός ελευθερίας των αντικειμένων. Και επειδή τα περισσότερα, αν όχι όλα, αντικείμενα κατασκευάζονται με την βοήθεια των σημείων, η λειτουργικότητα «βαθμός ελευθερίας» αφορά κυρίως αυτά. Έτσι, αν ένα σημείο μπορεί να κινείται χωρίς καμία δέσμευση στην επιφάνεια εργασίας λέμε ότι έχει δυο (2) βαθμούς ελευθερίας. Αν ένα σημείο έχει κατασκευαστεί να ανήκει σε ένα άλλο αντικείμενο (π.χ. σε ένα κύκλο) λέμε ότι έχει ένα (1) βαθμό ελευθερίας. Τέλος αν ένα σημείο έχει κατασκευαστεί ως τομή δυο γεωμετρικών αντικειμένων λέμε ότι έχει μηδέν (0) βαθμούς ελευθερίας. Στα λογισμικά GSP, Cabri II και Geogebra οι τρεις αυτές λειτουργικότητες επιτυγχάνονται με τις εντολές «Σημείο», «Σημείο σε αντικείμενο» και «Σημείο τομής». Συνεπώς και τα αντικείμενα που προκύπτουν από τα σημεία έχουν αντίστοιχα 2 ή 1 ή 0 βαθμούς ελευθερίας. Ακόμα, τα αντικείμενα με 2 βαθμούς ελευθερίας έχουν τις βασικές λειτουργικότητες ενώ αυτά που έχουν 1 ή 0 βαθμούς ελευθερίας έχουν προσαρμοσμένες λειτουργικότητες.



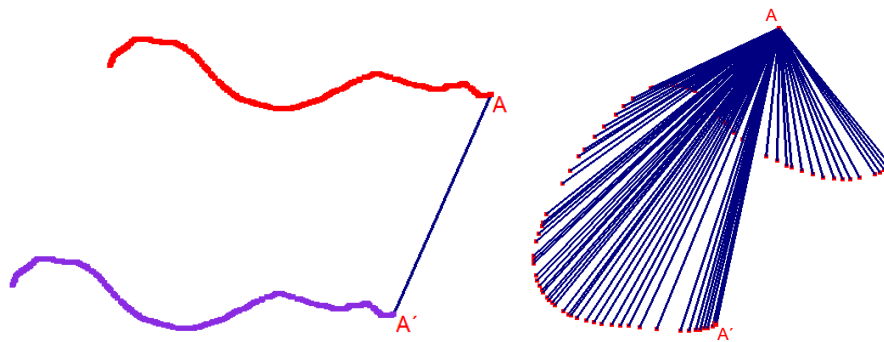
Εικόνα 7: Σημεία με διάφορες λειτουργικότητες.

### 6.1.4 Ο δυναμικός μετασχηματισμός των κατασκευών

Το κύριο χαρακτηριστικό των λογισμικών της δυναμικής γεωμετρίας είναι το γεγονός ότι επιτρέπουν στον χρήστη να μετασχηματίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα που σχεδιάζει συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο.

#### 1. Οι μετασχηματισμοί των κατασκευών

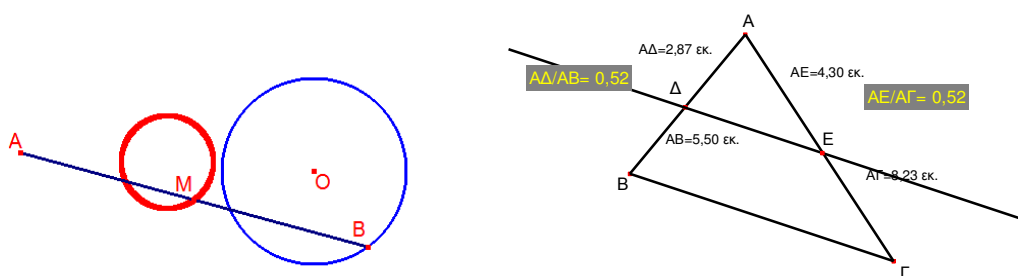
Οι λειτουργικότητες ενός γεωμετρικού αντικειμένου  $A$  με βαθμό ελευθερίας 0 ή 1 επιτρέπουν στον χρήστη να το μετακινεί ελεύθερα στο αναπαριστάμενο από την επιφάνεια εργασίας επίπεδο συμπαρασύροντας και όσα άλλα αντικείμενα εξαρτώνται από αυτό, μεταβάλλοντάς και τη δική τους θέση. Αυτή η διαδικασία συχνά αισθητοποιείται ως μια απεικόνιση μεταξύ ενός αρχικού (ελεύθερου) αντικειμένου και ενός εξαρτώμενου από αυτό, η οποία στη γλώσσα της γεωμετρίας περιγράφεται ως μετασχηματισμός του αρχικού στο εξαρτώμενο αντικείμενο. Για παράδειγμα, στην εικόνα 2α το σημείο  $A$  είναι ένα αρχικό σημείο ενώ το  $A'$  είναι εξαρτώμενο από αυτό. Έτσι η αλλαγή της θέσης του  $A$  προκαλεί αλλαγή στη θέση του  $A'$ . Αυτή η διαδικασία εκλαμβάνεται από τον χρήστη ως ένας μετασχηματισμός του  $A$  στο  $A'$ .



Εικόνα 8: (α) Το ίχνος των διαδοχικών θέσεων του σημείου  $A'$  αισθητοποιεί τις εικόνες του σημείου  $A$  σε σχέση με την απεικόνιση που προκαλεί σ' αυτό το σταθερό ευθ. τμήμα  $AA'$ . (β) Το ίχνος των διαδοχικών θέσεων του σημείου  $A'$  αισθητοποιεί τις εικόνες του σταθερού σημείου  $A$  σε σχέση τις απεικονίσεις που δημιουργεί η περιστροφή του «ελαστικού» ευθύγραμμου τμήματος γύρω από αυτό. Και στις δυο περιπτώσεις οι διαδοχικές θέσεις του ευθ. τμήματος αναπαριστούν τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς του σε σχέση με τον χρόνο.

## 2. Οι κανονικότητες και τα αναλλοίωτα στις μεταβολές των κατασκευών

Όπως αναφέρθηκε ήδη το σύρσιμο ενός μέρους ενός σχήματος συμπαρασύρει και τα υπόλοιπα μέρη του, διατηρώντας ωστόσο τις δεσμεύσεις με τις οποίες κατασκευάστηκαν. Στο σχήμα 3, για παράδειγμα, το σημείο A είναι σταθερό ενώ το σημείο B κινείται στον κύκλο O. Το μέσο M του ευθ. τμήματος AB ακολουθεί τις μεταβολές του B ενώ το ίχνος των διαδοχικών του θέσεων δηλώνει την δομή της εξαρτημένης κίνησής του. Αυτή η δομή είναι πηγή διατύπωσης εικασιών για την κίνηση του σημείου M και άρα για το σχήμα που γράφει (δηλαδή για τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M) (εικόνα 9α).



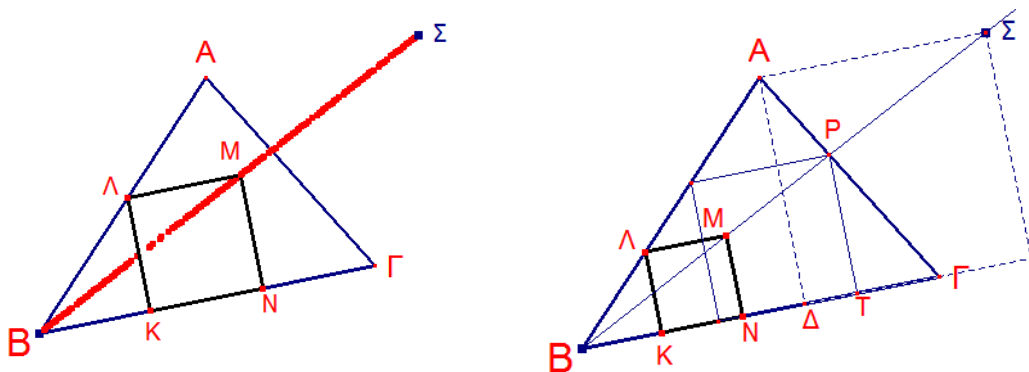
Εικόνα 9: (α) Οι οπτικές πληροφορίες του ίχνους του σημείου M και η δομή τους δημιουργούν στον χρήστη την αίσθηση της ύπαρξης μιας σταθερής σχέσης μετασχηματισμού του B στο M. (β) Οι ίσοι λόγοι των μετρήσεων των πλευρών του τριγώνου και των τμημάτων που ορίζει σε αυτές η παράλληλη δημιουργούν στον χρήστη την αίσθηση της ύπαρξης μιας σταθερής σχέσης μεταξύ των μεγεθών των δυο τριγώνων κατά τον μετασχηματισμό του ενός στο άλλο.

Σε μια άλλη πηγή πληροφοριών για ανάπτυξη εικασιών και διατύπωση υποθέσεων συχνά προέρχεται από τις μετρήσεις μεταξύ των μεγεθών ενός σχήματος κατά τον μετασχηματισμό του. Για παράδειγμα, στην εικόνα 9β η ευθεία ΔΕ έχει σχεδιαστεί ώστε να είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Έτσι σε κάθε μετασχηματισμό του τριγώνου ή της ευθείας ΔΕ η παραλληλία διατηρείται. Παρατηρώντας ο χρήστης τους λόγους των τμημάτων  $AD/AB$  και  $AE/AG$  μπορεί να διαπιστώσει ότι παραμένουν ίσοι σε κάθε μετασχηματισμό του σχήματος. Αυτή η κανονικότητα είναι η κρίσιμη πληροφορία για την κατασκευή και διατύπωση εικασιών και υποθέσεων που αφορούν τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζει στις πλευρές του τριγώνου η παράλληλη στην βάση.

## 3. Οι αποδείξεις των συμπερασμάτων στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας

Ένα από τα ερωτήματα που συχνά αναδύονται σε όσους εκπαιδευτικούς εργάζονται στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας αναφέρεται στην σχέση που έχουν οι εικασίες και οι υποθέσεις που αναδύονται στο περιβάλλον αυτό με τα θεωρήματα και την θεωρητική λογική της Ευκλείδειας γεωμετρίας (αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις).

Στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, μόλις μια γεωμετρική κατασκευή «περάσει» τη δοκιμή του συρσίματος (δημιουργία εικασιών και υποθέσεων), δημιουργείται η ανάγκη να αιτιολογηθεί γιατί η συγκεκριμένη κατασκευή «δουλεύει». Αυτή η ανάγκη ενισχύεται ακόμα περισσότερο κατά τη διάρκεια της συλλογικής συζήτησης προκειμένου να εξηγηθεί γιατί και πώς λειτουργεί. Μια περαιτέρω θεωρητική επικύρωση της κατασκευής αφορά τη διαδικασία της κατασκευής παρά το σχήμα που κατασκευάστηκε. Κάθε βήμα της διαδικασίας κατασκευής αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική ιδιότητα, και ολόκληρο το σύνολο των ιδιοτήτων που δίνονται από τη διαδικασία αποτελεί μια παρουσίαση της απόδειξης της ακριβούς κατασκευής (του θεωρήματος). Δηλαδή, υπάρχει μια σταδιακή μετατόπιση της εστίασης από την περιγραφή των αποτελεσμάτων του συρσίματος στη περιγραφή της διαδικασίας της κατασκευής και μέσω αυτής η μετατόπιση κατευθύνεται στη θεωρητική γεωμετρία. Για παράδειγμα, η εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του συρσίματος και της ευθείας που ορίζουν οι διαδοχικές θέσεις του σημείου M. Αρχικά ο χρήστης μπορεί να κατασκευάσει ένα τετράγωνο KLMN με πλευρά την ΚΛ ώστε το Κ να κινείται ελεύθερα στην ΒΓ και το Λ να ανήκει στην πλευρά ΑΒ. Σέρνοντας το σημείο Κ στη ΒΓ μπορεί να παρατηρήσει ότι οι διαδοχικές θέσεις του σημείου Μ ανήκουν σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από το Β και το σημείο Σ που ορίζεται όταν η ΚΛ γίνει ίση με το ύψος του τριγώνου. Έτσι, για την κατασκευή του τετραγώνου δεν έχει παρά να κατασκευάσει το σημείο Σ, να ορίσει την ευθεία ΒΣ και στη συνέχεια την τομή της Ρ με την ΑΓ. Το τετράγωνο με πλευρά την ΡΤ είναι το ζητούμενο.



Εικόνα 10: Η διαδικασία της εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο υποδηλώνεται εύγλωττα από το ίχνος της κορυφής M, όταν το σημείο K κινείται στη ΒΓ. Τα άκρα του ίχνους, το σημείο B και το ακραίο σημείο Σ που ορίζεται όταν η πλευρά ΚΛ γίνει ίση με το ύψος του τριγώνου, ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ το οποίο τέμνει την πλευρά ΑΓ στο ζητούμενο σημείο

Η διαδικασία κατασκευής του τετραγώνου ΚΛΜΝ και εν συνεχεία του ζητούμενου τετραγώνου δηλώνουν την ορθότητα της κατασκευής με αποτέλεσμα η θεωρητική απόδειξη να περιορίζεται μόνο στην ύπαρξη της ευθείας ΒΣ. Αλλά και στην περίπτωση αυτή οι οπτικές πληροφορίες του τελικού σχήματος δηλώνουν την ομοιότητά των τριγώνων ΒΚΛ και ΒΑΔ εκ των οποίων οι προκύπτει η ισότητα των λόγων  $ΚΛ/ΒΛ=ΑΔ/ΑΒ$  και  $ΒΚ/ΚΛ=ΒΔ/ΑΔ$ . Αυτό σημαίνει ότι οι λόγοι  $ΚΛ/ΒΛ$  και  $ΒΚ/ΚΛ$  είναι σταθεροί σε κάθε μετακίνηση του σημείου M. Αυτό έχει ως συνέπεια το σημείο M να ανήκει στην ευθεία ΒΣ μέσω της οποίας ορίζεται και το ζητούμενο σημείο P.

## 6.2 Τα λογισμικά της συμβολικής έκφρασης

Η δεύτερη ομάδα λογισμικών που χρησιμοποιούνται στην διδασκαλία και στη μάθηση της Γεωμετρίας είναι τα λογισμικά της συμβολικής έκφρασης, που κατά κύριο λόγο βασίζονται στην γλώσσα προγραμματισμού «Logo» και στην μαθηματική οντότητα που αποκαλέστηκε από τον S. Papert «χελώνα». Στο όλο σύστημα δόθηκε η ονομασία 'Γεωμετρία της Χελώνας'. Το κύριο λογισμικό που θα μας απασχολήσει εδώ είναι ο «Χελωνόκοσμος» και δευτερευόντως το «MaLT», μια έκδοση του πρώτου σε τρεις διαστάσεις.

### 6.2.1 Τι είναι η 'Γεωμετρία της Χελώνας'

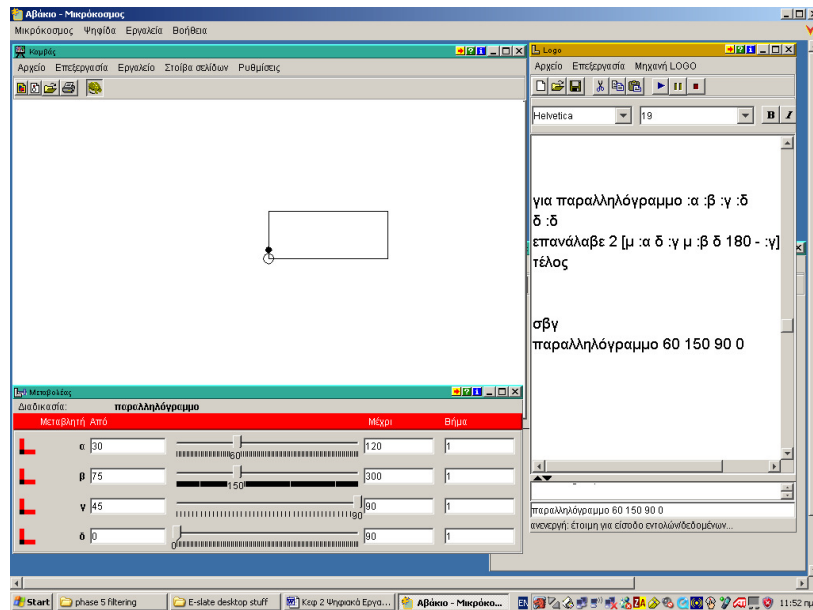
Είναι ένα σύστημα όπου, μέσω μια γλώσσας προγραμματισμού ειδικά σχεδιασμένης ώστε η σύνταξη η δομή και οι κανόνες της να προσεγγίζουν το μαθηματικό φρομαλισμό, ο μαθητής πλοηγεί μια οντότητα με θέση και διεύθυνση (τη 'χελώνα') στο επίπεδο (ή και στο χώρο με το MaLT). Σε κάθε αλλαγή θέσης η χελώνα αφήνει γραμμικό ίχνος μεταξύ του σημείου εκκίνησης και άφιξης (εκτός κι αν ο μαθητής δώσει εντολή για το αντίθετο). Έτσι, η πλοήγηση της χελώνας μπορεί να δημιουργήσει γεωμετρικά σχήματα. Ο μαθητής σκέφτεται μαθηματικές έννοιες και τις αναπαριστά σε πολλά επίπεδα. Σκέφτεται τις ιδιότητες των σχημάτων που θέλει να κατασκευάσει και τον τρόπο με τον οποίο θα ορίσει παραμετρικές διαδικασίες (ή προγράμματα) κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων όπου οι παράμετροι θα έχουν άμεση σχέση με τις ιδιότητες των σχημάτων αυτών. Έτσι συνδυάζει έννοιες



γεωμετρικών ιδιοτήτων με αλγεβρικές όπως η μεταβλητή και οι συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών. Αφού εκτελέσει μια παραμετρική διαδικασία με συγκεκριμένες τιμές, μπορεί να ενεργοποιήσει το μονοδιάστατο ή τον δι-διάστατο ‘μεταβολέα’, εργαλεία με τα οποία δίνει συνεχή κίνηση στα σχήματα τα οποία αμετασχηματίζονται καθώς αλλάζουν οι τιμές των παραμέτρων. Μπορεί π.χ. να κατασκευάσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μια παράμετρο για τις τρεις του γωνίες και στη συνέχεια να σύρει το δρομέα του μεταβολέα ώστε να παρατηρήσει ένα δυναμικά μεταλλασσόμενο σχήμα που διατηρεί όμως τη γωνιακή ιδιότητα του ισοπλεύρου. Σκέφτεται έτσι για την ισότητα των γωνιών ταυτόχρονα ως γεωμετρική ιδιότητα και ως αλγεβρική ισότητα μεταξύ τριών μεταβλητών. Μπορεί εξίσου να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο με παραμέτρους που διασφαλίζουν τις ιδιότητές του, δηλαδή το μέτρο της μιας γωνίας (μιας και η κάθε μια από τις υπόλοιπες είναι συνάρτησή της) και τα μήκη των δύο πλευρών. Στην εικόνα 11 φαίνεται ο ορισμός και η εκτέλεση της διαδικασίας ‘παραλληλόγραμμο’ με τιμές που κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο με μήκη πλευρών 60 και 150 ‘βήματα χελώνας’ (Pixel δηλαδή). Στη διαδικασία της εικόνας 11 υπάρχει και μια τέταρτη παράμετρος: η χελώνα στρίβει πριν αρχίσει να κατασκευάζει το σχήμα. Η διαδικασία έχει βέβαια εκτελεστεί με τιμή της αρχικής στροφής μηδέν. Όμως, κύληση του αντίστοιχου δρομέα του μεταβολέα μπορεί να προκαλέσει στριφογύρισμα όλου του παραλληλογράμμου!

Όσο αφορά στη γλώσσα προγραμματισμού Logo, αυτή είναι μια πλήρης συναρτησιακή, δομημένη γλώσσα προγραμματισμού με δομές δεδομένων τις λίστες. Η Logo ιστορικά είναι ένα παράγωγο της LiSP η οποία παραδοσιακά ήταν η βασική γλώσσα για την ανάπτυξη προγραμμάτων που σχετίζονταν με την τεχνητή νοημοσύνη. Οι αλλαγές που έκανε ο Papert που την επινόησε εδώ και πολλά χρόνια στο Media Lab του MIT έδωσαν ένα συντακτικό της γλώσσας που προσεγγίζει διαισθητικά τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό. Άλλαξε δηλαδή τις ατέρμονες παρενθέσεις της Lisp, έδωσε τη δυνατότητα ορισμού και επεξεργασίας διαδικασιών (προγραμμάτων), έδωσε τον ορισμό της μεταβλητής – άνω κάτω τελεία – κ.α.

Η συνύπαρξη της γλώσσας προγραμματισμού «Logo» και της οντότητας «Χελώνα» στο ίδιο περιβάλλον συνέδεσε στενά τον προγραμματισμό με την γεωμετρία καθώς οι διαδικασίες που ορίζονται στη Logo, όταν εκτελούνται έχουν ως γραφικό αποτέλεσμα από την κίνηση της χελώνας ένα γεωμετρικό σχήμα.



Εικόνα 11: Η διαδικασία παραλληλόγραμμο στη Logo έχει ως γραφικό αποτέλεσμα από την εκτέλεσης των εντολών από την «χελώνα» ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Στη Γεωμετρία της Χελώνας, η οντότητα «Χελώνα» έχει ένα ρόλο ανάλογο με αυτόν του μοναδιαίου διανύσματος με την έννοια ότι προσδιορίζεται από τη θέση της στην επιφάνεια εργασίας και τη διεύθυνσή της. Η κατάσταση της χελώνας (δηλαδή το διατεταγμένο ζεύγος της θέσης και της διεύθυνσής της) ορίζεται σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη κατάσταση. Ο ορισμός αυτός καθιστά τη Γεωμετρία της Χελώνας ουσιαστικά μια διαφορετική γεωμετρία. Ο μαθητής, δουλεύοντας με το Χελωνόκοσμο κάνει ασυναίσθητα συνεχώς διασυνδέσεις μεταξύ εννοιών της διαφορετικής γεωμετρίας και της Ευκλείδειας επιπεδομετρίας, μιας και ορίζει αλληλουχίες αλλαγής της κατάστασης της χελώνας για να δημιουργήσει σχήματα στο επίπεδο.

Στο περιβάλλον της «Logo» η σύνταξη προγραμμάτων (διαδικασιών) βασίζεται σε αρχέτυπες (βασικές) εντολές που συντάσσονται με ορισμένο τρόπο καθώς και σε νέες εντολές (διαδικασίες) που ορίζει ο χρήστης. Οι εντολές αλλαγής θέσης και διεύθυνσης της χελώνας («μπροστά \_», «πίσω \_», «δεξιά \_», «αριστερά\_»). Υπάρχουν όμως και Κερτεσιανές εντολές προσδιορισμού θέσης μέσω των αντίστοιχων συντεταγμένων (π.χ. «θέσεθέση [\_,\_]»). Όταν χρησιμοποιούνται αυτές βέβαια το όλο σύστημα μετατρέπεται σε Καρτεσιανή γεωμετρία με εύκολη προέκταση στην ανάλυση. Μερικές ακόμα εντολές όπως η εντολή «επανάλαβε \_(μια η περισσότερες εντολές)», συγκροτούν τις βασικές (primitives) εντολές της γλώσσας προγραμματισμού Logo.

Μια ακόμα δυνατότητα της γλώσσας προγραμματισμού «Logo» είναι επιλογή μιας μεταβλητής αντί ενός αριθμού ως όρισμα σε μια εντολή. Στην εικόνα 11, στη εντολή δ (δεξιά) αντί να δοθεί ως όρισμα ένας αριθμός (π.χ. δ 90) δόθηκε μια μεταβλητή (δ :δ) έτσι ώστε να μπορεί ο χρήστης μέσω του μεταβολέα να εισάγει όποια τιμή θέλει στη θέση της μεταβλητής και να παρατηρεί το γραφικό αποτέλεσμα. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να χειρίζεται (να μετασχηματίζει) δυναμικά το γραφικό αποτέλεσμα.

### 6.2.2 Οι εγγενείς ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ της γεωμετρίας της Χελώνας και της καρτεσιανής γεωμετρίας στηρίζεται στην έννοια των εγγενών ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Μια εγγενής ιδιότητα είναι μια ιδιότητα που εξαρτάται μόνο από τον εν λόγω σχήμα, όχι από τη σχέση του σχήματος με ένα πλαίσιο της αναφοράς. Για παράδειγμα, στη γλώσσα της Γεωμετρίας της Χελώνας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τέσσερις διαδοχικές γωνίες ίσες. Επίσης η κάθε πλευρά είναι κάθετη στην επόμενη.

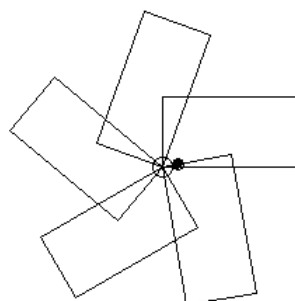
Η «χελώνα» προτιμά τις εγγενείς περιγραφές των σχημάτων. Για παράδειγμα, η διαδικασία «ορθογώνιο» στην εικόνα 13 σχεδιάζει ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 50 και 100 μονάδες. Η χελώνα μπορεί να εκτελέσει την ίδια διαδικασία και να γράψει το ίδιο ορθογώνιο εκκινώντας από οποιαδήποτε θέση και με οποιοδήποτε προσανατολισμό, καθώς ο ορισμός του δεν εξαρτάται από τα εξωγενή χαρακτηριστικά του πλαισίου. Αντίθετα, η διαδικασία «καρτ.ορθογώνιο» σχεδιάζει μεν το ίδιο ορθογώνιο αλλά τώρα ο ορισμός του εξαρτάται από εξωγενή στοιχεία του πλαισίου (τη θέση των κορυφών στο πλαίσιο). Αυτή έχει ως αποτέλεσμα ο σχεδιασμός του ορθογωνίου να μην εξαρτάται από την αρχική θέση και τον προσανατολισμό της χελώνας.

για ορθογώνιο

τέλος

επανάλαβε 2 [μ 50 δ 90 μ 100 δ  
90]

ορθογώνιο



Εικόνα 12

για καρτ.ορθογώνιο

θεσεθέση [0 0]

θεσεθέση [100 0]

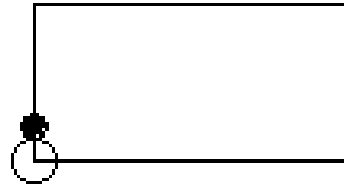
θεσεθέση [100 50]

θεσεθέση [0 50]

θέσεθέση [0 0]

τέλος

καρτ.ορθογώνιο



Εικόνα 13

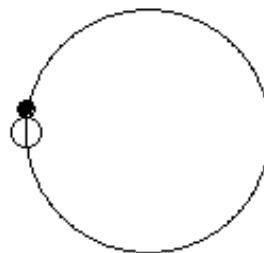
Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα της προτίμησης της χελώνας στις εγγενείς ιδιότητες των σχημάτων είναι ο κύκλος. Στο παρακάτω πρόγραμμα «κύκλος» η χελώνα κινείται λίγο μπροστά ( $\mu$  1) και λίγο δεξιά ( $\delta$  1) και αυτό το επαναλαμβάνει για 360 φορές. Ο ορισμός του κύκλου με αυτόν τον τρόπο διαφέρει από τον Ευκλείδειο ορισμό (κέντρο και ακτίνα) που απαιτεί εξωγενή στοιχεία όπως τη θέση του κέντρου. Πρόκειται δηλαδή για μια πολυγωνική προσέγγιση του κύκλου όπου αυτός ορίζεται ως το πολύγωνο το μήκος της πλευράς του οποίου τείνει στο μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για τον ορισμό του σε ένα καρτεσιανό επίπεδο όπου απαιτείται η εξίσωση καθώς και τα εξωγενή στοιχεία, άξονες και αρχή των αξόνων.

για κύκλος

επανάλαβε 360 [ $\mu$  1  $\delta$  1]

τέλος

κύκλος



Εικόνα 14

Η οποιαδήποτε μεταβολή στα στοιχεία του ορισμού του ορίζει επίσης ένα κύκλο-πολύγωνο όπως αν στην εντολή  $\mu$  1 μεταβάλλουμε την τιμή 1 σε 2. Δεν ισχύει το ίδιο αν μεταβάλλουμε την καρτεσιανή εξίσωση του κύκλου. Η τελευταία αντιστοιχεί σε μια έλλειψη καθώς μετεβλήθησαν εξωγενή στοιχεία του ορισμού του κύκλου (μετεβλήθη η μονάδα στον ένα άξονα).

Οι συνέπειες της προτίμησης της χελώνας στα εγγενή χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων είναι δυο. Η πρώτη αφορά την ίδια την έννοια των γεωμετρικών σχημάτων, όπου κάθε σχήμα ορίζεται μέσω μιας διαδικασίας παρά μέσω μιας κατασκευής με κανόνα και διαβήτη ή μέσω μιας εξίσωσης. Η δεύτερη συνέπεια αφορά την γεωμετρική συμπεριφορά της χελώνας η οποία τείνει να αποκτήσει τοπικά χαρακτηριστικά σε σχέση με την κατασκευή του κύκλου στο Ευκλείδειο ή στο καρτεσιανό επίπεδο. Για παράδειγμα, κατά τη σχεδίαση του κύκλου, η χελώνα συμπεριφέρεται γεωμετρικά μόνο τοπικά αγνοώντας τα στοιχεία του περιβάλλοντος. Αντίθετα στον ορισμό του κύκλου από κέντρο και ακτίνα ή μέσω της εξίσωσης απαιτείται μια σφαιρικότερη αντίληψη καθώς απαιτείται η επιλογή εξωγενών στοιχείων.

### 6.2.3 Η εντολή «Αναδρομή» (Recursion)

Η εντολή «επανάλαβε \_ [ ]» κάνει την χελώνα να εκτελέσει τις εντολές που είναι μέσα στην αγκύλη τόσες φορές όσος είναι ο αριθμός (το όρισμα) \_ της εντολής. Με αυτή την εντολή η χελώνα εκτελεί μια επαναληπτική διαδικασία. Ανάλογη διαδικασία εκτελείται και στην περίπτωση που η χελώνα εκτελεί μια διαδικασία στην οποία περιέχεται ως μια εντολή ο εαυτός της. Έτσι η χελώνα κάνει αναδρομή (ένα βρόγχο) εκτελώντας τον εαυτόν της πολλές φορές. Για παράδειγμα στην παρακάτω παραμετρική διαδικασία «μυστήριο» η χελώνα εκτελεί τον εαυτόν της κάθε φορά προσθέτοντας στην μεταβλητή  $\chi$ , το 3, στην μεταβλητή  $\psi$ , το 1 και αφαιρεί από την μεταβλητή  $\nu$ , το 1. Η εντολή «αν  $\nu < 1$  [σταμάτησε]» τερματίζει την διαδικασία όταν η τιμή του  $\nu$  γίνει 1.

Παρατηρώντας προσεκτικά την διαδικασία και την διαδρομή της χελώνας εύκολα διαπιστώνουμε ότι η χελώνα εκτέλεσε την διαδικασία «μυστήριο» 19 φορές και σε κάθε επανάληψη αύξανε το μήκος της διαδρομής κατά 3 μονάδες ενώ αύξανε την γωνία στροφής κατά 1 μονάδα. Στο γραφικό αποτέλεσμα αυτό δηλώνεται με αλλαγή της καμπυλότητας του σχήματος. Ως καμπυλότητα ορίζεται ο λόγος της γωνίας στροφής προς το μήκος που διανύθηκε εν προκειμένω  $(\psi/\chi)$ . Στο παρακάτω σχήμα η εντολή «τύπωσε  $\psi/\chi$ » έδωσε τις τιμές

0.42857142857142855, 0.4339622641509434, 0.44, 0.44680851063829785,  
 0.45454545454545453, 0.4634146341463415, 0.47368421052631576, 0.4857142857142857,  
 0.5, 0.5172413793103449, 0.5384615384615384, 0.5652173913043478, 0.6,  
 0.6470588235294118, 0.7142857142857143, 0.8181818181818182, 1, 1.4 και 3

για μυστήριο : $\chi$  : $\psi$  : $\nu$

αν : $\nu < 2$  [σταμάτησε]

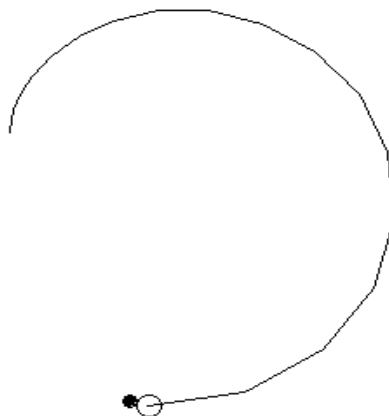
$\mu$  : $\chi$

$\delta$  : $\psi$

μυστήριο : $\chi+3$  : $\psi+1$  : $\nu-1$

τέλος

μυστήριο 2 6 20



Εικόνα 15

Η ιδιότητα της καμπυλότητας είναι επίσης μια εγγενής ιδιότητα των σχημάτων που δημιουργεί η χελώνα. Η τεχνική της ανδρομής μπορεί αν δώσει έδαφος για πολύ ενδιαφέροντα μαθηματικά πέρα από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όπως τα fractals.

### 6.3 Βασικά στοιχεία της διδακτικής της Γεωμετρίας.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας χαρακτηρίζεται από τις ιδιαίτερες πτυχές των αντικειμένων που διαπραγματεύεται και που αφορούν την μελέτη του χώρου. Ερωτήματα, όπως αυτά που αφορούν τη φύση των αντικειμένων της γεωμετρίας, αν δηλαδή είναι αντικείμενα απαλλαγμένα από την εμπειρική θεώρηση του χώρου, αλλά και του ίδιου του χώρου, συνδέθηκαν με την αξιωματική θεμελίωση της επιστήμης της γεωμετρίας (Laborde et al, 2006). Από την άλλη, ερωτήματα για το πώς μπορούν να αξιοποιηθούν οι εμπειρίες και οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για το φυσικό χώρο στη μάθηση και στη διδασκαλία της γεωμετρίας φάνηκαν να απασχολούν έντονα τους παιδαγωγούς και τους ερευνητές αλλά και να έχουν θετικό αντίκτυπο στην πράξη. Η αντιφατικότητα των ερωτημάτων για τη φύση των γεωμετρικών αντικειμένων αποδείχτηκε μια συνεχής πηγή ιδεών και κινητήρια δύναμη για μεταρρυθμίσεις τόσο στην μαθησιακή όσο και στην διδακτική προσέγγιση της ίδιας της γεωμετρίας αλλά και στον προσδιορισμό του περιεχομένου και των στόχων του σχετικού προγράμματος σπουδών.

Αν και το βασικό στοιχείο της θεωρητικής γεωμετρίας είναι η παραγωγική της μαθηματικής επιχειρηματολογίας, η οποία αναπτύσσεται στα γεωμετρικά αντικείμενα (γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις), συζητείται και μαθαίνεται πάνω στα διαγράμματα των γεωμετρικών αντικειμένων που είναι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών εννοιών και σχέσεων. Με άλλα

λόγια στη μάθηση και στη διδασκαλία της γεωμετρίας κυριαρχούν τα γεωμετρικά σχήματα και οι αναπαραστάσεις τους στο χαρτί ή στην οθόνη του υπολογιστή.

Ωστόσο οι απαιτήσεις των παραγωγικών συλλογισμών και γενικότερα της μάθησης της γεωμετρίας είναι υψηλότερες. Κάθε μαθητής καλείται να διαπραγματευτεί μια γεωμετρική έννοια ή ένα γεωμετρικό συλλογισμό «ανεξάρτητα» και «μακριά» από την αναπαράσταση του σχήματος που έχει μπροστά του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δρα ταυτόχρονα και εμπειρικά – διαισθητικά, αξιοποιώντας τις πληροφορίες που αντλεί από την αναπαράσταση του γεωμετρικού αντικειμένου και θεωρητικά, αποστασιοποιούμενος από τις εμπειρικές και διαισθητικές αντιλήψεις που αναπτύσσει από αυτή. Αυτή η διττή απαίτηση είναι η κύρια πηγή δυσκολιών τόσο της μάθησης όσο και της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Μπορεί αυτή η δυσκολία να ξεπεραστεί ή να βελτιωθεί όταν στη διδασκαλία της γεωμετρίας εμπλέκονται τα ψηφιακά μέσα;

Ένα από τα σημαντικά στοιχεία που έφεραν στο προσκήνιο τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας είναι η διάκριση του γεωμετρικού σχεδίου από το γεωμετρικό σχήμα που έκανε ο Parzysz (1988). Ένα γεωμετρικό σχέδιο ήταν μια εικόνα, ένα γεωμετρικό σχήμα ήταν μια κλάση (συχνά άπειρη) σχεδίων σχετικών με κάποια ελλοχεύοντα κοινά χαρακτηριστικά (Goldenberg & Cuoco, 1998). Έτσι, στην παραδοσιακή γεωμετρία ενώ διαπραγματευόμαστε το γεωμετρικό σχέδιο απαιτείται να συλλογίζομαστε με το γεωμετρικό σχήμα.

Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται ευκολότερα στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, όπου ο συνεχής μετασχηματισμός των γεωμετρικών σχεδίων αναδύει τα ελλοχεύοντα κοινά τους χαρακτηριστικά (κανονικότητες και αναλλοιώτα). Η ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές σε αυτά τα κοινά χαρακτηριστικά αποτελεί την γενίκευση που, όπως υποστηρίχτηκε από τον Ολλανδό θεωρητικό της διδακτικής των μαθηματικών Freudenthal (1973), είναι απαραίτητη για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Η ανάδυση όμως των κοινών χαρακτηριστικών των σχεδίων απαιτεί από τους μαθητές την ικανότητα να μπορούν να οπτικοποιούν τα χωρικά στοιχεία τους (να συγκροτούν νοητικές εικόνες αυτών) και να μπορούν να παλινδρομούν μεταξύ αυτών και των θεωρητικών γεωμετρικών τους γνώσεων. Αυτή η εσωτερική – νοητική παλινδρόμηση ενισχύεται όταν η οπτικοποίηση είναι πλούσια και συγκροτείται από πολλά στιγμιότυπα, από ειδικές και ακραίες περιπτώσεις. Η συγκρότηση αυτή είναι συχνά τόσο πλούσια που επιτρέπει στους μαθητές να μπορούν να συνεχίζουν τον δυναμικό χειρισμό νοερά και να κάνουν γενικεύσεις

ορίζοντας τα χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχεδίων ως ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και προβλέψεις για το αν έχουν αυτές τις ιδιότητες όλα τα σχέδια της κλάσης αυτής.

Ο δυναμικός χειρισμός των γεωμετρικών σχεδίων λοιπόν, είτε αυτός γίνεται στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας είτε στο περιβάλλον της γεωμετρίας της χελώνας εμπλέκει τους μαθητές σε νοητικές δραστηριότητες που έχουν γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Οι ιδιαιτερότητες των δυο κατηγοριών των λογισμικών που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους αναδεικνύουν τον τρόπο που εμπλέκονται στη διδακτική διαδικασία και ενισχύουν τη μάθηση της Γεωμετρίας.

Ο προγραμματισμός ως μαθησιακή δραστηριότητα είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τη μαθηματική δραστηριότητα όπως διατυπώθηκε από τον Papert στο βιβλίο του 'Νοητικές Θύελλες'. Αν και η διαδεδομένη αντίληψη ως προς τη φύση της δραστηριότητας του προγραμματισμού είναι ότι αυτή περιορίζεται στο χώρο της πληροφορικής, όταν η γλώσσα προγραμματισμού προσεγγίζει τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό και όταν αυτά που μπορεί να κάνει κανείς με τη γλώσσα έχουν σχέση με τα μαθηματικά, η δραστηριότητα του προγραμματισμού μπορεί να είναι από τη φύση της μαθηματική δραστηριότητα. Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της δραστηριότητας είναι τα εξής:

- Η βασική μαθηματική οντότητα – η χελώνα – η οποία ορίζεται από τη θέση και την διεύθυνσή της, μπορεί να αλλάζει δίνοντας εντολές ο ίδιος ο μαθητής.
- Οι βασικές εντολές που απευθύνονται στη χελώνα, δηλαδή οι εντολές αλλαγής θέσης και διεύθυνσης και οι εντολές με τις οποίες η χελώνα τοποθετείται σε θέση προσδιορισμένη από καρτεσιανές συντεταγμένες και διεύθυνση από πολικές συντεταγμένες αντίστοιχα είναι βασικές γεωμετρικές έννοιες.

Για να σχηματίσει η χελώνα ένα γεωμετρικό σχέδιο πρέπει ο μαθητής να δώσει κατάλληλες εντολές με τον τυπικό κώδικα. Παράλληλα, παρατηρώντας τα αποτελέσματα των εντολών σε μορφή γραφικής αναπαράστασης, οπτικοποιεί τα βασικά χαρακτηριστικά του σχήματος ενώ ταυτόχρονα έχει και την συμβολική τους έκφραση. Εμπλέκοντας και τις μεταβλητές ως ορίσματα των εντολών μπορεί να χειρίζεται δυναμικά στο γεωμετρικό σχέδιο και να παρατηρεί στα πολλά σχέδια τα κοινά τους χαρακτηριστικά, όπως και στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας.



Θεωρώντας την περιγραφή των επιπέδων van Hiele ως ένα μέσο με το οποίο μπορεί να γίνει κατανοητή η ανάπτυξη των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών στη γεωμετρία παρουσιάζουμε μια αντιστοιχία αυτής της περιγραφής με την περιγραφή της ανάπτυξης που μπορεί να γίνει στα περιβάλλοντα γεωμετρίας της χελώνας (Olson, Kieran & Ludwig, 1987).

Επίπεδο 0: Στη επίπεδη γεωμετρία, ένας μαθητής αναγνωρίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα από τη σφαιρική τους εμφάνιση. Δεν υπάρχει καμία αναγνώριση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων ατομικά. Αντίστοιχα, στη γεωμετρία της χελώνας, μια αρχέτυπη εντολή χρησιμοποιείται ως ανεξάρτητη οντότητα σε αυτό το επίπεδο. Παραδείγματος χάριν, ένα παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει την εντολή "ΜΠΡΟΣΤΑ 50" επανειλημμένα για να δει τι συμβαίνει. Οι ιδιότητες αυτών των εντολών δεν έχουν γίνει αντιληπτές.

Επίπεδο 1: Στη επίπεδη γεωμετρία, οι σπουδαστές μπορούν να αναγνωρίσουν τις ιδιότητες των σχημάτων αλλά δεν συσχετίζουν αυτές τις ιδιότητες ή τα σχήματα. Στη γεωμετρία χελωνών, τα σχήματα κατασκευάζονται με τη χρησιμοποίηση μιας ακολουθίας αρχέτυπων εντολών. Οι ιδιότητες των εντολών αυτών είναι γνωστές και έτσι είναι υπό τον έλεγχο του μαθητή. Π.χ. η ακολουθία των εντολών για τη σχεδίαση ενός τετραγώνου. Οι ομοιότητες μεταξύ των ακολουθιών για να κατασκευάσουν τα τετράγωνα και τα ορθογώνια δεν παρατηρούνται σε αυτό το επίπεδο. Υπάρχουν ως ευδιάκριτες ακολουθίες αρχέτυπων εντολών. Η δημιουργία της ακολουθίας των αρχέτυπων εντολών για έναν σχήμα μεσολαβείται μόνο από την οπτική εικόνα που εμφανίζεται καθώς μια λογική ανάλυση των εντολών δεν είναι ακόμα διαθέσιμη.

Επίπεδο 2: Στη επίπεδη γεωμετρία, οι σπουδαστές που φθάνουν σε αυτό το επίπεδο μπορούν να καθιερώσουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και μεταξύ των ίδιων των σχημάτων. Οι ιδιότητες ενός σχήματος μπορούν να διαταχθούν λογικά όπως επίσης και οι κατηγορίες των γεωμετρικών σχημάτων. Στη γεωμετρία της χελώνας, οι διαδικασίες γράφονται ώστε να παράγουν τα γεωμετρικά σχήματα. Παραδείγματος χάριν, μια διαδικασία για να δημιουργήσει ένα ορθογώνιο γράφεται από μια ανάλυση των απαιτήσεων που είναι απαραίτητες για να παραχθεί ένα ορθογώνιο. Οι απαραίτητες εντολές δεν προκύπτουν από ένα οπτικά συγκρατημένο πείραμα αλλά μάλλον από μια βάση γνώσεων που καθορίζει τα ορθογώνια. Αρχικά, η εντολή "ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ" δεν χρησιμοποιείται στη δημιουργία των διαδικασιών καθώς οι αρχέτυπες εντολές εισάγονται σε μια εξατομικευμένη γραμμική διάταξη. Αργότερα, η εντολή "ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ" χρησιμοποιείται είτε ως αποτέλεσμα της

παρατήρησης των σχεδίων στην ακολουθία αρχέτυπων εντολών είτε ως αποτέλεσμα της ανάλυσης του γεωμετρικού σχήματος που προκύπτει.

Επίπεδο 3: Στη επίπεδη γεωμετρία, οι σπουδαστές που φθάνουν σε αυτό το επίπεδο καταλαβαίνουν την παραγωγή ως μέσο ανάπτυξης της θεωρίας όλης της γεωμετρίας κάτω από την αιτιολόγηση. Για αυτούς τους μαθητές ο παραγωγικός συλλογισμός είναι σημαντικός υπό μια σφαιρική έννοια. Στη γεωμετρία της χελώνας οι μεμονωμένες διαδικασίες του προηγούμενου επιπέδου ομαδοποιούνται και σχετίζονται με περισσότερους περιεκτικούς τρόπους που οδηγούν τελικά στις σφαιρικές οργανωτικές δομές. Παραδείγματος χάριν, όλα τα κανονικά πολύγωνα, από το ισόπλευρο τρίγωνο στο 360-γωνο κανονικό πολύγωνο (μια πεπερασμένη προσέγγιση στον κύκλο), μπορούν να δημιουργηθούν από την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες τιμές για τις σχετικές μεταβλητές. Επιπλέον, οι μαθητές γνωρίζουν όχι μόνο ότι η διαδικασία παράγει τα κλειστά κανονικά σχήματα αλλά είναι σε θέση να παρουσιάσουν και γιατί είναι έτσι. Η παραγωγή έχει γίνει ένα μέρος της εργασίας τους στη γεωμετρία χελωνών. Η Logo έχει διάφορα γλωσσικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούν τη λογική αφαίρεση για την κατάλληλη εφαρμογή. Η αναδρομή είναι ένα παράδειγμα ενός τέτοιου χαρακτηριστικού γνωρίσματος.

Επίπεδο 4: Στη επίπεδη γεωμετρία, οι σπουδαστές σε αυτό το επίπεδο της ανάπτυξης μπορούν να εκτιμήσουν σύγχρονα μοντέλα αυστηρής προσέγγισης της γεωμετρικής θεωρίας (αξιωματική θεμελίωση) όπως εξηγούνται από τον Hilbert. Οι μαθητές είναι σε θέση σε αυτό το επίπεδο να αναπτύξουν μια θεωρία χωρίς κάποιες συγκεκριμένες ερμηνείες. Στη γεωμετρία της χελώνας η ανάγνωση μιας διαδικασίας που περιέχει πολλαπλά επίπεδα εσωτερικών αναδρομών ή η σύνταξη μιας τέτοιας διαδικασίας και η πρόβλεψη για το γεωμετρικό σχήμα που θα κάνει η χελώνα, θα απαιτούσε πιθανώς την ανάπτυξη σε αυτό το επίπεδο. Πέρα από αυτό η αναγνώριση των κοινών επαναλαμβανόμενων δομών στις διαφορετικές διαδικασίες Logo πιθανώς θα απαιτούσε επίσης αυτό το επίπεδο ανάπτυξης. Τέλος, δραστηριότητες της γεωμετρίας χελωνών, όπως αυτές που εξηγούνται από τους Abelson και DiSessa στο βιβλίο τους “Turtle Geometry”, π.χ. κίνηση της χελώνας στην επιφάνεια μιας σφαίρας, θα ήταν επίσης κατάλληλες για αυτό το επίπεδο ανάπτυξης.

## 7. Βασικά Στοιχεία Διδακτικής της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων με τη χρήση Ψηφιακών Τεχνολογιών

---

Το ενδιαφέρον για τη διδακτική των εννοιών της στατιστικής αυξάνεται σταδιακά από τα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας. Η συζήτηση που αναπτύσσεται στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από πολλαπλότητα απόψεων αναφορικά τόσο με το ρόλο των αντίστοιχων γνωστικών περιοχών στο σχολικό πρόγραμμα όσο και των τρόπων με τους οποίους θα μπορούσαν να αναπτυχθούν κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις (Lipson & Jones, 1996, Cobb, 1999, NCTM, 2000). Παρότι από το τέλος της δεκαετίας του 80 η στατιστική και οι πιθανότητες έχουν ενταχθεί επίσημα στα αναλυτικά προγράμματα πολλών χωρών, δεν είχαν μέχρι πρόσφατα αναπτυχθεί οι παιδαγωγικοί στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία των συγκεκριμένων αντικειμένων στη γενική παιδεία. Οι αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες έχουν διαφορετική υφή από τις υπόλοιπες περιοχές των μαθηματικών και παραμένουν δυσνόητες για πολλούς μαθητές καθώς αποτελούν τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χειριστούμε καταστάσεις αβεβαιότητας και να βγάλουμε συμπεράσματα μέσα από το χειρισμό μεγάλου αριθμού και ποικιλίας δεδομένων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το είδος και η έκταση των δεδομένων στο πεδίο αυτό των μαθηματικών αποτελεί για τους περισσότερους μαθητές μια αφηρημένη διαδικασία μακριά από τη σφαίρα της εμπειρίας τους.

Τα τελευταία χρόνια ο όρος διαχείριση δεδομένων (data handling) προτείνεται ως συνδεδεμένος κρίκος μέσω του οποίου επιχειρείται η διδακτική προσέγγιση των εννοιών των πιθανοτήτων και της στατιστικής στο σχολείο. Σε αυτή την εξέλιξη συνέβαλλε καθοριστικά η ανάπτυξη ειδικών εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να διαχειριστούμε μεγάλες ποσότητες δεδομένων και να κάνουμε ποικίλων ειδών καταχωρήσεις, ταξινομήσεις και παρουσιάσεις τους. Μπορούμε επίσης να κάνουμε ποσοτικές αναλύσεις των δεδομένων αυτών και άρα να τις επεξεργαστούμε στατιστικά. Έτσι, η ενσωμάτωση των αντικειμένων της στατιστικής και των πιθανοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα αποτελεί ευκαιρία

να καλλιεργηθούν οι στατιστικές διαισθήσεις των μαθητών,

να έρθουν στο προσκήνιο οι μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται στις στατιστικές τεχνικές και

να δημιουργηθούν πεδία διασύνδεσης των συγκεκριμένων εννοιών με ευρύτερες πτυχές της μάθησης των μαθηματικών όπως η συμβολική χρήση, η επαγωγική σκέψη και η λογική επεξεργασία.

### **7.1 Κατασκευή νοημάτων από τα δεδομένα.**

Οι περισσότερες έννοιες της στατιστικής, και αντίστοιχα των πιθανοτήτων, σχετίζονται συχνά με ένα σύνολο δεδομένων και τις ενδείξεις που ανακύπτουν κατά την επεξεργασία του. Έτσι, στη σχετική συζήτηση στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών, τα δεδομένα αποτελούν τον κεντρικό άξονα με βάση τον οποίο διαρθρώνονται οι νέες προτάσεις που αφορούν τη διδασκαλία των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών. Από παιδαγωγική σκοπιά, οι διαδικασίες κατασκευής νοημάτων από τους μαθητές μέσα από την επεξεργασία δεδομένων έχουν αποτελέσει κεντρική πτυχή και της αντίστοιχης έρευνας στο πεδίο της διδακτικής των πιθανοτήτων και της στατιστικής.

Σε αυτό το πλαίσιο ο ρόλος της τεχνολογίας είναι κρίσιμος. Τα ειδικά υπολογιστικά εργαλεία που σχεδιάζονται για τις πιθανότητες και τη στατιστική παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες αναπαράστασης και χειρισμού των δεδομένων με βάση κλασικές αναπαραστάσεις (π.χ. γραφήματα διαφόρων τύπων, διαγράμματα Venn, ραβδογράμματα) και είναι σχεδιασμένα να λειτουργούν ως μέσα υποστήριξης των μαθησιακών διαδικασιών αλλά ταυτόχρονα και ως μέσα ανάλυσης και επεξεργασίας των δεδομένων (Gravemeijer et al. 2000). Η συγκεκριμένη οπτική σχεδιασμού βασίζεται στην άποψη ότι η σταδιακή ανάπτυξη εξειδικευμένων τρόπων επεξεργασίας των δεδομένων και, συνακόλουθα, αντίστοιχων συλλογισμών συνδέεται άρρηκτα με την δυνατότητα εξειδικευμένων τρόπων εγγραφής και περαιτέρω χρήσης των δεδομένων (Macclain & Cobb, 2001). Ο διαμεσολαβητικός ρόλος της τεχνολογίας σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται στο ότι παρέχει λειτουργικότητες που ευνοούν την εστίαση στα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές για αντικείμενα που δεν υπάρχουν στα δεδομένα αλλά αποτελούν δικές τους νοητικές κατασκευές. Η τεχνολογία προσφέρει χειροπιαστές αναπαραστάσεις και δυνατότητες χειρισμού τους στους μαθητές διευκολύνοντας την ανάπτυξη αφαιρετικών διαδικασιών και γενίκευσης.

Τα περιβάλλοντα αυτής της κατηγορίας έχουν λοιπόν συνδεθεί με την ανάπτυξη του ρεύματος που καλείται Διερευνητική Επεξεργασία Δεδομένων (ΔΕΔ, Exploratory Data Handling) και χαρακτηρίζεται από την οργάνωση, την περιγραφή, την αναπαράσταση και την ανάλυση δεδομένων από τους μαθητές μέσα τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων οπτικών

αναπαραστάσεων σε υπολογιστικά περιβάλλοντα. Στο παιδαγωγικό πλαίσιο, η ΔΕΔ επικεντρώνεται στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη συλλογή και το χειρισμό δεδομένων που περιλαμβάνει αναγνώριση ιδιοτήτων κατά την αναπαράστασή τους (π.χ. αναγνώρισης της τάσης κατά τη γραφική αναπαράσταση σημείων), διάκριση φαινομένων και ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων μέσα από εικασίες, πειραματισμό και υποθέσεις. Παρότι έχει επισημανθεί ότι οι μαθητές κατασκευάζουν κάποια αρχικά νοήματα κατά την καταγραφή ενός συνόλου δεδομένων (π.χ. σε μια βάση) –ιδιαίτερα όταν οι μαθητές συμμετέχουν στην παραγωγή τους- η κύρια εστίαση των ερευνητών αφορά την περαιτέρω επεξεργασία τους από τους μαθητές (McClain & Cobb, 2001). Έτσι, προτείνεται ως αναγκαίο να ζητηθεί από τους μαθητές να αναπτύξουν νοήματα σχετικά με συγκεκριμένα στατιστικά χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως για παράδειγμα ο μέσος, η τάση (trend), η διασπορά (dispersion) και η κατανομή (distribution).

Στα περιβάλλοντα ΔΕΔ το είδος των δεδομένων μπορεί να προκύψει από μετρήσεις πειραμάτων που εκτελούν οι ίδιοι οι μαθητές ή από στοιχεία που προσφέρονται σε βιβλία ή σχετικές διαθέσιμες ιστοσελίδες (π.χ. στατιστικών ή ακαδημαϊκών φορέων). Η επακόλουθη επεξεργασία των δεδομένων δεν επικεντρώνεται απλά στη χρήση στατιστικών τεχνικών για τον υπολογισμό συγκεκριμένων αποτελεσμάτων. Αντίθετα, θεωρείται ότι τα νοήματα κατασκευάζονται ενώ οι μαθητές ξεκινούν από τα δεδομένα και πειραματίζονται με αυτά, συχνά χωρίς την αναφορά σε συγκεκριμένους μαθηματικούς τύπους. Στην κατεύθυνση αυτή έχει υποδειχτεί ότι τα δεδομένα που θα γίνουν αντικείμενο επεξεργασίας από τους μαθητές είναι χρήσιμο να μην υπακούουν πάντοτε σε κάποιο γενικό κανόνα αλλά οι μαθητές να εκτίθενται στην ‘ακαταστασία’ που χαρακτηρίζει τα δεδομένα που συλλέγονται στο πλαίσιο ενός τυχαίου πειράματος ή μιας έρευνας για τη διερεύνηση ενός φαινομένου. Η διερευνητική επεξεργασία των δεδομένων σε αυτές τις περιπτώσεις αναφέρεται ευθέως στη νοηματοδότηση των δεδομένων που μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά με τα σλόγκαν: κοιτάζω ‘στα’ δεδομένα (αρχική ανάλυση), κοιτάζω ‘μεταξύ’ των δεδομένων (σύγκριση), κοιτάζω ‘πέρα’ από τα δεδομένα (ανεπίσημα συμπεράσματα) και κοιτάζω ‘πίσω’ από τα δεδομένα (πλαίσιο) (Shaughnessy et al., 1996).

Με βάση τα παραπάνω και στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας μια μαθηματική έννοια της στατιστικής, όπως π.χ. η έννοια του μέσου όρου, δεν είναι απαραίτητο να συνδεθεί με ένα φορμαλιστικό ορισμό μέσω ενός τύπου. Στο μάθημα μπορεί να δοθεί η δυνατότητα υπολογισμού μέσω όρων σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον χωρίς να γίνεται

εμφανές το πώς προκύπτουν (μαύρο κουτί) και ακολούθως να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τη σχέση μεταξύ του μέσου όρου, όπως υπολογίζεται από τον υπολογιστή, με σύνολα δεδομένων που πρέπει να συγκριθούν. Αποδίδοντας έμφαση στη συμπεριφορά του μέσου όρου ως μαθηματικού νοήματος -και λιγότερη στην τεχνική με την οποία υπολογίστηκε- ο εκπαιδευτικός μπορεί υλοποιήσει την ευκαιρία ο μαθητής να κατανοήσει γιατί και πώς ο μέσος όρος μπορεί να είναι χρήσιμος στην επεξεργασία και τη νοηματοδότηση των δεδομένων.

Αντίστοιχα, σε μια δραστηριότητα πιθανοτήτων η ψηφιακή τεχνολογία μας δίνει τις δυνατότητες να αναπαραστήσουμε μοντέλα πιθανοτήτων τα οποία παράγουν μεγάλο αριθμό προσομοιωμένων 'πειραμάτων', όπως το ρίξιμο του ζαριού, του νομίσματος ή της σβούρας, και να μας δώσουν σε συνοπτική μαθηματική μορφή τα αποτελέσματα. Υπάρχει βέβαια ένας επιστημολογικός διάλογος όπου η μια πλευρά αμφισβητεί τη γνησιότητα των 'πειραμάτων', καθώς από πλευράς υπολογιστικής τεχνολογίας δεν μπορεί να είναι τελείως τυχαία τα πειράματα λόγω της φύσης της ίδιας της τεχνολογίας. Όμως με τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων εφαρμογών και εργαλείων, όπως είναι η γλώσσα παράλληλου προγραμματισμού NetLogo και το εργαλείο με την επωνυμία 'chance-maker' (Pratt & Noss, 2002), μπορούν οι μαθητές να μπουν στη θέση του δημιουργού τέτοιων προσομοιώσεων και, επομένως, να εμπλακούν με τις έννοιες των πιθανοτήτων που χρειάζονται για να κατασκευάσουν τις ίδιες τις προσομοιώσεις.

Από παιδαγωγική σκοπιά, λοιπόν, στα περιβάλλοντα ΔΕΔ παρέχεται ένα πλαίσιο ανοιχτής διερεύνησης από τους μαθητές στο οποίο προηγείται η εμπλοκή των μαθητών με την επεξεργασία των δεδομένων και ακολουθεί η ενασχόληση με το όποιο μαθηματικό μοντέλο και τη χρήση π.χ. εννοιών της περιγραφικής στατιστικής. Σε αυτό το πλαίσιο και λαμβάνοντας υπόψη τον 'ακατάστατο' χαρακτήρα των δεδομένων στο χώρο της εμπειρικής επιστήμης έχει υποδειχτεί ότι η κατανόηση εννοιών της στατιστικής εμφανίζεται περισσότερο θεμελιώδης και πρωταρχική σε σχέση με τις πιθανότητες.

## **7.2 Τοπική και συνολική κατανόηση των δεδομένων και των αναπαραστάσεών τους.**

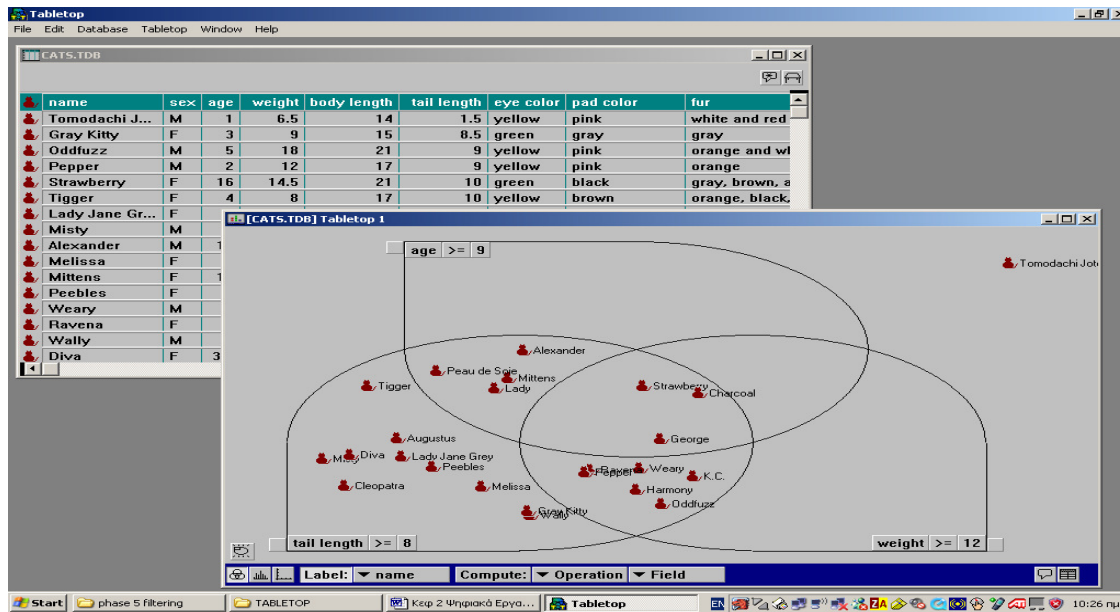
Η γενική διάκριση ανάμεσα στον τοπικό και το συνολικό χαρακτήρα που διακρίνει τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών έχει χρησιμοποιηθεί και προκειμένου να περιγραφούν οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές κατανοούν τα δεδομένα ενώ τα καταγράφουν και τα επεξεργάζονται στο πλαίσιο της ΔΕΔ. Η τοπική κατανόηση (local understanding) σε αυτή

την περίπτωση αναφέρεται στην εστίαση των μαθητών σε μια συγκεκριμένη τιμή από ένα σύνολο δεδομένων, π.χ. μια συγκεκριμένη εγγραφή σε μια βάση δεδομένων ή ένα σημείο σε ένα γράφημα, χωρίς εμβάθυνση στο τι αντιπροσωπεύει η συγκεκριμένη τιμή ή σημείο στο γενικότερο σύνολο. Η σφαιρική κατανόηση (global understanding), από την άλλη, περιλαμβάνει την ικανότητα της αναζήτησης, της αναγνώρισης, της περιγραφής και της ερμηνείας γενικών κανονικοτήτων (patterns) σε ένα σύνολο δεδομένων (π.χ. αλλαγή με βάση το χρόνο, τάση των δεδομένων) είτε με παρατήρηση 'με το μάτι' της διασποράς των δεδομένων είτε με υπολογισμό στατιστικών παραμέτρων. Η έρευνα έχει καταγράψει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές κατά την προσπάθεια σφαιρικής αντιμετώπισης και ερμηνείας ενός συνόλου δεδομένων. Ακόμη και μετά από πολλά χρόνια μαθημάτων στατιστικής πολλοί μαθητές τείνουν να εστιάζουν την προσοχή τους σε ιδιότητες μεμονωμένων περιπτώσεων παρά σε σύνολα δεδομένων. Ο Pratt (2000) περιέγραψε πώς νεαροί μαθητές που εργάστηκαν σε ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον μπόρεσαν να διακρίνουν τη συμπεριφορά των μεμονωμένων αποτελεσμάτων σε πειράματα ρίψης νομίσματος και ζαριών που εικονίζονταν στον υπολογιστή και τους μαθηματικούς τρόπους με τους οποίους μπορούσαν να ελέγχουν τις παραμέτρους των αντίστοιχων πειραμάτων μέσω ειδικών λειτουργικοτήτων.

### **7.3 Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα διερευνητικής επεξεργασίας των δεδομένων.**

Τα εργαλεία διαχείρισης δεδομένων σχεδιασμένα για τη διδακτική των μαθηματικών είναι λίγα στον αριθμό και έχουν χαρακτηριστικά που τα διακρίνουν σαφώς από τις κλασικές γενικής χρήσης βάσεις δεδομένων όπως η Access, η Lotus, η SQL κ.α. ευρέως γνωστές. Οι βασικές διαφορές είναι ότι είναι εξαιρετικά υποβαθμισμένη αν όχι ανύπαρκτη η λειτουργικότητα της διαβαθμισμένης πρόσβασης στην πληροφορία καθώς και αυτή του σχεδιασμού καρτελών. Τα εργαλεία της διδακτικής έχουν το χαρακτηριστικό της άμεσης ανταπόκρισης οποιασδήποτε καταχώρησης ή ανάλυσης των δεδομένων και κυρίως της ποικιλίας και του δυναμικού χαρακτήρα των αναπαραστάσεων της πληροφορίας και των τρόπων ανάλυσής της. Τα βασικά εργαλεία είναι το 'Tabletop' του Hancock (1995) και μετέπειτα το 'Fathom' και το 'Tinkerplots' του εκδοτικού οίκου 'Key Curriculum Press' που εκδίδει και το Geometry Sketchpad. Το πρώτο από αυτά αποτελείται από μια εύχρηστη σχεσιακή βάση δεδομένων με βασική αναπαράσταση τον πίνακα, υποστηρίζοντας την αλφαριθμητική, την αριθμητική και την διττή (αληθές/ψευδές) δομή δεδομένων. Τα ίδια τα δεδομένα αναπαριστώνται και με τη μορφή των στοιχείων συνόλων που εμφανίζονται με

διαγράμματα του Venn πάνω σε μια ιδεατή επιφάνεια τραπεζιού (εξ' ου και το όνομα του λογισμικού).



Εικόνα 16. Ανάλυση πληροφοριών για τις γάτες με το Tabletop

Ο χρήστης μπορεί να κάνει ερωτήματα τύπου άλγεβρας του Boole και το λογισμικό τοποθετεί τα στοιχεία της βάσης στα αντίστοιχα σύνολα. Επίσης ο χρήστης μπορεί να κάνει τις βασικές πράξεις της περιγραφικής στατιστικής και επιπλέον να τοποθετήσει τα στοιχεία σε μονοαξονική ή διαξονική κατανομή.

Το 'Fathom' περιέχει περισσότερες δυνατότητες στατιστικής ανάλυσης και δικτυακής συμπεριφοράς και προορίζεται για μεγαλύτερους μαθητές από το Λύκειο και μετά, ενώ αντίθετα το 'Tinkerplots' περιέχει εξαιρετική ευρηματικότητα στην αξιοποίηση του διακείμενου και του δυναμικού χαρακτήρα της τεχνολογίας που επιτρέπει σε μικρούς μαθητές την πρόσβαση σε βασικές έννοιες της διαχείρισης δεδομένων. Και τα τρία αυτά εργαλεία θεωρούνται κατάλληλα για τη διδασκαλία της στατιστικής και των πιθανοτήτων, συνδυάζοντας έννοιες από τα αντικείμενα αυτά με έννοιες διαχείρισης δεδομένων από την επιστήμη των υπολογιστών.

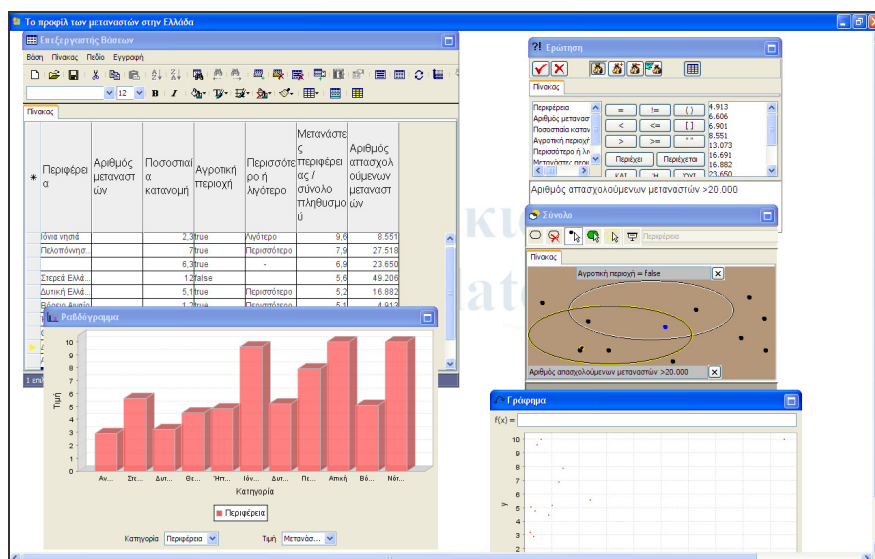
Το 'Ταξινομούμε', που σχεδιάστηκε στο Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, αποτελεί μια σχεσιακή βάση δεδομένων με δυνατότητα απλών στατιστικών πράξεων, ερωτημάτων με τη μορφή της Άλγεβρας του Boole, αναπαράσταση των δεδομένων με διαγράμματα του Venn, ραβδογράμματα και γραφήματα σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το 'Ταξινομούμε' ενσωματώνει μικρά κομμάτια λογισμικού, που ονομάζονται «ψηφίδες»,



συνδέονται μεταξύ τους και εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες. Το ‘Ταξινομούμε’ αποτελείται από πέντε ψηφίδες: Βάση Δεδομένων, Σύνολο, Ερώτηση, Ραβδόγραμμα και Γράφημα.

Η Βάση Δεδομένων παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα εγγραφής και ταξινόμησης πληροφοριών που διαρθρώνονται με βάση κατηγορίες (που λέγονται Πεδία) και αντίστοιχες Εγγραφές. Στο συγκεκριμένο περιβάλλον υπάρχουν πεδία αλφαριθμητικού τύπου (λέξεις – όπως τα πεδία κράτος και πρωτεύουσα), αριθμητικού (όπως τα πεδία έκταση και πληθυσμός), καθώς και πεδία τύπου αληθές/ψευδές (όπως το σεισμογενές). Γενικότερα, οι τύποι δεδομένων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι πολλοί: λέξεις, αριθμοί, εικόνα, αληθές/ψευδές, ώρα κ.τ.λ. Ο τρόπος επεξεργασίας των δεδομένων, περιλαμβάνει τη διατύπωση ερωτήσεων στην ψηφίδα Ερώτηση και τη μελέτη των απαντήσεων είτε μέσα από διαγράμματα Venn (κουκίδες μέσα σε ελλείψεις) που εμφανίζονται στην ψηφίδα Σύνολο, είτε μέσα από ραβδογράμματα που εμφανίζονται στην ψηφίδα Ραβδόγραμμα, είτε μέσα από γραφήματα στο καρτεσιανό επίπεδο που εμφανίζονται στην ψηφίδα Γράφημα.

Οι λειτουργικότητές του Ταξινομούμε έχουν τις ρίζες τους στο ‘Tabletop’, που σχεδιάστηκε μια δεκαετία νωρίτερα. Ο χρήστης έχει δυνατότητα να θέσει ένα ερώτημα, να αναζητήσει πληροφορίες σχετικές μ’ αυτό, να διατυπώσει υποθέσεις και να αναπτύξει στρατηγικές για την αντιμετώπισή του. Επιπρόσθετα, το λογισμικό παρέχει δυνατότητες εκτέλεσης όλων των πράξεων των σχεσιακών βάσεων δεδομένων μεταξύ πινάκων, πράγμα που δεν ισχύει με το Tabletop.



Εικόνα 17: Το περιβάλλον του Ταξινομούμε με πέντε διασυνδεδεμένες ψηφίδες

Κύριο χαρακτηριστικό του ‘Ταξινομούμε’ είναι ότι είναι επεκτάσιμο λογισμικό. Μια από τις πιο δημοφιλείς επεκτάσεις είναι η προσθήκη γεωγραφικών χαρτών και η διασύνδεση των δεδομένων με τη γεωγραφική πληροφορία και ταξινόμηση. Μπορεί, για παράδειγμα, να φτιάξει κανείς διαφορετικές στιβάδες δεδομένων, η κάθε μια να αντιστοιχεί σε ένα πίνακα της βάσης. Η κάθε στοιβάδα μπορεί να εμφανίζεται στο χάρτη με βάση κάποιο κριτήριο όπως αυτό της χρονολογίας.

Όλες οι εφαρμογές που προέκυψαν από το εργαλείο περιέχουν την υποδομή των ερωτημάτων μέσω της Άλγεβρας Boole και των συνόλων μέσω της αναπαράστασης των διαγραμμάτων του Venn. Δεν υπάρχει περιορισμός στη συνθετότητα των ερωτήσεων. Το παράδειγμα που φαίνεται στην Εικόνα 2 αφορά τη μελέτη των χαρακτηριστικών του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα μέσα από την επεξεργασία δεδομένων για το είδος της απασχόλησής τους με βάση τα χαρακτηριστικά μιας περιοχής. Η ερώτηση που έχει γίνει στην ψηφίδα Ερώτηση είναι της μορφής ‘Αγροτική περιοχή, false’ και ‘Αριθμός απασχολούμενων μεταναστών > 20.000’.

## 8. Τα Σενάρια ως σχέδια αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών

---

### 8.1 Η προβληματική σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη διδακτική πράξη

Οι τρόποι αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη των μαθηματικών και ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν μαθητές και εκπαιδευτικοί έχει αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό σημείο αιχμής στο πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού που αφορά την ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στο σχολείο (diSessa, Hoyles & Noss, 1995, Goldenberg, 1999, Hoyles, 2001). Ο σχετικός διάλογος, εκκινώντας από την επανεξέταση των παγιωμένων μετωπικών διδακτικών πρακτικών, έχει οδηγήσει στην ιδέα οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες για τα μαθηματικά με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων να δομούνται με τη μορφή των παιδαγωγικών πλάνων δραστηριότητας που αποκαλούνται σενάρια. Τα σενάρια θα πρέπει να γίνουν αντιληπτά ως σχέδια δραστηριότητας που περιγράφουν πτυχές του μαθήματος στην τάξη που στο παρελθόν δεν υπήρχε ανάγκη να ληφθούν υπόψη. Τέτοιες είναι η σχέση των δραστηριοτήτων των μαθητών με τα υπολογιστικά εργαλεία, η περιγραφή της αλληλουχίας με την οποία εφαρμόζονται οι δραστηριότητες, ο απαιτούμενος χρόνος, ο ρόλος του εκπαιδευτικού και ο τρόπος που οργανώνει το μάθημα (παρεμβάσεις, συζητήσεις τάξης κ.λπ).

Η εξέλιξη αυτή βασίστηκε σε δύο παραμέτρους: πρώτον, στη διαπίστωση ότι ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά περιβάλλοντα ενισχύουν την άρση παλιών εμποδίων (π.χ. αναπαράστασης) προσφέροντας εργαλεία (Karut, 1992) στα οποία η ίδια μαθηματική έννοια εκφράζεται μέσα από πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις, όπου οι αλλαγές στη μια αναπαράσταση επιφέρουν αλλαγές και στις υπόλοιπες που συνδέονται με αυτή· δεύτερον στο γεγονός ότι η εμπειρία διεξαγωγής ενός μαθήματος στην τάξη με χρήση υπολογιστικών εργαλείων υποδεικνύει την ανάγκη εντοπισμού και καταγραφής των προσδοκώμενων δραστηριοτήτων των μαθητών και των εκπαιδευτικών στην τάξη. Η προοπτική χρήσης της τεχνολογίας στο μάθημα, σε αντίθεση με την ευρέως θεωρούμενη αυταπόδεικτη αξία της,

φέρνει στο προσκήνιο όλες τις παραμέτρους που σχετίζονται με τους ρόλους και τις δραστηριότητες των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη (Κυνηγός & Δημαράκη, 2002), την ανάγκη μελέτης των μαθηματικών εννοιών που ευνοεί ένα υπολογιστικό περιβάλλον (Sutherland & Balacheff, 1999), το είδος των ανατιθέμενων στους μαθητές έργων (Hoyles, 2001) και, γενικότερα, το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία (Nardi, 1996). Η προσέγγιση αυτή υπαγορεύεται από την καταλυτική επιρροή της χρήσης της τεχνολογίας σε όλα τα επίπεδα της σχεδίασης και της εξέλιξης του μαθήματος στην τάξη στα οποία συμπεριλαμβάνονται στοιχεία όπως η συνεργατική μάθηση σε ομάδες, η αλλαγή των παραδοσιακών ρόλων δασκάλων και μαθητών και η ενίσχυση της ανάπτυξης μαθητοκεντρικών διδακτικών μοντέλων, όπου ο δάσκαλος έχει τη δυνατότητα να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία ενεργά, ως σύμβουλος και συνεργάτης των παιδιών (Hoyles & Noss, 1992).

Τα ερωτήματα που αναδύονται είναι πολλά και κρίσιμα: Ποια μορφή είναι σκόπιμο να έχουν οι δραστηριότητες στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν οι μαθητές στη διάρκεια ενός μαθήματος με χρήση ψηφιακών εργαλείων στην τάξη; Ποιες είναι οι παράμετροι με βάση τις οποίες καθορίζεται ο ρόλος της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθησιακή διαδικασία σε αυτή την περίπτωση; Τι αλλάζει στο μάθημα όταν αυτό περιλαμβάνει τη χρήση υπολογιστών; Τι μπορεί να κάνει ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός με την τεχνολογία αυτή που είτε είναι αδύνατο είτε πολύ δύσκολο πρακτικά όταν δεν την διαθέτει; Τι είδους δραστηριότητες λαμβάνουν χώρα και πώς αυτό επηρεάζει τους ρόλους των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη;

Παρόλο που η έννοια του σχεδιασμού της μαθησιακής δραστηριότητας δεν είναι κάτι νέο αλλά υπήρχε και εξακολουθεί να υπάρχει με πολλούς τρόπους στην εκπαίδευση οι δυνατότητες παιδαγωγικής αξιοποίησης της ψηφιακής τεχνολογίας έχουν αποτελέσει ένα καίριο όχημα για τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε η προσέγγιση της έννοιας 'σενάριο'. Από τη μια, τα καινοτομικά χαρακτηριστικά των ψηφιακών εργαλείων ευνοούν το σχεδιασμό διερευνητικών δραστηριοτήτων που αφορούν όχι μόνο το πεδίο της μάθησης όσο και το πεδίο της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης σε ένα κοινωνικό πλαίσιο που συνιστά η σχολική τάξη. Από την άλλη, οι καιρίες αλλαγές στη μορφή του μαθήματος ενισχύουν τις δυνατότητες για μια πολύ μεγαλύτερη ποικιλία δραστηριοτήτων στην τάξη σε σχέση με εκείνες που παρέχονται με τη συνηθισμένη μετωπική διδασκαλία. Σ' αυτό το πλαίσιο η ανάπτυξη σεναρίων, μακριά από τις παραδοχές που χαρακτηρίζουν την παραδοσιακή

διδασκαλία, έχει θεωρηθεί αλληλένδετη με τη διαμόρφωση ενός σύγχρονου διδακτικού ‘παραδείγματος’ το οποίο υποστηρίζει την καλλιέργεια μεθοδολογικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων, τη διερεύνηση μέσα από το πείραμα, την ομαδική εργασία και επικοινωνία των μαθητών στα πλαίσια συνεργατικών δραστηριοτήτων, τη δημιουργία, δηλαδή, νέων ρόλων για τον εκπαιδευτικό και το μαθητή.

## **8.2 Η έννοια του σεναρίου**

### **8.2.1 Τι είναι ένα σενάριο**

Ως σενάριο εννοούμε ένα σύνθετο εργαλείο περιγραφής της διδασκαλίας για μια συγκεκριμένη περιοχή ενός γνωστικού αντικειμένου με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας. Η υλοποίηση ενός σεναρίου περιλαμβάνει την εφαρμογή μιας σειράς εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στην τάξη που με τη σειρά τους μπορεί να εξειδικεύονται σε φύλλα εργασίας για τους μαθητές. Τόσο ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων όσο και η διαδικασία εφαρμογής τους αποτελούν κύρια αντικείμενα του σεναρίου που τεκμηριώνουν τόσο τις επιλογές των δραστηριοτήτων (“τι σχεδιάζεται, γιατί-πού-πώς-για πόσο”) όσο και τις αναμονές από την εφαρμογή τους στην πράξη (“τι αναμένεται να γίνει”). Έτσι, μια πολλαπλότητα πτυχών της διδακτικής πράξης όπως οι δράσεις των μαθητών και ο ρόλος του διδάσκοντα, η χωροχρονική οργάνωση του μαθήματος και η διδακτική διαχείριση της εφαρμογής των δραστηριοτήτων στην πράξη περιγράφονται στο σενάριο. Ένα σενάριο, λοιπόν, δεν αναφέρεται σε ένα απλό κομμάτι του αναλυτικού προγράμματος αλλά αποτελεί ένα “σύνθετο” εργαλείο που μπορεί να εστιάζει στη διδασκαλία μιας ή περισσότερων εννοιών συνδυάζοντας περισσότερα διδακτικά μέσα όπως π.χ. περισσότερα του ενός λογισμικά, σημειώσεις, ιστοσελίδες, όργανα (π.χ. πίνακας, διαβήτης), προκειμένου να επιτευχθεί ένα μαθησιακό αποτέλεσμα (Μακρή κ.α., 2006).

### **8.2.2 Τα χαρακτηριστικά ενός σεναρίου μαθηματικών**

Ο σχεδιασμός ενός σεναρίου εκλαμβάνεται ως μία πρόκληση να σκεφτεί ο εκπαιδευτικός καινούριους τρόπους διδακτικής προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών που περιλαμβάνουν την προσωπική εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες με πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Σε αντίθεση με τα σχέδια μαθήματος και τα επίσημα έγγραφα του αναλυτικού προγράμματος που αποτελούν συνήθως τεχνικά κείμενα με λεπτομερείς διδακτικές οδηγίες προς το διδάσκοντα (Φλουρής 1992), τα σενάρια διακρίνονται για τον επιτελικό τους χαρακτήρα και

τα περιθώρια επιλογών στο διδάσκοντα να ενσωματώσει την εφαρμογή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στη δική του εκπαιδευτική στρατηγική και στόχους. Με αυτή την έννοια ένα σενάριο μπορεί να λειτουργήσει ως ένας στρατηγικός καταλύτης, που στοχεύει να εμπλέξει τους συμμετέχοντες σε καινοτόμες δράσεις οι οποίες τους παρέχουν τη δυνατότητα να γνωρίσουν απρόσμενες μαθησιακές και διδακτικές καταστάσεις (Κυνηγός, 2007).

Εκτός από τις συνήθεις αναφορές σε συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους και ύλη, ένα σενάριο λαμβάνει υπόψη και τις κοινωνικές διαστάσεις και παραμέτρους του μαθησιακού περιβάλλοντος καθώς και τους περιορισμούς που προέρχονται από το σχολικό ή το ευρύτερο πολιτισμικό πλαίσιο. Για παράδειγμα, ο χρόνος που απαιτείται για την εφαρμογή των δραστηριοτήτων και οι απαραίτητες δράσεις των συμμετεχόντων προδιαγράφονται με σαφήνεια ώστε να μπορεί ο εκπαιδευτικός να κρίνει αν και σε ποια μέρη της διδασκαλίας μιας έννοιας θα εστιάσει κατά την εφαρμογή ανάλογα με το συνολικό διδακτικό σχεδιασμό της ύλης. Επιπρόσθετα, η εμπειρία εφαρμογής μπορεί να δώσει χρήσιμες ενδείξεις τόσο για την επέκταση μιας δραστηριότητας όσο και για την επαναχρησιμοποίησή της σε διαφορετικό κοινό, ηλικία και εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό του σεναρίου είναι η τεκμηρίωση των λειτουργικότητων της τεχνολογίας με αποκλειστική έμφαση στους μαθησιακούς στόχους που αφορούν τη διδασκαλία των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών. Τα υπολογιστικά εργαλεία, δηλαδή, δεν θεωρείται ότι προάγουν τη μάθηση επειδή διαθέτουν κάποια ιδιαίτερα 'οντολογικά' χαρακτηριστικά. Αντίθετα, η παιδαγωγική τους αξία καθορίζεται μέσα από τη χρήση τους και στο πλαίσιο συγκεκριμένων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Αυτή η έμφαση στη χρήση επιτρέπει την αναφορά στην κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης που πηγάζει από την δυνατότητα ανάπτυξης διαφορετικών ρόλων για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, που διαφέρουν ριζικά από το παραδοσιακό σχήμα του 'πομπού-δέκτη'.

### **8.2.3 Η δομή ενός σεναρίου**

Ένα σενάριο δεν κατατάσσεται σε κάποιο συγκεκριμένο κειμενικό ή αφηγηματικό είδος και έτσι δεν υπάρχει κάποια αυστηρή δομή με βάση την οποία οφείλει να γραφτεί. Παρόλ' αυτά και με βάση τα όσα προηγήθηκαν είναι προφανές ότι ένα σενάριο οφείλει να ενσωματώνει ένα σύνολο παραμέτρων που αφορούν αφενός το σχεδιασμό του μαθήματος και τις παιδαγωγικές αρχές στις οποίες βασίστηκε όσο και στην τεκμηριωμένη περιγραφή του

τρόπου με τον οποίο αναμένεται να αξιοποιηθούν τα χρησιμοποιούμενα υπολογιστικά εργαλεία κατά την εφαρμογή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στην τάξη.

Για την περιγραφή των σεναρίων-προτύπων που παρατίθενται στο επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε μια συγκεκριμένη δομή που βασίστηκε στη σύνθεση αντίστοιχων προτάσεων από ερευνητικές ομάδες διαφορετικών χωρών με εμπειρία στη γραφή σεναρίων για τη διδακτική των μαθηματικών<sup>3</sup>. Η δομή αυτή βασίζεται στην ομαδοποίηση των ακόλουθων βασικών αξόνων: την ταυτότητα του σεναρίου, το σκεπτικό της δημιουργίας του σεναρίου, το πλαίσιο εφαρμογής, την ανάλυση των δραστηριοτήτων, την αξιολόγηση του σεναρίου και την δυνατότητα επέκτασής του.

### **8.3 Τα προτεινόμενα σενάρια ως εργαλεία διδακτικής παρέμβασης και αναστοχασμού**

Τα δέκα σενάρια-πρότυπα που περιγράφονται στο επόμενο κεφάλαιο αποτελούν μέρος του επιμορφωτικού υλικού των ΚΣΕ έχουν σχεδιαστεί με την επιδίωξη να λειτουργήσουν (α) ως προτάσεις διδασκαλίας που αφορούν την καθημερινή σχολική πραγματικότητα (β) ως εναύσματα για την εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών με το διδακτικό σχεδιασμό και (γ) ως αντικείμενα για αναστοχασμό των εκπαιδευτικών με στόχο να συμβάλλουν στην αναβάθμιση της διδακτικής πρακτικής. Τα σενάρια αυτά αποτελούν σχέδια δραστηριότητας δομημένα με τρόπο ώστε να μπορούν αφενός να αποτελέσουν ένα χειροπιαστό υλικό για τη διεξαγωγή μαθημάτων στις σχολικές τάξεις και αφετέρου να γίνουν αντικείμενα

- 
- I. 'ESCALATE' Enhancing Science Appeal in Learning through Argumentative inTEraction FP6-2004-Science-and-Society-11, 020790 (2006-2008), <http://www.escalate.org.il/engsite/home/default.asp> .
  - II. 'ReMath' - Representing Mathematics with Digital Media FP6, IST-4, STREP 026751 (2005 – 2008). [http://remath.cti.gr/default\\_remath.asp](http://remath.cti.gr/default_remath.asp)
  - III. 'Kaleidoscope' - Concepts and Methods for Exploring the Future of Learning with Digital Technologies, # 507838, 'TEL' - 'Technology-enhanced Learning and Access to Cultural Heritage', Network of Excellence, FP6-2002-IST Action line.3.1.12 (2004-2007). <http://www.noe-kaleidoscope.org/> και <http://telma.noe-kaleidoscope.org>.

επικοινωνίας και αναστοχασμού μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών ή επιμορφωτών. Ο απώτερος στόχος να αποτελέσουν τη ‘μαγιά’ της δημιουργίας νέων σεναρίων από τους εκπαιδευτικούς.

Από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου, τα συγκεκριμένα σενάρια οριοθετούν την αφετηρία της μελέτης μιας σειράς μαθηματικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος και έχουν βασιστεί στη χρήση μιας ομάδας υπολογιστικών περιβαλλόντων αντιπροσωπευτικών της ποικιλίας των λογισμικών που έχουν αναπτυχθεί στη χώρα μας αλλά και διεθνώς για τη διδακτική των μαθηματικών. Έτσι, δεν προτείνεται να ειπωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος από τους μαθητές.

Στην παρούσα μορφή τους τα σενάρια-πρότυπα περιλαμβάνουν υποδείξεις σχετικά με εναλλακτικές δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης ή επέκτασης των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, χωρίς όμως αυστηρή καθοδήγηση που θα περιόριζε τη δημιουργικότητα των εκπαιδευτικών. Βασικός στόχος είναι οι καταρτιζόμενοι εκπαιδευτικοί να υποστηριχθούν με τρόπο ώστε να καλλιεργηθούν ο αναστοχασμός πάνω στη σχέση μαθηματικών εννοιών, υπολογιστικών εργαλείων και διδακτικής πρακτικής μέσα από το διάλογο, τη διερεύνηση και την άμεση εμπλοκή με το σχεδιασμό καινοτόμων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων.



## 9. Παραδείγματα σεναρίων με βάση τις κατηγορίες λογισμικού

---

### 9.1 Συμβολική έκφραση μέσω του προγραμματισμού.

#### 9.1.1 Σενάριο 1. Σκιτσάροντας με Παραλληλόγραμμα

*Γνωστική περιοχή:* Γεωμετρία (και σχέσεις μεταξύ γενικευμένων αριθμών).

Θέμα:

Η διερεύνηση μερικών βασικών ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων από τους μαθητές με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Χελωνόκοσμος.

**Σκεπτικό:**

Βασική ιδέα

Σύμφωνα με το σενάριο αυτό οι μαθητές θα εμπλακούν σε διαδικασίες κατασκευής παραλληλογράμμων και μετέπειτα χρήσης τους για την κατασκευή δυναμικών σκίτσων. Το κύριο μέρος της διερεύνησης των μαθητών για την κατασκευή παραλληλογράμμων θα βασιστεί σε απλές διαδικασίες σε γλώσσα Logo οι οποίες όταν εκτελούνται έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία τεθλασμένων γραμμών. Οι μαθητές θα κληθούν να κάνουν πειράματα για το πότε το αποτέλεσμα της εκτέλεσής τους σχεδιάζει παραλληλόγραμμο. Για τον πειραματισμό αυτό, θα εκτελούν τις διαδικασίες με διαφορετικές τιμές πλευρών ή γωνιών τις οποίες παράλληλα θα μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία. Ο στόχος είναι να ανακαλύψουν οι ίδιοι οι μαθητές τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων και να 'διορθώσουν' τις διαδικασίες ώστε να φτιάχνουν πάντοτε παραλληλόγραμμο. Στο τέλος θα χρησιμοποιήσουν τα διορθωμένα προγράμματα για να φτιάξουν σχέδια δικής τους επιλογής βασισμένα στο παραλληλόγραμμο

ως δομικό λίθο στα σχέδιά τους. Τα σχέδια αυτά μπορούν να τα ‘ζωντανέψουν’ δίνοντας τους κίνηση με το εργαλείο δυναμικού χειρισμού (μεταβολέας).

#### Προστιθέμενη αξία

Η διδασκαλία των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων στην παραδοσιακή τάξη γίνεται με τη μορφή της παρουσίας τους από το διδάσκοντα. Οι μαθητές καλούνται έτσι να “μάθουν” την αντίστοιχη γεωμετρική γνώση μέσα από την παρατήρηση ή το σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων με στατικά μέσα αναπαράστασης τα οποία μπορεί να προσφέρουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων και των σχέσεων που διέπουν την κατασκευή τους. Στα λογισμικά συμβολικής έκφρασης για τη γεωμετρία όπως ο Χελωνόκοσμος οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν συνδυασμό αναπαραστάσεων των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, δηλαδή θα τις διατυπώσουν υπό τη μορφή εντολών σε συμβολική γλώσσα, θα παρατηρήσουν το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών στο μηχανήμα και θα χειριστούν δυναμικά τις γεωμετρικές τους κατασκευές αλλάζοντας με συνεχή τρόπο τις τιμές των μεταβλητών μεγεθών τους. Με τη βοήθεια της προτεινόμενης δραστηριότητας θα εμπλακούν σε διαδικασίες εικασίας, κατασκευής υποθέσεων, εξαγωγής συμπερασμάτων και σταδιακής γενίκευσης και διατύπωσης κανόνων για τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

#### Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στην Α΄ Γυμνασίου.

Χρόνος υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 6 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ’ ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών, ώστε οι μαθητές να μοιράζονται τους υπολογιστές και να μπορούν να πειραματίζονται οι ίδιοι, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες του Χελωνόκοσμου, τις απλές εντολές της γλώσσας Logo και τις έννοιες της παραλληλίας ευθειών, του τετραπλεύρου και της γωνίας.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον/την διδάσκοντα/διδάσκουσα και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων. Πριν την διεξαγωγή της δραστηριότητας ο/η διδάσκων/διδάσκουσα μπορεί, μέσω απλών δραστηριοτήτων, να συζητήσει με τους μαθητές για τις βασικές εντολές της Logo, τις λειτουργικότητες του Χελωνόκοσμου αλλά και τις μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται ως υπόβαθρο για την διεξαγωγή της.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να εξερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων χρησιμοποιώντας παραμετρικές διαδικασίες που τους έχουν δοθεί από τον/την διδάσκοντα/διδάσκουσα. Η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο/η διδάσκων/διδάσκουσα θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία και να προκαλεί συζητήσεις με όλη την τάξη όταν θεωρεί ότι τα συμπεράσματα κάποιων ομάδων θα είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση και των υπολοίπων.

Στόχοι

Βασικός διδακτικός στόχος είναι η ανακάλυψη, κατανόηση και εφαρμογή βασικών ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων και η μελέτη ορισμένων ειδικών περιπτώσεων παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) μέσα από το δυναμικό τρόπο χειρισμού και κατασκευής τους. Απώτερος στόχος είναι να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να εμβαθύνουν στις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος και παράλληλα να διερευνήσουν το πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες για να φτιάξουν και να κινήσουν άλλα δικά τους σχέδια. Ειδικότερα, οι επιδιωκόμενοι στόχοι μέσα από τη συγκεκριμένη διερεύνηση είναι:

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο

Να ‘ανακαλύψουν’ οι μαθητές ότι :

- Στα παραλληλόγραμμα οι απέναντι γωνίες είναι ίσες
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες
- Το άθροισμα των γωνιών είναι 360 μοίρες
- Οι προσκείμενες σε μια πλευρά γωνίες είναι παραπληρωματικές
- Να μελετήσουν ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους. Π.χ. να ανακαλύψουν ότι:
  - το ορθογώνιο έχει και τις τέσσερις γωνίες του ορθές
  - το τετράγωνο έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες και τις τέσσερις γωνίες του ορθές
  - ο ρόμβος έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες.

Ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών

Δημιουργία, ερμηνεία και διόρθωση απλών προγραμμάτων σε γλώσσα Logo που περιέχουν παραμετρικές διαδικασίες (διαδικασίες με μεταβλητές) για την κατασκευή παραλληλογράμμων.

Χρήση του εργαλείου δυναμικού χειρισμού (Μεταβολέας) για το χειρισμό αριθμητικών δεδομένων προκειμένου να προκύψουν κλειστά σχήματα και ειδικότερα παραλληλόγραμμα.

Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

Άσκηση στη διεξαγωγή πειραμάτων προκειμένου να ‘κλείσει’ ένα παραλληλόγραμμα.

Διατύπωση υποθέσεων και εξαγωγή συμπερασμάτων για τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Σταδιακή γενίκευση των συμπερασμάτων τους μέχρι να καταλήξουν στη διατύπωση κανόνα για τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

### **Ανάλυση του σεναρίου**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις φάσεις:

1η Φάση: Κατασκευή ορθογωνίου.

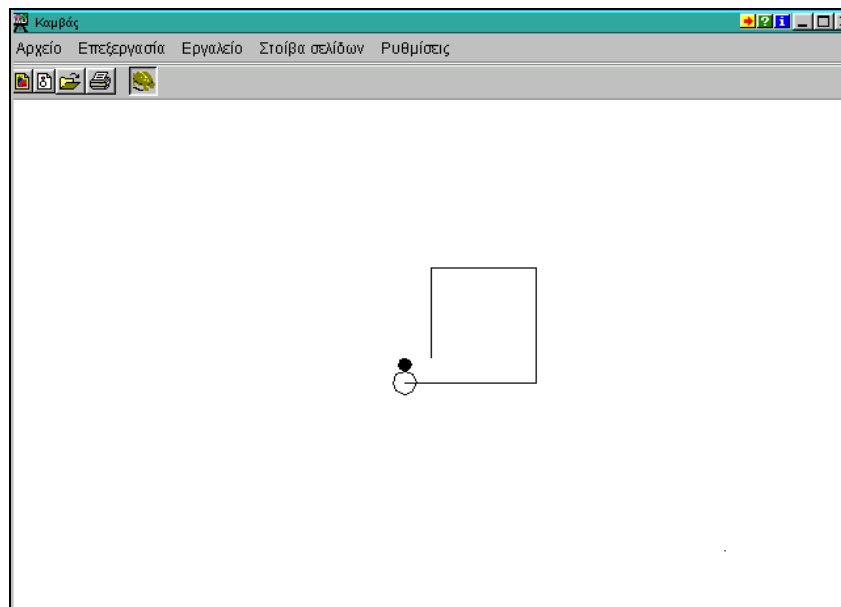
Δίνεται στους μαθητές η παρακάτω παραμετρική διαδικασία:

για μυστήριο1 :α :β :γ :δ

μ :α δ 90 μ :β δ 90 μ :γ δ 90 μ :δ δ 90

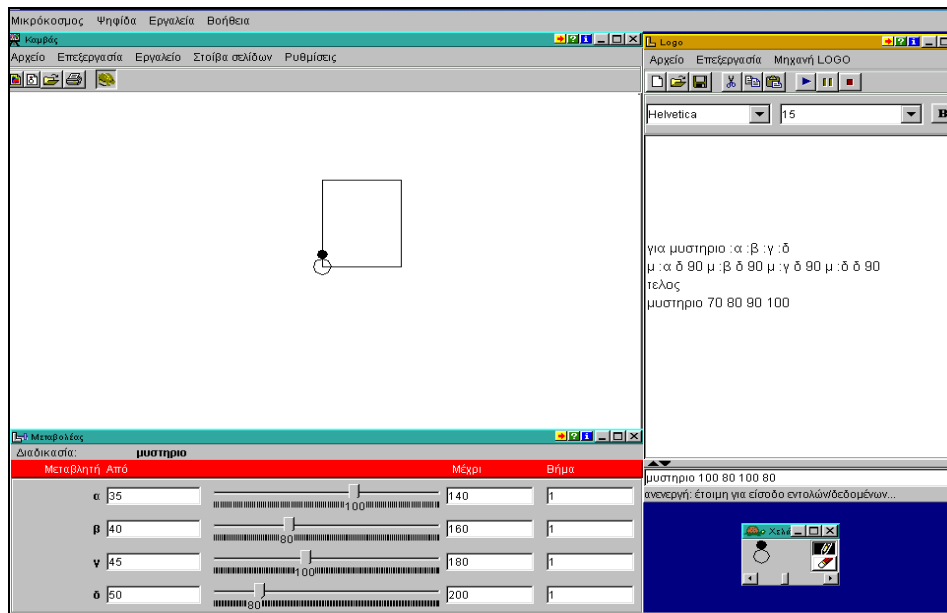
τέλος

Ζητείται να την εκτελέσουν δίνοντας τυχαίες τιμές στις μεταβλητές α, β, γ και δ. Η διαδικασία αυτή θα κατασκευάσει (για τυχαίες τιμές των μεταβλητών) μία τεθλασμένη γραμμή με ορθές γωνίες. Στην εικόνα 18 φαίνεται η γραμμή για τις τιμές 70, 80,90, 100 αντιστοίχως.



Εικόνα 18

Ζητείται από την κάθε ομάδα μαθητών να κάνει πειράματα προσπαθώντας να βρει ποια σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των τεσσάρων τιμών των μεταβλητών ώστε να προκύψει ορθογώνιο και να διατυπώσει τον κανόνα. Στην εικόνα 19 φαίνεται το ορθογώνιο που κατασκευάζεται από την προηγούμενη διαδικασία για α=γ=100 και β=δ=80.



Εικόνα 19

Τους ζητείται δηλαδή να πειραματισθούν χρησιμοποιώντας διάφορες αριθμητικές τιμές, να χρησιμοποιήσουν τον μεταβολέα για να δουν με ποιο τρόπο μεταβάλλεται το σχήμα καθώς αυξομειώνεται μια τιμή, να συζητήσουν και να καταγράψουν τα συμπεράσματά τους.

Η εμπειρία αυτή αναμένεται να τροφοδοτήσει σχετική συζήτηση τόσο στα πλαίσια της κάθε ομάδας όσο και στην τάξη συνολικά με στόχο να διατυπώσουν μαθητές συμπεράσματα όπως: οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες

όταν όλες οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες έχουμε τετράγωνο.

Για το σκοπό αυτό, κατά την διάρκεια του πειραματισμού στον υπολογιστή, ο/η εκπαιδευτικός περιφέρεται στις ομάδες των μαθητών κάνοντας ερωτήσεις και παροτρύνοντας τους μαθητές να δοκιμάσουν διάφορες αριθμητικές τιμές ώστε κρίσιμες πτυχές του γνωστικού αντικειμένου να έρχονται στο προσκήνιο (π.χ. τότε 'κλείνει' το σχήμα; Δοκιμάστε με διαφορετικές γωνίες) αξιοποιώντας ενέργειες και δράσεις των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με τα κατασκευαζόμενα σχήματα.

Στη συνέχεια, οι μαθητές χρησιμοποιούν τον κανόνα, που πρέπει να συνδέει τις μεταβλητές για να κατασκευάζεται ορθογώνιο, για να διορθώσουν την παραμετρική διαδικασία ώστε αυτή να περιέχει δύο μόνο μεταβλητές. Αναμένεται να προκύψουν διαδικασίες της μορφής:

*για ορθογώνιο :χ :ψ*

$\mu : \chi \delta 90 \mu : \psi \delta 90 \mu : \chi \delta 90 \mu : \psi \delta 90$

τέλος

2η Φάση: Κατασκευή παραλληλογράμμου.

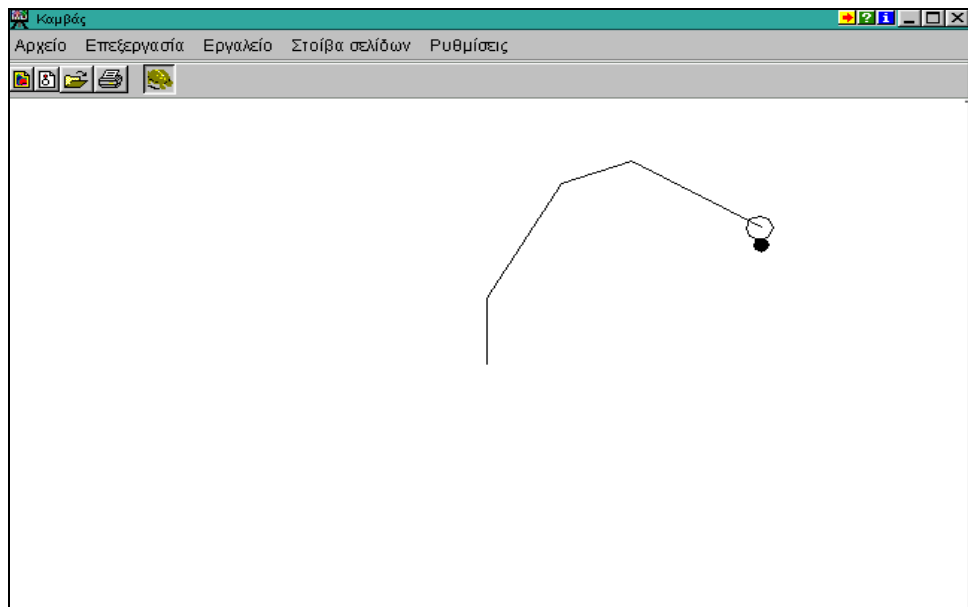
Δίνεται στους μαθητές η ακόλουθη παραμετρική διαδικασία:

για μυστήριο2 :ε :ζ :η :θ

$\mu 50 \delta : \varepsilon \mu 100 \delta : \zeta \mu 50 \delta : \eta \mu 100 \delta : \theta$

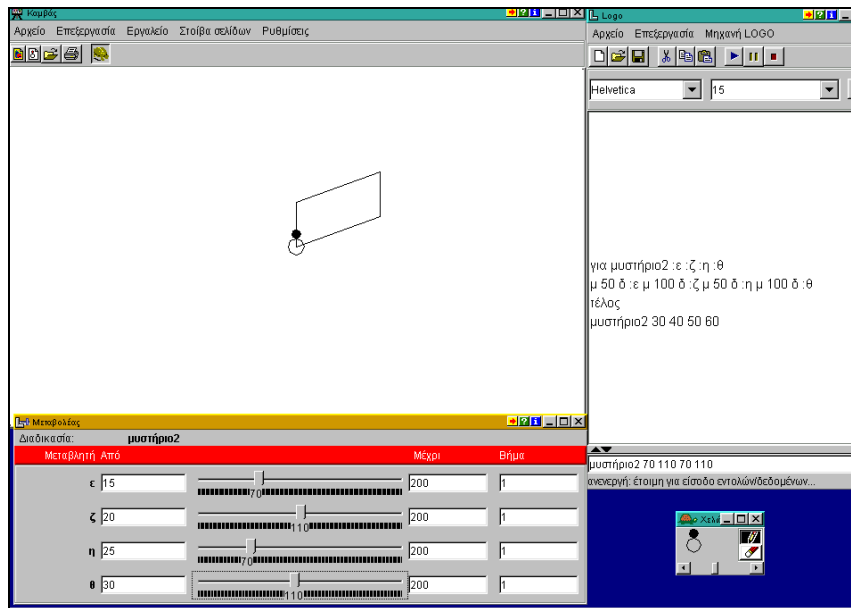
τέλος

Ζητείται να την εκτελέσουν δίνοντας τυχαίες τιμές στις μεταβλητές ε, ζ, η και θ. Η διαδικασία αυτή θα κατασκευάσει (για τυχαίες τιμές των μεταβλητών) μία τεθλασμένη γραμμή (στην εικόνα 20 φαίνεται η γραμμή για τις τιμές 30, 40,50, και 60 αντιστοίχως).



Εικόνα 20

Ζητείται από την κάθε ομάδα μαθητών να κάνει πειράματα προσπαθώντας να βρει: ποια σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των τεσσάρων τιμών των μεταβλητών για να είναι το σχήμα παραλληλόγραμμο. Στην εικόνα 21 φαίνεται το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από την προηγούμενη διαδικασία για  $\varepsilon=\eta=70$  και  $\zeta=\theta=110$ .



Εικόνα 21

Όπως και στην προηγούμενη φάση γίνεται η ίδια διαδικασία πειραματισμού και συζήτησης με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι:

Το άθροισμα των γωνιών του παραλληλογράμμου είναι 360 μοίρες

Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες

Οι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές

Το ορθογώνιο και το τετράγωνο είναι ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμου

Αφού οι μαθητές βρουν τον κανόνα που πρέπει να συνδέει τις μεταβλητές για να κατασκευάζεται παραλληλόγραμμο τους ζητείται να διορθώσουν τη διαδικασία ώστε να περιέχει μία μόνο μεταβλητή. Αναμένεται να προκύψουν διαδικασίες της μορφής:

για Απαραλληλόγραμμο :ε

$\mu 50 \delta : \epsilon \mu 100 \delta : 180 - : \epsilon \mu 50 \delta : \epsilon \mu 100 \delta : 180 - : \epsilon$

τέλος

Τέλος, η διαδικασία διερεύνησης καταλήγει στο να ορίσουν όλες οι ομάδες την διαδικασία που κατασκευάζει παραλληλόγραμμο με τρεις μεταβλητές [δύο για τις πλευρές και μία για τη γωνία]:

για Βπαραλληλόγραμμο :χ :ψ :ε



$\mu : \chi \delta : \varepsilon \mu : \psi \delta 180 - : \varepsilon \mu : \chi \delta : \varepsilon \mu : \psi \delta 180 - : \varepsilon$

τέλος

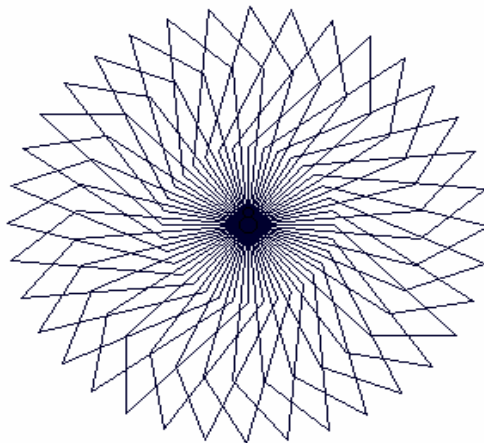
3η Φάση: Κατασκευή σχεδίων με βάση το παραλληλόγραμμο.

Στη φάση αυτή ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα δικό τους σκαρίφημα ή σχέδιο βασισμένο σε πολλά διαφορετικά παραλληλόγραμμο που θα μπορούν να ‘κινήσουν’ με το μεταβολέα. Με στόχο να βιώσουν την ισχύ του γενικευμένου -χάρη στα μαθηματικά – εργαλείου, προτείνεται στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ως δομικό λίθο τη διαδικασία κατασκευής παραλληλογράμμων διαφορετικής μορφής και μεγέθους που έχουν ήδη έχουν φτιάξει στην προηγούμενη φάση (Βπαραλληλογραμμο). Για παράδειγμα, η κατασκευή ενός ανεμόμυλου μπορεί να ολοκληρωθεί με τον καθορισμό της παραμετρικής διαδικασίας που θα κατασκευάζει  $n$  παραλληλόγραμμο (με τη διαδικασία Βπαραλληλογραμμο) που θα στρέφονται κατά γωνία  $360/n$  (Εικόνα 22).

για ανεμόμυλο  $:\chi : \psi : \varepsilon : n$

επαναλαβε  $:n$  [Βπαραλληλόγραμμο  $:\chi : \psi : \varepsilon \delta 360/:n$ ]

τέλος



Εικόνα 22

Σε αυτό το σημείο μπορεί να τεθούν ερωτήματα όπως:

Πότε ο ανεμόμυλος στρέφεται γρηγορότερα καθόσον κινείται ο μεταβολέας;

Πώς επηρεάζει το σχήμα του ανεμόμυλου η αλλαγή κάθε μεταβλητής;

Η φάση αυτή ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της δουλειάς κάθε ομάδας στην τάξη και διάλογο πάνω στις εργασίες των μαθητών.

### **Επέκταση του σεναρίου**

Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το Χελωνόκοσμο και τις γνώσεις που αποκόμισαν από την διεξαγωγή της δραστηριότητας για να πειραματιστούν με τη διερεύνηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων της κατασκευής συνθετότερων γεωμετρικών σχημάτων, όπως κανονικών πολυγώνων.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που σχετίζονται με τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Ως προς τα εργαλεία

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Στο Χελωνόκοσμο εννοείται ο συμβολισμός μεταβαλλόμενων μεγεθών και ο χειρισμός τους με το 'σύρσιμο' μιας αριθμογραμμής, που είναι καινούριες αναπαραστάσεις για τους μαθητές. Για παράδειγμα, οι διασυνδέσεις μιας μεταβλητής με το μέγεθος που αναπαριστά και την δυναμική αλλαγή των τιμών της στον αντίστοιχο μεταβολέα είναι προς διερεύνηση. Κάθε διδάσκων οφείλει να λάβει υπόψη τις όποιες δυσκολίες και να επανασχεδιάσει την εφαρμογή εκ νέου (επιλέγοντας π.χ. κατάλληλες δραστηριότητες για την εισαγωγή των μαθητών στη χρήση των εργαλείων).

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η δομή του σεναρίου, η σειρά των δραστηριοτήτων και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Για παράδειγμα, πόσο εύκολο ήταν για τους μαθητές να κατασκευάσουν συνθέσεις γεωμετρικών κατασκευών στην 3η φάση με βάση τα παραλληλόγραμμα που κατασκεύασαν; Ο διδάσκων μπορεί να κρατάει σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων ώστε να

είναι σε θέση στο μέλλον, ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο ή το γνωστικό επίπεδο συγκεκριμένων μαθητών, να προβεί σε αλλαγές στη ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων, στη διατύπωσή τους ή ακόμα και στα εκάστοτε ζητούμενα.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Το σενάριο είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε η υλοποίησή του να σχετίζεται τόσο με τη χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος όσο και με τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες που αφορούν τις ιδιότητες της κατασκευής παραλληλογράμμων. Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο προσφέρει περιθώρια διαφοροποιημένης διδακτικής ανέλιξης και επιλογής σημείων εστίασης, καθώς το μαθηματικό μέρος που καλύπτει μπορεί να συμπεριλάβει π.χ. τη μελέτη της χρήσης μεταβλητών, της έννοιας της γωνίας/στροφής κ.λπ.

### **Σχεδίαση φύλλου εργασίας**

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με την διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σύνταξης του προγράμματος και παρατήρησης (για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα)
- Ερωτήματα διατύπωσης (για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις)
- Ερωτήματα ελέγχου (για ερμηνείες, επεξηγήσεις, αποδείξεις, κτλ)

#### **9.1.2 Σενάριο 2. Κατασκευή δυναμικής γραμματοσειράς**

Γνωστική περιοχή:

Γεωμετρία.

Θέμα:

Η διερεύνηση της αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Ο όρος αυξομείωση αναφέρεται στη δυνατότητα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης δυναμικά μεταβαλλόμενων γεωμετρικών σχημάτων, η κατασκευή των οποίων βασίζεται σε σχέσεις αναλογίας μεταξύ των μεταβλητών μεγεθών τους που μπορεί να εκφραστούν στη μορφή  $y = ax$ . Παρότι στο επίκεντρο του σεναρίου βρίσκονται οι μαθηματικές έννοιες λόγου και αναλογίας, παράλληλα, δίνονται δυνατότητες εξοικείωσης των μαθητών με τη χρήση μεταβλητών για κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων και διερεύνησης του ρόλου τους στην κατασκευή αυξομειούμενων μοντέλων τους.

Τεχνολογικά εργαλεία

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Χελωνόκοσμος.

### **Σκεπτικό**

Βασική ιδέα

Σύμφωνα με το σενάριο αυτό μια σχολική τάξη αναλαμβάνει την κατασκευή με το Χελωνόκοσμο μια γραμματοσειράς με όλα τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου, ώστε μετέπειτα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη γραφή λέξεων και φράσεων διαφορετικών μεγεθών. Γι' αυτό το λόγο τα γράμματα πρέπει να είναι δυνατό να αυξομειωθούν με τον ίδιο τρόπο όταν τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο. Επειδή στις κατασκευές στο Χελωνόκοσμο τα εμπλεκόμενα μεγέθη είναι συνεχή και αναπαριστούν τα μεταβαλλόμενα μεγέθη ενός σχήματος οι μαθητές επιδιώκεται να πειραματιστούν με τον έλεγχο της μορφής και του μεγέθους κάθε γράμματος χρησιμοποιώντας μεταβλητές για τα μήκη και τις γωνίες του. Η κατασκευή μιας τέτοιας γραμματοσειράς –που λόγω της δυνατότητας αλλαγής μεγέθους των γραμμάτων χαρακτηρίζεται δυναμική- εξασφαλίζεται με τη χρήση της ίδιας μεταβλητής, που αντιστοιχεί στο κατακόρυφο ύψος κάθε γράμματος, ενώ οι γωνίες των γραμμάτων παραμένουν σταθερές. Για την κατασκευή τέτοιων σχημάτων απαιτείται η συναρτησιακή έκφραση όλων των μηκών των γραμμάτων με την ίδια μεταβλητή.

Προστιθέμενη αξία

Οι έννοιες λόγου και αναλογίας στα γεωμετρικά σχήματα βρίσκονται ενσωματωμένες σε διαφορετικές περιοχές του 1ου κεφαλαίου της γεωμετρίας της Γ' γυμνασίου. Στην §1.4 του αντίστοιχου σχολικού βιβλίου, για παράδειγμα, η έννοια της ομοιότητας δύο γεωμετρικών

σχημάτων εισάγεται μέσα από την περιγραφή των απαραίτητων σχέσεων αναλογίας μεταξύ των πλευρών τους και της ισότητας των γωνιών τους. Στο παράδειγμα αυτό αναφέρεται ότι τα συγκεκριμένα σχήματα “σχεδιάστηκαν ώστε (ενν. οι εν λόγω σχέσεις) να ισχύουν”.

Ανάλογα, στην §1.5 του ίδιου βιβλίου η έννοια του λόγου ομοιότητας συνδέεται με την κλίμακα ενός γεωγραφικού χάρτη μέσα από ένα παράδειγμα στο οποίο περιγράφεται λεκτικά η μετάβαση από ένα μέγεθος του χάρτη στο αντίστοιχο πραγματικό.

Η έλλειψη κατάλληλων αναπαραστασιακών μέσων οδηγεί συχνά στην διδακτική προσέγγιση των παραπάνω εννοιών μέσα από την περιγραφή κανόνων και τύπων, ενώ δεν δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να διερευνήσουν τη διασύνδεση γεωμετρικών ιδιοτήτων και αριθμητικών/αλγεβρικών σχέσεων που διέπουν τη διαδικασία μεγέθυνσης-σμίκρυνσης ενός γεωμετρικού σχήματος. Το παρόν σενάριο επιδιώκει να προκαλέσει καινοτομικές διδασκαλίες αναφορικά με τις έννοιες λόγου και αναλογίας στα γεωμετρικά σχήματα που καθορίζονται από τις παρακάτω παραμέτρους:

**Πειραματισμός για την έκφραση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών σε κάθε γράμμα.** Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τις απαραίτητες σχέσεις ώστε να επιτευχθεί η αυξομείωση μιας γεωμετρικής κατασκευής μέσα από πειραματισμό και διερεύνηση. Το συγκεκριμένο υπολογιστικό περιβάλλον ευνοεί την εστίαση των μαθητών στις μαθηματικές ιδιότητες αυτής της διαδικασίας καθώς κάθε γεωμετρική κατασκευή στο Χελωνόκοσμο προαπαιτεί πειραματισμό για το χτίσιμο και την έκφραση των απαραίτητων συναρτησιακών σχέσεων από τους μαθητές. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα πειραματισμού έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη διδακτική πρακτική αποτελεί την κατάληξη και όχι την αφετηρία για την επίτευξη της μεγέθυνσης-σμίκρυνσης των γεωμετρικών σχημάτων.

**Νοηματοδότηση της κατασκευής γραμματοσειράς.** Οι μαθητές αναμένεται να εμπλακούν σε μια δραστηριότητα που έχει σχεδιαστεί ώστε να αποδίδεται νόημα στην έννοια της μεγέθυνσης-σμίκρυνσης καθώς η κατασκευή των κεφαλαίων γραμμάτων αποτελεί χαρακτηριστική κατασκευαστική δραστηριότητα στην οποία το νόημα της αυξομείωσης συνδέεται άμεσα με τη χρήση των γραμμάτων μιας γραμματοσειράς. Η διατήρηση του σχήματος κάθε γράμματος για διαφορετικά μεγέθη αποτελεί κοινό τόπο για οποιονδήποτε έχει –έστω ελάχιστη- εμπειρία χρήσης επεξεργαστή κειμένου.

**Μελέτη των πολλαπλών αναπαραστάσεων των σχέσεων αναλογίας.** Το υπολογιστικό περιβάλλον, λόγω σχεδιασμού, ευνοεί τις αλληλεπιδράσεις με διαφορετικές αναπαραστάσεις

των αναλογικών σχέσεων που στην προκειμένη περίπτωση είναι δυναμικά συνδεδεμένες δηλαδή οι αλλαγές στη μια επιφέρουν αλλαγές και στις υπόλοιπες που συνδέονται με αυτή.

**Ανάπτυξη συνεργατικών και επικοινωνιακών πρακτικών.** Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εργαστούν σε ομάδες για την κατασκευή ενός συλλογικού προϊόντος της τάξης τους έχοντας ευκαιρίες ανταλλαγής των εργασιών τους με άλλες ομάδες και άρα ανάπτυξης επικοινωνιακών πρακτικών και επιχειρηματολογίας.

Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Από την έρευνα προκύπτει ότι οι πλέον συνηθισμένες στρατηγικές των μαθητών για την επίλυση των προβλημάτων μεγέθυνσης-σμίκρυνσης είναι οι προσθετικές, σύμφωνα με οποίες όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει όταν προστεθούν στα μήκη των πλευρών του κατάλληλα μήκη, μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος. Οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν ότι για τη μεγέθυνση-σμίκρυνση ενός σχήματος απαιτούνται πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Στη συνήθη διδασκαλία των προβλημάτων μεγέθυνσης-σμίκρυνσης στο σχολείο η κυριαρχία των ακολουθούμενων από τα παιδιά προσθετικών στρατηγικών επιτείνεται από τρεις παράγοντες:

Η αύξηση των πλευρών ενός αρχικού σχήματος δημιουργεί συχνά ένα σχήμα της ίδιας κατηγορίας (π.χ. ορθογώνιο) και έτσι οι μαθητές, δυσκολεύονται να διακρίνουν το λάθος της προσθετικής μεθόδου.

Στα προβλήματα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης η αριθμητική-αλγεβρική επεξεργασία του προβλήματος εμφανίζεται αποκομμένη από το τελικό γεωμετρικό αποτέλεσμα καθώς η επίλυσή τους προϋποθέτει τη διασύνδεση γεωμετρικών ιδιοτήτων και αριθμητικών/αλγεβρικών σχέσεων.

Η στατικότητα των μέσων που έχουν στη διάθεσή τους οι μαθητές δεν ευνοεί την αναπαράσταση του δυναμικού χαρακτήρα της μεγέθυνσης-σμίκρυνσης ενός σχήματος.

### **Πλαίσιο εφαρμογής**

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στη Γ΄ Γυμνασίου. Παρόλ' αυτά αναφορές στις έννοιες λόγου και αναλογίας εμφανίζονται και στα αναλυτικά προγράμματα της Α΄ και της

Β΄ Γυμνασίου. Για παράδειγμα, η αναφορά σε λόγους και αναλογίες στην Α΄ Γυμνασίου γίνεται στο πλαίσιο των αναλόγων ποσών και των ιδιοτήτων τους. Αναφορές στα ίδια θέματα περιλαμβάνονται επίσης και στην ύλη της Β΄ Γυμνασίου, όπου τα ανάλογα ποσά μελετώνται στο πλαίσιο της συνάρτησης  $y=ax$ . Έτσι, ο διδάσκων μπορεί να επιλέξει τη εφαρμογή μέρους των δραστηριοτήτων του σεναρίου και στις τάξεις αυτές ανάλογα με το σημείο εστίασης που θα επιλέξει να έχει από πλευράς γνωστικού αντικειμένου (Π.χ. ανάλογα ποσά για την Α΄ Γυμνασίου, γραμμική συνάρτηση  $y=ax$  για τη Β΄ Γυμνασίου).

#### Χρόνος υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 7-8 διδακτικές ώρες. Είναι όμως επιλογή του διδάσκοντα να μην ολοκληρώσει όλες τις φάσεις που περιγράφονται στο σενάριο (βλ. στην Ανάλυση του σεναρίου) αλλά να κάνει επιλογή ανάλογα (α) με τις έννοιες του αναλυτικού προγράμματος στις οποίες σκοπεύει να επικεντρωθεί μέσω της εφαρμογής, (β) με τη σχολική τάξη που θα επιλέξει και (γ) με το διαθέσιμο χρόνο.

#### Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Η ολοκλήρωση όλων των φάσεων του σεναρίου διευκολύνεται αν υπάρχουν τουλάχιστον 10 θέσεις ώστε να μπορούν οι μαθητές να εργαστούν σε ομάδες των δύο. Η υλοποίηση στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα δεν συνίσταται καθώς ακυρώνεται το διερευνητικό μέρος των δραστηριοτήτων κατασκευής που αφορά αποκλειστικά την εμπλοκή των μαθητών με τη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων.

#### Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Την έννοια της μεταβλητής και της γραμμικής συνάρτησης

Στοιχειώδεις ιδιότητες βασικών γεωμετρικών σχημάτων

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Τη δημιουργία, ερμηνεία και διόρθωση απλών προγραμμάτων σε γλώσσα προγραμματισμού Logo που εμπεριέχουν παραμετρικές διαδικασίες (χρήση μεταβλητών).

Να είναι εξοικειωμένοι με την λειτουργία του μεταβολέα και τη χρήση του για τον δυναμικό χειρισμό μεταβλητών ποσοτήτων.

Επειδή, πάντως, ο βαθμός εξοικείωσης των μαθητών με τα υπολογιστικά εργαλεία είναι κρίσιμος για την μετέπειτα πορεία εφαρμογής των δραστηριοτήτων του σεναρίου μια ενδεικτική πορεία εισαγωγής στο Χελωνόκοσμο μπορεί να περιλαμβάνει:

Κατασκευή μεταβλητού τετραγώνου. Στόχος: η χρήση μεταβλητής και εντολής ‘επανάλαβε’.

Κατασκευή μεταβλητού ορθογωνίου. Στόχος: η χρήση περισσότερων από μία μεταβλητών για μια γεωμετρική κατασκευή.

Εστίαση στη δυνατότητα μετακίνησης της χελώνας σε διάφορα σημεία της οθόνης με εντολές.

Κατασκευή ημικυκλίου και κύκλου με τη διαδικασία

*για τοξο :α :β :γ*

*επανάλαβε :α [ μ :β δ :γ ]*

*τελος*

Στόχος: Η εξοικείωση με την απαραίτητη διερεύνηση της κατασκευής καμπύλων μερών στα αντίστοιχα γράμματα. Αν η εμπειρία των μαθητών με τη Logo είναι περιορισμένη τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεταβλητή μόνο για το βήμα της χελώνας (μεταβλητή β) ενώ είναι σκόπιμο για μετέπειτα διευκόλυνση η στροφή (μεταβλητή γ) να παραμείνει σταθερή και ίση με 1. Μια διαδικασία κατασκευής ημικυκλίου είναι

*για ημικυκλιο :β*

*επανάλαβε 180 [μ :β δ 1]*

*τελος*

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Είναι χρήσιμο οι μαθητές να έχουν μπροστά τους σε πίνακα τις βασικές εντολές μετακίνησης και στροφής της χελώνας όπως και οδηγίες γραφής μιας διαδικασίας, ορισμού της και εκτέλεσής της αλλά και ενεργοποίησης του μεταβολέα.



## Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας, καλούνται να κατασκευάσουν αυξομειούμενα μοντέλα των κεφαλαίων γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου. Καθώς η εφαρμογή της δραστηριότητας προβλέπει την κατασκευή συγκεκριμένων γραμμάτων από συγκεκριμένες ομάδες όπως και την ανταλλαγή τους μεταξύ των ομάδων στην τελευταία φάση της εφαρμογής, είναι αναγκαίο από την αρχή ο διδάσκων να υπογραμμίσει τη σημασία της συνεργασίας όλων των ομάδων για ένα κοινό στόχο: τη δημιουργία μιας δυναμικής γραμματοσειράς από την τάξη τους. Έτσι, είναι σκόπιμο οι μαθητές καθοδηγούνται μέσα από κατάλληλα φύλλα εργασίας σχετικά με τα χαρακτηριστικά αλλά και τους περιορισμούς που θα πρέπει να έχουν οι κατασκευές τους.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία και να προκαλεί συζητήσεις με όλη την τάξη όταν θεωρεί ότι τα συμπεράσματα κάποιων ομάδων θα είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση και τω υπολοίπων.

### Στόχοι

Από πλευράς γνωστικού αντικείμενου οι κύριοι διδακτικοί στόχοι της δραστηριότητας σχετίζονται με την κατανόηση των εννοιών λόγου και αναλογίας από τους μαθητές κατά την εμπλοκή τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων και της κατασκευής γραμμάτων ώστε το μέγεθός τους να μεταβάλλεται αναλογικά. Συγκεκριμένα σημεία εστίασης:

η συσχέτιση μεγεθών για τη διάκριση των αναλογικών σχέσεων που διέπουν την κατασκευή αυξομειούμενων γεωμετρικών σχημάτων

η διερεύνηση του ρόλου των μεταβλητών στο πώς μεταβάλλεται ένα γεωμετρικό σχήμα όταν μεταβάλλονται τα γεωμετρικά στοιχεία του (πλευρές, γωνίες)

η διερεύνηση του πώς δύο αλληλεξαρτώμενα μεγέθη μπορούν να εκφραστούν με μια μεταβλητή

η αναγνώριση ότι η απαραίτητη συνθήκη για την κατασκευή ενός αυξομειούμενου σχήματος είναι να υπάρχει αλληλεξάρτηση όλων των μηκών του με βάση την ίδια μεταβλητή

η αναγνώριση ότι η σχέση από την οποία προκύπτει αυξομείωση είναι πολλαπλασιαστική και όχι προσθετική

η παρατήρηση ότι τα μήκη των πλευρών ενός γράμματος που αυξομειώνεται είναι ανάλογα

η διάκριση της διατήρησης της αναλογικής σχέσης σε όλα τα δυναμικά μοντέλα του αυξομειούμενου σχήματος

η «ανακάλυψη» ότι οι γωνίες στο σχήμα ενός αυξομειούμενου γράμματος σε διαφορετικά μεγέθη παραμένουν ίσες

η γενίκευση των συμπερασμάτων για όλα τα γράμματα και τα όμοια σχήματα.

Από δε την παιδαγωγική πλευρά οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν ως στόχο να εμπλέξουν τους μαθητές

στη διερεύνηση και τον πειραματισμό μέσα από την ανάπτυξη και τον έλεγχο εικασιών και υποθέσεων χωρίς να κατέχει σε αυτές ο διδάσκοντας την κεντρική ‘πηγή’ γνώσης όπως συνήθως συμβαίνει στα μετωπικά διδακτικά μοντέλα

στην ανάπτυξη συνεργατικών και επικοινωνιακών ανάμεσα και μεταξύ των ομάδων

### **Ανάλυση του σεναρίου**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις φάσεις:

1η Φάση: Κατασκευή δύο γραμμάτων από κάθε ομάδα.

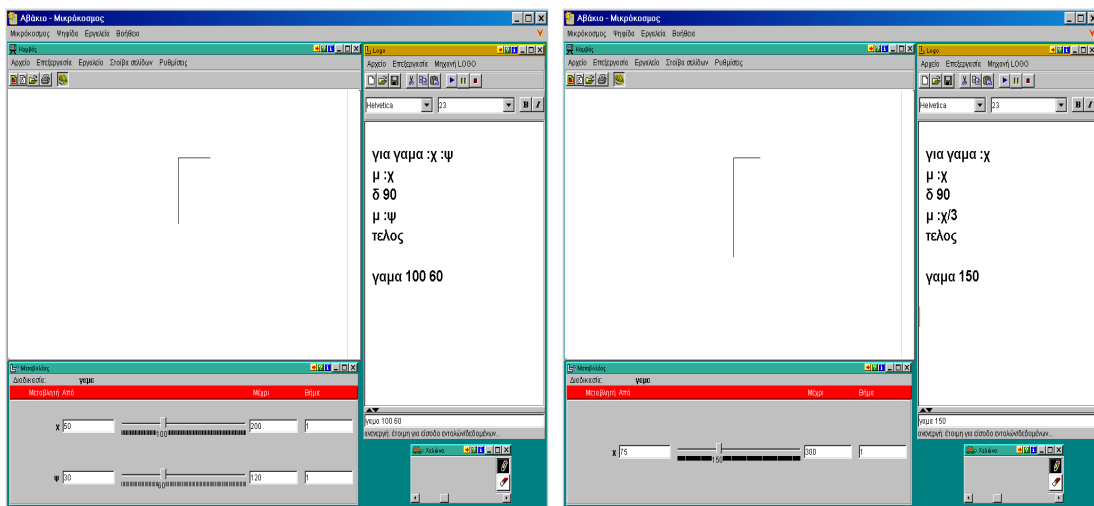
Η πρώτη φάση αφορά:

στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει,

στην κατασκευή δύο γραμμάτων που αυξομειώνονται από κάθε ομάδα με μία μεταβλητή

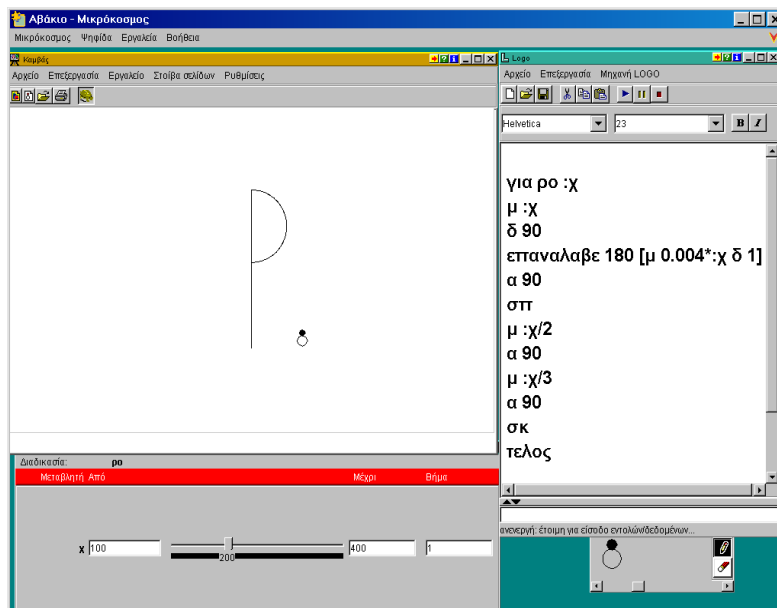
Στην πρώτη φάση τα 24 γράμματα του αλφαβήτου μοιράζονται ανά δύο στις ομάδες. Επειδή κατασκευαστικά είναι δυσκολότερη η σχεδίαση γραμμάτων που περιλαμβάνουν και καμπύλα μέρη προτείνεται κάθε ομάδα να αναλάβει ένα ‘εύκολο’ και ένα ‘δύσκολο’ γράμμα (π.χ. Γ και Ρ). Από τις ομάδες ζητείται να κατασκευάσουν αυξομειούμενα γράμματα χρησιμοποιώντας ως μοναδική μεταβλητή το ύψος τους. Σε περιπτώσεις χρήσης περισσότερων μεταβλητών σε μια κατασκευή ο/η εκπαιδευτικός παρεμβαίνει παροτρύνοντας τα παιδιά να πειραματιστούν με όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές με στόχο τη χρήση μιας. Τέτοιες σχέσεις μπορούν να προκύψουν μέσα από τη συσχέτιση της μοναδικής μεταβλητής με το λόγο των μηκών ενός σταθερού μοντέλου κάθε γράμματος. Σε περίπτωση

χρήσης περισσότερων της μιας μεταβλητών το σταθερό μοντέλο που θα αυξομειωθεί μπορεί να επιλεγεί από τους μαθητές για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές των μεταβλητών. Για παράδειγμα, το αυξομειούμενο μοντέλο του γάμα που φαίνεται στην εικόνα 23 (δεξιά) μπορεί να προέλθει από τη συσχέτιση των σταθερών μηκών: κατακόρυφο=90, οριζόντιο=30 ή κατακόρυφο=60, οριζόντιο=20 κοκ. Βέβαια, στην τάξη δεν δίνεται κάποια διαδικασία έτοιμη στους μαθητές αλλά τους αφήνουμε να προσπαθήσουν να προτείνουν οι ίδιοι διαδικασίες για τα γράμματα που θα αναλάβουν να κατασκευάσουν. Ο διδάσκων μέσα από κατάλληλες παρεμβάσεις και σχετικές συζητήσεις στην τάξη με αντικείμενο τις ιδιότητες των γραμμάτων και των κανόνων κατασκευής τους επιδιώκει την εξειδίκευση των περιορισμών που διέπουν τις ζητούμενες κατασκευές.



Εικόνα 23 Το Γ ως δυναμικό μοντέλο με δύο μεταβλητές (αριστερά) και ως αυξομειούμενο μοντέλο με λόγο 3:1 (δεξιά)

Η ολοκλήρωση κάθε αυξομειούμενης κατασκευής είναι αναγκαίο να συνοδεύεται από την τοποθέτηση της χελώνας στο κάτω δεξιά άκρο του νοητού ορθογωνίου μέσα στο οποίο σχεδιάζεται το γράμμα, ώστε να είναι έτοιμη η κατασκευή του επόμενου γράμματος (Εικόνα 24). Παράλληλα, για την γραφή των αυξομειούμενων γραμμάτων στην ίδια διαδικασία (δίπλα-δίπλα) είναι σκόπιμο να προβλεφθεί μια μεταξύ τους απόσταση που πρέπει επίσης να είναι μεταβλητή. Στην εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη έχει δοκιμαστεί με επιτυχία η μεταβλητή απόσταση μεταξύ των γραμμάτων να είναι ίση με  $\chi/3$  (Εικόνα 24).



Εικόνα 24: Το αυξομειούμενο ρο με μία μεταβλητή.

Ένα ακόμη ζήτημα που εμπεριέχεται στην κατασκευή γραμμάτων σε αυτή τη φάση αφορά την αναγνώριση της συμμετρίας κάποιων γραμμάτων και του ρόλου γωνιών και μηκών στη σχεδιαστική επίτευξή τους. Για παράδειγμα, στην κατασκευή του N, αλλά και του Z, οι γωνίες στα σημεία τομής πλάγιου και κατακόρυφων μηκών είναι ίσες. Το Δ μπορεί να ειπωθεί από τα παιδιά ως ισοσκελές ή ισόπλευρο τρίγωνο. Επίσης, η διάκριση αξόνων συμμετρίας μπορεί να διευκολύνει την κατασκευή των περισσότερων γραμμάτων από τα παιδιά μέσα από την επανάληψη διαδικασιών και σχέσεων που έχουν βρει για άλλα μέρη μιας κατασκευής. Η παρατήρηση αυτή καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των γραμμάτων καθώς είκοσι από τα εικοσιτέσσερα γράμματα του αλφαβήτου έχουν τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα:

Γράμματα με έναν άξονα συμμετρίας: Α, Β, Δ, Ε, Κ, Λ, Μ, Π, Σ, Τ, Υ, Ψ, Ω.

Γράμματα με δύο άξονες συμμετρίας: Η, Θ, Ξ, Φ, Χ.

Γράμματα με περισσότερους από δύο άξονες συμμετρίας: Ο.

Γράμματα με κανέναν άξονα συμμετρίας: Γ, Ζ, Ν, Ρ.

Η εφαρμογή της δραστηριότητας στην τάξη έχει δείξει ότι συχνά είναι σκόπιμο ο εκπαιδευτικός να ξεκινήσει τη δραστηριότητα με ένα φύλλο εργασίας που αφορά την διερεύνηση της αυξομείωσης του ίδιου γράμματος με ευθύγραμμα μήκη από όλες τις ομάδες σε μια διαδικασία με πολλές μεταβλητές για τις πλευρές του (ή και τις γωνίες του) ώστε οι

μαθητές να εξοικειωθούν (α) με την διερεύνηση της αλλαγής της μορφής του γράμματος μέσω των μεταβολών και (β) την ανάγκη πολλαπλασιαστικής συσχέτισης των τιμών των μεταβλητών για την κατασκευή αυξομειούμενου γράμματος. Η διερεύνηση αυτή βοηθάει τους μαθητές να εμπλακούν αποτελεσματικά με δυσκολότερες συσχετίσεις που περιλαμβάνονται στην κατασκευή άλλων γραμμάτων (ιδιαίτερα αυτών που περιέχουν καμπύλα μέρη). Το ακόλουθο φύλλο εργασίας είναι ενδεικτικό.

### Ενδεικτικό φύλλο εργασίας 1

α) Αντιγράψτε στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου τη διαδικασία γραμμαN που δίνεται ακολούθως και έπειτα εκτελέστε την εντολή γραμμαN 50 60 70

για γραμμαN :χ :ψ :ζ

μ :χ δ 135 μ :ψ α 135 μ :ζ

τέλος

β) Πειραματιστείτε με τη μετακίνηση των μεταβολών ώστε να φτιάξετε ένα μοντέλο του γράμματος N για  $\chi=100$ . Για ποιες τιμές των υπολοίπων μεταβλητών κατασκευάζεται το συγκεκριμένο μοντέλο του N;

γ) Θέλουμε να κατασκευάσουμε το μοντέλο του N που φτιάξετε στο προηγούμενο ερώτημα αλλά με διαφορετικό μέγεθος. Δοκιμάστε να το κατασκευάσετε για  $\chi=50$  και  $\chi=30$ .

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τις τιμές των μεταβλητών με τις οποίες ολοκληρώσατε τις κατασκευές σας. Διακρίνετε κάποια σχέση μεταξύ των τιμών αυτών;

$\chi$	$\psi$	$\zeta$
100		
50		
30		

δ) Δοκιμάστε να κατασκευάσετε το προηγούμενο μοντέλο του N με χρήση μόνο μιας μεταβλητής ώστε να μπορεί να αυξομειωθεί με ένα μόνο μεταβολέα.

2η Φάση: Κατασκευή των δύο γραμμάτων κάθε ομάδας στην ίδια διαδικασία.

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές θα κληθούν να γράψουν σε μια διαδικασία –το ένα δίπλα στο άλλο- τα γράμματα που κατασκεύασαν στην πρώτη φάση. Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει στο να εμπλακούν οι μαθητές σε διαδικασίες

συσχέτισης όλων των μεταβαλλόμενων μηκών και των δύο γραμμάτων και έκφρασης με την ίδια μεταβλητή

διόρθωσης των αρχικών κατασκευών τους σε περίπτωση που έχουν επιλέξει με διαφορετικό τρόπο τη μοναδική μεταβλητή με βάση την οποία γίνεται η αυξομείωση σε διαφορετικά γράμματα

3η Φάση: Ανταλλαγή γραμμάτων μεταξύ των ομάδων.

Στην τρίτη φάση γίνεται ανταλλαγή των γραμμάτων που ήδη κατασκευάστηκαν μεταξύ των ομάδων. Κάθε ομάδα δανείζεται δύο γράμματα από μια άλλη και διαπιστώνει με δοκιμές αρχικά αν οι κώδικες δουλεύουν σωστά και στη συνέχεια αν μπορεί να τα ‘κολλήσει’ δίπλα στα δικά της για τη γραφή λέξεων. Για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει να έχει χρησιμοποιηθεί η ίδια μεταβλητή για το ύψος των γραμμάτων. Σε περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει η κάθε ομάδα κάνει τις αντίστοιχες διορθώσεις. Σε αυτό το στάδιο δίνεται η δυνατότητα στα παιδιά να συγκρίνουν τις εργασίες τους και τους να διδαχτούν από τις δουλειές των άλλων ή να προτείνουν εκείνα σχετικές διορθώσεις.

### **Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν**

Το προτεινόμενο σενάριο είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε η υλοποίησή του να σχετίζεται τόσο με τη χρήση των προσφερόμενων υπολογιστικών εργαλείων όσο και με τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες. Για την ολοκλήρωση των κατασκευών είναι απαραίτητη η χρήση μεταβλητών για το συμβολισμό των μεταβαλλόμενων μεγεθών όσο και του μεταβολέα για το δυναμικό χειρισμό τους.

Αναφορικά με τη χρήση μεταβλητών ο Χελωνόκοσμος δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να διερευνήσουν το ρόλο των διαστάσεων διαφόρων μεγεθών που περικλείει μια γεωμετρική κατασκευή και μπορεί να είναι ανομοιογενή (π.χ. βήμα χελώνας, μήκη, στροφές).

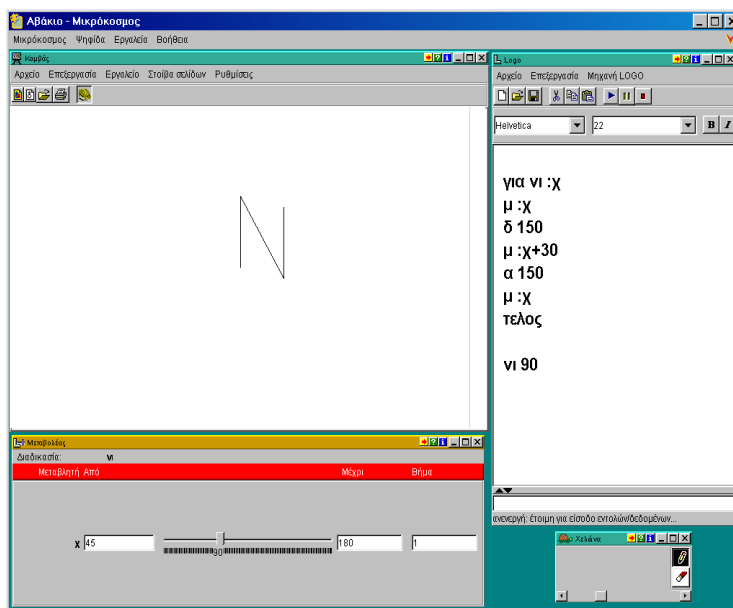
Να εκφράσουν την ισότητα δύο μεγεθών με χρήση της ίδιας μεταβλητής

Να διερευνηθούν το πώς η χρήση μεταβλητών σε συναρτησιακές σχέσεις επηρεάζει την εμφάνιση των αντίστοιχων μεγεθών αλλά και συνολικά και το γεωμετρικό σχήμα στο οποίο ανήκουν. Π.χ. ο πολλαπλασιασμός μιας μεταβλητής με έναν φυσικό αριθμό οδηγεί στην αύξηση του μεγέθους που εκφράζει, ενώ ο πολλαπλασιασμός με έναν δεκαδικό μεταξύ του 0 και του 1 στην ελάττωσή του.

Στο πλαίσιο αυτό η χρήση του μεταβολέα μπορεί να συνεισφέρει στον πειραματισμό των μαθητών σε μια σειρά από ζητήματα που περικλείονται σε μια γεωμετρική κατασκευή όπως τα παρακάτω:

*Συσχέτιση αριθμητικών τιμών και μεταβλητών.* Η χρήση του μεταβολέα μπορεί να προσφέρει τη βάση του πειραματισμού για την εύρεση κατάλληλων αριθμητικών τιμών διαφόρων γωνιών, μηκών ή αριθμητικών παραγόντων για τις οποίες σχεδιάζεται ένα μοντέλο του γράμματος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ρο μπορεί οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν καταρχάς δύο μεταβλητές για το κατακόρυφο μήκος και το βήμα της χελώνας και, μετακινώντας κάθε μεταβολέα χωριστά, να επιλέξουν κατόπιν δοκιμών τις τιμές για τις οποίες φτιάχνεται ένα μοντέλο του ρο που στη συνέχεια θα προσπαθήσουν να αυξομειώσουν. Πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοιου τύπου προσεγγιστικές διαδικασίες διευκολύνονται από το γεγονός ότι ο μεταβολέας παρέχει πρόσβαση σε δεκαδικές τιμές όλων των χρησιμοποιούμενων μεταβλητών αλλά και του βήματος της μεταβολής τους. Σε άλλες περιπτώσεις οι κατασκευές γραμμάτων με γωνίες διαφορετικές από τις  $90^\circ$  περιλαμβάνουν διερεύνηση για την εύρεση των άγνωστων γωνιών, που διευκολύνεται με τη χρήση μεταβλητής για την αντίστοιχη γωνία και τον πειραματισμό με τη μετακίνηση του μεταβολέα (όπως π.χ. στην κατασκευή των γραμμάτων Δ, Κ, Λ, Μ, Ν, Σ, Υ, Χ).

*Εντοπισμός λαθών στις αντιστοιχίσεις μεταβλητών-μεγεθών.* Αν για παράδειγμα κάποιος μαθητής χρησιμοποιήσει την ίδια μεταβλητή για να συμβολίσει το πλάγιο και τα κατακόρυφα μήκη του νι η μετακίνηση του μεταβολέα σε διάφορες τιμές θα συνοδευτεί από την εξεικόνιση της μη ορθότητας της κατασκευής για όλες τις τιμές της μοναδικής μεταβλητής.



Εικόνα 25: Η αλλοίωση του vi.

*Εντοπισμός λαθών σε σχέσεις.* Σε περιπτώσεις χρήσης προσθετικών σχέσεων για την αυξομείωση ενός γράμματος με μία μεταβλητή το σχήμα χαλαίει για κάποιες αριθμητικές τιμές στο μεταβολέα. Αν σε μια κατασκευή του vi για παράδειγμα, η προσθετική συσχέτιση κατακόρυφων και πλάγιου τμήματος είναι προσθετική ( $\chi$  και  $\chi+30$  αντίστοιχα), τότε η μετακίνηση του μοναδικού μεταβολέα οδηγεί στη σταδιακή αλλοίωση της μορφής του γράμματος (Εικόνα 25).

## Επέκταση

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση του σεναρίου αναφορικά με την ίδια γνωστική περιοχή των μαθηματικών αποτελεί η μελέτη της συμμεταβολής δύο μηκών σε συγκεκριμένα γράμματα με τη χρήση του δισδιάστατου μεταβολέα. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να επικεντρωθεί στην ανακάλυψη του είδους της γραφικής παράστασης που προκύπτει κατά τη συμμεταβολή δύο πλευρών ενός σχήματος που συμβολίζονται με μεταβλητές με στόχο την αυξομείωσή του (ευθεία).

## Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο



τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί.

Ως προς τα εργαλεία

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Στο Χελωνόκοσμο εννοείται ο συμβολισμός μεταβαλλόμενων μεγεθών και ο χειρισμός τους με το 'σύρσιμο' μιας αριθμογραμμής, που είναι καινούριες αναπαραστάσεις για τους μαθητές. Για παράδειγμα, οι διασυνδέσεις μιας μεταβλητής με το μέγεθος που αναπαριστά και την δυναμική αλλαγή των τιμών της στον αντίστοιχο μεταβολέα είναι προς διερεύνηση. Κάθε διδάσκων οφείλει να λάβει υπόψη τις όποιες δυσκολίες και να επανασχεδιάσει την εφαρμογή εκ νέου (επιλέγοντας π.χ. κατάλληλες δραστηριότητες για την εισαγωγή των μαθητών στη χρήση των εργαλείων).

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων, η προτεινόμενη αλληλουχία και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Για την αποτελεσματική υλοποίηση του σεναρίου έχει μεγάλη σημασία ο συντονισμός όλης της τάξης κατά τη ροή εφαρμογής από μια φάση στην επόμενη. Ο διδάσκων έχει ευθύνη να καταγράψει τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων από μαθητές ή τους περιορισμούς του χρόνου που απαιτήθηκε. Στην συνέχεια, μπορεί να τροποποιήσει τόσο το αν θα ολοκληρώσει όλες τις φάσεις όσο και το χρόνο που θα αφιερώσει για καθεμιά. Για παράδειγμα, αν η κατασκευή δύο γραμμάτων απαιτήσει παραπάνω από τον προβλεπόμενο χρόνο σε πολλές ομάδες μπορεί να αποφασίσει ότι δεν προχωράει στην διαδικασία ανταλλαγής (3η Φάση) και εστιάζεται στην κατασκευή δύο αυξομειούμενων κατασκευών από κάθε ομάδα. Μπορεί επίσης να προτείνει η/ο ίδιος/α την κατασκευή νέων γραμμάτων σε ομάδες που ολοκλήρωσαν την εργασία τους.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Το σενάριο είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε η υλοποίησή του να σχετίζεται τόσο με τη χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος όσο και με τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες λόγου και αναλογίας στα γεωμετρικά σχήματα. Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο είναι σχεδιασμένο ώστε να προσφέρει περιθώρια

διαφοροποιημένης διδακτικής ανέλιξης και επιλογής σημείων εστίασης, καθώς το μαθηματικό μέρος που καλύπτει είναι ευρύ και περιλαμβάνει τη μελέτη λόγου, αναλογιών, συναρτησιακών σχέσεων και χρήσης μεταβλητών.

### **Σχεδίαση φύλλου εργασίας:**

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με την διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σύνταξης του προγράμματος και παρατήρησης (για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα)
- Ερωτήματα διατύπωσης (για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις)
- Ερωτήματα ελέγχου (για ερμηνείες, επεξηγήσεις, αποδείξεις, κτλ)

## **9.2 Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων.**

### **9.2.1 Σενάριο 3. Τα μέσα των πλευρών τριγώνου**

Γνωστική περιοχή:

Γεωμετρία Γ' Γυμνασίου

Παραλληλία πλευρών,

αναλογίες γεωμετρικών μεγεθών,

ομοιότητα τριγώνων,

τριγωνομετρικοί αριθμοί

περίμετρος και εμβαδόν.

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την μελέτη των ιδιοτήτων του τριγώνου που προκύπτει όταν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του αρχικού τριγώνου.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του Cabri Geometry II ή του Geometers Sketchpad ή του Geogebra.

### **Σκεπτικό:**

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν τις ιδιότητες που έχουν τα στοιχεία του τριγώνου που θα δημιουργηθεί αν ενώσουν τα μέσα των πλευρών ενός αρχικού τριγώνου.

Προστιθέμενη αξία.

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο δεν αποτελεί μόνο μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας των Μαθηματικών αλλά φιλοδοξεί να έχει και ευρύτερες επιρροές. Συγκεκριμένα:

Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει στην διδασκαλία του το προτεινόμενο σενάριο θα έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους οι οποίες θα συμβάλουν στην βελτίωση της στάσης του απέναντι στη καθημερινή σχολική διαδικασία.

Θα διδάξει σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο του σεναρίου το οποίο προβλέπει ατμόσφαιρα ερευνητικού εργαστηρίου.

Η συμβολή του σ' αυτό απαιτεί αλλαγή του ρόλου του και από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης, καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, σημείο αναφοράς της τάξης του ως προς την καθοδήγηση της έρευνας και την επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων των μαθητών αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

Σ' ένα σχολείο στο οποίο εφαρμόζονται εκπαιδευτικά σενάρια όπως το προτεινόμενο απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Η διεύθυνση του σχολείου θα πρέπει να γνωρίζει ότι η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτεί μια άλλη στάση απέναντι στη λειτουργία του σχολείου. Για παράδειγμα ίσως χρειαστεί μερικές ομάδες μαθητών να συναντηθούν και να εργαστούν στο σχολείο πέραν του κλασικού ωραρίου. Αυτό πρέπει κατά κάποιο τρόπο να διασφαλιστεί και οι μαθητές να ενθαρρυνθούν σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων προς την κατεύθυνση της μάθησης και της διδασκαλίας. Έτσι βελτιώνεται η σχολική ζωή και το σχολείο αποκτά ένα πιο συγκεκριμένο ρόλο στο πλαίσιο της κοινωνίας. Η εφαρμογή του προτεινόμενου εκπαιδευτικού σεναρίου αναμένεται να συμβάλει προς αυτή τη κατεύθυνση.

### **Πλαίσιο εφαρμογής:**

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 4-6 διδακτικές ώρες. Εναλλακτικά μπορεί να διατεθεί 1 – 2 διδακτικές ώρες για την υλοποίηση μέρους του σεναρίου και οι υπόλοιπες δραστηριότητες να δοθούν ως εργασία στον ελεύθερο χρόνο των μαθητών.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ωστόσο αν ο εκπαιδευτικός αποφασίσει να διδάξει ένα μέρος του στο εργαστήριο και το υπόλοιπο στην σχολική αίθουσα με τη χρήση ενός υπολογιστή και βιντεοπροβολέα ή το υπόλοιπο να δοθεί υπό τη μορφή εργασίας στον ελεύθερο χρόνο θα πρέπει να προσαρμόσει ανάλογα τις δραστηριότητες και να εκπονήσει τα κατάλληλα φύλλα εργασίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Τα περί των γωνιών δυο παραλλήλων ευθειών που τέμνονται από τρίτη ( εντός εναλλάξ, εντός εκτός και επί τα αυτά κτλ).

Την έννοια του λόγου ευθ. τμημάτων.

Στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος Cabri Geometry II ή The Geometer's Sketchpad ή Geogebra.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκων και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά.

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων θα μάθουν να διερευνούν με δυναμικό τρόπο τα γεωμετρικά σχήματα που οι ίδιοι κατασκευάζουν και θα μπορούν έτσι να κάνουν διάφορες εικασίες και υποθέσεις σχετικές με τα υπό διερεύνηση θέματα.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

Θα έχουν διερευνήσει τις ιδιότητες που έχει το ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου.

Θα έχουν εξετάσει τη σχέση των γωνιών, των περιμέτρων και των εμβαδών των δύο τριγώνων, του αρχικού και αυτού που δημιουργείται από τα μέσα των πλευρών του.

Θα έχουν εξετάσει τη σχέση μεταξύ των μεγεθών των δυο τριγώνων, ενός αρχικού και αυτού που ορίζονται από σημεία στις πλευρές του που ορίζουν ανάλογα τμήματα.

Θα έχουν εμπλακεί με την έννοια και τα χαρακτηριστικά της ομοιότητας δυο τριγώνων και θα την έχουν συνδέσει με τις προηγούμενες διερευνήσεις.

Θα έχουν εφαρμόσει τα συμπεράσματα από την προηγούμενη διερεύνηση σε ορθογώνιο τρίγωνο για να οδηγηθούν στην κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών.

### **Ανάλυση του σεναρίου:**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτού του σεναρίου θα εμπλακούν στις παρακάτω δραστηριότητες:

*Δραστηριότητα 1:* Θα διαπραγματευτούν την έννοια της παραλληλίας και του λόγου δυο γεωμετρικών μεγεθών.

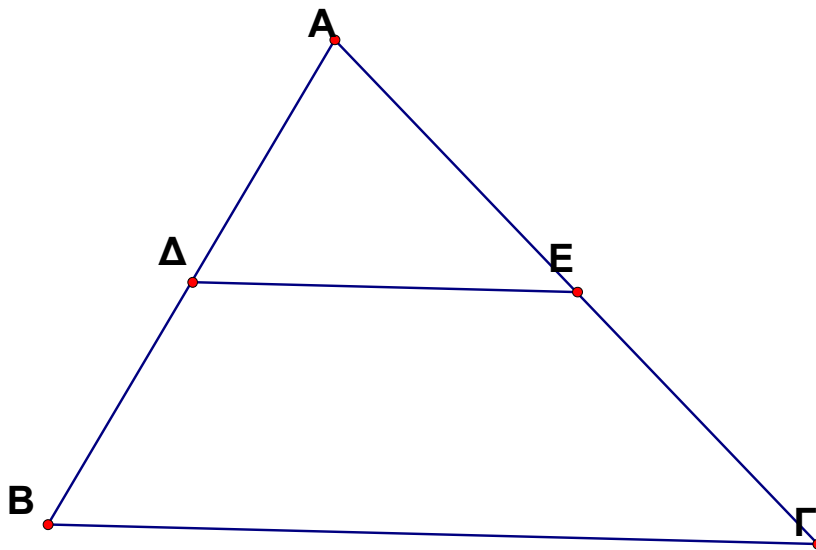
Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να επαναλάβουν τις δυο έννοιες της παραλληλίας και του λόγου και να τις επεκτείνουν. Οι μαθητές θα επαναλάβουν όσα έχουν μάθει στις προηγούμενες τάξεις σχετικά την έννοια της παραλληλίας δυο ευθειών καθώς και τις ιδιότητες που έχουν δυο παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα. Τέτοια προβλήματα είναι τα εξής:

Χαράζετε δυο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη σε τυχαία σημεία. Μπορείτε να απαντήσετε αν αυτές είναι παράλληλες;

Με τη βοήθεια του The Geometer's Sketchpad κατασκευάστε μια ευθεία (δ) και δυο σημεία αυτής. Στη συνέχεια κατασκευάστε δυο ευθείες κάθετες στη (δ) και εξετάστε αν αυτές είναι παράλληλες.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_1.gsp».

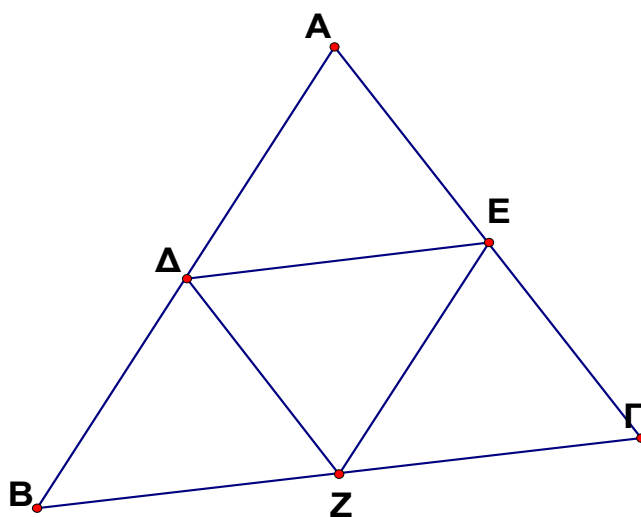
*Δραστηριότητα 2:* Θα διαπραγματευτούν τη σχέση: «Το ευθ. τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς».



Εικόνα 26

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_2.gsp».

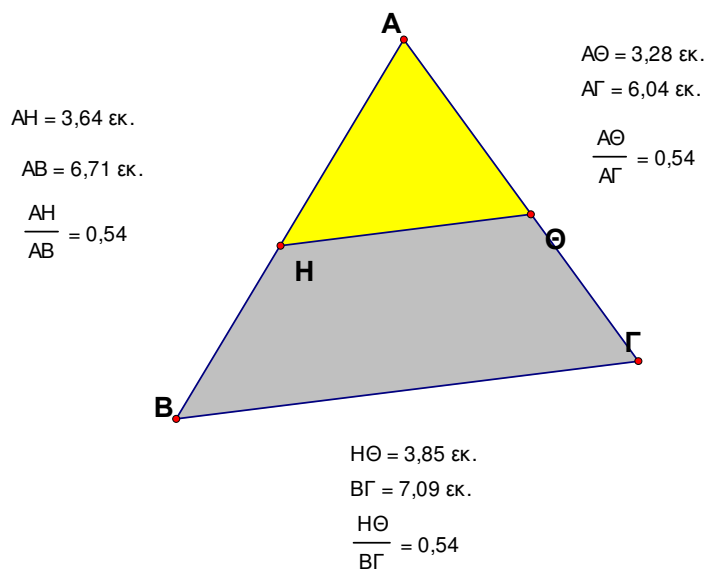
*Δραστηριότητα 3:* Θα διαπραγματευτούν την παραλληλία των πλευρών των δυο τριγώνων, του αρχικού και αυτού που προκύπτει όταν συνδεθούν και τα τρία μέσα των πλευρών του αρχικού.



Εικόνα 27

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_3.gsp».

*Δραστηριότητα 4:* Θα διαπραγματευτούν την επέκταση των συμπερασμάτων στα τρίγωνα που δημιουργούνται όταν οι παράλληλες προς τις πλευρές τριγώνου διέρχονται από σημεία που διαιρούν τις πλευρές του σε ίσους λόγους.

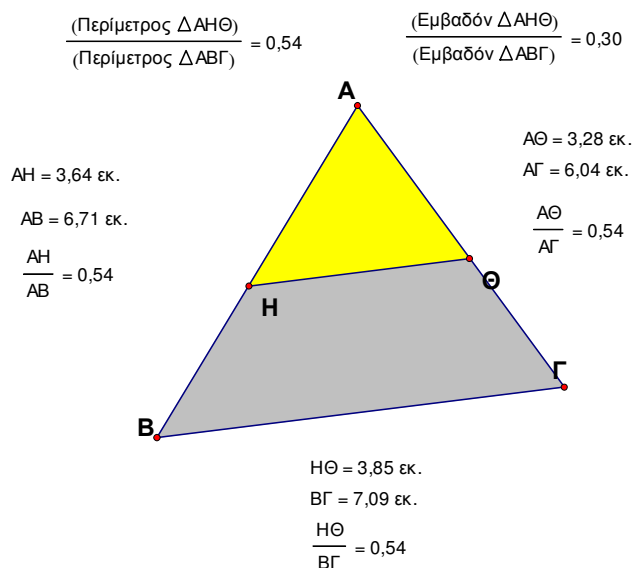


Εικόνα 28

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_4.gsp».

*Δραστηριότητα 5:* Θα διαπραγματευτούν τη σχέση που έχουν οι περιμέτροι και τα εμβαδά των δύο τριγώνων των προηγούμενων δραστηριοτήτων 1, 2 και 3.

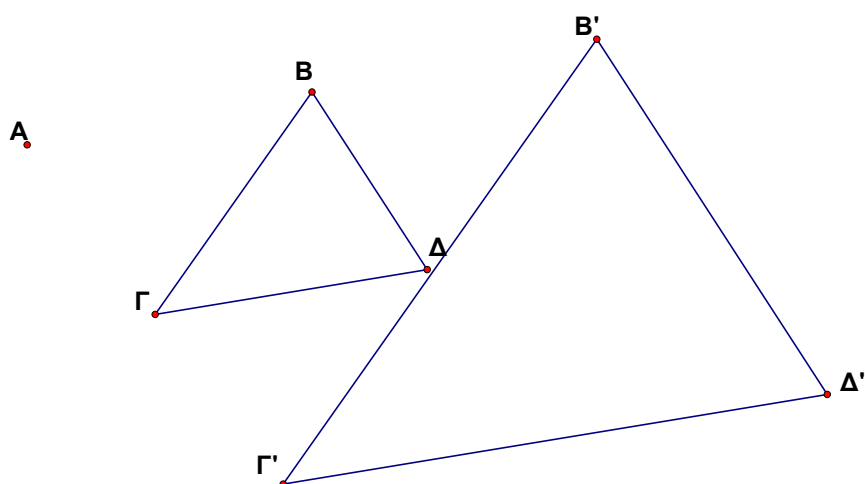




Εικόνα 29

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_4.gsp».

*Δραστηριότητα 6:* Θα διαπραγματευτούν την κατασκευή δυο όμοιων τριγώνων και τη διαπίστωση ότι όλες οι ιδιότητες που διαπιστώθηκαν στα προηγούμενα ισχύουν στα όμοια τρίγωνα.



Εικόνα 30

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατασκευάσει από πριν τα αρχεία λογισμικού και να ζητήσει από τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν. Π.χ. το αρχείο «Μέσα\_5.gsp».

Οι εικασίες που θα κάνουν στα παραπάνω θέματα θα δώσουν την αφορμή να παρουσιαστούν διεξοδικά οι αποδείξεις των σχετικών προτάσεων μέσα στη τάξη και φυσικά ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά.

### **Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν**

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του Cabri Geometry II ή του Geometers Sketchpad ή του Geogebra. Μέσω των επιμέρους εργαλείων κατασκευής παραλλήλων ευθειών, κατασκευής του μέσου των πλευρών των τριγώνων, των εργαλείων μέτρησης αποστάσεων, γωνιών εμβαδών και του εργαλείου υπολογισμού του λόγου αυτών οι μαθητές θα κάνουν πειράματα και θα διατυπώσουν εικασίες και υποθέσεις.

### **Επέκταση:**

Ως προς την επέκταση των παραπάνω στα τετράπλευρα οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι όταν συνδεθούν τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου δεν ισχύει ακριβώς κάτι ανάλογο με αυτά που θα διαπιστώσουν στα τρίγωνα. Ωστόσο η ομοιότητα, οι σταθεροί λόγοι και οι άλλες διαπιστώσεις εξακολουθούν να ισχύουν. Φυσικά μπορούν να διερευνήσουν αν ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα στο πεντάγωνο, στο εξάγωνο κτλ.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

### **Σχεδίαση φύλλου εργασίας:**

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με την διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σχεδίασης και παρατήρησης (για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα)
- Ερωτήματα διατύπωσης (για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις)
- Ερωτήματα ελέγχου (για ερμηνείες, επεξηγήσεις, αποδείξεις, κτλ)

### **9.2.2 Σενάριο 4. Η μέτρηση του εμβαδού ενός παραβολικού οικοπέδου**

Γνωστική περιοχή:

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.

Παραβολή.

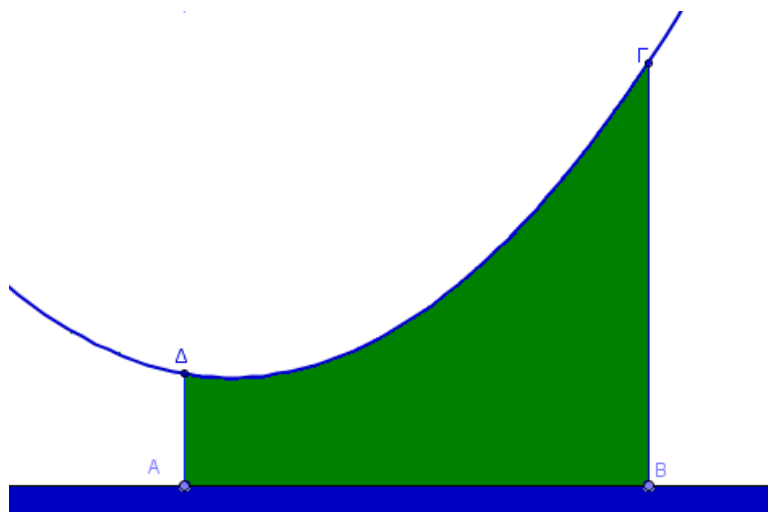
Τετραγωνική συνάρτηση.

Εμβαδόν.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Θέμα: Οι τέσσερις πλευρές ενός οικοπέδου προσδιορίζονται από την ευθύγραμμη κοίτη ενός ποταμού, τις κάθετες στην κοίτη σε απόσταση 5 μέτρων κάθετες σε αυτή και την τέταρτη

πλευρά που είναι τμήμα της παραβολής  $\psi=k\chi^2+\mu$ , όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Μπορείτε να βρείτε μια μέθοδο μέτρησης του εμβαδού του για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $k$  και  $\mu$  και για τις διάφορες θέσεις των  $\Gamma$  και  $\Delta$  στην καμπύλη;



Εικόνα 31

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του λογισμικού Geogebra.

#### Σκεπτικό:

Βασική ιδέα:

Η έννοια του ολοκληρώματος, όπως διδάσκεται σήμερα στο Λύκειο, έχει δυο πλευρές. Αφενός εμφανίζεται ως μια συνάρτηση αρχική μιας δοθείσας και αφετέρου ως εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από δοθείσα συνάρτηση, τον άξονα  $\chi\chi'$  και τις ευθείες  $\chi=a$  και  $\chi=b$ . Αλλά για τους μαθητές οι δυο αυτές έννοιες, της αρχικής συνάρτησης και του εμβαδού δεν συνδέονται με σαφή και κατανοητό τρόπο. Η προσπάθεια του βιβλίου να συνδέσει αυτά μέσω ενός θεωρήματος, που μάλιστα εισάγεται χωρίς αιτιολόγηση και απόδειξη, απαιτεί από τους μαθητές να έχουν κατανοήσει σε βάθος τις δυο έννοιες που συνιστούν το ολοκλήρωμα – εμβαδόν χωρίου και αρχική συνάρτηση – αλλά και να τις συνδέσουν μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα της δυσκολίας αυτής είναι οι μαθητές που διδάσκονται με αυτόν τον τρόπο παραπάνω έννοιες να καταφεύγουν στην παπαγαλία μεθόδων που τις εφαρμόζουν χωρίς να τις κατανοούν πλήρως.

Με το προτεινόμενο σενάριο, οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν αυτές τις δυο έννοιες με ένα απτό και δυναμικά χειριζόμενο από τους ίδιους τρόπο. Καλούνται:

Να ορίσουν το χωρίο, του οποίου θέλουν να μετρήσουν το εμβαδόν, και να το μετρήσουν μέσω της διαδικασίας εξάντλησης.

Να βρουν τη συνάρτηση στην οποία ανήκει το σημείο που έχει τετμημένη το δεξί άκρο του χωρίου και τεταγμένη το εμβαδόν.

Με την παραπάνω διαδικασία, οι μαθητές θα μάθουν ότι το σημείο που ορίζεται από τις δυο συντεταγμένες ανήκει στην αρχική της δοθείσας συνάρτησης.

Προστιθέμενη αξία.

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο δεν αποτελεί μόνο μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας των Μαθηματικών αλλά φιλοδοξεί να έχει και ευρύτερες επιρροές. Συγκεκριμένα:

Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει στην διδασκαλία του το προτεινόμενο σενάριο θα έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους οι οποίες θα συμβάλουν στην βελτίωση της στάσης του απέναντι στη καθημερινή σχολική διαδικασία.

Θα διδάξει σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο του σεναρίου το οποίο προβλέπει ατμόσφαιρα ερευνητικού εργαστηρίου.

Η συμβολή του σ' αυτό απαιτεί αλλαγή του ρόλου του και από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης, καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, σημείο αναφοράς της τάξης του ως προς την καθοδήγηση της έρευνας και την επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων των μαθητών αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

Σ' ένα σχολείο στο οποίο εφαρμόζονται εκπαιδευτικά σενάρια όπως το προτεινόμενο απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Η διεύθυνση του σχολείου θα πρέπει να γνωρίζει ότι η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτεί μια άλλη στάση απέναντι στη λειτουργία του σχολείου. Για παράδειγμα ίσως χρειαστεί μερικές ομάδες μαθητών να συναντηθούν και να εργαστούν στο σχολείο πέραν του κλασικού ωραρίου. Αυτό πρέπει κατά κάποιο τρόπο να διασφαλιστεί και οι μαθητές να ενθαρρυνθούν σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων προς την κατεύθυνση της μάθησης και της διδασκαλίας. Έτσι βελτιώνεται η σχολική ζωή και το σχολείο αποκτά ένα πιο συγκεκριμένο ρόλο στο πλαίσιο της κοινωνίας. Η εφαρμογή του προτεινόμενου εκπαιδευτικού σεναρίου αναμένεται να συμβάλει προς αυτή τη κατεύθυνση.

#### Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Είναι ερευνητικά διαπιστωμένο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου και του αόριστου ολοκληρώματος και να τις συνδέουν με σαφή τρόπο. Προς την κατεύθυνση αυτή το GeoGebra τους διευκολύνει να κατανοήσουν σταδιακά την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μέσω του χωρισμού σε όσο το δυνατόν περισσότερα ίσα τμήματα και να ορίσουν την συνάρτηση στην οποία ανήκει το σημείο που ορίζεται από το ένα άκρο του χωρίου και το εμβαδόν του.

Επίσης στη διδασκαλία με παραδοσιακά μέσα δεν είναι εύκολη η σύνδεση του ορισμένου ολοκληρώματος με το αόριστο (μόνο θεωρητικά) καθώς δεν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό του εμβαδού αλλά και τον προσδιορισμό της καμπύλης η οποία προσδιορίζει αυτό το εμβαδόν.

#### **Πλαίσιο εφαρμογής:**

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες. Εναλλακτικά μπορεί να διατεθεί λιγότερος χρόνος αν επιλεγεί να γίνει παρουσίαση του σεναρίου στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ωστόσο αν ο εκπαιδευτικός αποφασίσει να διδάξει ένα μέρος του στο εργαστήριο και το υπόλοιπο στην σχολική αίθουσα με τη χρήση ενός υπολογιστή και βιντεοπροβολέα ή το υπόλοιπο να δοθεί υπό τη μορφή εργασίας στον ελεύθερο χρόνο θα πρέπει να προσαρμόσει ανάλογα τις δραστηριότητες και να εκπονήσει τα κατάλληλα φύλλα εργασίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Την έννοια του χωρίου κάτω από καμπύλη.

Την τετραγωνική συνάρτηση.

Τις απαιτούμενες λειτουργικότητες και χειρισμούς του προγράμματος Geogebra.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Απλοποιημένες οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα

κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες σε συνδυασμό με τις προβλεπόμενες μεθόδους διδακτικής που περιγράφονται παρακάτω έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα από μεν την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου:

Να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και να το συνδέσουν με την έννοια της αρχικής συνάρτησης.

Να κατανοήσουν τον τρόπο μέτρησης του χωρίου που ορίζεται από την δεδομένη συνάρτηση.

Να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν καθώς μεταβάλλονται τα άκρα ορισμού του χωρίου.

Να κατανοήσουν τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών – του δεξιού άκρου του χωρίου και του εμβαδού και να περιγράψουν αλγεβρικά την συμμεταβολή αυτή.

Από δε την παιδαγωγική πλευρά:

Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες (εμβαδόν χωρίου, διαίρεση σε ίσα τμήματα, προσέγγιση μέσω του πλήθους διαίρεσης, συμμεταβολή, συνάρτηση κτλ.) θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες

Να τους δοθεί η ευκαιρία να οργανώσουν τα δεδομένα τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώσουν κανόνες, να καταχωρίσουν τα δεδομένα τους, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.



Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους.

### **Ανάλυση του σεναρίου:**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε δυο φάσεις:

Η πρώτη φάση αφορά:

στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει,

στην σχεδίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και του χωρίου του οποίου θα μετρηθεί το εμβαδόν,

στην επιλογή του χωρισμού του ολοκληρώματος σε ίσα τμήματα με τον χωρισμό της βάσης του,

στη μέτρηση του εμβαδού των τμημάτων στα οποία χωρίζεται το χωρίο.

Προτείνεται οι μαθητές:

Να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση της παραμετρικής συνάρτησης  $f(x) = κ \cdot x^2 + μ$  επιλέγοντας οι παράμετροι να έχουν τιμές από -5 έως 5.

Να σχεδιάσουν τις ευθείες με τις οποίες θα σχεδιάσουν τα άκρα του χωρίου,  $x=a$  και  $x=b$

Να σχεδιάσουν τον μεταβολέα για το πλήθος  $n$  των τμημάτων στα οποία θα χωριστεί το χωρίο.

Να κάνουν χρήση των εντολών  $UpperSum[f, x(A), x(B)]$  και  $LowerSum[f, x(A), x(B), n]$  προκειμένου να ορίσουν τα τμήματα στα οποία θα χωριστεί το χωρίο.

Να ορίσουν τον τρόπο και το εύρος μεταβολής των μεταβλητών  $κ$ ,  $μ$  και  $n$ .

Να ορίσουν τις αναγκαίες τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων εμφάνισης και μέτρησης του μικρόκοσμου.

Στη συνέχεια οι μαθητές κάνουν πειράματα με τις τιμές της μεταβλητής  $n$  και παρατηρούν το εμβαδόν των τμημάτων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Κάνουν εκτιμήσεις και εικασίες για το εμβαδόν του χωρίου.

Η δεύτερη φάση αφορά

στην κατασκευή του σημείου που ορίζει το ένα άκρο και το εμβαδόν του χωρίου καθώς και στην σχεδίαση της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο αυτό,

στο σχεδιασμό του γεωμετρικού τόπου του σημείου αυτού,

τον προσδιορισμό της συνάρτησης στην οποία ανήκει το σημείο,

στην εξαγωγή συμπερασμάτων για την συνάρτηση στην οποία ανήκει το σημείο που προσδιορίζει του εμβαδόν.

Όπως προαναφέρθηκε στις στρατηγικές εφαρμογής, θεωρείται σκόπιμο στο τέλος κάθε φάσης, όλες οι ομάδες να κάνουν μία σύντομη παρουσίαση των συμπερασμάτων τους.

Προτείνεται οι μαθητές :

Με τη βοήθεια των εντολών "Άνω Άθροισμα = " + Ss και "Κάτω άθροισμα = " + Si εμφανίζουν τα δυο αθροίσματα στην επιφάνεια εργασίας.

Να ορίσουν ένα σημείο M με τετμημένη το ένα άκρο M του χωρίου και τεταγμένη ένα από τα δυο αθροίσματα. Π.χ. M(x(B), Si)

Να επιλέξουν την εντολή “trace on” για το σημείο M.

Να πληκτρολογήσουν την κατάλληλη συνάρτηση ώστε το σημείο B να ανήκει στην γραφική της παράσταση.

Στη συνέχεια οι μαθητές κάνουν πειράματα με τις τιμές της μεταβλητής n και παρατηρούν τον γεωμετρικό τόπο του σημείου B όταν μεταβάλλουν το ένα άκρο του χωρίου. Κάνουν εκτιμήσεις και εικασίες για το εμβαδόν του χωρίου.

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Το προτεινόμενο λογισμικό Geogebra επελέγη με κριτήριο την εξυπηρέτηση των αναγκών των προτεινόμενων δραστηριοτήτων και ανταποκρίνεται στις δεσμεύσεις που απορρέουν από τα ερευνητικά ευρήματα.

Το GeoGebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να επιλέγουν την συνάρτηση της οποίας θα μελετήσουν τον εμβαδόν του χωρίου.

Να ορίζουν το χωρίου επιλέγοντας τα άκρα του.

Να ορίζουν το πλήθος των τμημάτων στα οποία θα χωρίζουν το χωρίου και θα μετρούν το εμβαδόν τους.

Θα ορίζουν το σημείο με συντεταγμένες το ένα άκρο του χωρίου (το δεξιό) και το εμβαδόν του χωρίου και να παρατηρούν την καμπύλη στην οποία ανήκει.

Να εκφράζουν την συνάρτηση στην οποία ανήκει το εν λόγω σημείο.

### **Επέκταση:**

Ως προς την επέκταση των παραπάνω οι μαθητές μπορούν να μετρήσουν τα εμβαδά διαφόρων χωρίων που ορίζονται από διάφορες συναρτήσεις καθώς και εμβαδά που ορίζονται μεταξύ δυο συναρτήσεων.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει

ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

### **Σχεδίαση φύλλου εργασίας:**

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με την διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σχεδίασης και παρατήρησης (για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα)
- Ερωτήματα διατύπωσης (για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις)
- Ερωτήματα ελέγχου (για ερμηνείες, επεξηγήσεις, αποδείξεις, κτλ)

### **9.2.3 Σενάριο 5. Συμμεταβολές στο ισοσκελές τρίγωνο**

Γνωστική περιοχή:

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου.

Συμμεταβολή μεγεθών.

Εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου.

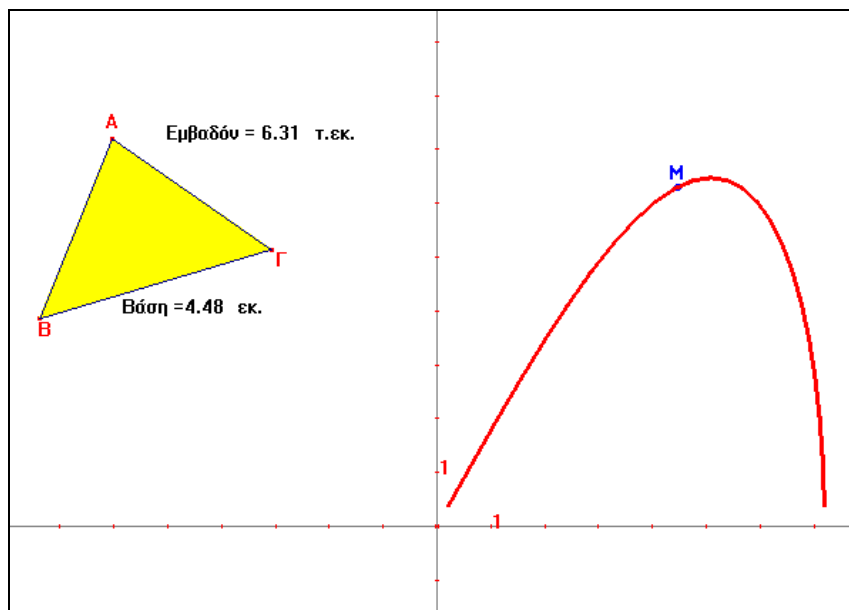
Σύστημα συντεταγμένων.

Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Μέγιστη – ελάχιστη τιμή.

Θέμα:

Στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri Geometry II σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Μελετήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του όταν μεταβάλλεται η βάση του και οι ίσες πλευρές του παραμένουν σταθερές. Πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;



Εικόνα 32.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του Cabri Geometry II.

**Σκεπτικό:**

Βασική ιδέα:

Με το προτεινόμενο σενάριο, οι μαθητές της Β΄ Λυκείου καλούνται:

Να διερευνήσουν και να κατανοήσουν την συμμεταβολή εμβαδού και βάσης ισοσκελούς τριγώνου του οποίου οι ίσες πλευρές παραμένουν σταθερές.

Να περιγράψουν τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να εκφράσουν αλγεβρικά την συμμεταβολή αυτή.

Να διερευνήσουν και να εκφράσουν την μέγιστη τιμή για το εμβαδόν.

Με την παραπάνω διαδικασία, οι μαθητές θα μελετήσουν την έννοια της συμμεταβολής, της συνάρτησης και θα συνδυάσουν γνώσεις και εμπειρίες της γεωμετρίας με αυτές της άλγεβρας και των συναρτήσεων.

Προστιθέμενη αξία.

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο δεν αποτελεί μόνο μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας των Μαθηματικών αλλά φιλοδοξεί να έχει και ευρύτερες επιρροές. Συγκεκριμένα:

Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει στην διδασκαλία του το προτεινόμενο σενάριο θα έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους οι οποίες θα συμβάλουν στην βελτίωση της στάσης του απέναντι στη καθημερινή σχολική διαδικασία.

Θα διδάξει σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο του σεναρίου το οποίο προβλέπει ατμόσφαιρα ερευνητικού εργαστηρίου.

Η συμβολή του σ' αυτό απαιτεί αλλαγή του ρόλου του και από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης, καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, σημείο αναφοράς της τάξης του ως προς την καθοδήγηση της έρευνας και την επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων των μαθητών αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

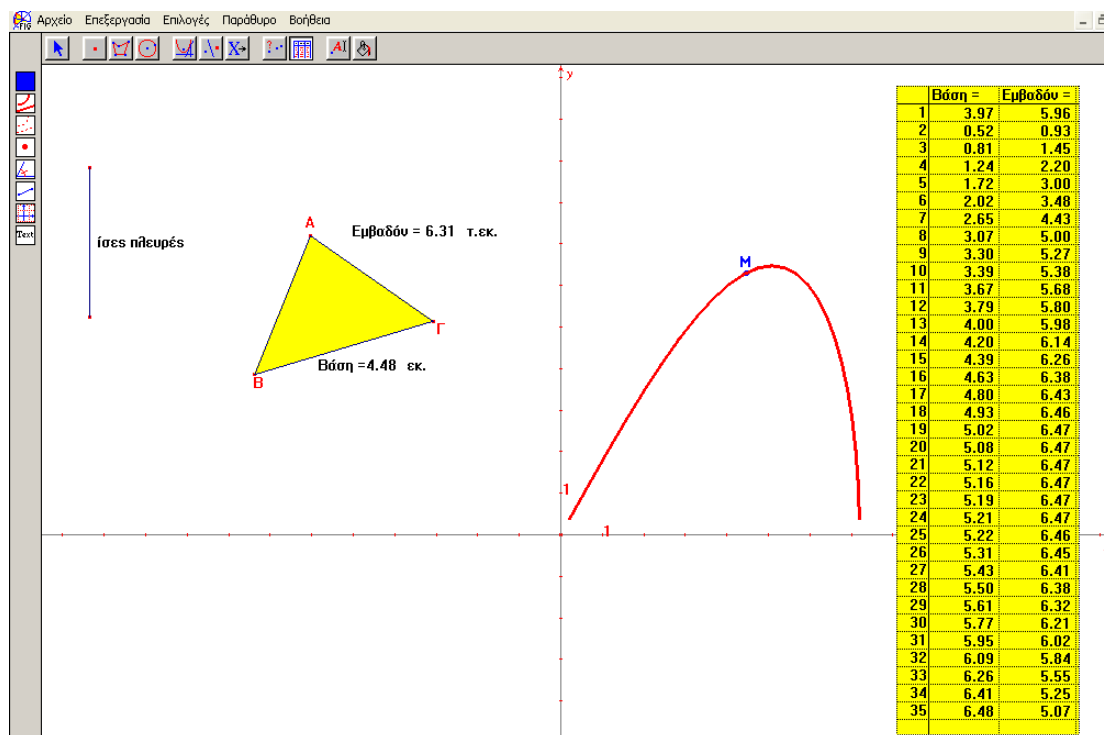
Σ' ένα σχολείο στο οποίο εφαρμόζονται εκπαιδευτικά σενάρια όπως το προτεινόμενο απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Η διεύθυνση του σχολείου θα πρέπει να γνωρίζει ότι η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτεί μια άλλη στάση απέναντι στη λειτουργία του σχολείου. Για παράδειγμα ίσως χρειαστεί μερικές ομάδες μαθητών να συναντηθούν και να εργαστούν στο σχολείο πέραν του κλασικού ωραρίου. Αυτό πρέπει κατά

κάποιο τρόπο να διασφαλιστεί και οι μαθητές να ενθαρρυνθούν σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων προς την κατεύθυνση της μάθησης και της διδασκαλίας. Έτσι βελτιώνεται η σχολική ζωή και το σχολείο αποκτά ένα πιο συγκεκριμένο ρόλο στο πλαίσιο της κοινωνίας. Η εφαρμογή του προτεινόμενου εκπαιδευτικού σεναρίου αναμένεται να συμβάλει προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτεί διερεύνηση και πειραματισμό είναι διαπιστωμένο ότι ενισχύει από τη μεριά τους την δημιουργία εικασιών και τον έλεγχο τους, την διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων, την αξιοποίηση ενός μεγάλου εύρους και ποικιλίας γνώσεων και εμπειριών μέσω των οποίων αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος.

Επίσης στη διδασκαλία των σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεγεθών με παραδοσιακά μέσα δεν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό του τρόπου συμμεταβολής και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της. Για παράδειγμα, ο τρόπος συμμεταβολής της βάσης και του εμβαδού του ισοσκελούς τριγώνου δεν μπορεί να αποτυπωθεί ταυτόχρονα και με πολλαπλούς τρόπους με τον παραδοσιακό τρόπο, όπως συμβαίνει με τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας. Η χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Cabri geometry II, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να χειρίζεται δυναμικά το σχήμα και να παρακολουθεί πώς συμμεταβάλλονται τα δυο μεγέθη που μελετώνται. Ακόμα, το ίδιο το λογισμικό του επιτρέπει να καταγράφει και τις αριθμητικές τιμές των δυο μεγεθών και έτσι να έχει την δυνατότητα να περιγράφει με πολλαπλούς τρόπους αυτή την συμμεταβολή.



Εικόνα 32

### Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Για τους περισσότερους μαθητές το εμβαδόν τριγώνου είναι απλά ένας τύπος που χρησιμοποιείται στον αριθμητικό υπολογισμό του εμβαδού και τίποτα περισσότερο. Μάλιστα ο τύπος αυτός συνδέεται με συγκεκριμένα μεγέθη του τριγώνου, την βάση του και το ύψος του. Ερωτήματα, όπως, πως μεταβάλλεται το εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου όταν μεταβάλλεται ένα από τα στοιχεία που το ορίζουν, όπως για παράδειγμα οι ίσες πλευρές του ενώ τα άλλα στοιχεία του παραμένουν σταθερά είναι ασυνήθιστο να τίθενται αλλά και δύσκολο ν' απαντηθούν. Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri Geometry II, το The Geometers' Sketchpad και το Geogebra επιτρέπουν την μελέτη τέτοιων ερωτημάτων, όπως αυτό που τίθεται στην παρούσα διερεύνηση.

Στο σενάριο που προτείνεται εδώ, οι μαθητές ερευνούν τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου όταν μεταβάλλεται η μια από τις ίσες πλευρές του.

### Πλαίσιο εφαρμογής:

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β' Λυκείου.



Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες. Εναλλακτικά μπορεί να διατεθεί λιγότερος χρόνος αν επιλεγεί να γίνει παρουσίαση του σεναρίου στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ωστόσο αν ο εκπαιδευτικός αποφασίσει να διδάξει ένα μέρος του στο εργαστήριο και το υπόλοιπο στην σχολική αίθουσα με τη χρήση ενός υπολογιστή και βιντεοπροβολέα ή το υπόλοιπο να δοθεί υπό τη μορφή εργασίας στον ελεύθερο χρόνο θα πρέπει να προσαρμόσει ανάλογα τις δραστηριότητες και να εκπονήσει τα κατάλληλα φύλλα εργασίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Την έννοια του εμβαδού και τον τύπο του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου.

Την έννοια της συμμεταβολής δυο μεγεθών.

Την έννοια της γραφικής παράστασης της συμμεταβολής δυο μεγεθών.

Τις απαιτούμενες λειτουργικότητες και χειρισμούς του προγράμματος Cabri Geometry II ή του The Geometers' Sketchpad.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους)

Βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες)

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό

Κοινωνική ενσχυρήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να

υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα από μεν την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου:

Να κατανοήσουν και να περιγράψουν την συμμεταβολή της βάσης και του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου του οποίου οι ίσες πλευρές παραμένουν σταθερές.

Να συνδέσουν με την έννοια της συμμεταβολής με την έννοια της συνάρτησης.

Να διερευνήσουν και να εκφράσουν την περίπτωση που το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Από δε την παιδαγωγική πλευρά:

Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες (συμμεταβολή, ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή, συνάρτηση, κτλ.) θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες

Να τους δοθεί η ευκαιρία να οργανώσουν τα δεδομένα τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Να αξιολογήσουν τα δεδομένα που προκύπτουν από την διερεύνησή τους για να μελετήσουν και να εκφράσουν την συμμεταβολή των δυο μεγεθών.

Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώσουν κανόνες, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους.

### **Ανάλυση του σεναρίου:**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε δυο φάσεις:

- Η πρώτη φάση αφορά:

στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει,

στην κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ώστε οι ίσες πλευρές του να παραμένουν σταθερές.

Προτείνεται οι μαθητές:

Να σχεδιάσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα ως βάση του ισοσκελούς τριγώνου και ένα δεύτερο σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ως μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να σχεδιάσουν το ισοσκελές τρίγωνο με βάση και ίσες πλευρές τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα με τη βοήθεια της εντολής «Πολύγωνο».

Ένας τρόπος κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου είναι ο σχεδιασμός ενός κύκλου με ακτίνα το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και μια χορδή του ίση με τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Το ισοσκελές με κορυφή το κέντρο του κύκλου και βάση τη χορδή ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές κάνουν πειράματα μεταβάλλοντας την βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

- Η δεύτερη φάση αφορά

στην μέτρηση της βάσης και του εμβαδού του τριγώνου,

στην μεταφορά της μέτρησης των δυο μεγεθών στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων,

στην πινακοποίηση των μετρήσεων

στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών.

Προτείνεται οι μαθητές:

Να επιλέξουν τις κατάλληλες εντολές ώστε να μετρήσουν το μήκος της βάσης και το εμβαδόν του τριγώνου.

Να εμφανίσουν το σύστημα συντεταγμένων και να κάνουν μεταφορά μέτρησης, του μήκους της βάσης στον άξονα  $χχ'$  και του εμβαδού στον κατακόρυφο άξονα  $ψψ'$  με την εντολή «Μεταφορά μέτρησης».

Να σχεδιάσουν τις κάθετες στους δυο άξονες στα σημεία που ορίστηκαν και το σημείο τομής αυτών.

Να σχεδιάσουν τον γεωμετρικό τρόπο του σημείου τομής όταν μεταβάλλεται το ένα άκρο της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου.

Με τη βοήθεια της εντολής «Πινακοποίηση» να πινακοποιήσουν τις τιμές των δυο μεταβλητών.

Να περιγράψουν τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού σε σχέση με την μεταβολή του μήκους της βάσης.

Να εκφράσουν λεκτικά και αλγεβρικά τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών.

Να εκφράσουν λεκτικά και αλγεβρικά το μέγιστο της συμμεταβολής.

Θεωρείται σκόπιμο στο τέλος κάθε φάσης, όλες οι ομάδες να κάνουν μία σύντομη παρουσίαση των συμπερασμάτων τους.

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Το προτεινόμενο λογισμικό επελέγη με κριτήριο την εξυπηρέτηση των αναγκών των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

Το Cabri Geometry II δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να επιλέγουν από ένα πλήθος εργαλείων αυτά που θεωρούν κατάλληλα για τις διερευνήσεις τους.

Να αξιοποιούν τις γνώσεις τους και τις εμπειρίες τους προκειμένου να κατανοήσουν την διαδικασία συμμεταβολής των γεωμετρικών μεγεθών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να αναπτύσσουν στρατηγικές διερεύνησης και αξιοποίησης των εμπειριών τους και των εργαλείων του λογισμικού.

Να επιλέγουν τα κατάλληλα εργαλεία για να κάνουν τις διερευνήσεις τους.

Να εκφράζουν την συνάρτηση των δυο μεγεθών.

### **Επέκταση:**

Ως προς την επέκταση των παραπάνω οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν την συμμεταβολή μεγεθών και άλλων γεωμετρικών σχημάτων όπως της πλευράς και του εμβαδού ενός ισόπλευρου τριγώνου και να συνδέσουν βαθύτερα την έννοια της συνάρτησης με την συμμεταβολή μεγεθών γεωμετρικών σχημάτων ως παράδειγμα.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

### **Σχεδίαση φύλλου εργασίας:**

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο

πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με την διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σχεδίασης και παρατήρησης (για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα)
- Ερωτήματα διατύπωσης (για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις)
- Ερωτήματα ελέγχου (για ερμηνείες, επεξηγήσεις, αποδείξεις, κτλ)

### **9.3 Χειρισμός αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων.**

#### **9.3.1 Σενάριο 6. Η γραμμική συνάρτηση $\psi=ax$**

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου.

Η γραμμική συνάρτηση  $\psi=ax$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας.

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την αναζήτηση συνευθειακών σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο μέσω του λόγου των συντεταγμένων τους. Η γραμμική συνάρτηση θα αποτελέσει ένα εργαλείο αναζήτησης ίσων λόγων άρα και συνευθειακών σημείων.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Function Probe.

**Σκεπτικό:**

Βασική ιδέα:

Αν διαθέτουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν πίνακα με δύο στήλες. Η πρώτη στήλη θα περιέχει την τετμημένη και η άλλη την τεταγμένη. Η απεικόνιση των ζευγών θα μπορούσε να υποδείξει τον τρόπο με τον

οποίο μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων μέσω των συνευθειακών σημείων τα οποία θα δημιουργούσαν.

Οι γραμμικές συναρτήσεις αναπαριστώνται πλέον μέσω συνευθειακών σημείων ενώ η κλίση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν προσδιορίζει τον σταθερό συντελεστή  $a$  σε κάθε μία συνάρτηση.

Προστιθέμενη αξία.

Ο κατακερματισμός της ύλης σε βιβλία, κεφάλαια και παραγράφους δημιουργεί την αντίληψη ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα σύνολο διακριτών και πολλές φορές ασύνδετων εννοιών και προτάσεων οι οποίες εφαρμόζονται σε πολύ συγκεκριμένα και εστιασμένα προβλήματα και ασκήσεις. Από την άλλη η κατανόηση μιας έννοιας είναι ανάλογη προς το πλήθος των συνδέσεων που διαθέτει με άλλες έννοιες μέσα στον χώρο των μαθηματικών. Η προστιθέμενη αξία του συγκεκριμένου σεναρίου στηρίζεται στο γεγονός ότι μέσω του σεναρίου δύο φαινομενικά ξένες περιοχές των μαθηματικών, η γραμμική συνάρτηση και τα όμοια τρίγωνα, θα αλληλοεμπλακούν και θα συνδεθούν μέσα από τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία. Συγκεκριμένα, μέσω του σεναρίου θα δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές:

Να δημιουργήσουν οι ίδιοι σταδιακά μία διαδικασία ελέγχου και ταξινόμησης ομοίων τριγώνων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναλαμβάνεται ταχύτατα ενώ, συγχρόνως, θα μπορούν να δημιουργούν μεγάλο πλήθος από συνευθειακά σημεία.

Οι μαθητές θα συνδέσουν περιοχές των μαθηματικών οι οποίες όχι μόνο βρίσκονται σε διαφορετικές παραγράφους αλλά και σε βιβλία διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων (Άλγεβρα – Γεωμετρία)

Η γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης θα μετατραπεί σε ένα αντικείμενο πάνω στο οποίο οι μαθητές θα εφαρμόσουν μετασχηματισμούς οι οποίοι καταγράφονται αυτομάτως από το λογισμικό. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική ο μετασχηματισμός αυτός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μίας συνάρτησης.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, στο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από τη μία στην άλλη γίνεται μέσα από την δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ψηφιακών εργαλείων.

Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν και θα διερευνήσουν την συμπεριφορά της συνάρτησης συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα ώστε η αίθουσα να μετατραπεί σε ένα εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

### **Πλαίσιο εφαρμογής:**

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 10 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές ανά τρεις. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με την χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Την έννοια του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Την γραφική παράσταση αναλόγων ποσών.

Την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $\psi = \alpha x$

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Την λειτουργία του πίνακα τιμών του λογισμικού FP και ιδιαίτερα την συμπλήρωση μιας στήλης μέσω μιας άλλης.

Την αλλαγή κλίμακας σε ένα γράφημα.

Την δημιουργία γραφικών παραστάσεων



Την λειτουργία της οριζόντιας παραμόρφωσης μιας γραφικής παράστασης και της μεταφοράς.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει ένα φύλλο εργασίας μέσα στο οποίο ο διδάσκων θα έχει θέσει συγκεκριμένα ερωτήματα και οδηγίες. Επιπλέον καλό θα είναι οι μαθητές να διαθέτουν ένα τετράδιο σημειώσεων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να επινοήσουν τρόπους αξιοποίησης των δυνατοτήτων του ψηφιακού εργαλείου το οποίο διαθέτουν. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού σύνδεση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Οι μαθητές θα μάθουν να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της γραμμικής συνάρτησης ώστε να εντοπίζουν συνευθειακά σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

Θα συνδέσουν την κλίση της ευθείας  $\psi = \alpha\chi$  με την τιμή μονάδας στα ανάλογα ποσά.

Θα χρησιμοποιήσουν την γραμμική συνάρτηση  $\psi = \alpha\chi$  για να δημιουργήσουν την γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha\chi + \beta$  και να κατανοήσουν την ιδιαίτερη σχέση των δύο αυτών συναρτήσεων.

Τα παραπάνω αφορούν τους γνωστικούς στόχους. Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διυποκειμενικό χαρακτήρα.

## Ανάλυση του σεναρίου:

### Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Ο διδάσκων θα πρέπει να έχει ετοιμάσει έναν πίνακα με αριθμούς σε 2 στήλες και 20 γραμμές. Θα έχει φροντίσει τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αριθμών να δημιουργούν τρεις ομάδες ευθειών, δηλαδή οι λόγοι των συντεταγμένων θα παρουσιάζουν συνολικά 3 διαφορετικά αποτελέσματα. Ακόμη ένα από τα ζεύγη τιμών θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο που δεν θα ανήκει σε καμία από τις τρεις προηγούμενες ευθείες.

### 1<sup>η</sup> Φάση

Στην αρχή ο διδάσκων επιχειρεί να κινητοποιήσει τους μαθητές επισημαίνοντας ότι στην δραστηριότητα αυτή εκτός από το αποτέλεσμα έχει σημασία και ο χρόνος υλοποίησης ο οποίος θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με την βοήθεια των υπολογιστικών εργαλείων που διαθέτουν. Στην συνέχεια θέτει στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα:

«Ένας πωλητής είναι υπεύθυνος για την πώληση τριών προϊόντων Α, Β, Γ τα οποία διαθέτει σε διαφορετικές τιμές. Κάθε φορά που κάνει μία πώληση καταγράφει την ποσότητα  $\pi$  (σε κιλά) και δίπλα το ποσό  $\tau$  που εισέπραξε. Όταν είχε ολοκληρώσει είκοσι πωλήσεις παρέδωσε τον πίνακα που είχε κατασκευάσει στον προϊστάμενό του ο οποίος αμέσως πέρασε τις τιμές των δύο στηλών στον πίνακα του λογισμικού FP και θέλησε να ελέγξει δύο πράγματα α) Πόσες πωλήσεις είχε κάνει από κάθε προϊόν και β) αν σε κάποια πώληση είχε γίνει λάθος στον υπολογισμό. Με ποιους τρόπους μπορεί να το ελέγξει;»

Στο σημείο αυτό ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να περάσουν στις στήλες του πίνακα τιμών του λογισμικού τα 20 έτοιμα ζεύγη τιμών που αντιστοιχούν σε 20 διαφορετικές πωλήσεις. Ενδεικτικά, θα μπορούσαν να ζητήσουν από το λογισμικό να συμπληρώσει μία επιπλέον στήλη με το πηλίκο των τιμών των δύο άλλων στηλών. Ο διδάσκων συζητά με κάθε ομάδα την δυνατότητα αυτή ή οποιαδήποτε άλλη λύση προτείνουν τα μέλη της ομάδας.

Αρχείο		Επεξεργασία		Αποστολή	
Π	Τ	Τ	Τ	Τ/Π	Τ/Π
ποσότητα	τιμή	τιμή	τιμή	λάνος	λάνος
0.8	1.68				
0.2	0.24				
1.6	1.92				
1.3	0.78				
5.5	11.55				
1.9	3.99				
11.5	6.9				
3.8	4.56				
3.4	2.04				
6.2	4.96				
2.2	2.64				
3.5	7.35				
5.3	3.18				
6.8	4.08				
5.7	6.84				
4.7	9.87				
15	9				
3	6.3				
8.1	9.72				
5	3				

Πίνακας 1: Τα ζεύγη (ποσότητα, τιμή).

Αν οι μαθητές κατασκευάσουν μια τρίτη στήλη η οποία να υπολογίζει το πηλίκο  $t/p$  τότε θα παρατηρήσουν ότι το πηλίκο αυτό παίρνει τρεις διαφορετικές τιμές 0,6, 2,1 και 1,2. Οι τιμές αυτές καθορίζουν και τις τρεις διαφορετικές ομάδες συνευθειακών σημείων. Ένας όμως από τους λόγους δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα οπότε οι μαθητές συνδέουν το μεμονωμένο αυτό σημείο με τον λανθασμένο υπολογισμό.

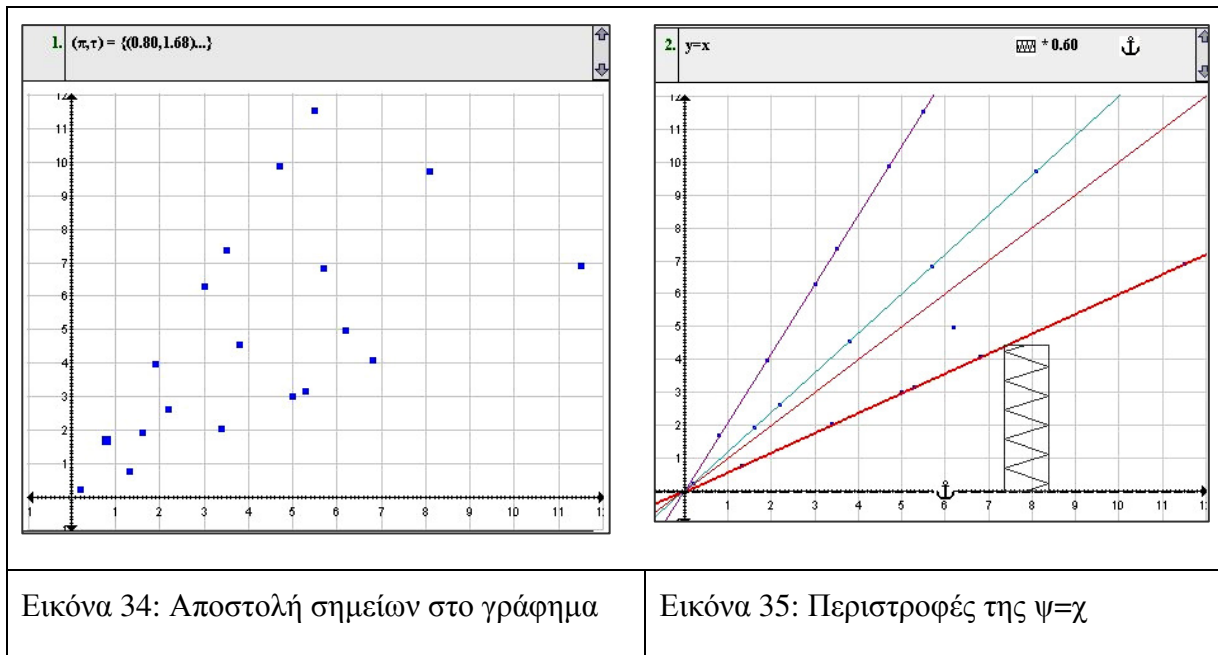
Στην συνέχεια ο διδάσκων θέτει το ερώτημα αν τα ζεύγη τιμών μεταφερόμενα στους άξονες του πίνακα γράφημα παρουσιάσουν κάποια κανονικότητα. Η συζήτηση πάνω στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα σημεία μάλλον θα παρουσιάσουν τρεις διαφορετικές κανονικότητες, μια για κάθε ομάδα σημείων. Εδώ τίθεται πλέον το ερώτημα πως θα ανακαλυφθούν οι τρεις ομάδες με τις δυνατότητες που μας παρέχει ο πίνακας γράφημα.

Οι αναλογίες θα πρέπει να παραπέμψουν τους μαθητές σε γραμμικές σχέσεις οι οποίες εκφράζονται από εξισώσεις της μορφής  $y=a\cdot x$ .

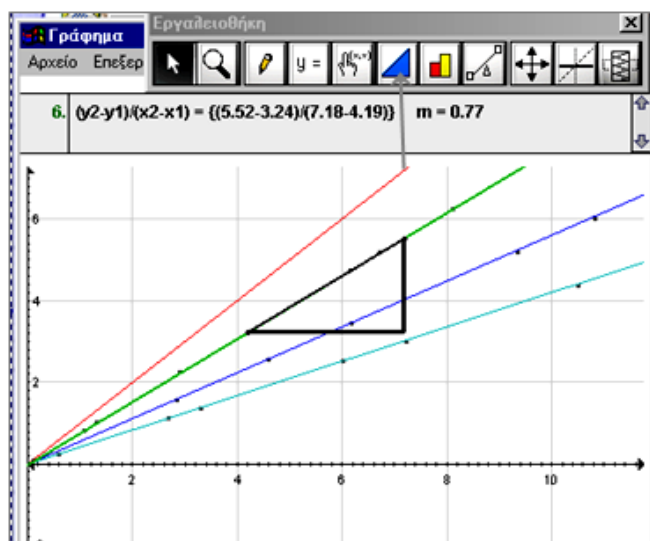
Στο σημείο αυτό θα ήταν σκόπιμο να γίνει διαπραγμάτευση για το εύρος των τιμών σε κάθε ένα από τους άξονες αλλά και η απαιτούμενη ακρίβεια ώστε οι μαθητές να επιλέξουν την κατάλληλη κλίμακα με το αντίστοιχο εργαλείο.

Στη συνέχεια οι μαθητές αποστέλλουν τα σημεία στους άξονες και κατασκευάζουν την ευθεία  $y=x$ . Στη συνέχεια με το εργαλείο του ελαστικού χειρισμού περιστρέφουν την ευθεία ώστε να προσαρμοστεί πάνω στα σημεία.

Μέσω της περιστροφής της ευθείας με εξίσωση  $y=x$  οι μαθητές ανακαλύπτουν τρεις ομάδες συννευθιακών σημείων ενώ συγχρόνως το λογισμικό τους δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουν και τις εξισώσεις των τριών ευθειών που προκύπτουν:  $y=2,1x$   $y=0,6x$   $y=1,2x$ .



Στην συνέχεια οι μαθητές διαπραγματεύονται τους δύο τρόπους με τους οποίους πλέον μπορούν να απαντήσουν στα αρχικά ερωτήματα. Ο ένας τρόπος είναι ο αριθμητικός (πίνακας τιμών) και ο άλλος τρόπος είναι μέσω της γραφικής παράστασης και του μεμονωμένου σημείου (γεωμετρικός). Μία σύνδεση θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι οι λόγοι που είχαν εντοπίσει με τον πίνακα τιμών εμφανίζονται ως συντελεστές διεύθυνσης στις 3 ευθείες. Εδώ ο διδάσκων έχει την δυνατότητα να οδηγήσει τους μαθητές στην ανάκληση της έννοιας της κλίσης ευθείας η οποία μπορεί να διερευνηθεί μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού.



Εικόνα 36: Η κλίση κάθε ευθείας μπορεί να εντοπιστεί με τη βοήθεια του κατάλληλου εργαλείου που υποδεικνύει και το οποίο λειτουργεί εφόσον έχει επιλεγεί μια συγκεκριμένη ευθεία.

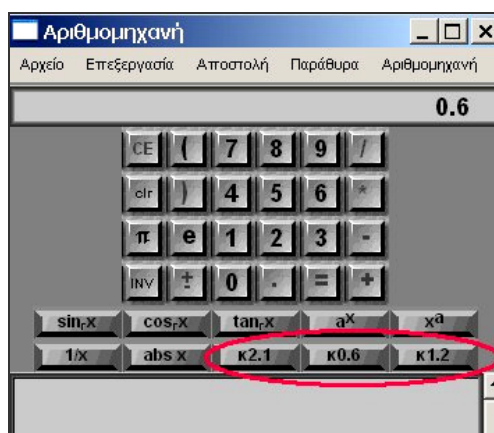
Εδώ το σημαντικό είναι ότι το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο κατασκευάζει το λογισμικό έχει πλευρές των οποίων τα μέτρα είναι ανάλογα προς τις συντετεγμένες των σημείων της ομάδας.

## 2<sup>η</sup> Φάση

Από το σημείο αυτό ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν πίνακες τιμών για τα τρία αυτά προϊόντα ώστε ο υπάλληλος να έχει έτοιμη την τιμή πώλησης και να μην χρειάζεται να κάνει πράξεις κατά την πώληση των προϊόντων.

Το σημαντικό κατά την φάση αυτή είναι να διαπραγματευτούν οι μαθητές με πόσους τρόπους μπορούν να κατασκευάσουν τέτοιους πίνακες και να υλοποιήσουν μία τουλάχιστον τέτοια κατασκευή.

Συγκεκριμένα ένα τρόπος θα μπορούσε να είναι η χρήση της αριθμομηχανής μέσω της οποίας θα κατασκευάσουν τρία κουμπιά με τα οποία θα παράγουν ζεύγη τιμών για κάθε ένα από τα τρία προϊόντα.



Εικόνα 37: Η κατασκευή των τριών κουμπιών

Ένας άλλος τρόπος κατασκευής πινάκων μπορεί να υλοποιηθεί με την χρήση του παραθύρου του πίνακα αν οι μαθητές γεμίσουν μία στήλη με τιμές π.χ. από 0,5 μέχρι 10 με αύξηση 0,5. Στην συνέχεια θα 'γεμίσουν' τις τρεις επόμενες στήλες με την βοήθεια των τύπων των τριών συναρτήσεων. Εδώ είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί η σημασία του συντελεστή  $a$  (τιμή μονάδας) της συνάρτησης  $\psi = ax$  όταν το  $x$  εκφράζει ποσότητα και το  $\psi$  τιμή.

Τέλος, ένας άλλος τρόπος κατασκευής πινάκων είναι η κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των τριών συναρτήσεων και στην συνέχεια η αποκοπή σημείων από τις γραφικές παραστάσεις με βήμα το οποίο θα αποφασίσουν οι μαθητές.

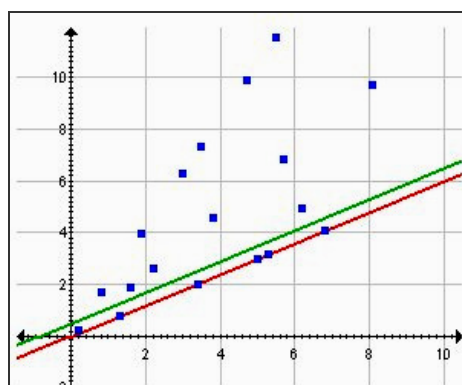
Οι δραστηριότητες της δεύτερης φάσης έχουν στόχο να οικειοποιηθούν οι μαθητές τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της γραμμικής συνάρτησης η οποία γίνεται πλέον εργαλείο επίλυσης πρακτικών προβλημάτων.

### Τρίτη φάση

Η φάση αυτή θα μπορούσε να αποτελέσει μία επέκταση του σεναρίου ώστε να γίνει μετάβαση από την γραμμική συνάρτηση στην  $\psi = \alpha\chi + \beta$ .

Στην αρχή ο διδάσκων περιγράφει στους μαθητές μία νέα κατάσταση για το πρόβλημα που ήδη έχουν λύσει. Συγκεκριμένα πληροφορεί τους μαθητές ότι ειδικά για το προϊόν με τιμή μονάδος 0,6 είναι απαραίτητη μία ορισμένη συσκευασία η οποία, για οποιαδήποτε ποσότητα αγοράς, χρεώνεται 0,5€ επιπλέον. Από τους μαθητές ζητείται να διαπραγματευτούν ποιες μετατροπές θα πρέπει να κάνουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi = 0,6\chi$  και στον πίνακα τιμών της ίδιας συνάρτησης ώστε να περιγράψουν σωστά τα καινούργια δεδομένα.

Εδώ οι μαθητές θα πρέπει, με την βοήθεια του διδάσκοντα, να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι είναι απαραίτητο η γραφική παράσταση να μετακινηθεί παράλληλα ώστε να μη μεταβληθεί η τιμή μονάδος (το  $\alpha$ ) και προς τα επάνω ώστε να αυξηθούν ομοίμορφα όλες οι τιμές.



Εικόνα 38: Η νέα συνάρτηση.

Τέλος οι μαθητές θα μετασχηματίσουν την στήλη των τιμών της συνάρτησης  $\psi = 0,6\chi$  προσθέτοντας στον τύπο της συνάρτησης το 0,5. Αυτή η τελευταία ενέργεια θα μπορούσε να οδηγήσει από την μεριά του διδάσκοντα στον ορισμό της συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi + \beta$  η οποία στην

συνέχεια θα αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης σχετικά με την σχέση της με την συνάρτηση  $\psi=0,6x$ .

### Ενδεικτικό Φύλλο εργασίας

Ο καθηγητής των Μαθηματικών σε ένα σχολείο δεν βαθμολογεί μόνο την ικανότητα να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα αλλά και το πόσο γρήγορα το λύνει. Έδωσε στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα:

«Ένας πωλητής είναι υπεύθυνος για την πώληση τριών προϊόντων Α, Β, Γ τα οποία διαθέτει σε διαφορετικές τιμές. Κάθε φορά που κάνει μία πώληση καταγράφει την ποσότητα π (σε κιλά) και δίπλα το ποσόν τ που εισέπραξε. Όταν είχε ολοκληρώσει είκοσι πωλήσεις παρέδωσε στον πίνακα που είχε κατασκευάσει στον προϊστάμενό του ο οποίος αμέσως πέρασε τις τιμές των δύο στηλών στον πίνακα του λογισμικού Function Probe και θέλησε να ελέγξει δύο πράγματα α) Πόσες πωλήσεις είχε κάνει από κάθε προϊόν και β) αν σε κάποια πώληση είχε γίνει λάθος στον υπολογισμό. Με ποιους τρόπους μπορεί να το ελέγξει;»

Προϊόν	ποσότητα	τιμή	Λόγος
	0,8	1,68	
	0,2	0,24	
	1,6	1,92	
	1,3	0,78	
	5,5	11,55	
	1,9	3,99	
	11,5	6,9	
	3,8	4,56	
	3,4	2,04	
	6,2	4,96	
	2,2	2,64	
	3,5	7,35	
	5,3	3,18	
	6,8	4,08	
	5,7	6,84	
	4,7	9,87	
	15	9	
	3	6,3	

	8,1	9,72	
	5	3	

Πίνακας 2

Να συζητήσετε και να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις.

- 1) Διαθέτουμε 3 σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο και θέλουμε να ελέγξουμε αν αυτά είναι συνευθειακά με την αρχή των αξόνων πως μπορεί να γίνει αυτό;
- 2) Αν περάσουμε τις τιμές των συντεταγμένων των σημείων σε δυο στήλες του πίνακα τιμών του FP, πώς μπορούμε να διακρίνουμε ποια είναι συνευθειακά;
- 3) Αν περάσουμε τα ζεύγη των συντεταγμένων στον πίνακα γράφημα και κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y=x$ , πως μπορούμε να εντοπίσουμε τις ομάδες των συνευθειακών σημείων;
- 4) Πως συνδέονται οι απαντήσεις στις δύο προηγούμενες ερωτήσεις;

#### **Σύνοψη των δραστηριοτήτων και αξιολόγηση.**

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η δομή του σεναρίου, η σειρά των δραστηριοτήτων και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Κρατώντας σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μπορεί να εκτιμήσει τα σημεία στα οποία οι μαθητές δήλωναν ή εκδήλωναν δυσκολίες κατανόησης ή εφαρμογής. Στην συνέχεια, με κατάλληλες επεμβάσεις στις δραστηριότητες, επιχειρεί να θεραπεύσει τα προβλήματα που προέκυψαν απλοποιώντας διαδικασίες ή περιγράφοντας με μεγαλύτερη σαφήνεια τις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα, μετά την ολοκλήρωση των φάσεων της δραστηριότητας οι μαθητές περιγράφουν γραπτώς την πορεία και τα αποτελέσματά της.

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να απαντήσουν σε συγκεκριμένα ερωτήματα ώστε να τα χρησιμοποιήσουν ως βάση διαπραγμάτευσης.

Τα ερωτήματα αυτά θα μπορούσαν να έχουν την παρακάτω δομή και σειρά:

Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσατε το λογισμικό για να εντοπίσετε συνευθειακά σημεία και να αναφέρετε τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες αξιοποιήσατε το λογισμικό.



Να τεκμηριώσετε την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων σας, για ποιό λόγο δηλαδή μπορεί να είναι κάποιος βέβαιος ότι οι στήλες έχουν συμπληρωθεί με τα σωστά αριθμητικά δεδομένα.

Να αναφέρετε και να σχολιάσετε τυχόν νέα μαθηματικά δεδομένα που προέκυψαν κατά την διάρκεια της δραστηριότητας. Συγκεκριμένα, να περιγράψετε τις συνδέσεις που έχετε κάνει μεταξύ μαθηματικών εννοιών οι οποίες δεν ήταν φανερές στο σχολικό βιβλίο και τα μαθήματα που είχατε μέχρι στιγμής παρακολουθήσει στο σχολείο.

Να αναφέρετε τυχόν δυσκολίες τις οποίες συναντήσατε και τον τρόπο με τον οποίο τις ξεπεράσατε.

Ως προς τα εργαλεία:

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Οι δυσκολίες που θα παρουσιαστούν θα καταγραφούν από τον διδάσκοντα ο οποίος θα είτε θα βελτιώσει τις απαιτήσεις του σεναρίου είτε θα σχεδιάσει μια περισσότερο κατευθυνόμενη πορεία εφαρμογής του ίδιου σεναρίου.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει την βάση πάνω στην οποία είναι δυνατόν να οργανωθεί η διδασκαλία της  $\psi = \alpha\chi + \beta$ .

### 9.3.2 Σενάριο 7. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου.

Η συνάρτηση  $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$  (γραφική παράσταση, μονοτονία, ακρότατα).

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης του τριωνύμου μέσα από δύο βασικές μεταφορές της γραφικής παράστασης της βασικής συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi^2$ . Επιπλέον αφορά τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\alpha$ . Με βάση τα προηγούμενα μπορεί να γίνει η μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων του τριωνύμου.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Geogebra.

### **Σκεπτικό:**

#### Βασική ιδέα

Η κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$  και η μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων της θα μπορούσε να υλοποιηθεί μέσα από τις μεταφορές της βασικής δευτεροβάθμιας συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi^2$ . Οι μεταφορές αυτές είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δυναμικές αν η διδασκαλία υποστηριχτεί από ένα διερευνητικό λογισμικό το οποίο να έχει χαρακτηριστικά CAS. Επιπλέον, θα μπορούσαν οι μαθητές να διερευνήσουν την σημασία των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  όταν αυτοί μεταβάλλονται δυναμικά.

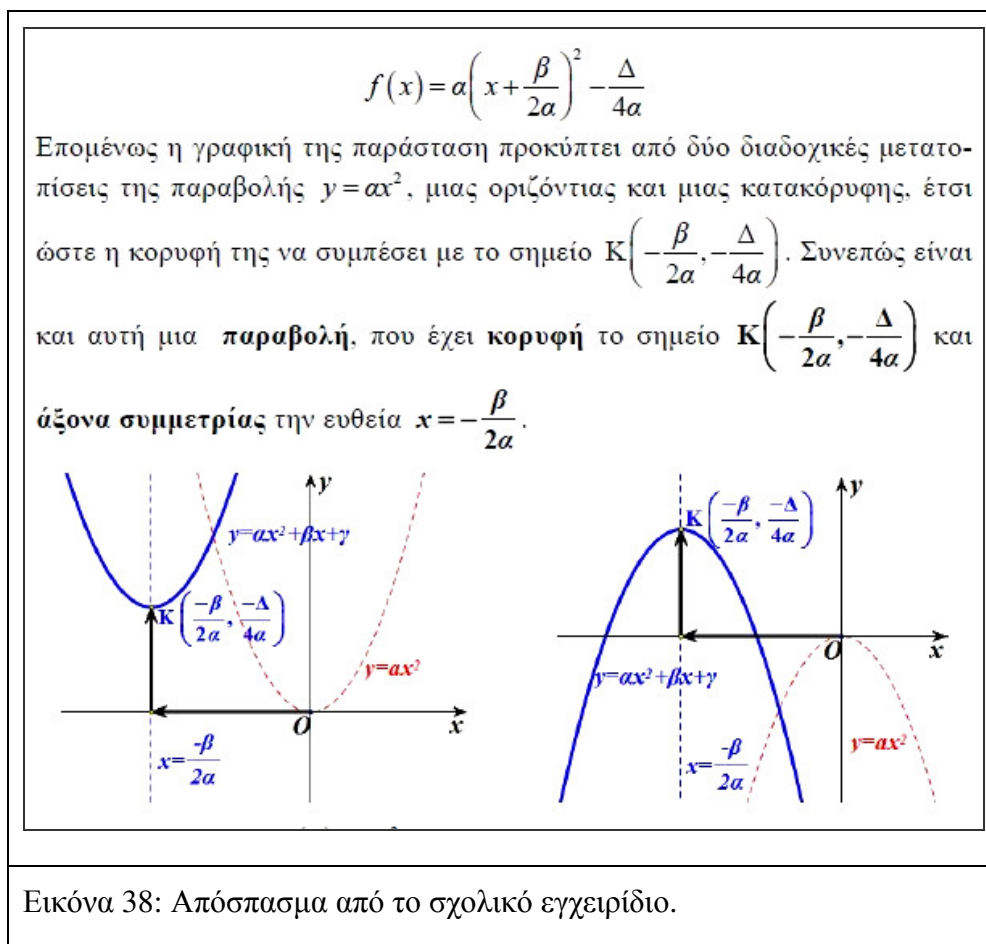
#### Προστιθέμενη αξία.

Η διδασκαλία της συνάρτησης  $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ , με βάση το σχολικό εγχειρίδιο, στηρίζεται αρχικά στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς τους οποίους εφαρμόζουμε στο τριώνυμο ώστε να έρθει στην μορφή  $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ . Στην συνέχεια παρουσιάζεται η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\psi = \alpha\chi^2$  με βάση την μορφή που έχει το μετασχηματισμένο τριώνυμο. Σύμφωνα με το εγχειρίδιο η τελική μορφή του τριωνύμου 'αποκαλύπτει' κατά κάποιον τρόπο τις απαραίτητες γενικές μεταφορές που θα πρέπει να υποστεί η γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha\chi^2$  η οποία έχει ήδη μελετηθεί σε προηγούμενη παράγραφο. Καθώς δεν υπάρχουν εργαλεία δυναμικής αναπαράστασης των γραφικών παραστάσεων το εγχειρίδιο περιορίζεται στην παρουσίαση μικρού αριθμού στατικών εικόνων για το αποτέλεσμα των μεταφορών και την κατασκευή της γραφικής παράστασης του τριωνύμου.

Με το παρόν σενάριο οι μαθητές θα αποδώσουν κατ' αρχήν κιναισθητικό νόημα στις μεταφορές της βασικής γραφικής παράστασης καθώς θα πραγματοποιούν τις μεταφορές αυτές οι ίδιοι. Επιπλέον οι μαθητές θα έχουν την δυνατότητα να διερευνήσουν ειδικές περιπτώσεις γραφικών παραστάσεων τριωνύμων όπως για παράδειγμα τριώνυμο με  $\beta=0$  ή  $\gamma=0$  ή  $\Delta=0$  κ.λ.π.

Ακόμη θα συνδέσουν τις μεταβολές των τιμών των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  με τους μετασχηματισμούς που υφίσταται η γραφική παράσταση (αλλαγή καμπυλότητας, κίνηση στο

επίπεδο, μεταφορές). Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική η μετασχηματισμός αυτός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μίας συνάρτησης.



Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, στο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από την μία στην άλλη γίνεται μέσα από την δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ψηφιακών εργαλείων.

Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν και θα διερευνήσουν την συμπεριφορά της συνάρτησης συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα ώστε η αίθουσα να μετατραπεί σε ένα εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

### Πλαίσιο εφαρμογής:

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 10 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές ανά τρεις. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με την χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Τον μετασχηματισμό του τριωνύμου στην μορφή  $a(x + \frac{\beta}{2a})^2 - \frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a^2}$ .

Τις μεταφορές τις οποίες υφίσταται η γραφική παράσταση της  $f(x)$  όταν αυτή μετασχηματίζεται σε  $f(x+k)$  ή σε  $f(x)+\lambda$ .

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Την δημιουργία ενός σημείου στην οθόνη όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του.

Την δημιουργία του σημείου τομής δύο ευθειών.

Την δημιουργία γραφικών παραστάσεων.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει ένα φύλλο εργασίας μέσα στο οποίο ο διδάσκων θα έχει θέσει συγκεκριμένα ερωτήματα και οδηγίες. Επιπλέον καλό θα είναι οι μαθητές να διαθέτουν ένα τετράδιο σημειώσεων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να επινοήσουν τρόπους αξιοποίησης των δυνατοτήτων του ψηφιακού εργαλείου το οποίο διαθέτουν. Επομένως, η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας θα πρέπει

να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

### **Στόχοι:**

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού σύνδεση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Οι μαθητές θα μάθουν να κατασκευάζουν την γραφική παράσταση ενός τριωνύμου μέσα από κατάλληλες μεταφορές.

Θα μπορούν να περιγράψουν την μονοτονία και τις άλλες συναρτησιακές ιδιότητες της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+\gamma$ .

Θα συνδέσουν τις μεταβολές των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  με τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης.

Θα συνδέσουν την γραμμική συνάρτηση με την ομοιότητα των τριγώνων.

Τα παραπάνω αφορούν τους γνωστικούς στόχους. Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διυποκειμενικό χαρακτήρα.

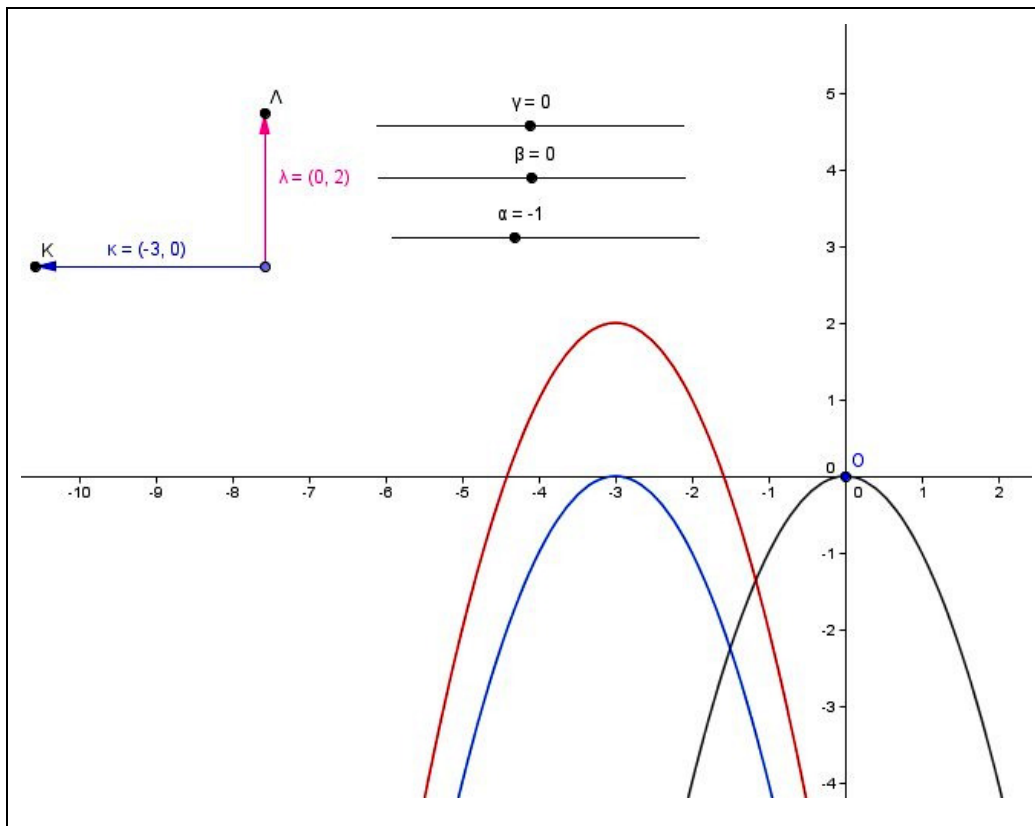
### **Ανάλυση του σεναρίου:**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Ο διδάσκων θα πρέπει να έχει ετοιμάσει ένα αρχείο λογισμικού με κατάλληλους δρομείς και διανύσματα μεταφοράς ώστε οι μαθητές να επικεντρωθούν περισσότερο στην διερεύνηση και λιγότερο στις τεχνικές κατασκευής των εργαλείων μεταφοράς.

Το αρχείο αυτό προτείνεται να περιέχει:

- Τρεις δρομείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  για τους συντελεστές του τριωνύμου.
- Δύο διανύσματα, ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο, με τα οποία θα γίνει η μεταφορά των γραφικών παραστάσεων.



Εικόνα 39: Τα βασικά εργαλεία που θα έχει στην διάθεσή του ο μαθητής.

Οι δραστηριότητες του σεναρίου θα υλοποιηθούν σε τρεις φάσεις.

### 1<sup>η</sup> Φάση

Στην αρχή ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$  επιλέγοντας τιμές  $\beta=0$  και  $\gamma=0$  στους αντίστοιχους δρομείς.

Στην συνέχεια ζητά να αλλάξουν τις τιμές στον δρομέα  $\alpha$  και να μελετήσουν τις μεταβολές της γραφικής παράστασης. Ακολούθως ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση του τριωνύμου  $\chi^2 + 2\chi + 1$  και να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να κινηθεί η γραφική παράσταση της  $\psi = \chi^2$  ώστε να ταυτιστεί με την γραφική παράσταση της  $\psi = \chi^2 + 2\chi + 1$ . Στο σημείο αυτό οι μαθητές χρησιμοποιούν το οριζόντιο διάνυσμα  $\kappa$  για να υλοποιήσουν την μεταφορά και την ταύτιση.

Στη συνέχεια ζητά να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση της  $\psi = \chi^2 + 2\chi - 3$  αφού πρώτα τους υποδείξει να μετασχηματίσουν το τριώνυμο σε  $(\chi + 1)^2 - 4$ . Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι με τον μετασχηματισμό αυτό μπορούν να

διακρίνουν τις δύο μεταφορές που θα πρέπει να υλοποιήσουν στην γραφική παράσταση της  $\psi=\chi^2$ .

Τέλος, ζητά από τους μαθητές να ανακαλέσουν τον μετασχηματισμό της γενικής μορφής του τριωνύμου  $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$  και να περιγράψουν σε βήματα την διαδικασία με την οποία θα μπορούν πλέον να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση οποιουδήποτε τριωνύμου με την βοήθεια της  $\psi=\alpha\chi^2$  και τους δρομείς  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ .

Ένα ενδεικτικό φύλλο εργασίας θα μπορούσε να ήταν παρακάτω:

Φύλλο εργασίας 1.

1) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $f(x)=ax^2$ . Να μεταβάλλεται τις τιμές του  $a$  με την βοήθεια του δρομέα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

τιμές του $a$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
μορφή της γραφικής παράστασης.			

2) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $\psi=\chi^2+2\chi+1$  εισάγοντας τον τύπο της απευθείας στο λογισμικό. Να περιγράψετε τις μεταφορές που θα πρέπει να γίνουν στην γραφική παράσταση της  $f(x)=ax^2$  καθώς και την τιμή του  $a$  που θα πρέπει να επιλέξετε. Με την βοήθεια των διανυσμάτων  $\kappa$  και  $\lambda$  να υλοποιήσετε τις μεταφορές αυτές.

3) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $\psi=\chi^2+2\chi-3$  μεταφέροντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της  $\psi=\chi^2+2\chi+1$ . Ποιες μεταφορές θα πρέπει να γίνουν στην  $\psi=\chi^2$  ώστε να προκύψει η  $\psi=\chi^2+2\chi-3$ ;

4) Θέλουμε τώρα να βρούμε μία γενικευμένη διαδικασία με την οποία θα μπορούμε να κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης της μορφής  $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$  με κατάλληλες μεταφορές της  $\psi=\alpha\chi^2$ . Να περιγράψετε μία τέτοια διαδικασία με βάση τον τύπο

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

5) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις τριών τυχαίων τριωνύμων της δικής σας επιλογής με βάση την διαδικασία που περιγράψατε στην προηγούμενη ερώτηση.

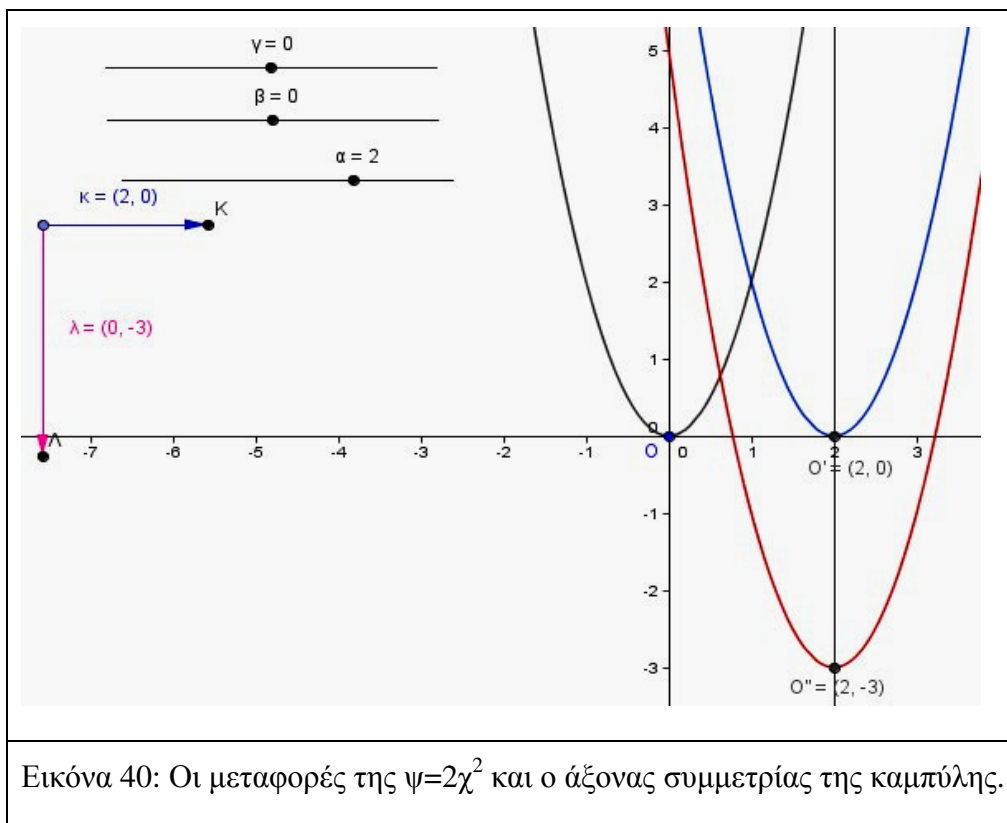
## 2<sup>η</sup> Φάση

Στη φάση αυτή οι μαθητές με την βοήθεια του λογισμικού θα μελετήσουν συναρτησιακές ιδιότητες της  $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ . Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να μελετήσουν αρχικά την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)=ax^2$  για τις διάφορες τιμές του  $a$ .

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουν την γραφική παράσταση μίας συγκεκριμένης συνάρτησης π.χ.  $2x^2-8x+5$  με μεταφορές. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κατασκευάσουν το σημείο  $O(0, 0)$  και να το μεταφέρουν κατά τα διανύσματα  $\kappa$  (αρχικά) και στην συνέχεια  $\lambda$ .

Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να μεταφέρουν την μονοτονία και της άλλες συναρτησιακές ιδιότητες της  $f(x)=2x^2$  στην καινούργια θέση οπότε αναμένεται να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι η κορυφή της καμπύλης αποτελεί το ακρότατο της συνάρτησης με συντεταγμένες  $(-\frac{\beta}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ .

Τέλος η ύπαρξη άξονα συμμετρίας θα μπορούσε να αναδειχτεί αν οι μαθητές μεταφέρουν τον άξονα  $\chi'\chi$  κατά διάνυσμα  $\kappa$ .





### 3η Φάση

Στην φάση αυτή οι μαθητές θα μελετήσουν τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης ενός τριωνύμου καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Συγκεκριμένα ο διδάσκων ζητά αρχικά από τους μαθητές να ανακαλέσουν τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης του τριωνύμου όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\alpha$  και προτείνει να διαπραγματευτούν τις μεταβολές των  $\beta$  και  $\gamma$ .

Στην συνέχεια οδηγεί σταδιακά τους μαθητές στην κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+\gamma$  με την βοήθεια των δρομέων  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Τώρα πλέον ζητά από τους μαθητές να αποκρύψουν τις δύο καμπύλες που προκύπτουν μέσω μεταφοράς και να δώσουν μη μηδενικές τιμές στα  $\beta$  και  $\gamma$ .

Η καμπύλη που απομένει στην οθόνη αποτελεί πλέον το αντικείμενο μελέτης και διερεύνησης των μαθητών.

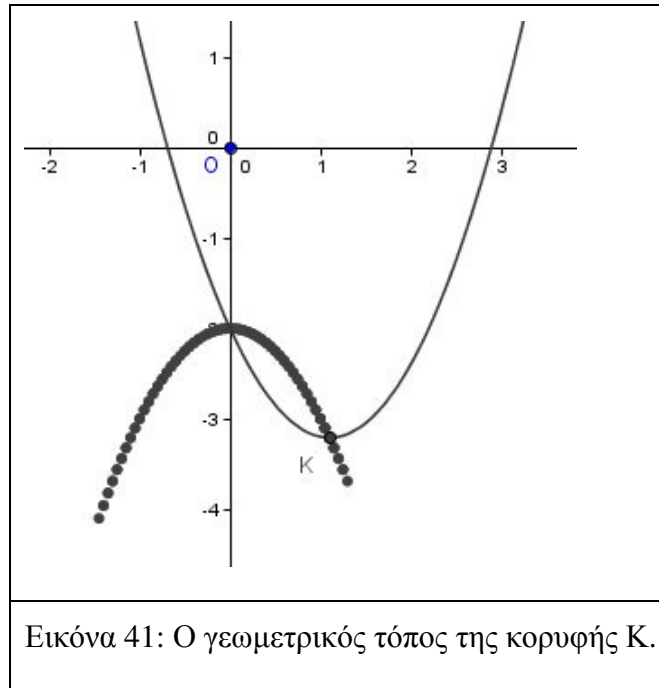
Μερικές από τις δραστηριότητες που μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές ο διδάσκων είναι οι εξής:

α) Να κατασκευάσουν το σημείο  $K=(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha})$  και να παρατηρήσουν ότι αυτό παραμένει πάντα στην κορυφή της καμπύλης για οποιεσδήποτε τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

β) Να κατασκευάσουν τα σημεία  $A=(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, 0)$  και  $B=(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, 0)$  και να παρατηρήσουν ότι τα σημεία αυτά εμφανίζονται εκεί που η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $x'$  (όταν αυτό πραγματοποιείται).

γ) Μία ενδιαφέρουσα διερεύνηση – που προτάθηκε και στο πλαίσιο σεναρίου από τον επιμορφωτή Σπύρο Μαυρουδή στο ΠΑΚΕ 7 - θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με βάση τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\beta$ . Συγκεκριμένα, ο διδάσκων μπορεί να διαπραγματευτεί με τους μαθητές στην αρχή την καμπύλη πάνω στην οποία φαίνεται να κινείται η κορυφή  $K$ . Στην συνέχεια θα ζητήσει από τους μαθητές να εμφανίσουν το ίχνος της κορυφής  $K$  και να αλλάξουν τις τιμές του δρομέα  $\beta$ .

Η καμπύλη που θα εμφανιστεί θα αποτελέσει αντικείμενο συζήτησης με τους μαθητές καθώς παραπέμπει έντονα σε παραβολή.



Εδώ το σημαντικό είναι να ακολουθήσει διαπραγμάτευση ώστε να εξηγηθεί με μαθηματικό τρόπο γιατί η κορυφή ακολουθεί την συγκεκριμένη διαδρομή. Τέλος, θα μπορούσε ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές τον γεωμετρικό τόπο του K όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\alpha$  ή όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής  $\gamma$ .

### Επέκταση

Μία επέκταση των δραστηριοτήτων θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία ευθεία κάθετη στον άξονα  $x'x$  σε ένα σημείο του P.

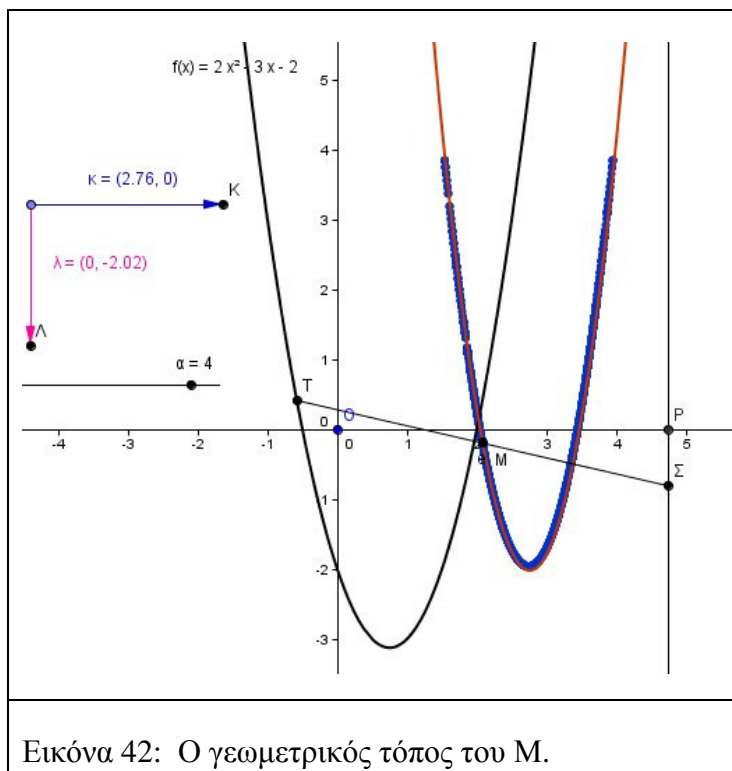
Πάνω στην ευθεία να κατασκευάσουν ένα σημείο Σ και πάνω στην γραφική παράσταση ενός συγκεκριμένου τριωνύμου (π.χ.  $2x^2-3x-2$ ) ένα σημείο T.

Να κατασκευάσουν το τμήμα ΣΤ και το μέσον του M στο οποίο να εμφανίσουν το ίχνος.

Μετακινώντας το σημείο T πάνω στην γραφική παράσταση του τριωνύμου, το σημείο M γράφει μία καμπύλη. Οι μαθητές καλούνται να βρουν την σχέση της καμπύλης του ίχνους προς την αρχική καμπύλη.

Το σημαντικό σε αυτή τη διερεύνηση είναι να εντοπίσουν οι μαθητές μία ή περισσότερες κανονικότητες αλλάζοντας τόσο της θέση της κατακόρυφης ευθείας όσο και την θέση του σημείου Σ πάνω στην ευθεία αυτή. Η διερεύνηση αυτή μπορεί να γίνει με τον δρομέα  $\alpha$  και

τα διανύσματα  $\kappa$  και  $\lambda$  με τα οποία οι μαθητές θα προσαρμόζουν την καμπύλη  $\psi = a\chi^2$  πάνω στην καμπύλη του ίχνους ώστε να βρουν τα στοιχεία της καμπύλης του ίχνους.



Εικόνα 42: Ο γεωμετρικός τόπος του M.

### Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου όπως για παράδειγμα αν οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν την γραφική παράσταση οποιουδήποτε τριωνύμου με κατάλληλες μεταφορές. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ότι κάτι τέτοιο δεν υλοποιήθηκε εξετάζει του λόγους για τους οποίους συνέβη αυτό ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

### **9.3.3 Σενάριο 8. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις**

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου.

Η συνάρτηση  $\psi = \rho \cdot \eta \mu(\lambda x + \kappa)$

Γραφική παράσταση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Γραφική επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης.

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = \rho \cdot \eta \mu(\lambda x + \kappa)$  και συγκεκριμένα την περίοδο, τα ακρότατα και το χαρακτηριστικό της περιττής συνάρτησης. Η γραφική παράσταση θα αποτελέσει ένα επιπλέον θέμα μελέτης.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Function Probe.

**Σκεπτικό:**

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα μελετήσουν την συμπεριφορά της συνάρτησης  $f(x) = \eta \mu x$  σε τρεις βασικούς μετασχηματισμούς της.

α) όταν η εξαρτημένη μεταβλητή πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό  $y \rightarrow \rho \cdot x$

β) όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό  $x \rightarrow \lambda \cdot x$

γ) όταν στην ανεξάρτητη μεταβλητή προστεθεί ένας αριθμός  $x \rightarrow x+k$ .

Προστιθέμενη αξία.

Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\lambda x + \kappa)$  στην διδασκαλία της τριγωνομετρίας με τα συμβατικά μέσα είναι λίγο έως πολύ γνωστός.

Το παρακάτω απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό.

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu(x + \frac{\pi}{4})$ . Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από την  $g(x) = 2\eta\mu x$  αν, όπου  $x$ , θέσουμε  $x + \frac{\pi}{4}$ , δηλαδή ισχύει

$$f(x) = g(x + \frac{\pi}{4})$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $g$  κατά  $\frac{\pi}{4}$  μονάδες, προς τα αριστερά.

Η έλλειψη αναπαραστασιακών εργαλείων υποχρεώνει τους συγγραφείς να καταφύγουν σε μία περιγραφή των μετασχηματισμών η οποία στηρίζεται κυρίως σε αλγεβρική επεξεργασία των συμβόλων

Η περιγραφή αυτή συνήθως παρουσιάζεται από τον διδάσκοντα στον πίνακα.

Με τις δραστηριότητες του σεναρίου οι μαθητές:

Θα δημιουργήσουν οι ίδιοι σταδιακά την γραφική παράσταση της συνάρτησης με ένα μεγάλο πλήθος σημείων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναλαμβάνεται ταχύτατα ώστε να δημιουργείται πύκνωση των ήδη υπαρχόντων σημείων κατά βούληση.

Οι μαθητές θα πραγματοποιήσουν ένα πέρασμα από την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών στην έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης κάτι που συνήθως, στην παραδοσιακή διδασκαλία, γίνεται βίαια μέσω ενός άλματος από τις μοίρες στα ακτίνια.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης θα μετατραπεί σε ένα αντικείμενο πάνω στο οποίο οι μαθητές θα εφαρμόσουν μετασχηματισμούς οι οποίοι καταγράφονται αυτομάτως από το λογισμικό. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική η μετασχηματισμός τους είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης της συνάρτησης.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις τους συνάρτησης, στο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από την μία στην άλλη γίνεται μέσα από την δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ψηφιακών εργαλείων.

Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν και θα διερευνήσουν την συμπεριφορά τους συνάρτησης συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα ώστε η αίθουσα να μετατραπεί σε ένα εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

### **Πλαίσιο εφαρμογής:**

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται τους μαθητές τους Β΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2-3 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 10 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές ανά τρεις. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με την χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως τους τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Τους μονάδες μέτρησης γωνίας και τον τύπο που συνδέει τους μονάδες αυτές.

Την έννοια του πίνακα τιμών και τους γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Την γραφική επίλυση τους εξίσωσης.

Ως τους την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Την λειτουργία του πίνακα τιμών του λογισμικού  $fp$  και ιδιαίτερα την συμπλήρωση μιας στήλης μέσω μιας τους.

Την δημιουργία γραφικών παραστάσεων

Την λειτουργία τους οριζόντιας παραμόρφωσης μιας γραφικής παράστασης.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει ένα φύλλο εργασίας μέσα στο οποίο ο διδάσκων θα έχει θέσει συγκεκριμένα ερωτήματα και οδηγίες. Επιπλέον καλό θα είναι οι μαθητές να διαθέτουν ένα τετράδιο σημειώσεων.

Κοινωνική ενορχήστρωση τους τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία τους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια τους υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού προσέγγιση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

- την μετάβαση από την έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού, που προσεγγίστηκε σε μικρότερες τάξεις, στην έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής
- την έννοια άρτιας-περιττής συνάρτησης
- την έννοια της κυκλικής συνάρτησης
- την έννοια της περιόδου και τους παράγοντες που την καθορίζουν
- την έννοια του μεγίστου - ελαχίστου συνάρτησης.
- τους μετασχηματισμούς της ημιτονοειδούς καμπύλης όταν μετασχηματίζεται ο τύπος της.

Τα παραπάνω αφορούν τους γνωστικούς στόχους. Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διυποκειμενικό χαρακτήρα.

### Ανάλυση του σεναρίου:

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

1η δραστηριότητα: Αντιστοιχία μοιρών - πραγματικών αριθμών

Πριν από την συγκεκριμένη δραστηριότητα καλό θα ήταν ο διδάσκων να διαπραγματευτεί με τους μαθητές τις δύο βασικές μονάδες μέτρησης τόξων (μοίρες – ακτίνια) και την χρησιμότητα των ακτινίων στην περίπτωση που θέλουμε να ορίσουμε την συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu x$ . Στην συνέχεια ζητά να δημιουργήσουν έναν πίνακα μετατροπής των ακτινίων σε μοίρες (ή και το αντίστροφο).

x	d=x*180/3.14159265
radians	degrees
-3.14	-180
-2.75	-157.5
-2.36	-135
-1.96	-112.5
-1.57	-90
-1.18	-67.5
-0.79	-45
-0.39	-22.5
0	0
0.39	22.5
0.79	45
1.18	67.5
1.57	90
1.96	112.5
2.36	135
2.75	157.5
3.14	180

Εικόνα 33 Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών οι μαθητές εξοικειώνονται στην αντιστοιχία μοιρών-πραγματικών αριθμών (ακτίνια).

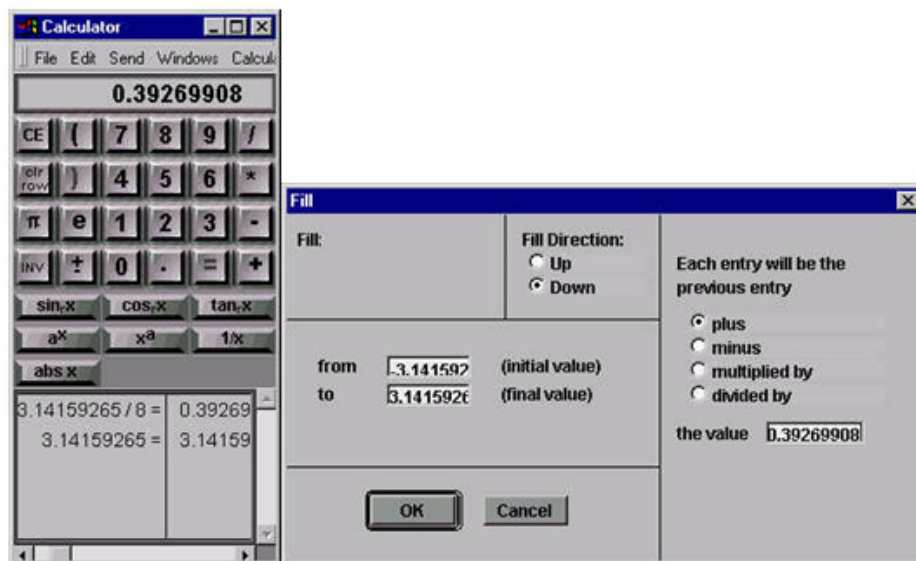
Στον παραπάνω πίνακα χρησιμοποιείται ως βήμα μεταβολής το  $\pi/8$  (η τιμή του υπολογίζεται με την αριθμομηχανή), το αντίστοιχο, δηλαδή, των  $22,5^\circ$ . Εκτυπώνουμε και αναπαράγουμε τον πίνακα και ενθαρρύνουμε τους μαθητές να προσέξουν και να σημειώσουν μερικές βασικές αντιστοιχίες (π.χ.  $\pi \rightarrow 3,14 \rightarrow 180$ ,  $\pi/2 \rightarrow 1,57 \rightarrow 90$  κ.τ.λ.).

2η δραστηριότητα: Δημιουργία του πίνακα τιμών



Στην αρχή της δραστηριότητας αυτή ο διδάσκων καλό είναι να αναφέρει την χρησιμότητα ενός πίνακα ημιτόνων καθώς και το γεγονός ότι ιστορικά η ανάγκη για αστρονομικούς υπολογισμούς κατασκευάστηκαν τέτοιοι συστηματικοί πίνακες πριν από 2000 τουλάχιστον χρόνια. Στην συνέχεια προτείνει στους μαθητές να περιορίσουν την μελέτη στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , «γεμίζοντας» (Table/Fill) τη στήλη του  $x$  με τιμές που μεταβάλλονται με βήμα υποπολλαπλάσιο του  $\pi$ , για παράδειγμα  $\pi/8$ .

Οι «ακριβείς» τιμές των  $\pi$  και  $\pi/8$  υπολογίζονται και εισάγονται με τη βοήθεια της αριθμομηχανής (calculator).



Εικόνα 34

x	y=sinx
-3.14	0
-2.75	-0.38
-2.36	-0.71
-1.96	-0.92
-1.57	-1
-1.18	-0.92
-0.79	-0.71
-0.39	-0.38
0	0
0.39	0.38
0.79	0.71
1.18	0.92
1.57	1
1.96	0.92
2.36	0.71
2.75	0.38
3.14	0

Στη διπλανή στήλη (του  $y$ ) οι μαθητές θα γράψουν τον τύπο  $y=\sin x$ , οπότε συμπληρώνεται αυτομάτως ο πίνακας τιμών.

Προτείνουμε και πάλι να αναζητήσουν και να σημειώσουν οι μαθητές τις τιμές με τις οποίες έχουν εξοικειωθεί σε προηγούμενες χρονιές

Εικόνα 35

3η δραστηριότητα: Δημιουργία γραφήματος- γραφικής παράστασης

Το γράφημα των σημείων που αντιστοιχούν στον πίνακα τιμών δίνει μια πρώτη ιδέα της ημιτονοειδούς καμπύλης. Στο μέτρο του διαθέσιμου χρόνου παροτρύνουμε τους μαθητές να δημιουργήσουν κι άλλο, πιο «πυκνό» πίνακα τιμών και το αντίστοιχο γράφημα (φροντίζουμε προηγουμένως να σώσουμε τον αρχικό πίνακα, με όνομα π.χ. sin.tbl).

Τέλος, υποδεικνύουμε τον τρόπο κατασκευής της γραφικής παράστασης για  $x \in \mathbb{R}$ , στο παράθυρο γραφικών.

4η δραστηριότητα: Μελέτη της καμπύλης  $y = \eta \mu x$

α) κυκλική συνάρτηση:

Ζητάμε από τους μαθητές να επισημάνουν πάνω σε αντίτυπο της γραφικής παράστασης σε χαρτί, σημεία της καμπύλης που έχουν την ίδια τιμή και την ίδια φάση. Επιβεβαιώνουμε την ορθότητα του δείγματος με τη βοήθεια της αριθμομηχανής (μπορούμε να κατασκευάσουμε αντίστοιχο πλήκτρο).

Αναζητούμε τη σχέση που συνδέει τα σημεία αυτά. Επιβεβαιώνουμε την ορθότητα του τύπου με δοκιμές στον πίνακα τιμών.

β) περιττή (συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων):

Ο πειραματισμός μπορεί να γίνει και αλγεβρικά (με τη βοήθεια του πίνακα τιμών) και γραφικά με μετασχηματισμούς

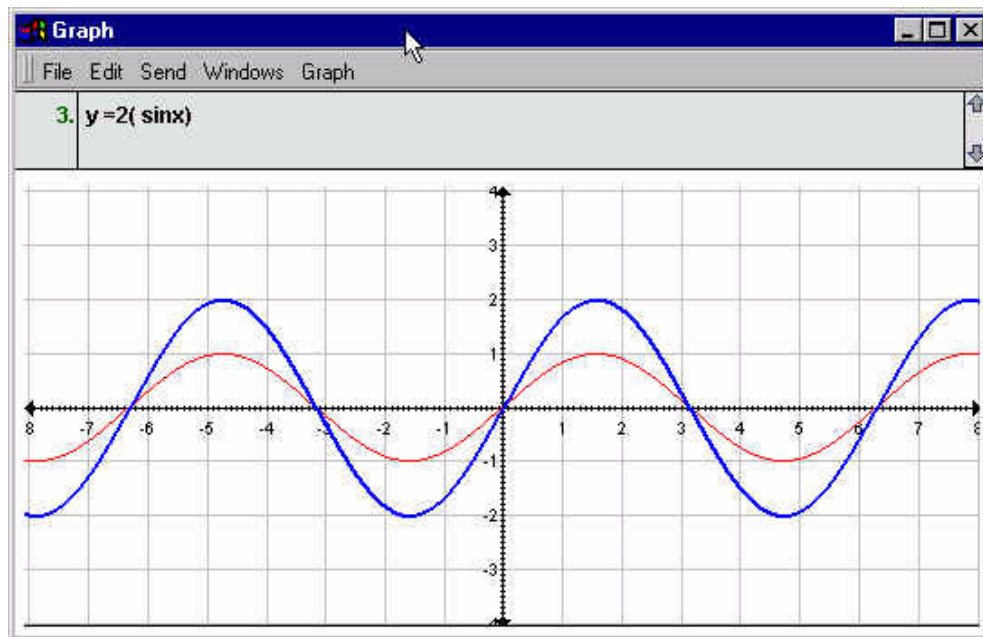
5η δραστηριότητα: Μελέτη της  $y = \rho \eta \mu x$

Στον πίνακα sin.tbl συμπληρώνουμε στήλες με τους τύπους  $y = 2\sin x$  και  $y = 3\sin x$ . Συγκρίνουμε τις νέες τιμές με αυτήν της στήλης  $y = \sin x$  προσπαθώντας να ανακαλύψουμε τις νέες αντιστοιχίες, τα νέα μέγιστα και ελάχιστα και να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων στο ίδιο γραφικό παράθυρο, με διαφορετικά χρώματα (η συμφωνία χρωμάτων στις γραφικές παραστάσεις και στις αντίστοιχες στήλες τιμών του πίνακα ενισχύει την εποπτεία).

Ζητάμε από τους μαθητές να μαντέψουν τη γραφική παράσταση των  $y = 0.5\sin x$ ,  $y = 0.3\sin x$  κ.τ.λ. Καλό είναι να έχουμε ετοιμάσει φύλλο εργασίας, όπου θα σχεδιάσουν πρόχειρα και τις καμπύλες των συναρτήσεων, μαζί με την καμπύλη της  $y = \sin x$ .

Ζητάμε να διατυπώσουν συμπεράσματα, σχετικά με το ρόλο του  $\rho$  στη μελέτη της συνάρτησης.



Εικόνα 36

6η δραστηριότητα: Μετασχηματισμός καμπύλης με το εργαλείο κατακόρυφης στρέβλωσης

Με το εργαλείο κατακόρυφης στρέβλωσης μεταβάλλουμε το ύψος της καμπύλης κατά ένα-δύο τετραγωνάκια προς τα πάνω ή προς τα κάτω (αλλάζουμε την τιμή του μέγιστου-ελάχιστου), παρακολουθώντας το μετασχηματισμό του τύπου της.

Συνεχίζουμε τον πειραματισμό με κατακόρυφες στρεβλώσεις τυχαίου ύψους.

Η εμφάνιση του «ιστορικού» του παραθύρου γραφικών βοηθά στον αναλογισμό του φαινομένου της κατακόρυφης παραμόρφωσης.

Η ονομασία (define) κάθε καμπύλης μας βοηθά να κάνουμε συγκεκριμένες αναφορές σε προηγούμενα στάδια.

Η δυνατότητα δημιουργίας πλήκτρου στην αριθμομηχανή για τον τύπο συγκεκριμένης συνάρτησης επιτρέπει τις επαληθεύσεις.

7η δραστηριότητα: Μελέτη της  $y=\eta\mu(\lambda \cdot \chi)$

### Ενδεικτικό φύλλο εργασίας.

1) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου  $f(x)=\sin(x)$ . Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις δυνατότητες που λογισμικού να διαπραγματευτείται το ερώτημα: «Τι κοινό θα έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\sin(2\cdot x)$  με την  $f(x)=\sin(x)$  και σε τι θα διαφέρουν;»

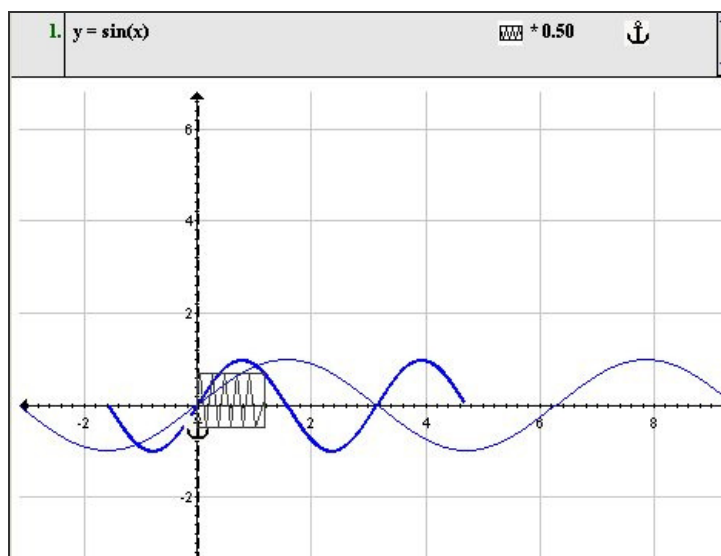
2) Με το εργαλείο οριζόντιας παραμόρφωσης να μεταβάλλετε την καμπύλη μέχρις ότου το πλάτος της γίνει το μισό του αρχικού. Να συγκρίνεται τις εικασίες που είχατε διατυπώσει στην πρώτη ερώτηση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

3) Να επαναλάβετε την διερεύνηση με αρκετές τιμές μεγαλύτερες του 1 αλλά και μικρότερες του 1. Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τους μετασχηματισμούς της συνάρτησης  $f(x)=\sin(x)$  όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  υφίσταται τον μετασχηματισμό  $x \rightarrow k\cdot x$ .

### Αναμενόμενες δράσεις.

Στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές θα κάνουν εικασίες για το τι μπορεί να συμβεί στην γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς καμπύλης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό. Την συζήτηση θα ενθαρρύνει ο διδάσκων προτρέποντας τους μαθητές να δίνουν μία εξήγηση για αυτά που υποστηρίζουν.

Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές θα πειραματιστούν με το εργαλείο αυξομείωσης ώστε να εντοπίσουν τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης σε συνδυασμό με τον συντελεστή του  $x$ .

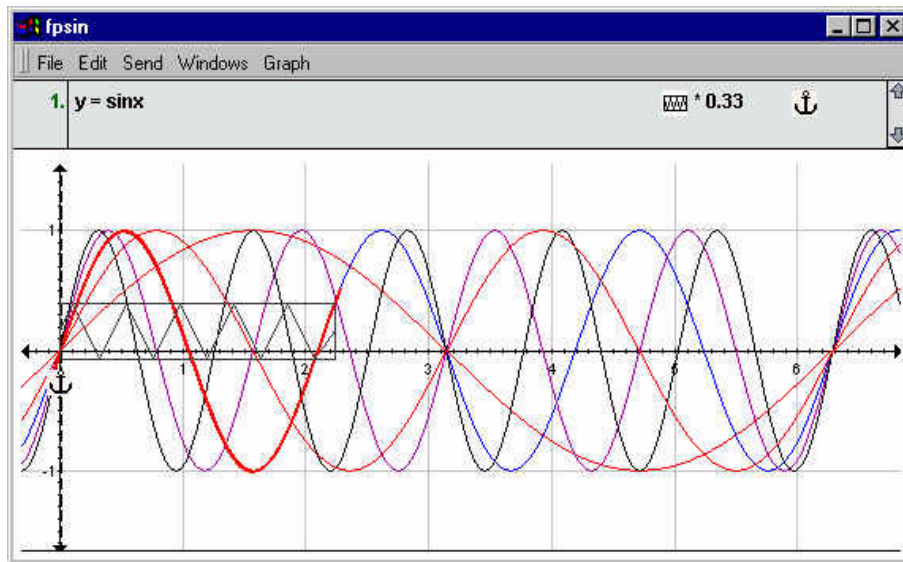


Εικόνα 37

Με αντίστοιχα βήματα και πειραματισμούς οδηγούμε τους μαθητές σε συμπεράσματα για το ρόλο που παίζει γενικά το  $\lambda$  στην περίοδο της συνάρτησης.

8η δραστηριότητα: Μελέτη της  $y=\eta\mu(\chi+\kappa)$

Με αντίστοιχα βήματα και με τη βοήθεια του εργαλείου οριζόντιας μετατόπισης μελετάμε και αυτό τον τύπο συνάρτησης, σε σχέση πάντα με την  $y=\eta\mu\chi$ .



Εικόνα 38

9η δραστηριότητα: Μελέτη της εξίσωσης  $\eta\mu\chi=a$

Στο παράθυρο γραφικών ζητάμε την κατασκευή της  $y=\eta\mu\chi$  και στη συνέχεια της τέμνουσας ευθείας  $y=a$ . Με κατάλληλες ερωτήσεις κινητοποιούμε τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με την τιμή του  $a$ .

Με τη βοήθεια του εργαλείου συντεταγμένων, ελέγχουμε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η ευθεία τέμνει την καμπύλη.

Με την κατακόρυφη μετακίνηση της ευθείας  $y=a$  διερευνούμε την επίλυση της εξίσωσης  $\eta\mu\chi=a$ .

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Για την υλοποίηση του σεναρίου θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό function probe. Το συγκεκριμένο λογισμικό διαθέτει τρία παράθυρα Το γράφημα, τον πίνακα τιμών και τον υπολογιστή. Κάθε ένα από τα παραπάνω εργαλεία διαθέτει μία σειρά από λειτουργικότητες ορισμένες από τις οποίες είναι απαραίτητες για τις δραστηριότητες. Για παράδειγμα το

γέμισμα μιας στήλης με την βοήθεια του υπολογιστή ή η παραμόρφωση μιας γραφικής παράστασης.

### **Επέκταση:**

Οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να επεκταθούν στην μελέτη των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων όπως της  $\psi = \rho \cdot \sin(\lambda\chi + \kappa)$  ή  $\psi = \rho \cdot \cos(\lambda\chi + \kappa)$ . Το σημαντικό είναι οι δραστηριότητες του παρόντος σεναρίου να μετασχηματιστούν σε μέθοδο διερεύνησης τριγωνομετρικών συναρτήσεων εν γένει.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί.

Ως προς τα εργαλεία:

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Οι δυσκολίες που θα παρουσιαστούν θα καταγραφούν από τον διδάσκοντα ο οποίος θα είτε θα βελτιώσει τις απαιτήσεις του σεναρίου είτε θα σχεδιάσει μια περισσότερο κατευθυνόμενη πορεία εφαρμογής του ίδιου σεναρίου.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η δομή του σεναρίου, η σειρά των δραστηριοτήτων και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Κρατώντας σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μπορεί να εκτιμήσει τα σημεία στα οποία οι μαθητές δήλωναν ή εκδήλωναν δυσκολίες κατανόησης ή εφαρμογής. Στην συνέχεια, με κατάλληλες επεμβάσεις στις δραστηριότητες, επιχειρεί να θεραπεύσει τα προβλήματα που προέκυψαν απλοποιώντας διαδικασίες ή περιγράφοντας με μεγαλύτερη σαφήνεια τις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει την βάση πάνω στην οποία είναι δυνατόν να οργανωθεί η λύση μιας οποιασδήποτε τριγωνομετρικής εξίσωσης της μορφής  $\rho \cdot \sin(\lambda\chi + \kappa) = c$ . Ακόμη θα μπορούσε να γίνει μελέτη σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής:  $f(x) = \rho_1 \cdot \sin(\lambda_1\chi + \kappa_1) + \rho_2 \cdot \sin(\lambda_2\chi + \kappa_2)$ .

## 9.4 Διαχείριση δεδομένων.

### 9.4.1 Σενάριο 9. Μελέτη του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα

Γνωστική περιοχή:

Στατιστική.

Θέμα:

Η χώρα μας όπως πολλές άλλες έχει δεχτεί τα τελευταία χρόνια μεγάλο αριθμό μεταναστών από διαφορετικές χώρες. Στην ιστοσελίδα της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας (<http://www.statistics.gr>, Στατιστικά στοιχεία → Απογραφή → Απογραφές 2000-2001 → Στοιχεία αλλοδαπών) μπορείτε να βρείτε δεδομένα σχετικά με την απογραφή του πληθυσμού των μεταναστών που δήλωσαν ότι εγκαταστάθηκαν στην Ελλάδα για εργασία κατά την τελευταία απογραφή του πληθυσμού το 2001.

Μπορείτε να συλλέξετε πληροφορίες σχετικές την κατανομή των μεταναστών σε γεωγραφικές περιοχές της χώρας μας και να συντάξετε μια μικρή αναφορά σχετική με τα στατιστικά χαρακτηριστικά των δεδομένων; Συζητείστε στην τάξη για τα κριτήρια επιλογής συγκεκριμένων γεωγραφικών περιοχών ως τόπων διαμονής για τους μετανάστες. Υπάρχουν δεδομένα που σας εκπλήσσουν;

Μπορείτε να συλλέξετε περισσότερα δεδομένα που θα σας βοηθήσουν να διερευνήσετε πώς και με ποιο τρόπο η επιλογή του τόπου διαμονής σχετίζεται με το είδος της απασχόλησης των μεταναστών στη χώρα μας;

Συζητήστε γενικότερα για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μετανάστες σε μια χώρα.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Ταξινομούμε.

## Σκεπτικό:

### Βασική ιδέα

Η χώρα μας όπως πολλές άλλες έχει δεχτεί τα τελευταία χρόνια μεγάλο αριθμό μεταναστών από διαφορετικές χώρες. Καθώς η ύπαρξη των μεταναστών σε μια χώρα επηρεάζει σημαντικά την οικονομική και κοινωνική διάρθρωση, τα τελευταία χρόνια το φαινόμενο της μετανάστευσης έχει αποτελέσει, πέρα από κοινωνική πραγματικότητα, και αντικείμενο έρευνας στον επιστημονικό χώρο. Οι σχετικές έρευνες στη χώρα μας επικεντρώνονται στην καταγραφή του πληθυσμού των μεταναστών μέσα από βασικά χαρακτηριστικά του (χώρα προέλευσης, περιοχή διαμονής, τύπος απασχόλησης κ.λπ.) αλλά και τη διερεύνηση των επιπτώσεων της μετανάστευσης στο κοινωνικό και οικονομικό πεδίο. Καθώς ένα πλήθος μαθηματικών εννοιών διέπει τις σχετικές δραστηριότητες η προβληματική του παρόντος σεναρίου εκκινεί από τη παιδαγωγική τους αξιοποίηση στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων.

Το προτεινόμενο σενάριο έχει σκοπό να εμπλέξει τους μαθητές σε διερευνητικές δραστηριότητες διαχείρισης στατιστικών δεδομένων και επεξεργασίας τους με άξονα τη μελέτη των χαρακτηριστικών του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα. Η εφαρμογή του σεναρίου και γενικότερα η επεξεργασία του από τους μαθητές θα βασιστεί σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν τον πληθυσμό των μεταναστών στην Ελλάδα και των χαρακτηριστικών του όπως καταγράφηκαν κατά την τελευταία απογραφή και έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας από δημόσιες υπηρεσίες και ακαδημαϊκούς φορείς.

### Προστιθέμενη αξία

Η διδασκαλία της στατιστικής και των πιθανοτήτων στην παραδοσιακή τάξη γίνεται με τη μορφή της παρουσίασής τους από το διδάσκοντα μέσω τύπων και δεδομένων που οι μαθητές καλούνται να “ερμηνεύσουν” παρατηρώντας στατικές αναπαραστάσεις, όπως πίνακες ή διαγράμματα. Ωστόσο, τα συγκεκριμένα μέσα αναπαράστασης προσφέρουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης πραγματικών δεδομένων και άρα στον τρόπο με τον οποίο αυτά μπορεί να “ταξινομηθούν” ή να “διαβαστούν” και να προκύψουν αντίστοιχα συμπεράσματα. Η έρευνα έχει δείξει ότι η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοιχτό πρόβλημα που εκπορεύεται από μια κατάσταση της καθημερινής ζωής ευνοεί την ανάπτυξη δραστηριοτήτων διερεύνησης, ανάπτυξης εικασιών και ελέγχου τους, διατύπωσης κανόνων και γενικεύσεων.



Το πρόβλημα που ζητείται να μελετηθεί στο πλαίσιο του παρόντος σεναρίου απαιτεί την εγγραφή στατιστικών δεδομένων που αφορούν τον πληθυσμό των μεταναστών στην Ελλάδα σε πίνακα και τη συσχέτιση των δεδομένων αυτών με τη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων εργαλείων διαχείρισης και επεξεργασίας τους προκειμένου να εξαχθούν αντίστοιχα συμπεράσματα.

Με το προτεινόμενο σενάριο, οι μαθητές καλούνται:

Να χρησιμοποιήσουν τα προσφερόμενα υπολογιστικά εργαλεία του προγράμματος Ταξινομούμε για την αναπαράσταση των δεδομένων σε μορφή πίνακα.

Να αποφασίσουν ποιες παράμετροι κατά τη γνώμη τους χαρακτηρίζουν τα δεδομένα που καλούνται να μελετήσουν.

Να διακρίνουν τα είδη των κατηγοριών (πεδίων) μιας βάσης δεδομένων και τα είδη των τιμών που αυτές λαμβάνουν με σκοπό την αξιοποίησή τους στη διερεύνηση ερωτημάτων.

Να θέτουν ερωτήματα σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών και να δημιουργούν νέες παραμέτρους για τη διερεύνησή τους.

Να χρησιμοποιήσουν τα προσφερόμενα υπολογιστικά εργαλεία για την διατύπωση ερωτημάτων συσχέτισης μεταξύ διαφορετικών παραμέτρων του πίνακα.

Να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία γραφικής αναπαράστασης για να αναπαραστήσουν τα αποτελέσματα των ερωτήσεων που διατυπώνουν

Να βγάλουν συμπεράσματα σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών ανά νομό ή γεωγραφική περιφέρεια.

### **Πλαίσιο εφαρμογής**

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στη Γ΄ Λυκείου (Μαθηματικά Γενικής Παιδείας).

Χρόνος υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 4-5 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών, ώστε οι μαθητές να μοιράζονται τους υπολογιστές και να μπορούν να πειραματίζονται οι ίδιοι, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες.

#### Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες του Ταξινομούμε αναφορικά με την καταχώριση, ταξινόμηση και χειρισμό στοιχείων στην ψηφίδα Βάση Δεδομένων, αλλά και τη συνδυαστική χρήση των υπολοίπων ψηφίδων του λογισμικού (διατύπωση ερωτήσεων, διαγράμματα Venn, δημιουργία ραβδογραμμάτων).

#### Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.

#### Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να εξερευνήσουν δεδομένα σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα. Η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία και να προκαλεί συζητήσεις με όλη την τάξη όταν θεωρεί ότι τα συμπεράσματα κάποιων ομάδων θα είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση και των υπολοίπων.

#### Στόχοι

Από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου, οι προτεινόμενες δραστηριότητες που περιγράφονται παρακάτω έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες:

να συσχετίσουν τη μελέτη ενός πραγματικού προβλήματος (όπως π.χ. τη μελέτη του πληθυσμού των μεταναστών) με τη δημιουργία πεδίων εγγραφών στα οποία καταγράφονται συγκεκριμένοι τύποι δεδομένων

να κατανοήσουν τον τρόπο αναπαράστασης των δεδομένων κάθε πεδίου

να κατανοήσουν τη διαφοροποίηση του τιμών κάθε πεδίου με βάση το είδος των δεδομένων  
να κατανοήσουν την έννοια των βασικών μεγεθών της περιγραφικής στατιστικής που  
αφορούν τα πεδία αριθμητικών δεδομένων

να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ των τιμών των πεδίων και να εξαγάγουν συμπεράσματα  
σχετικά με τον τρόπο που αυτά συσχετίζονται

να κάνουν ερωτήματα σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης και συσχέτισης των δεδομένων με  
διαγράμματα Venn.

Από την παιδαγωγική πλευρά, οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν ως στόχο να  
παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες:

να μάθουν να συλλέγουν και να εισαγάγουν δεδομένα στο Ταξινομούμε

να μάθουν να αναπαριστούν δεδομένα με διαφορετικούς τρόπους

να μάθουν να κάνουν κατάλληλες ερωτήσεις για να διερευνήσουν τον τρόπο που  
συσχετίζονται τα δεδομένα των διαφορετικών πεδίων

να μάθουν να διερευνούν τη συσχέτιση πραγματικών στατιστικών δεδομένων και να  
εξαγάγουν χρήσιμα συμπεράσματα διαπιστώνοντας σε αυτό το πλαίσιο τη χρησιμότητα των  
μαθηματικών

να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας σε όλα τα στάδια της συλλογής  
και επεξεργασίας των δεδομένων

να αναπτύξουν διαλογικές και επιχειρηματολογικές πρακτικές επικοινωνίας με τους  
συνεργάτες τους ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας αλλά και  
από το σύνολο των συμμετεχόντων στην τάξη.

### **Ανάλυση του σεναρίου**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε δύο φάσεις:

1η Φάση: Καταγραφή δεδομένων.

Η πρώτη φάση αφορά τη γενική περιγραφή του πλαισίου και των ζητημάτων που  
ανακύπτουν μέσα από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει:

την ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει (το φαινόμενο της μετανάστευσης, αριθμός μεταναστών στη χώρα μας, γεωγραφική κατανομή του πληθυσμού, κ.λπ.),

την εγγραφή πραγματικών δεδομένων στην ψηφίδα Βάση του Ταξινομούμε σχετικά με τον πληθυσμό των μεταναστών στην χώρα μας με βάση την τελευταία απογραφή του πληθυσμού την αναζήτηση δεδομένων με βάση χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τη μελέτη συγκεκριμένων ζητημάτων για το συγκεκριμένο πληθυσμό

Προτείνεται οι μαθητές:

Να συζητήσουν σχετικά με το ζήτημα της μετανάστευσης, την ποικιλία των αιτιών που το προκαλούν, τις δυσκολίες, τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μετανάστες σε μια χώρα κ.λπ. και τη ανάγκη χρησιμοποίησης στοιχείων από την απογραφή του πληθυσμού για τη μελέτη χαρακτηριστικών τους.

Να επισκεφτούν την ιστοσελίδα της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας και να αναζητήσουν στοιχεία σχετικά με τον πληθυσμό των μεταναστών στην Ελλάδα κατά τη τελευταία απογραφή (2001). Το πλήθος των δεδομένων θα πρέπει να γίνει αντικείμενο συζήτησης και να αποτελέσει έναυσμα για την εξοικείωση των μαθητών με πραγματικά στατιστικά δεδομένα (π.χ. πώς διαβάζουμε τα αριθμητικά δεδομένα σε ένα πίνακα). Ο εκπαιδευτικός πάντως, αν το κρίνει, μπορεί να δώσει συγκεκριμένες κατευθύνσεις στην αναζήτηση των δεδομένων παρέχοντας σχετικές οδηγίες ή και συγκεκριμένο αριθμό δεδομένων σε ειδικά αρχεία που θα έχει δημιουργήσει. Ο αριθμός των μεταναστών πάντως στη απογραφή του 2001 ήταν 762.191 και το 51,4% εξ' αυτών ήταν εργαζόμενοι.

Να καταγράψουν δεδομένα σχετικά με την γεωγραφική κατανομή του πληθυσμού των μεταναστών στη χώρα μας στην ψηφίδα Πίνακας.

Να αποφασίσουν για τα πεδία που θα μελετήσουν προκειμένου να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με τα χαρακτηριστικά των περιοχών που επιλέγουν να κατοικήσουν οι μετανάστες. Για παράδειγμα, ενδεικτικά προτείνονται πεδία όπως: Περιφέρεια,

Αριθμός μεταναστών

Ποσοστιαία κατανομή

Αγροτική (ή μη) περιφέρεια

Περισσότερο ή λιγότερο αγροτική

Μετανάστες περιφέρειας στο σύνολο του πληθυσμού

Αριθμός απασχολούμενων μεταναστών.

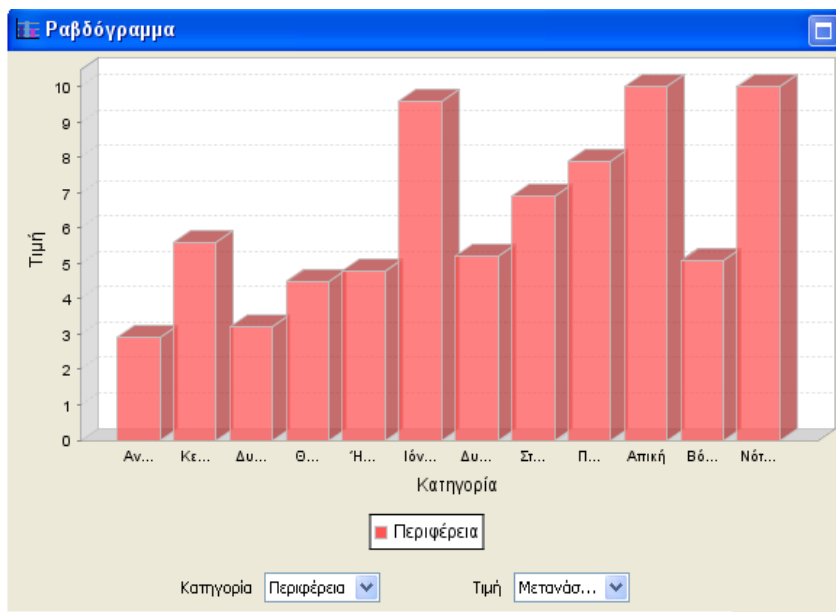
Κάποιες από τις κατηγορίες αυτές μπορεί να ζητηθούν από το διδάσκοντα (π.χ. η ποσοστιαία κατανομή, αν είναι γνωστός ο αριθμός των μεταναστών ανά περιφέρεια) ώστε να εμπλακούν από την αρχή οι μαθητές στην επεξεργασία των δεδομένων και της επιλογής των μέτρων τους. Επίσης, στη φάση αυτή οι μαθητές συζητούν τους τύπους των διαφορετικών πεδίων (π.χ. αριθμητικά, αλφαριθμητικά, αληθές/ψευδές) (Εικόνα 46).

Εδώ οι μαθητές αναμένεται να σχολιάσουν τα δεδομένα κάθε πεδίου χωριστά. Τα δεδομένα του πεδίου Ποσοστιαία κατανομή μεταναστών αποκαλύπτουν π.χ. ότι η πλειοψηφία των μεταναστών (78,6%) ζει στις αστικές περιοχές (γεγονός που μπορεί να μη θεωρείται αναμενόμενο από κάποιους μαθητές) και το 21,4% στις αγροτικές περιοχές. Από το ίδιο πεδίο προκύπτει ότι περίπου το 50% των μεταναστών είναι στην περιφέρεια της Αττικής. Η δεύτερη κατά σειρά περιφέρεια, που συγκεντρώνει μεγάλο αριθμό μεταναστών, είναι η Κεντρική Μακεδονία όπου μένει το 12% του συνόλου των μεταναστών. Το ποσοστό των μεταναστών στις αγροτικές περιοχές, π.χ. Θεσσαλία, Πελοπόννησος κλπ απέχει σημαντικά από το ποσοστό των μεταναστών στα μεγάλα αστικά κέντρα.

* Περιφέρεια	Ποσοστιαία κατανο...	Αγροτική περιοχή	Περισσότερο ή λι...	Μετανάστες περιφέ...	Αριθμός απασχολο...
Ανατολική Μακεδονία και Θράκη	1,7	Αληθές	Περισσότερο	2,9	6.606
Κεντρική Μακεδονία	12	Ψευδές	-	5,6	49.206
Δυτική Μακεδονία	1	Αληθές	Περισσότερο	3,2	3.921
Θεσσαλία	4,4	Αληθές	Περισσότερο	4,5	16.691
Ήπειρος	1,9	Αληθές	Λιγότερο	4,8	6.901
Ιόνια νησιά	2,3	Αληθές	Λιγότερο	9,6	8.551
Δυτική Ελλάδα	5,1	Αληθές	Περισσότερο	5,2	16.882
Στερεά Ελλάδα	6,3	Αληθές	Λιγότερο	6,9	23.650
Πελοπόννησος	7	Αληθές	Περισσότερο	7,9	27.518
Αττική	47,5	Ψευδές	-	10	191.053
Βόρειο Αιγαίο	1,2	Αληθές	Περισσότερο	5,1	4.913
Νότιο Αιγαίο	3,1	Ψευδές	-	10	13.073

Εικόνα 39

Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι αν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο ποσοστό των μεταναστών που διαμένουν σε μία περιοχή και στο αν η περιοχή χαρακτηρίζεται ως αγροτική ή όχι. Οι περιοχές που χαρακτηρίζονται ως λιγότερο αγροτικές είναι αυτές στις οποίες έχει καταγραφεί αντίστοιχη ελάττωση της βαρύτητας του αγροτικού τομέα στο ΑΕΠ της εν λόγω περιοχής. Οι περιοχές που δεν ορίζονται ως αγροτικές περιοχές το 2001 (δηλαδή οι περιφέρειες Αττικής και Κεντρικής Μακεδονίας), είναι αυτές στις οποίες συγκεντρώνεται το μεγαλύτερο ποσοστό των μεταναστών. Μάλιστα οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν αντίστοιχα ραβδογράμματα ώστε να έχουν μια αμεσότερη εποπτική εικόνα π.χ. αναφορικά με το ποσοστό των μεταναστών στο γενικό πληθυσμό κάθε περιφέρειας (Εικόνα 2).



Εικόνα 50

Τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις μπορεί να αποτελέσουν το έναυσμα ώστε να προβληματιστούν οι μαθητές σχετικά με την επιλογή περαιτέρω των παραμέτρων/πεδίων με βάση τα οποία θα μελετήσουν τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών και θα τα συσχετίσουν με τον τόπο διαμονής.

Στη συνέχεια οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν οι ίδιοι νέα πεδία στην ψηφίδα Πίνακας με βάση τόσο το ενδιαφέρον τους για το είδος των χαρακτηριστικών του πληθυσμού των μεταναστών που θα ήθελαν να μελετήσουν όσο και την ύπαρξη διαθέσιμων στοιχείων.

2η Φάση: Επεξεργασία των δεδομένων με χρήση των υπολογιστικών εργαλείων.

Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει την επεξεργασία ερωτημάτων με χρήση των ψηφίδων Ερώτηση και Σύνολο και πιο συγκεκριμένα:

τη διασύνδεση των δεδομένων στην ψηφίδα Πίνακας με τη συγκρότηση ερωτημάτων

τη γραφική αναπαράσταση των απαντήσεων μέσω διαγραμμάτων Venn

την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και την επεξεργασία τους για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα

τη διατύπωση νέων ερωτημάτων που μπορεί να περιλαμβάνουν την ανάγκη αναζήτησης νέων δεδομένων με βάση διαφορετικές κατηγορίες και πεδία

Πιο συγκεκριμένα προτείνεται οι μαθητές να εμπλακούν στις ακόλουθες δραστηριότητες:

Να ταξινομήσουν τα δεδομένα της ποσοστιαίας κατανομής του αριθμού των μεταναστών κατ' αύξουσα (ή φθίνουσα) σειρά (από το μενού Πεδίο με την επιλογή «Αύξουσα –ή φθίνουσα-ταξινόμηση»)

Να κάνουν κατάλληλα ερωτήματα σχετικά με την μελέτη των δεδομένων.

Να αναπαραστήσουν τις απαντήσεις των ερωτήσεων στην ψηφίδα Σύνολο.

Να διατυπώνουν συμπεράσματα σχετικά με τα δεδομένα και την διερεύνησή τους.

Βασιζόμενοι στις απαντήσεις και τα συμπεράσματα που προηγήθηκαν να αναγνωρίσουν την ανάγκη επεξεργασίας νέων δεδομένων -ή πεδίων δεδομένων- προκειμένου να μελετήσουν λεπτομερώς ένα ζήτημα που έκριναν ότι χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

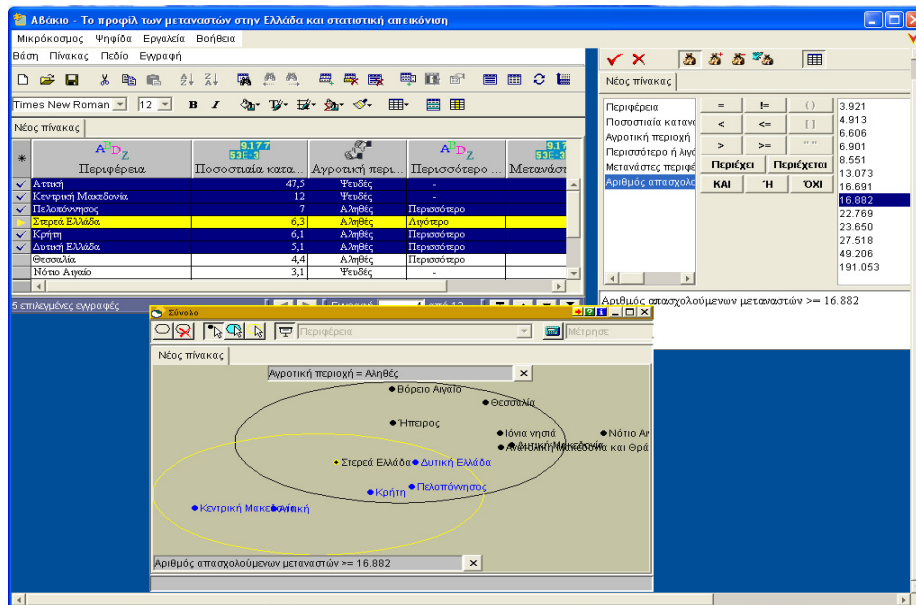
Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν ερωτήσεις για τη διερεύνηση της σχέσης του αριθμού των απασχολούμενων μεταναστών με το αν μια περιοχή είναι αγροτική ή όχι. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 48 τέθηκαν δύο ερωτήματα

Αγροτική περιοχή και

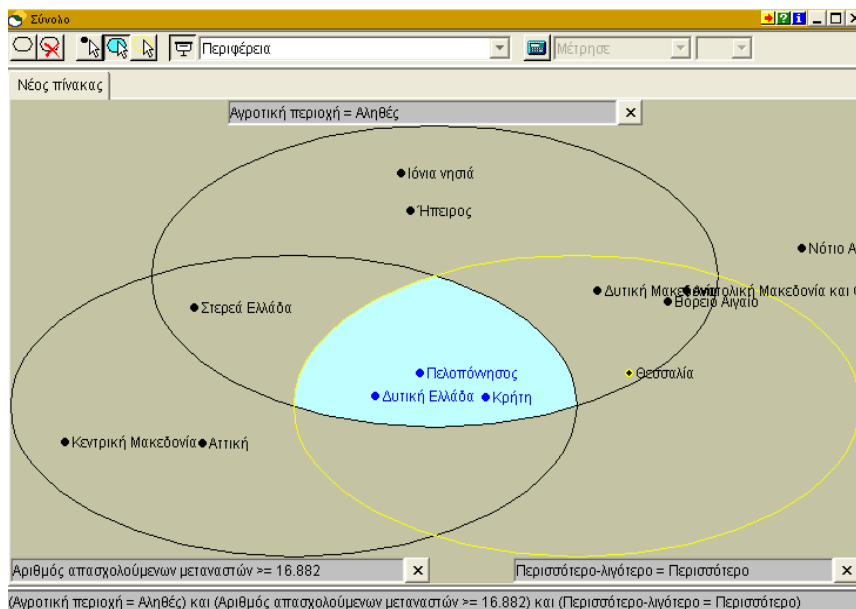
Αριθμός απασχολούμενων μεταναστών μεγαλύτερος από 16.882.

Κάποιοι μαθητές μπορεί να θελήσουν να θέσουν επιπλέον το ερώτημα πόσο αγροτική είναι μια γεωγραφική περιφέρεια. Στην απάντηση που φαίνεται στην ψηφίδα Σύνολο (Εικόνα 49) προκύπτει ότι τέτοιες περιοχές είναι η Πελοπόννησος, η Κρήτη και η Δυτική Ελλάδα. Ακολούθως μπορεί τα παιδιά να κληθούν να υπολογίσουν το ποσοστό των μεταναστών που

διαμένουσ στις περιοχές αυτές. Θα προκύψει ότι φαίνεται να υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο ποσοστό των μεταναστών στην περιοχή και στο αν η περιοχή είναι περισσότερο αγροτική. Για παράδειγμα, στη Στερεά Ελλάδα που είναι περιφέρεια που χαρακτηρίζεται ως λιγότερο αγροτική, το ποσοστό των μεταναστών σε αυτή (ως προς το σύνολο των μεταναστών) είναι μεγαλύτερο απ' ότι είναι στη Δυτική Ελλάδα που χαρακτηρίζεται ως περιφέρεια περισσότερο αγροτική.



Εικόνα 40



Εικόνα 41



Ακολούθως, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δημιουργήσουν νέα πεδία αφού συλλέξουν περισσότερα δεδομένα που θα τους βοηθήσουν να διερευνήσουν πώς και με ποιό τρόπο η επιλογή του τόπου διαμονής σχετίζεται με το είδος της απασχόλησης των μεταναστών στη χώρα μας. Σε αυτή την περίπτωση, θα μπορούσαν να αναζητηθούν δεδομένα σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των μεταναστών που απασχολείται. Π.χ. από τα δεδομένα του πεδίου Αριθμός Απασχολούμενων μεταναστών προκύπτει ότι το 48,8% των απασχολούμενων ( ποσοστό μεγαλύτερο από αυτό του συνόλου των μεταναστών στην εν λόγω περιφέρεια) εργάζεται στην περιφέρεια Αττικής και το 12,6% στην περιφέρεια Κεντρικής Μακεδονίας ενώ το 7,0% των απασχολούμενων είναι στην Πελοπόννησο και το 5,8% είναι στην Κρήτη. Έτσι επαληθεύται και πάλι ότι οι μετανάστες είναι κυρίως συγκεντρωμένοι στις περιφέρειες Αττικής και Κεντρικής Μακεδονίας και ως εκ τούτου και το σύνολο των απασχολούμενων μεταναστών είναι σε αυτές τις περιφέρειες. Με αντίστοιχο τρόπο η μελέτη μπορεί να στραφεί στη διερεύνηση τους είδους της απασχόλησης των μεταναστών σε αγροτικές και μη αγροτικές περιοχές (δηλ. των επαγγελματιών που ασκούν) ανά γεωγραφική περιφέρεια με βάση την καταγραφή αντίστοιχων πεδίων και δεδομένων.

Μετά τη διερεύνηση αντίστοιχων ερωτημάτων μπορεί οι ομάδες να κληθούν να παρουσιάσουν τη διερεύνησή τους στο σύνολο της τάξης και να υπάρξει ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των μαθητών για την περαιτέρω πορεία της διερεύνησης.

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Το προτεινόμενο λογισμικό επελέγη με δύο κριτήρια: το πρώτο αφορά τη συμβατότητα των ζητούμενων στις προτεινόμενες εκπαιδευτικές δραστηριότητες με τις λειτουργικότητες και τα χαρακτηριστικά του Ταξινομούμε, ενώ το δεύτερο σχετίζεται με την δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων. Στην προσέγγιση αυτή ο υπολογιστής χρησιμοποιείται ως εργαλείο με την έννοια ότι διαθέτει ένα σύνολο από λειτουργικότητες που δεν απαντώνται με τον ίδιο τρόπο και στα στατικά μέσα. Στην περίπτωση του παρόντος σεναρίου η οπτική αυτή υλοποιείται μέσα από τη δυναμική διασύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων που προσφέρει το Αβάκιο-Ταξινομούμε και αφορούν την αναπαράσταση δεδομένων και τη δυνατότητα χειρισμού τους μέσω κατάλληλων ερωτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, το Ταξινομούμε δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν διαφορετικές μορφές αναπαράστασης κατά τη συλλογή και την επεξεργασία στατιστικών δεδομένων

Να διερευνήσουν τη διασύνδεση μεταξύ των συγκεκριμένων μορφών αναπαράστασης με την επεξεργασία ερωτημάτων που αφορούν τη μελέτη πραγματικών προβλημάτων

Να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους από το μάθημα των μαθηματικών προκειμένου να χρησιμοποιήσουν τα προσφερόμενα πεδία εγγραφής του Ταξινομούμε στη διατύπωση και την επεξεργασία ερωτημάτων που αφορούν τη συσχέτιση των δεδομένων

Να γενικεύσουν και να εκφράσουν τα συμπεράσματά τους μέσα από τη συνδυασμένη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων και την εμπλοκή τους σε συνεργατικές, επικοινωνιακές και αναστοχαστικές πρακτικές συνεργαζόμενοι σε ομάδες

### **Επέκταση**

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση του παρόντος σεναρίου μπορεί να προκύψει με την εισαγωγή στο διερεύνηση προβλημάτων που απαιτούν στατιστική επεξεργασία. Τέτοια θα μπορούσε να είναι, για παράδειγμα, τα χαρακτηριστικά του μαθητικού πληθυσμού των αλλοδαπών μαθητών, η κατανομή των μεταναστών ανά νομό και εθνικότητα, τα είδη της απασχόλησής τους, το μορφωτικό τους επίπεδο, το ποσοστό των ανέργων κ.λπ.

Άλλο παράδειγμα αποτελεί η διερεύνηση της σχέσης απασχόλησης των μεταναστών με την απασχόληση των ελλήνων. Η αναζήτηση δεδομένων σχετικά με τα ποσοστά απασχόλησης ελλήνων και μεταναστών δείχνει, για παράδειγμα (δες σχετικές έρευνες ακαδημαϊκών φορέων στην ιστοσελίδα του Ινστιτούτου Μεταναστευτικής Πολιτικής, <http://www.imepo.gr>) ότι το ποσοστό απασχόλησης των μεταναστών επηρεάζεται θετικά, και στατιστικά σημαντικά, με το ποσοστό απασχόλησης των ελλήνων και με το ποσοστό συμμετοχής των μεταναστών, εύρημα που αποτελεί ένδειξη ότι δεν υπάρχει υποκατάσταση μεταξύ των απασχολουμένων ελλήνων και των απασχολουμένων μεταναστών.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο

τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί.

Ως προς τα εργαλεία

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Στο Ταξινομούμε εννοείται η συστηματική καταγραφή των δεδομένων και η περαιτέρω επεξεργασία τους με χρήση εργαλείων που προσφέρουν καινούριες αναπαραστάσεις για τους μαθητές. Για παράδειγμα, ο χαρακτηρισμός ενός πεδίου (π.χ. αριθμητικό, αλφαριθμητικό, αληθές/ψευδές) προσφέρει ένα πρώτο κριτήριο αναστοχασμού ανάλογα με το είδος των δεδομένων και το είδος των ερωτημάτων τα οποία μπορεί να ανακύψουν κατά τη συσχέτισή τους. Κάθε διδάσκων οφείλει να λάβει υπόψη τις όποιες δυσκολίες και να επανασχεδιάσει την εφαρμογή εκ νέου (επιλέγοντας π.χ. κατάλληλες δραστηριότητες για την εισαγωγή των μαθητών στη χρήση των εργαλείων).

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων, η προτεινόμενη αλληλουχία και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Για την αποτελεσματική υλοποίηση του σεναρίου έχει μεγάλη σημασία ο συντονισμός όλης της τάξης κατά τη ροή εφαρμογής από μια φάση στην επόμενη. Ο διδάσκων έχει ευθύνη να καταγράψει τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων από μαθητές ή τους περιορισμούς του χρόνου που απαιτήθηκε. Στην συνέχεια, μπορεί να τροποποιήσει τόσο το αν θα ολοκληρώσει όλες τις φάσεις όσο και το χρόνο που θα αφιερώσει για καθεμιά. Το παρόν σενάριο πάντως είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να δίνει ερείσματα για την επεξεργασία μιας σειράς θεμάτων που αφορούν τη μελέτη των χαρακτηριστικών του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα. Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των δραστηριοτήτων το περιεχόμενο της διερεύνησης των μαθητών καθορίζεται άμεσα από το είδος των δεδομένων (στοιχείων) που θα καταγραφούν στη στήλη Πίνακας. Για παράδειγμα, ένας διδάσκων μπορεί να εστιαστεί στα αριθμητικά δεδομένα και να δώσει βαρύτητα στον υπολογισμό και την αναπαράσταση συγκεκριμένων στατιστικών μέτρων. Επομένως, ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να έχει πεδία παρέμβασης τόσο αναφορικά με την πορεία υλοποίησης όσο και αναφορικά με το περιεχόμενο της διερεύνησης των μαθητών.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Τα δεδομένα του παρόντος σεναρίου οριοθετούν την αφετηρία της μελέτης μιας σειράς προβλημάτων που αφορούν την επεξεργασία στατιστικών δεδομένων σχετικά με τη μελέτη των χαρακτηριστικών του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα. Το πεδίο 'Μελέτη του πληθυσμού των μεταναστών στην Ελλάδα' προτείνεται να θεωρηθεί ως ένα πλαίσιο δημιουργικής εμπλοκής των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό μιας ποικιλίας διαφορετικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που θα στοχεύουν στην εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση μιας ποικιλίας εννοιών του αναλυτικού προγράμματος που σχετίζονται με τη διαχείριση στατιστικών δεδομένων. Οι μαθητές μπορεί να κληθούν να απαντήσουν σε προβλήματα που αφορούν διαφορετικά κοινωνικά και οικονομικά ζητήματα που προϋποθέτουν την αναγνώριση των διαφορετικών παραμέτρων που περιλαμβάνει η κατηγοριοποίησή τους, την διατύπωση ερωτημάτων και υποθέσεων και τη μαθηματοποίησή τους με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων ώστε να καταστεί ικανή η περαιτέρω επεξεργασία τους για μελέτη και εξαγωγή συμπερασμάτων. Με αυτή την έννοια το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να θεωρηθεί ενδεικτικό της εισαγωγής των μαθητών στην επιστημονική έρευνα και την επεξεργασία δεδομένων για τη μελέτη ενός συνόλου κοινωνικο-οικονομικών φαινομένων/ζητημάτων που μπορεί να προτείνει ο διδάσκων.

## **9.5 Πειραματισμός με μοντέλα μαθηματικών αντικειμένων ή φαινομένων που διέπονται από μαθηματικούς κανόνες συμπεριφοράς.**

### **9.5.1 Σενάριο 10. Ελάχιστη Απόσταση δυο Τρένων**

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου.

Η συνάρτηση  $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

Γραφική παράσταση τριωνύμου

Εξισώσεις κίνησης.

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την μελέτη της μεταβολής της απόστασης δύο κινητών τα οποία κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις με σταθερή ταχύτητα. Συγκεκριμένα ζητείται η ελάχιστη απόσταση των κινητών αυτών τα οποία αναφέρονται ως τρένα των οποίων οι πορείες σχηματίζουν ορθή γωνία.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Modellus.

### Σκεπτικό:

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα μελετήσουν μία προσομοίωση της κίνησης δύο τρένων. Εδώ το μαθηματικό μοντέλο της απόστασης, όταν αυτά κινούνται σε κάθετες πορείες, είναι ένα τριώνυμο και επομένως η μελέτη του φαινομένου της απομάκρυνσης των τρένων ανάγεται στην μελέτη των ιδιοτήτων της παραβολής.

Προστιθέμενη αξία.

Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  στην διδασκαλία της άλγεβρας με τα συμβατικά μέσα είναι λίγο έως πολύ γνωστός. Το παρακάτω απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό.

Στο 3ο κεφάλαιο έγινε η μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2$ , που η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή. Στη συνέχεια θα δούμε πώς, με τη βοήθεια αυτής, θα κάνουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ο** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Η γραφική παράσταση επομένως της  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  προκύπτει μέσα στο πλαίσιο ενός αλγεβρικού μετασχηματισμού της συνάρτησης  $f(x) = ax^2$

Η περιγραφή αυτή συνήθως παρουσιάζεται από τον διδάσκοντα στον πίνακα.

Με τις δραστηριότητες του σεναρίου οι μαθητές:

Θα δημιουργήσουν οι ίδιοι σταδιακά την γραφική παράσταση της συνάρτησης καθώς θα επιχειρούν να λύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα.

Οι μαθητές θα συνδέσουν την μορφή της γραφικής παράστασης του τριωνύμου με την εξέλιξη ενός φαινομένου κάτι που είναι αδύνατο να υλοποιηθεί σε μία συμβατική σχολική τάξη

Μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού οι μαθητές θα εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης και στην συνέχεια σε υλοποίηση του μοντέλου. Αυτό θα τους επιτρέψει να

πειραματιστούν με τις παραμέτρους της κίνησης, να μελετήσουν την κίνηση και τέλος να βγάλουν συμπεράσματα για το φαινόμενο που μοντελοποίησαν.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, στο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από τη μία στην άλλη γίνεται μέσα από την δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ψηφιακών εργαλείων.

Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν την κατασκευή του μοντέλου της πραγματικής κατάστασης τόσο του μαθηματικού όσο και του εικονικού και θα διερευνήσουν την συμπεριφορά του συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα ώστε η αίθουσα να μετατραπεί σε ένα εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

### **Πλαίσιο εφαρμογής:**

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 10 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές ανά τρεις. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με την χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Τον τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων στο Καρτεσιανό επίπεδο μέσα από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Τις εξισώσεις της ομαλής κίνησης ως προς ένα σύστημα αναφοράς.

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν

Τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται τα μαθηματικά μοντέλα(τύποι) στο λογισμικό modelus

Τον τρόπο με τον οποίο υλοποιούνται τα μοντέλα και ελέγχονται τα φαινόμενα κίνησης.

Τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται οι γραφικές παραστάσεις των φαινομένων.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει ένα φύλλο εργασίας μέσα στο οποίο ο διδάσκων θα έχει θέσει συγκεκριμένα ερωτήματα και οδηγίες. Επιπλέον καλό θα είναι οι μαθητές να διαθέτουν ένα τετράδιο σημειώσεων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού προσέγγιση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Να εμπλακούν σε διαδικασίες λύσης προβλήματος (problem solving)

Να δημιουργήσουν την συνάρτηση του τριωνύμου ως μοντέλο της κίνησης δύο τρένων

Να μελετήσουν ιδιότητες του τριωνύμου και να τις συνδέσουν με μία πραγματική κατάσταση.

Τα παραπάνω αφορούν τους γνωστικούς στόχους. Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στην συνεργασία και την διαπραγμάτευση των ιδεών τους ώστε η γνώση να αποκτήσει έναν διυποκειμενικό χαρακτήρα.

## Ανάλυση του σεναρίου:

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

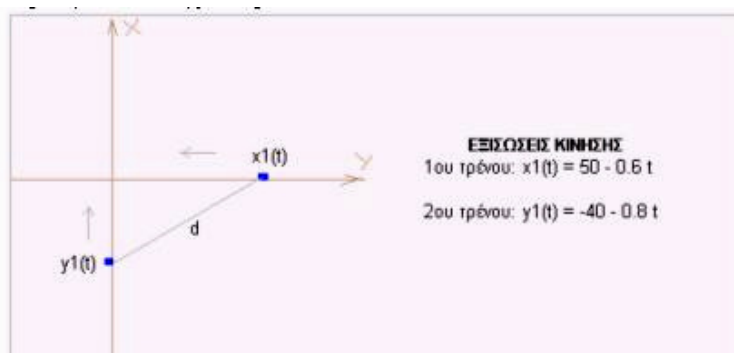
Στην αρχή ο διδάσκων θέτει στους μαθητές το εξής πρόβλημα: «Δύο ευθύγραμμες σιδηροτροχιές τέμνονται σχηματίζοντας ορθές γωνίες. Δύο τρένα κινούνται ταυτόχρονα προς το σημείο τομής των σιδηροτροχιών. Το ένα έχει ξεκινήσει από κάποιο σταθμό που απέχει 40 χιλιόμετρα από το σημείο τομής, και το άλλο από κάποιο σταθμό που απέχει 50 χιλιόμετρα από το ίδιο σημείο. Το πρώτο τρένο έχει ταχύτητα 800 μέτρα ανά λεπτό και το δεύτερο 600 μέτρο ανά λεπτό.

Σε πόσα λεπτά μετά την αναχώρησή τους θα έχουν οι αμαξοστοιχίες την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους; Υπολογίστε τη συγκεκριμένη απόσταση» (Από το βιβλίο του Yakov Perelman «Διασκεδαστικά Μαθηματικά» Μέρος 2: Άλγεβρα, εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001).

Η όλη διαδικασία μπορεί να διακριθεί σε στάδια της μοντελοποίησης.

### • Η ΠΡΩΤΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Οι μαθητές θα υποθέσουν ότι οι δύο σιδηροτροχιές αποτελούν τους κάθετους άξονες  $x$  και  $y$ . Τα δύο τρένα κινούνται στους δύο άξονες με ταχύτητες  $600 \text{ m/min} = 0.6 \text{ km/min}$  και  $800 \text{ m/min} = 0.8 \text{ km/min}$  αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο τρένων ως προς το σύστημα αναφοράς που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:



Ένα από τα ζητούμενα του προβλήματος είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε «οι αμαξοστοιχίες να βρεθούν στην ελάχιστη απόσταση  $d$  μεταξύ τους». Από τη γεωμετρία του σχήματος και με την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

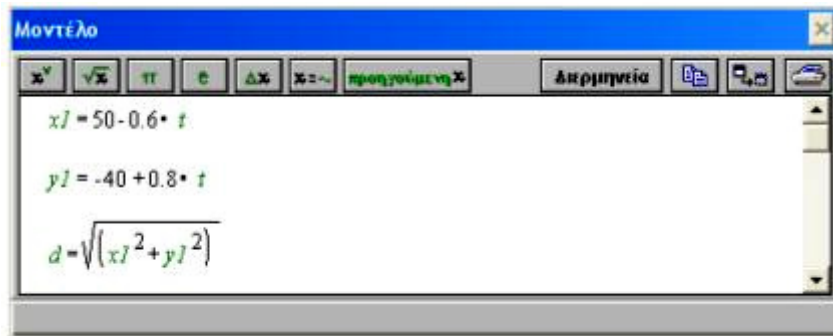
$$d = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$$

Εικόνα 42



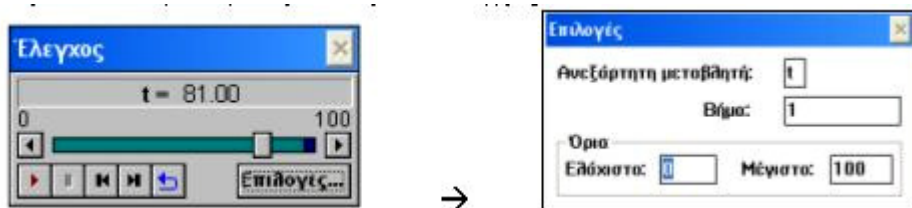
- ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα παραπάνω δεδομένα, δηλαδή οι δύο εξισώσεις κίνησης  $x_1$  και  $y_1$  που αναφέρονται στην κίνηση των δύο τρένων και η σχέση υπολογισμού της απόστασης  $d$ , αποτελούν τις σχέσεις που θα γράψουν στο παράθυρο «Μοντέλο» του Modellus.



Εικόνα 43

Με κλικ στο κουμπί <Διερμηνεία> το πρόγραμμα αναγνωρίζει τις τρεις εξισώσεις με τις τέσσερις μεταβλητές  $\{x_1, y_1, d, t\}$  του προβλήματος. Στη συνέχεια, καθώς οι μαθητές θα τρέξουν το πρόγραμμα, υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών  $\{x_1, y_1, d\}$  για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  (0, 1, 2, 3, 4, ..... ) και έτσι μπορούν να έχουν στη διάθεσή τους τις γραφικές παραστάσεις και τους πίνακες τιμών αυτών των μεταβλητών. Οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής προσδιορίζονται μέσα από ένα πλαίσιο με όνομα <Επιλογές> που αναδύεται στην οθόνη με κλικ στο αντίστοιχο κουμπί του παραθύρου με όνομα <Έλεγχος> :

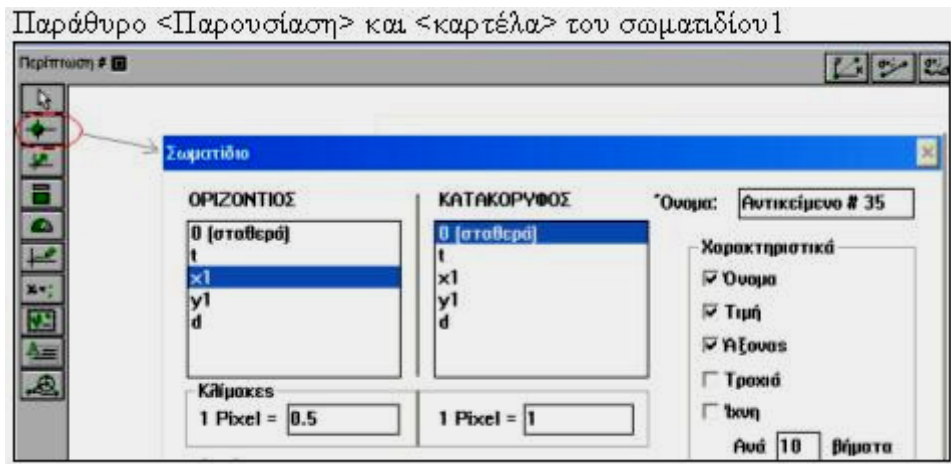


Εικόνα 44

- ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΤΡΕΝΩΝ

Για να πραγματοποιηθεί η προσομοίωση των δύο τρένων που κινούνται στους κάθετους άξονες, θεωρούμε τα τρένα ως υλικά σημεία. Το Modellus επιτρέπει να δημιουργούμε σωματίδια στην οθόνη <Παρουσίαση> με κλικ στο κουμπί <Σωματίδιο> και στη συνέχεια κλικ στην οθόνη. Έτσι, οι μαθητές θα κατασκευάσουν πρώτα το τρένο – σωματίδιο1 οπότε

εμφανίζεται η καρτέλα των χαρακτηριστικών του σωματιδίου1 οπότε επιλέγουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά που επιθυμούμε να έχει αυτό το σωματίδιο.



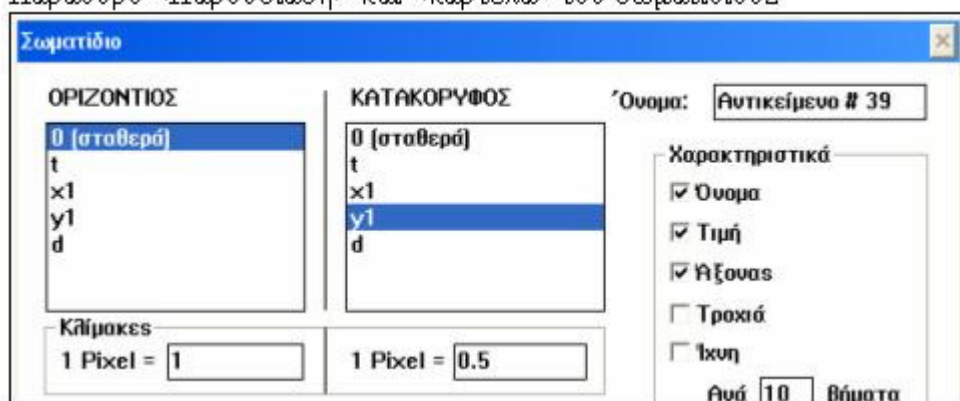
Εικόνα 45

Πιο συγκεκριμένα, πρέπει οι μαθητές να επιλέξουν τις μεταβλητές που χαρακτηρίζουν το σωματίδιο1 τόσο στον άξονα  $x$  όσο και στον άξονα  $y$  καθώς και τις αντίστοιχες κλίμακες.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, επιλέγουν τη μεταβλητή  $x1$  στον οριζόντιο άξονα και 0 (σταθερά) στον κατακόρυφο και για κλίμακα  $1 \text{ Pixel} = 0.5$ . Το τελευταίο σημαίνει ότι το  $x1$  αναπαριστάται με μονάδα μήκους (προσομοίωσης)=2pixels (οθόνης)

Το πρόγραμμα υπολογίζει τις τιμές του  $x1$  για τις διάφορες τιμές του χρόνου  $t$  και τοποθετεί το σωματίδιο1 στην αντίστοιχη θέση. Στη συνέχεια γίνεται η κατασκευή του τρένου – σωματίδιο2 που πρέπει να κινείται στον άξονα  $y$ , οπότε εμφανίζεται η καρτέλα με τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει το σωματίδιο2

Παράθυρο <Παρουσίαση> και <καρτέλα> του σωματιδίου2

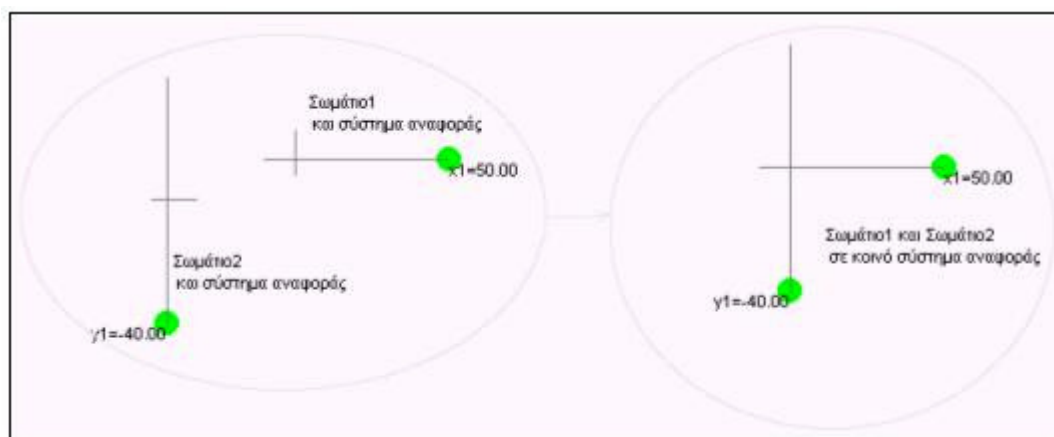


Εικόνα 46

Πρέπει να επιλέξουν, και εδώ, τις μεταβλητές που χαρακτηρίζουν το σωματίδιο2, τόσο στον άξονα  $x$  όσο και στον άξονα  $y$  καθώς και τις αντίστοιχες κλίμακες.

Στην περίπτωση του σωματιδίου2, επιλέγουν τη μεταβλητή  $y_1$  στον κατακόρυφο άξονα και 0 (σταθερά) στον οριζόντιο και για κλίμακα στον κατακόρυφο,  $1 \text{ Pixel} = 0.5$ , ίδια με αυτή που διαλέξαμε για το  $x_1$ . Το τελευταίο σημαίνει ότι το  $y_1$  παριστάνεται με μονάδα μήκους (προσομοίωσης) = 2 pixels (οθόνης)

Μετά τις παραπάνω ενέργειες, στην οθόνη <Παρουσίαση> εμφανίζονται τα δύο τρένα - σωματίδια με τα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς. Με κλικ και σύρσιμο μπορεί πλέον να μεταφερθεί το σύστημα αναφοράς του σωματιδίου2 στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου1 έτσι ώστε τα δύο συστήματα να συμπίπτουν ακριβώς. Μ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται, με το τρέξιμο της εφαρμογής, η προσομοίωση της κίνησής τους ως προς ένα κοινό σύστημα αναφοράς.



Εικόνα 47

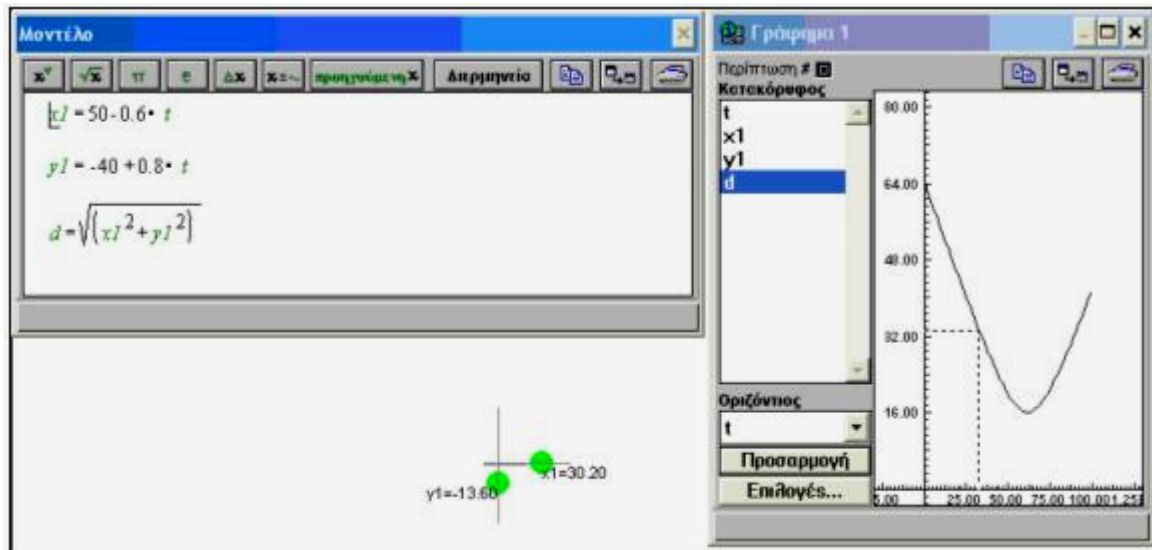
#### • ΤΡΕΞΙΜΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Τώρα οι μαθητές μπορούν να τρέξουν την εφαρμογή από το παράθυρο <Έλεγχος>.

Στο παράθυρο <Παρουσίαση> εμφανίζονται τα δύο σωματίδια – τρένα να κινούνται το καθένα με σταθερή ταχύτητα στους δύο άξονες και μόλις ολοκληρωθεί ο χρόνος που έχει επιλεγεί στο παράθυρο <Έλεγχος> η προσομοίωση σταματάει. Η απάντηση στο ερώτημα

«Πόσος χρόνος περνάει μέχρι να βρεθούν τα δύο τρένα στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους» μπορεί να δοθεί μόνο αν ζητηθεί το άνοιγμα του παραθύρου <Γράφημα>.

Σ' αυτό επιλέγεται η μεταβλητή d στον κατακόρυφο άξονα και η μεταβλητή t στον οριζόντιο. Τώρα, βλέποντας και μόνο την μορφή της γραφικής παράστασης, οι μαθητές αναμένεται να εικάσουν για την πιθανή λύση.



Εικόνα 48

Αν ονομαστεί το παράθυρο <Πίνακας τιμών> και επιλεγεί η εμφάνιση τιμών των μεταβλητών t, x1, y1 και d τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι για  $t=62$  λεπτά η απόσταση μεταξύ των δύο τρένων παίρνει την ελάχιστη τιμή  $d = 16$  km.

The screenshot shows a window titled 'Πίνακας τιμών 1' displaying a table of values for the variables t, x1, y1, and d. The table is as follows:

t	x1	y1	d
58.00	15.20	8.40	16.49
59.00	14.60	7.20	16.26
60.00	14.00	6.00	16.12
61.00	13.40	4.80	16.03
62.00	12.80	3.60	16.00
63.00	12.20	2.40	16.03
64.00	11.60	1.20	16.12
65.00	11.00	0.00	16.28

Εικόνα 60

Η επίλυση του προβλήματος στο τετράδιο.

Ακολουθώντας παρόμοιους συλλογισμούς με αυτούς της προκαταρκτικής φάσης (με το Modellus) έχουμε 3 εξισώσεις:

$$x1=50-0.6t$$

$$y1=40-0.8t$$

$d = \sqrt{x1^2 + y1^2}$  οπότε μετά από πράξεις παίρνουμε την εξίσωση

$$t^2-124t+4100-d=0 \text{ από όπου υπολογίζεται το } t.$$

Αφού η d οφείλει να είναι θετική θα πρέπει  $d^2 -256 > 0$  ή κατ' ελάχιστον  $d^2 -256 = 0$

Βρίσκουμε  $d = 16$  και  $t = 62$ .

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Για την υλοποίηση του σεναρίου θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό modellus. Το συγκεκριμένο λογισμικό διαθέτει τέσσερα βασικά παράθυρα και 2-3 αναδυόμενα ώστε να συνυπάρχουν στην οθόνη η προσομοίωση ενός φαινομένου, τα εργαλεία ελέγχου του, το αλγεβρικό του μοντέλο και η γραφική του παράσταση. Κάθε ένα από τα παραπάνω εργαλεία διαθέτει μία σειρά από λειτουργικότητες ορισμένες από τις οποίες είναι απαραίτητες για τις δραστηριότητες. Για παράδειγμα η χρήση του πίνακα τιμών ή ο πίνακας των επιλογών για τον έλεγχο του φαινομένου.

### **Επέκταση:**

Οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να επεκταθούν στην μελέτη της απόστασης των δύο κινητών όταν αυτά κινούνται σε πορείες οι οποίες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. Στην περίπτωση αυτή η μοντελοποίηση είναι περισσότερο απαιτητική αφού το Πυθαγόρειο θεώρημα δεν είναι κατάλληλο για τον υπολογισμό της απόστασης.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι και η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί.

Ως προς τα εργαλεία:

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες μιας δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο ψηφιακό εργαλείο που χρησιμοποιείται. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συχνά παραμένουν ασύνδετες και ασαφείς με αποτέλεσμα να στερούνται νοήματος και να παρουσιάζεται αδυναμία ερμηνείας τους μέσα στα πλαίσια του φαινομένου που μελετούν οι μαθητές. Οι δυσκολίες που θα παρουσιαστούν θα καταγραφούν από τον διδάσκοντα ο οποίος θα είτε θα βελτιώσει τις απαιτήσεις του σεναρίου είτε θα σχεδιάσει μια περισσότερο κατευθυνόμενη πορεία εφαρμογής του ίδιου σεναρίου.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης

Η δομή του σεναρίου, η σειρά των δραστηριοτήτων και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Κρατώντας σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μπορεί να εκτιμήσει τα σημεία στα οποία οι μαθητές δήλωναν ή εκδήλωναν δυσκολίες κατανόησης ή εφαρμογής. Στην συνέχεια, με κατάλληλες επεμβάσεις στις δραστηριότητες, επιχειρεί να θεραπεύσει τα προβλήματα που προέκυψαν απλοποιώντας διαδικασίες ή περιγράφοντας με μεγαλύτερη σαφήνεια τις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει την βάση πάνω στην οποία είναι δυνατόν να οργανωθεί η διερεύνηση της ταυτόχρονης κίνησης δύο αντικειμένων σε μία ποικιλία περιπτώσεων. Γι παράδειγμα καλό θα είναι να διερευνηθεί η περίπτωση παραλλήλων κινήσεων, κινήσεων υπό συγκεκριμένη γωνία κ.λ.π.

## 10. Προτάσεις για ένταξη στο σχολικό πρόγραμμα

---

Βρισκόμαστε σε μια χρονική στιγμή όπου διεθνώς δεν έχουμε ακόμα κατασταλάξει για το πώς σε ευρεία κλίμακα μπορεί στη σημερινή τάξη να χρησιμοποιηθούν εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας ώστε το μάθημα των μαθηματικών να αποκτήσει πρόσθετη παιδαγωγική αξία. Από την άλλη, ξέρουμε από εφαρμογές που έχουν γίνει σε μικρή κλίμακα και έχουν υποστηριχθεί από επιστημονικές ομάδες, ότι και οι μαθητές αλλά και το διδακτικό έργο των εκπαιδευτικών κερδίζουν πολλά και σημαντικά πράγματα. Ακούγεται απαισιόδοξο το να μην μπορεί να επεκταθεί το μάθημα αυτό γρήγορα σε πολλά σχολεία, όμως σκεφτείτε ότι η χρήση των εργαλείων αυτών αλλάζει πάρα πολλές παραμέτρους στο εκπαιδευτικό έργο οι οποίες μπορεί μεν να χαλιναγωγηθούν σε επίπεδο εφαρμογών μικρής κλίμακας και σε στενή συνεργασία με εμπειρογνώμονες από ερευνητικά κέντρα, όμως όταν πάμε σε μεσαίες ή μεγάλες κλίμακες γίνεται πολύ δύσκολο. Μερικές από τις παραμέτρους αυτές είναι, όπως θα έχετε διαπιστώσει και από τα σενάρια και την αρχική θεμελίωση, το ότι αλλάζει η κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης, χρειάζεται διαφορετική σχέση μεταξύ του χρόνου μάθησης και της ύλης που καλύπτεται, αλλάζει ο τρόπος με τον οποίο έχει νόημα να αξιολογηθεί η δουλειά των μαθητών, αλλάζουν πολλά πρακτικά θέματα όπως η μετάβαση σε τάξη με υπολογιστές, η διάθεση του λογισμού τη στιγμή που το θέλουμε, η ανάγκη για τεχνική υποστήριξη του σχολικού εργαστηρίου κλπ. Υπάρχει επίσης ένας απίθανος πλουραλισμός και ποικιλία στο τι κάνουν και τι σκαρφίζονται οι μαθητές με τα εργαλεία αυτά, πράγμα που καθιστά δύσκολη την λεπτομερή παρακολούθησή τους βήμα – βήμα. Βασικότερο όλων ίσως είναι ότι δημιουργείται η ανάγκη για επαναπροσδιορισμό του εκπαιδευτικού μοντέλου μιας και αλλάζουν τόσες πολλές από τις συνθήκες που αναπόφευκτα είναι συνδεδεμένες με τα στατικά μέσα, όπως μαθητές – ακροατές και λύτες ασκήσεων, η μάθηση ως ατομική διαδικασία, η χρήση στατικών αναπαραστάσεων, η ανάγκη ο εκπαιδευτικός να ελέγχει πλήρως το τι κάνουν οι μαθητές κάθε στιγμή της ώρας. Η εύκολη δίοδος είναι να μην θιγεί το παραδοσιακό μάθημα, π.χ. με τη χρήση ενός δικτυακού αυτόματου ασκησιολόγιου ατομικά για τον κάθε μαθητή. Η πείρα έχει δείξει ότι το σχολείο γρήγορα αποδιώχνει τέτοιες λύσεις μιας και δεν αναβαθμίζεται κανείς, ούτε κερδίζει ατομικά κάτι (π.χ. οι μαθητές σε κατανόηση, οι καθηγητές σε δυνατότητες υποστήριξης των μαθητών τους). Από την άλλη

πλευρά δεν είναι βέβαια εφικτό να αναποδογυριστούν ξαφνικά τα πάντα και οι μαθητές να κάνουν μόνο projects και να ξοδεύουν όσο χρόνο θέλουν. Χρειάζεται λοιπόν να επιλέξουμε κάτι που είναι εφικτό στο σημερινό σχολείο αλλά ταυτόχρονα έχει τα χαρακτηριστικά που θα επιτρέψουν στους μαθητές να αποκτήσουν μια διαφορετική σχέση με τα μαθηματικά.

Μία τέτοια πρόταση έχει ως εξής: με χρονικό ορίζοντα ένα τρίμηνο, δηλαδή σε διάστημα περίπου 45 ωρών διδασκαλίας μαθηματικών, ο καθηγητής επιλέγει μια έννοια ή μια παράγραφο του αναλυτικού προγράμματος που κατά την κρίση του δημιουργεί στους μαθητές δυσκολία κατανόησης, όπως για παράδειγμα τα δέκα επιλεγμένα με αυτό το φίλτρο θέματα των σεναρίων του παρόντος. Καταναλώνει 4-5 διδακτικές ώρες (δηλαδή περίπου το 10% των διαθέσιμων) για να βάλει τους μαθητές σε δυάδες ή τριάδες να εμπλακούν σε ένα project όπως αυτά που περιγράφουν τα σεναρία. Στην πραγματικότητα οι μαθητές ξοδεύουν 10-20 ώρες για το project αυτό, δουλεύοντας στο σπίτι, σαν μια εργασία δηλαδή (προβλέπεται και από το αναλυτικό πρόγραμμα). Τις σχολικές ώρες, ο εκπαιδευτικός τις αξιοποιεί για να 'βάλει τους μαθητές μπροστά', για να διαπιστώσει πώς πάνε στη μέση της διαδικασίας και για να προκαλέσει συζήτηση στο τέλος όταν οι μαθητές παρουσιάζουν τις εργασίες τους στην τάξη. Η κάθε ομάδα μαθητών επομένως έχει καθήκον να παράξει κάτι, είτε αυτό είναι ένα μοντέλο είτε το αποτέλεσμα μιας διερεύνησης, είτε η λύση μιας άσκησης. Τα παραγόμενα αυτά μπορεί να έχουν και τη μορφή γραπτής έκθεσης ή παρουσίασης (ακόμα και με Powerpoint). Παίζουν ρόλο στη βαθμολογία των μαθητών μόνο προσθετικά (δηλαδή στις καλές βελτιώνουμε το βαθμό των μαθητών). Για κάθε τέτοιο project, ο καθηγητής επιλέγει την αξιοποίηση ενός ή περισσότερων ψηφιακών εργαλείων ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν επαφή με κάθε μια από τις κατηγορίες δραστηριοτήτων που είπαμε στην αρχή, ακόμα κι αν αυτό δεν γίνει σε μια χρονιά αλλά σε δύο ή και σε τρεις. Θα πείτε ότι σε πολλές τάξεις το ποσοστό μαθητών που έχουν υπολογιστή στο σπίτι είναι πολύ μικρό. Πράγματι συμβαίνει αυτό αλλά κάθε χρονιά και λιγότερο, μάλιστα αν όντως εφαρμοστεί και το σχέδιο του Υπ.ΕΠΘ για ένα laptop για κάθε μαθητή θα δώσει και μια άμεση αξιοποίηση των συσκευών αυτών. Υπάρχει πάντως χρόνος για υλοποίηση διδασκαλιών με ψηφιακά μέσα ανεξάρτητα από την διδακτέα ύλη τον οποίο καλείται βέβαια να βρει ο ίδιος ο εκπαιδευτικός κάνοντας κατάλληλο σχεδιασμό. Υπάρχουν για παράδειγμα πολλά θέματα που επικαλύπτονται από άλλα ή μπορούν να υποστηριχθούν καλύτερα με τα ψηφιακά μέσα ή που με κατάλληλες αλλαγές μπορεί να αποσυμφορηθεί η δυσκολία του χρόνου, ιδίως σε σχολεία όπου οι μαθητές δυσκολεύονται να έχουν πρόσβαση σε ψηφιακά εργαλεία στο σπίτι. Για παράδειγμα,



στη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου η διδακτέα ύλη είναι τα κεφάλαια 1-8. Επίσης υπάρχει και η τάξη με τον ένα υπολογιστή και βιντεοπροβολέα όπου ο κυρίαρχος καθηγητής αισθάνεται καλύτερα, παρουσιάζει θέματα και εμπλέκει τους μαθητές σε σχετικές διαπραγματεύσεις.

Γενικότερα όμως, ο εκπαιδευτικός που θέλει να αξιοποιήσει τα ψηφιακά μέσα πρέπει να εξασκήσει την επινοητικότητα, την κοινωνικότητα και την ικανότητά αντιμετώπισης πρακτικών εμποδίων. Πρέπει να επικοινωνήσει π.χ. με τη διεύθυνση και τους συναδέλφους ειδικότητας για την πρωτοβουλία αυτή και να τους συμπαρασύρει σε μια σύμπλευση, υποστήριξη και αποδοχή. Επίσης πρέπει να εκτιμήσει τις δυνατότητες της τάξης του και να εφαρμόσει ένα σενάριο που να είναι εφικτό μεν αλλά και να συνιστά ενδιαφέρουσα πρόκληση για τους μαθητές. Να σκεφτεί τις δυνατότητες να γίνει δουλειά στο σπίτι και να ενορχηστρώσει έτσι τις δραστηριότητες των μαθητών ώστε αν δεν έχουν πρόσβαση σε ψηφιακά εργαλεία να κάνουν επιτελική δουλειά στο σπίτι και χρήση εργαλείων στην τάξη ή τη σχολική βιβλιοθήκη όπου αυτό είναι εφικτό. Πρέπει επίσης να φροντίσει να καλύψει την ύλη με το 90% του διδακτικού χρόνου με τρόπο ώστε οι μαθητές να έχουν την ίδια επίδοση στις σχολικές εξετάσεις. Τι κερδίζουν όλοι από τη διαδικασία αυτή; Οι μαθητές έχουν ένα ρόλο όπου ενθαρρύνονται να πουν τη γνώμη τους, να κατασκευάσουν κάτι και να αισθανθούν ότι αυτό τους ανήκει. Ο εκπαιδευτικός θα 'ανέβει' στα μάτια των μαθητών μιας και τους δίνει τη δυνατότητα να κάνουν κάτι το διαφορετικό και να αποκτήσουν μια αλλιώτικη σχέση με τα μαθηματικά. Η σχολική διεύθυνση θα μπορεί να επιχειρηματολογήσει για ένα σύγχρονο σχολείο όπου εφαρμόζονται νέες παιδαγωγικές μέθοδοι. Οι γονείς, ότι τους δίνεται μια πρόταση για το πώς τα παιδιά τους μπορούν να αξιοποιήσουν δημιουργικά το χρόνο τους με τα ψηφιακά εργαλεία, μιας και υπάρχει τόση δικαιολογημένη ανησυχία ως προς το τι ακριβώς κάνουν οι μαθητές και με ποιόν επικοινωνούν όταν βρίσκονται σπίτι ή στα internet cafe. Η πρόταση για τα projects είναι στα πλαίσια και του αναλυτικού προγράμματος που προβλέπει εδώ και λίγο καιρό τη διενέργεια εργασιών. Η διεξαγωγή της είναι απολύτως εφικτή όπως έδειξε η εμπειρία που έχει αποκτηθεί τουλάχιστον από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του ΕΚΠΑ με χιλιάδες μαθητο-ώρες διερεύνησης με ψηφιακές τεχνολογίες σε πέντε (και πρόσφατα περισσότερα) σχολεία (Κυνηγός, 2007). Σε κάθε περίπτωση πάντως, η τελική λύση στην λεπτομέρειά της θα δοθεί από τον καθένα σας, μιας και είσαστε αυτοί που ξέρετε καλύτερα τους μαθητές και τις σχολικές και κοινωνικές συνθήκες στις οποίες μεγαλώνουν και μαθαίνουν.

## 11. Βιβλιογραφία

---

- Abelson, H., & DiSessa, A. (1981). *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. Cambridge, M.A.: MIT Press.
- Ainley, J. & Pratt, D. (2001) Introducing a Special Issue on constructing meanings from data. *Educational Studies in Mathematics*, 45: 1-8.
- Artigue, M., Kynigos, C., Mariotti, A., Cerulli, M., Lagrange, J.B., Bottino, R.M., Haspekian, M., Cazes, C. (2006). *Methodological Tools for Comparison of Learning Theories in Technology Enhanced Learning in Mathematics*, interim report of the Kaleidoscope European Research Team ‘Technology Enhanced Learning of Mathematics, ([www.itd.cnr.it/telma](http://www.itd.cnr.it/telma)).
- Balacheff, N. & Gaudin N. (2002). Students’ Conceptions: an Introduction to a Formal Characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz* 65 – ISSN: 1298-020X.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Apportées par une Approche Anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.
- Chronaki, A. and Kynigos, C. (1999). Teachers’ Views on Pupil Collaboration in Computer Based Groupwork Settings in the Classroom. *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Psychology of Mathematics Education Conference*, Haifa, Israel, O. Zaslavsky ed., 2, 209-216.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Journal of Educational Psychology*, Vol. 31, 175 – 190.
- Cobb, P. (1999) Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 5–44.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28 3, 258-277.

- Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1992). Interaction and Learning in Mathematics Classroom Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99-122.
- Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1995). The Teaching Experiment Classroom. In P.Cobb & H. Bauersfeld (eds). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hove, UK. Lawrence Erlbaum Associates. 17-25.
- Confrey, J. (1995). How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?, in L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.
- diSessa, A. (1987). Phenomenology and the Evolution of Intuition, in Janvier, C. (ed.) (1987) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, London: Lawrence Erlbaum associates.
- diSessa, A. (2000). *Changing Minds, Computers, Learning and Literacy*. Cambridge, MA: MIT Press.
- diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.) (1995). *Computers and Exploratory Learning*. Berlin: Springer- Verlag.
- Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 211-240.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company.
- Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Hilldale, NJ: LEA.
- Goldengerg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of Connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4Q191-224, Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. and Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design, in P. Cobb, E. Yackel and K. McClain (eds.), *Symbolizing and*

- Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- Gutierrez A., Boero, P. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Past, Present and Future*. Sense Publishers, Rotterdam – Taipei.
- Hancock, C. (1995). The Medium and the Curriculum: Reflections on Transparent Tools and Tacit Mathematics, in A. DiSessa, C. Hoyles, & R. Noss (Eds). *Computers and Exploratory Learning*, pp. 221-241. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hart, K. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. General Edit. K.M. Hart, John Univray.
- Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (1997). The Emergent Perspective in Rich Learning Environments: Some Roles of Tools and Activities in the Construction of Sociomathematical Norms. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1-3, 149-66.
- Hölzl, R. (1996). How does 'Dragging' affect the Learning of Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 1(2) 169-187.
- Hoyles, C. & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 23, 31-57.
- Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What Can Digital Technologies Take From and Bring to Research in Mathematics Education? In *Second International Handbook of Mathematics Education*, 323-349, A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keiterl, J. Kilpatrick and F. K. S. Leung (eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hoyles, C. (2001). From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46: 273-286.
- Kafai, Y., Resnick, M., Eds. (1996). *Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World*. Wahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Kaptelinin, V. (1997). Activity Theory: Implications for Human-Computer Interaction Context and consciousness Ed. B. Nardi

- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.) *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 515-556.
- Keisoglou S. and Kynigos, C. (2006). Measurements With A Physical And A Virtual Quadrant: Students' Understandings Of Trigonometric Tangent. *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 425-432, Novotna J., Moraova H., Kratka Mm. & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Kynigos, C. and Gavrilis, S. (2006). Constructing A Sinusoidal Periodic Covariation. *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 9-16, Novotna J., Moraova H., Kratka Mm. & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Laborde, C. & Laborde, J. M. (1995). What About a Learning Environment Where Euclidian Concepts are Manipulated with a Mouse? In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. D. Edwards (Eds), *Computers and Exploratory Learning*. Springer-Verlag, Germany.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), 275–304. Sense Publishers.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.
- Light, P.H., & Mevarech, Z. R. (1992). Peer-Based Interaction at the Computer: Looking Backward, Looking Forward. *Learning and Instruction*, 2, 275-280.
- Lipson, K. & Jones, P. (1996). Statistics: Towards the 21st century, in B., Phillips (ed.), *Papers on Statistical Education*, Swinburne Press, Hawthorn, Australia.
- Mariotti, M. A. (2002). Influences of Technologies Advances in Students' Math Learning. In *Handbook of Interantional Research in Mathematics Education*, chapter 29, 757-786. Edited by L. D. English. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

- McClain, K. & Cobb, P. (2001). Supporting students' ability to reason about data. *Educational Studies in Mathematics*, 45: 103–129.
- Mercer, N. (1996). The Quality of Talk in Children's Collaborative Activity in the Classroom. *Learning and Instruction*, 6, 4, 359-377.
- Nardi, B. (1996) (Ed.) *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction*. MIT Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Standards 2000, NCTM, Reston, VA.
- Noss R & Hoyles C (1996). *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer Academic Publishers.
- Olson A., Kieran T. & Ludwig S (1987). Linking logo, Levels and Language in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 18, 359-370.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms*. Harvester Press. (Ελληνική μετάφραση εκδ. Οδυσσέας)
- Pratt, D. & Noss, R. (2002) The microevolution of mathematical knowledge: The case of randomness. *Journal of the Learning Sciences*, Vol. 11, No. 4, pp. 453-488.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(5), 602–625.
- Psycharis, G. & Kynigos, C. (2009). Normalising geometrical figures: Dynamic manipulation and construction of meanings for ratio and proportion. *Research in Mathematics Education*, Vol. 11, No 2, 149-166.
- Shaughnessy, J.M., Garfield, J. & Greer, B. (1996). Data handling. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 205–237.
- Smith, E. & Confrey, J. (1991). *Understanding Collaborative Learning: Small Group Work on Contextual Problems Using a Multi-Representational Software Tool*. Chicago: AERA.
- Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 1-26.

- Van Hiele, (1959). *La Pensée de L'enfant et la Geometrie*. Bulletin de l'Association des Professeurs Mathematiques de l'Enseignement Public, p.198-205.
- Vergnaud, G. (1987). About Constructivism. *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 42-55. Montreal.
- Vergnaud, G. (1991). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Wegerif, R. & Mercer, N. (1996). A dialogical framework for researching peer talk. In R. Wegerif & P. Scrimshaw (Eds.), *Computers and talk in the primary classroom*. Milton Keynes, UK: Open University, 49-61.
- Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά. Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματική Εκπαίδευσης*. Εκδ. Ελληνικά Γράμματα
- Κουτσελίνη, Μ. & Θεοφιλίδης, Χ. (2002) *Διερεύνηση και Συνεργασία, Επιστήμες της Αγωγής*, Μ. Κασσωτάκης Μ. (Διευθ. Σειράς). Αθήνα: εκδ. Γρηγόρης, Αθήνα.
- Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (επιμ.) (2002) *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα*. Εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα.
- Κυνηγός, Χ. (2007) *Το Μάθημα της Διερεύνησης, Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδ. Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
- Κυνηγός, Χ. (Επιμ.) (2005) *Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης, Πρακτικά του Πρώτου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φιλοσοφική Σχολή ΕΚΠΑ., εκδ. Ελληνικά Γράμματα.
- Μακρή, Κ., Αράπογλου, Α., Φράγκου, Ο., Κυνηγός, Χ. (2006) *Ο Σχεδιασμός Πλαισίων Εκπαιδευτικών Σεναρίων ως Διαδικασία Αναστοχασμού κατά την Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών, Πρακτικά 5<sup>ου</sup> Συνεδρίου 'Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση'*, 10-18, Επιμ. Ψύλλος Δ., Δαγδιλέλης, Β. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης και Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.
- Ματσαγγούρας, Η. (1987). *Ομαδοκεντρική Διδασκαλία και Μάθηση*. Αθήνα.: Γρηγόρης.

- Φλουρής, Γ. Σ. (1992) *Αναλυτικά Προγράμματα για μια Νέα Εποχή στην Εκπαίδευση*. Εκδ. Γρηγόρης, Αθήνα.
- Χρονάκη, Α. (2006) Η Μαίρη, η Μαρία και οι 'άλλοι': διαπραγμάτευση νοημάτων στο ψηφιακό περιβάλλον Cabri-Geometry, *Πρακτικά 5<sup>ο</sup> Συνεδρίου 'Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση'*, 10-18, Επιμ. Ψύλλος Δ., Δαγδιλέλης, Β. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης και Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.
- Χρονάκη, Α. (2000) *Συνεργασία μαθητών σε ομάδες: Μια προσέγγιση από την σκοπιά των εκπαιδευτικών*. Σύγχρονη Εκπαίδευση. Αθήνα. Τεύχος 1. Νοεμ-Δεκ. 2000. σελ. 38-49.



## 12. Παράρτημα – Ενδεικτικά σενάρια επιμορφωτών Β΄ επιπέδου

---

### Σενάριο 1: Σκάλες

Συγγραφέας:

Ειρήνη Περυσινάκη, Επιμορφώτρια Μαθηματικών (Β΄ επιπέδου).

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα (τριγωνομετρία)

Εισαγωγή στην έννοια της κλίσης ευθείας μέσω της κλίσης σκάλας.

Συμμεταβαλλόμενα μεγέθη

Ομοιότητα σχημάτων

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Θέμα:

Το θέμα του σεναρίου αφορά τη μελέτη της κλίσης μιας ευθείας μέσα από την διερεύνηση της κλίσης μιας σκάλας. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν με διαφορετικές τιμές του ύψους και του πλάτους των σκαλοπατιών μιας σκάλας και έτσι να διερευνήσουν τα γεωμετρικά στοιχεία που καθορίζουν την κλίση μιας σκάλας και κατ' επέκταση μιας ευθείας. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές έχουν επίσης τη δυνατότητα να κατανοήσουν τη σχέση της κλίσης μιας ευθείας ( $\alpha$ ) με το λόγο της οριζόντιας απομάκρυνσης και της κατακόρυφης ανύψωσης ενός σημείου της ευθείας σε σχέση με ένα σταθερό προεπιλεγμένο σημείο της και ( $\beta$ ) με το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον ορίζοντα.

Τεχνολογικά εργαλεία

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Χελωνόκοσμος.

### Σκεπτικό

Βασική ιδέα

Στο παρόν σενάριο οι μαθητές εργάζονται το Χελωνοκοσμο και προσπαθούν να «διορθώσουν» με δυναμικό τρόπο, σκάλες που άλλοτε έχουν λάθος κλίση και προορισμό και άλλοτε μοιάζουν «σπασμένες». Με αυτόν τον τρόπο παρέχονται στους μαθητές ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν μέσα από διαδικασίες διερεύνησης και πειραματισμού την έννοια της κλίσης μιας σκάλας και να αποσαφηνίσουν τα στοιχεία που την καθορίζουν (π.χ. εξαρτάται από τον λόγο ύψους και πλάτους των σκαλοπατιών και όχι από τις απόλυτες διαστάσεις τους ή από το πλήθος τους). Μια σκάλα με πολύ μικρές διαστάσεις σκαλοπατιών τείνει να γίνει ευθεία («τσουλήθρα»), κάτι που γίνεται αντιληπτό μέσα από τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού μεταβλητών που προσφέρει ο Χελωνόκοσμος. Έτσι, η έννοια της κλίσης μιας σκάλας επεκτείνεται με φυσικό τρόπο στην έννοια της κλίσης ευθείας, αναδεικνύοντας σημαντικά γεωμετρικά στοιχεία της, όπως την αμφιμονοσήμαντη σχέση της κλίσης της ευθείας με το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζει με τον ορίζοντα.

#### Προστιθέμενη αξία

Η εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της κλίσης γίνεται στην αρχή του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου της γεωμετρίας της Β΄ γυμνασίου μέσα από την έννοια της εφαπτομένης οξείας γωνίας. Παρότι το αρχικό παράδειγμα που χρησιμοποιείται στο σχολικό βιβλίο αφορά την κλίση ως ποσοστό που δείχνει πόσο ανηφορικός είναι ένας δρόμος, στη συνέχεια τα υπόλοιπα μέρη του κεφαλαίου και οι αντίστοιχες ασκήσεις αναφέρονται στον υπολογισμό των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων με χρήση της εφαπτομένης ως τριγωνομετρικού αριθμού. Έτσι, η διασύνδεση ανάμεσα στην εφαπτομένη ως κλίση και τις παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται θέτει ένα διδακτικό και μαθησιακό ζήτημα για τους μαθητές και το διδάσκοντα.

Η έννοια της κλίσης μιας ευθείας φαίνεται να εξαρτάται από δύο παραμέτρους: την οριζόντια απομάκρυνση και την κατακόρυφη ανύψωση κάποιου σημείου της ευθείας σε σχέση με ένα σταθερό, προεπιλεγμένο σημείο της. Δύσκολα λοιπόν οι μαθητές κατανοούν ότι η κλίση δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές αυτών των μεγεθών, αλλά από το λόγο τους. Ακόμα πιο δύσκολα πείθονται για την ανεξαρτησία αυτού του λόγου από την επιλογή των δύο σημείων.

Το περιβάλλον του χελωνόκοσμου, ακριβώς επειδή διαθέτει εργαλεία πειραματισμού, προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν αρχικά τους «σωστούς» κανόνες δόμησης μιας σκάλας, στη συνέχεια να τους αμφισβητήσουν – κάτι που γίνεται μέσα από το διάλογο στις ομάδες - και τελικά να διακρίνουν τα απαραίτητα από τα περιττά

στοιχεία στην κατασκευή. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναστοχασμού και διαλόγου δημιουργούνται βαθιές πεποιθήσεις για την συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Η καλή κατάκτηση της έννοιας τέλος, αποτυπώνεται στις εικαστικές δημιουργίες των μαθητών.

### **Πλαίσιο εφαρμογής**

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στη Β΄ Γυμνασίου.

Χρόνος υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 6-8 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί στο εργαστήριο των Η/Υ. Η εισαγωγική συζήτηση που εμπλέκει τους μαθητές στο θέμα της κλίσης μιας σκάλας (και λαμβάνει χώρα κατά την 1<sup>η</sup> φάση εφαρμογής) μπορεί να διεξαχθεί στην αίθουσα διδασκαλίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν βασικές λειτουργικότητες του Χελωνόκοσμου, απλές εντολές Logo, γεωμετρία παράλληλων ευθειών, την έννοια του λόγου δύο αριθμών και την έννοια των ανάλογων ποσών.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Φύλλα εργασίας, οδηγίες, πρόχειρο σημειωματάριο.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων που μοιράζονται κάθε μηχανήμα και εναλλάσσουν περιοδικά τους εξής τρεις ρόλους:

Μαθητής που χειρίζεται το πληκτρολόγιο και το ποντίκι.

Μαθητής που παρακολουθεί την πορεία του φύλλου εργασίας και το έργο του 1ου μαθητή.

Μαθητής που κρατά σημειώσεις με τους προβληματισμούς της ομάδας και την πορεία της, με στόχο τη δημιουργία έκθεσης πεπραγμένων.

Ο καθηγητής ενημερώνει για τις σχετικές δραστηριότητες της κάθε φάσης, συντονίζει το έργο των ομάδων (όπως την αλληλεπίδρασή τους στην 3η φάση) και την ανακεφαλαιωτική

συζήτηση στο τέλος, φροντίζει για την απόκτηση κοινής ορολογίας. Ενθαρρύνει τη διερευνητική διαδικασία των ομάδων και σε καμία περίπτωση δεν δίνει έτοιμες απαντήσεις. Για παράδειγμα, προτρέπει τη χρήση των μεταβολέων σε μεγάλο εύρος τιμών, ή με μικρό βήμα. Ακόμα μπορεί να θέσει προβληματισμό για τον ρόλο των μεταβλητών στην κατασκευή μιας σκάλας: Οι μεταβλητές μιας σκάλας είναι το ύψος, το πλάτος και το πλήθος των σκαλοπατιών. Όταν όμως θεωρήσουμε την κλίση της σκάλας σαν μια από τις μεταβλητές, τότε ποια η ποιες από τις προηγούμενες θα μπορούσαν να αντικατασταθούν; Γιατί π.χ. είναι σωστό ότι μια σκάλα εξαρτάται από τις μεταβλητές, πλάτος, πλήθος σκαλοπατιών και κλίση;

### Στόχοι

Από πλευράς γνωστικού αντικείμενου οι κύριοι διδακτικοί στόχοι του σεναρίου σχετίζονται με την διερεύνηση της έννοιας της κλίσης μιας ευθείας από τους μαθητές κατά την εμπλοκή τους σε διαδικασίες διερεύνησης της κλίσης μιας σκάλας με χρήση μεταβλητών για το ύψος και το πλάτος των σκαλοπατιών. Ειδικότερα, επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν ότι η κλίση μιας σκάλας εξαρτάται από το λόγο του ύψους προς το πλάτος των σκαλοπατιών της και ότι ο λόγος αυτός είναι ίδιος με τον λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης προς την οριζόντια απομάκρυνση της σκάλας.
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας - σκάλας επηρεάζεται από το λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης προς την οριζόντια απομάκρυνση ενός σημείου της από κάποιο άλλο σταθερό σημείο της και δεν επηρεάζεται από τα μήκη αυτών των αποστάσεων ούτε από την επιλογή των δύο σημείων
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας είναι ένας αριθμός καθαρός από μονάδες.
- Να βρίσκουν την κλίση μιας σκάλας αν γνωρίζουν το ύψος και το πλάτος των σκαλοπατιών της.
- Να βρίσκουν το πλάτος των σκαλοπατιών μιας σκάλας αν γνωρίζουν την κλίση της και το ύψος της.
- Να βρίσκουν το ύψος των σκαλοπατιών μιας σκάλας αν γνωρίζουν την κλίση της και το πλάτος τους.
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας – σκάλας συνδέεται αμφιμονοσήμαντα με την οξεία γωνία που σχηματίζει με τον ορίζοντα.

- Να συνδέουν την κλίση 100% με ευθεία – σκάλα που σχηματίζει γωνία 45ο με τον ορίζοντα.
- Να συγκρίνουν τις κλίσεις δύο ευθειών με το μέγεθος των γωνιών τους: Μεγαλύτερη κλίση σημαίνει και μεγαλύτερη οξεία γωνία με τον ορίζοντα.
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση μιας ευθείας – σκάλας μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλη ή και απεριόριστα μικρή, μέχρι και 0.

### **Ανάλυση του σεναρίου**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερις φάσεις:

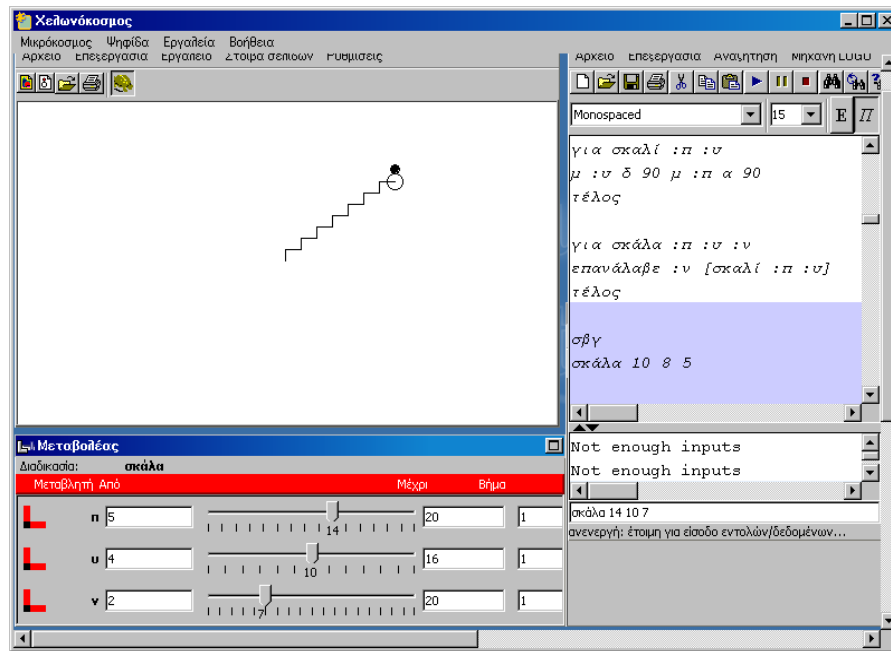
1η Φάση: Η 1<sup>η</sup> φάση αφορά την εμπλοκή των μαθητών με

- την έννοια της κλίσης σε κεκλιμένες επιφάνειες και
- την κατασκευή μιας σκάλας στο Χελωνόκοσμο με μεταβλητό πλήθος σκαλοπατιών μέσα από την επανάληψη μιας δοσμένης διαδικασίας που κατασκευάζει ένα σκαλοπάτι με χρήση μεταβλητών για το πλάτος και το ύψος του
- την δυναμική αλλαγή των γεωμετρικών μεγεθών που καθορίζουν τη μορφή της σκάλας μέσα από την αλλαγή των τιμών των αντίστοιχων μεταβλητών.

Αρχικά μπορεί να συζητηθεί με τους μαθητές το θέμα της ισορροπίας και της άνεσης στην κίνηση στις διάφορες οριζόντιες ή κεκλιμένες επιφάνειες (π.χ. γιατί μια πλαγιά ενός βουνού είναι δύσκολη ή επικίνδυνη στην αναρρίχησης της ή γιατί μια τσουλήθρα θα μπορούσε να είναι επικίνδυνη αν η κλίση της ήταν εξαιρετικά μεγάλη).

Μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί και το εξής απλό πείραμα της «ισορροπίας κύβου σε κεκλιμένο επίπεδο»: Τοποθετούμε έναν κύβο σε μια όχι λεία σανίδα που αρχικά είναι οριζόντια και που σταδιακά την ανυψώνουμε. Παρατηρούμε ότι όταν η σανίδα έχει στραφεί κατά γωνία περίπου 45° (κλίση 100%) ο κύβος ανατρέπεται, κάτι που μπορεί να ερμηνευθεί και από τη θέση του κέντρου βάρους του κύβου.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να διατυπώσουν ανάλογες σκέψεις για τις σκάλες και την κλίση τους, για το λόγο χρήσης τους (π.χ. ερωτώντας γιατί στη Σαντορίνη τα σοκάκια είναι γεμάτα σκαλοπάτια και δεν προτιμήθηκαν λείοι δρόμοι προσβάσιμοι σε οχήματα) κ.τ.λ.



Εικόνα 61: Η κατασκευή μιας σκάλας με τρεις μεταβλητές.

Τέλος, οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν στο Χελωνόκοσμο μια απλή σκάλα που επαναλαμβάνει τη διαδικασία σκαλί. Στόχος εδώ είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές την επαναληπτική διαδικασία σκαλοπατιών στη σύνθεση μιας σκάλας και να αποκτηθεί μια κοινή γλώσσα για τα επόμενες φάσεις της διερεύνησης.

Σε αυτή το σημείο οι μαθητές παρακινούνται να παρατηρήσουν με ποιο τρόπο η αλλαγή κάθε παραμέτρου επηρεάζει τη μορφή της σκάλας. Μεταβάλλοντας στο μεταβολέα τις μεταβλητές πλάτος (π) και ύψος (υ) των σκαλοπατιών ανεξάρτητα (εικόνα 60), η κλίση αλλάζει, όχι όμως όταν μεταβάλλεται το πλήθος τους (v). Σε αυτή τη φάση δεν αναμένεται να είναι σε θέση οι μαθητές να διακρίνουν ότι η κλίση δεν μεταβάλλεται όταν το πλάτος και το ύψος των σκαλοπατιών μεταβληθούν διατηρώντας τον ίδιο λόγο.

#### Ενδεικτικό φύλλο εργασίας (1<sup>η</sup> Φάση)

α) Αντιγράψτε στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου τη διαδικασία σκαλί που δίνεται ακολούθως και έπειτα εκτελέστε την εντολή σκαλί 30 50

```
για σκαλί :π :υ
μ :υ δ 90 μ :π α 90
τέλος
```

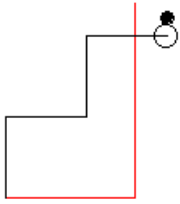
β) Τι σχηματίστηκε; Τι αντιπροσωπεύει η μεταβλητή  $\pi$  και τι η μεταβλητή  $\upsilon$ ;

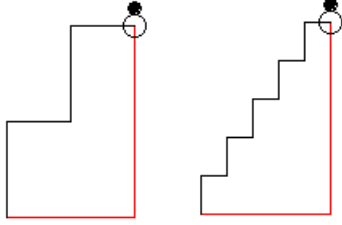
γ) Μπορείτε να δημιουργήσετε μια νέα διαδικασία που θα ονομάσετε σκάλα και θα δημιουργεί σκάλες με μεταβλητό πλάτος ( $\pi$ ), ύψος ( $\upsilon$ ) και πλήθος ( $\nu$ ) σκαλιών; Όταν είστε έτοιμοι, εργαστείτε με το μεταβολέα και γράψτε λίγες γραμμές για το πότε έχετε την αίσθηση ότι η σκάλα σας είναι ή δεν είναι απότομη (αναφερθείτε στη σχέση των τριών μεγεθών, δηλαδή του πλάτους, ύψους και πλήθους σκαλοπατιών).

2<sup>η</sup> Φάση: Η 2<sup>η</sup> φάση αφορά την εμπλοκή των μαθητών με τη διασύνδεση του σταθερού λόγου ύψους/πλάτους των σκαλοπατιών με την σταθερή κλίση μιας σκάλας που ορίζεται από το λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης ( $\psi$ ) προς την οριζόντια απομάκρυνση ( $\chi$ ).

Στην πρώτη δραστηριότητα της φάσης αυτής οι μαθητές καλούνται να βρουν τον τρόπο να σχεδιάσουν σωστά τα σκαλοπάτια μιας σκάλας, της οποίας οι δύο διαστάσεις της ( $\chi$ ) και ( $\psi$ ) έχουν σχεδιαστεί με κόκκινες σταθερές γραμμές. Το πρόβλημα, δηλαδή, είναι η άνοδος της χελώνας από ένα συγκεκριμένο σημείο σε ένα άλλο επίσης συγκεκριμένο σημείο, μέσω μιας κλιμακωτής κίνησης.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να αντιγράψουν τις διαδικασίες μετατόπιση και αίνιγμαA, που φαίνονται στην εικόνα 61, και να πειραματιστούν με αλλαγές τιμών ώστε να βεβαιωθούν ότι κατανοούν το είδος του σχήματος που δημιουργείται και τις αλλαγές.

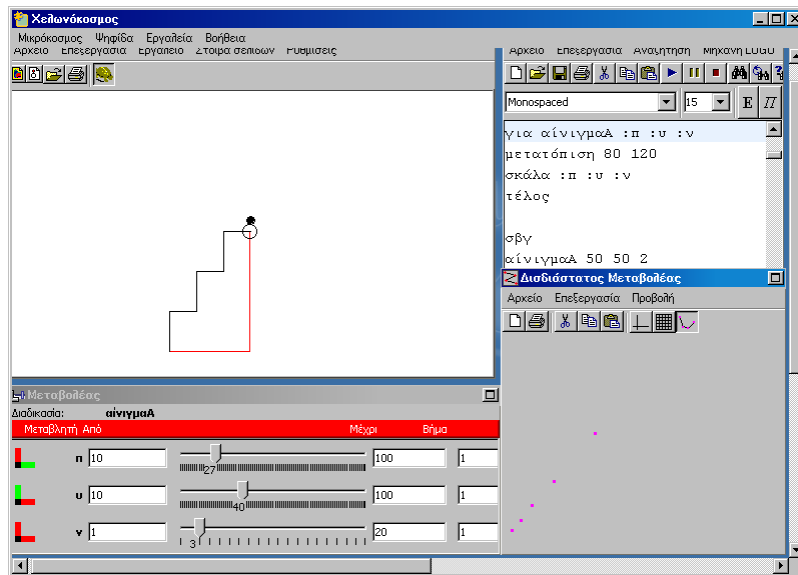
για μετατόπιση $\chi$ $\psi$ θεσεχρωμαστυλο 4 $\pi$ $\psi$ α 90 μ $\chi$ δ 90 θεσεχρωμαστυλο 0 τέλος	α) 
--	--

<p>για αίνιγμαA :π :υ :ν  μετατόπιση 80 120  σκάλα :π :υ :ν  τέλος  αίνιγμαA 50 50 2</p>	<p>β)</p>  <p>Εικόνα 62</p>
--	---

Με την εκτέλεση της τελευταίας γραμμής κώδικα (αίνιγμαA 50 50 2) δημιουργείται το πρώτο σχέδιο (εικόνα 61) ενώ η χελώνα ανέβηκε δύο σκαλοπάτια απέτυχε στο να ανέβει στην κορυφή της σκάλας (και αρχική θέση της χελώνας πριν τη μετατόπιση).

Καλούνται στη συνέχεια καλούνται οι μαθητές να «λύσουν» το αίνιγμα της μετακίνησης για διάφορες τιμές του  $n$  με τη χρήση του δισδιάστατου μεταβολέα (εικόνα 62). Συγκεκριμένα, στον οριζόντιο άξονα προβάλλεται το πλάτος σκαλοπατιού ( $\pi$ ) ενώ στον κατακόρυφο το ύψος του ( $\upsilon$ ). Επιλέγοντας τη διακριτή – σημειακή αναπαράσταση, οι μαθητές μέσα από πειραματισμό μπορούν να διαπιστώσουν ότι όλες οι «λύσεις» του αινίγματος (κόκκινα σημεία) βρίσκονται επάνω σε μια ευθεία. Ο εκπαιδευτικός μπορεί ακολούθως να παροτρύνει τους μαθητές να παρατηρήσουν τη γραμμική αυτή σχέση και να επιχειρήσουν να την ερμηνεύσουν.

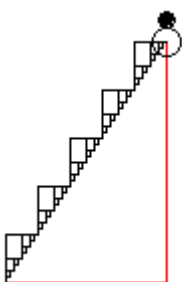




Εικόνα 63: Μαντεύοντας τη σταθερότητα του λόγου ύψους/πλάτους σκαλοπατιού για μια σταθερή κλίση σκάλας με τον δισδιάστατο μεταβολέα.

Τέλος, οι μαθητές προσπαθούν να διορθώσουν τη διαδικασία του αινίγματοςΑ και να την γενικεύσουν στην περίπτωση που η μετατόπιση έχει παραμέτρους  $\chi$  και  $\psi$ . Διαδικασίες που αναμένεται να προκύψουν είναι οι παρακάτω:

για αίνιγμαΑ_λύση :ν	για σκάλαχψ :χ :ψ :ν
μετατόπιση 80 120	μετατόπιση :χ :ψ
σκάλα 80/:ν 120/:ν :ν	σκάλα :χ/:ν :ψ/:ν :ν
τέλος	τέλος



Εικόνα 64

Φυσικά, οι μαθητές καλούνται να ελέγχουν τις εκάστοτε διαδικασίες με τη δυναμική μεταβολή των μεταβολέων στο Χελωνόκοσμο. Ο εκπαιδευτικός ενισχύει τους μαθητές να διατυπώνουν τα συμπεράσματά τους π.χ. το ότι η κλίση μιας σκάλας εξαρτάται κατά πολύ από τις δύο διαστάσεις της (την οριζόντια απομάκρυνση  $\chi$  και την κατακόρυφη ανύψωση  $\psi$ ), ενώ είναι ανεξάρτητη από το πλήθος των σκαλοπατιών. Προκειμένου να ενισχύσει την διερεύνηση των μαθητών και την πορεία εξαγωγής των αντίστοιχων συμπερασμάτων ο εκπαιδευτικός μπορεί να καλέσει τους μαθητές να εκτελέσουν διαδοχικά τις ακόλουθες εντολές που δίνουν το εντυπωσιακό σχέδιο της εικόνας 63 και με βάση αυτό να

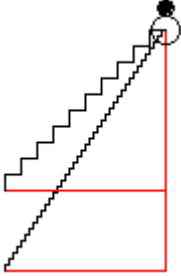
προβληματιστούν σχετικά με την κλίση των σχηματιζόμενων σκαλών. σκάλα  $\chi\psi$  80 120 5

σκάλα  $\chi\psi$  80 120 10

σκάλα  $\chi\psi$  80 120 20

σκάλα  $\chi\psi$  80 120 40

Το πώς ακριβώς εμπλέκονται οι διαστάσεις  $\chi$  και  $\psi$  της σκάλας στην κλίση της γίνεται ακόμα πιο ξεκάθαρο με το δεύτερο αίνιγμα που καλούνται ακολούθως οι μαθητές να λύσουν: Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουν με χρήση των μεταβολών τις τιμές των  $\chi$  και  $\psi$  ώστε οι δύο παραγόμενες σκάλες (εικόνα 64) να έχουν την ίδια κλίση (χωρίς αναγκαστικά να ταυτίζονται). Προτείνεται στους μαθητές να παρατηρούν συγχρόνως τις εκτυπώσεις του λόγου  $\psi/\chi$  στην έξοδο της ψηφίδας Logo. Σε αυτή την περίπτωση κάθε φορά που προσεγγίζουν κάποια λύση, η εκτύπωση αντίστοιχα προσεγγίζει τον αριθμό 1.5.

 <p data-bbox="440 1272 571 1303">Εικόνα 65</p>	<p data-bbox="858 949 1230 981">για αίνιγμαB : <math>\chi</math> : <math>\psi</math> : <math>\nu</math></p> <p data-bbox="858 1014 1158 1046">σκάλα <math>\chi\psi</math> 80 120 40</p> <p data-bbox="858 1079 1142 1111">σκάλα <math>\chi\psi</math> : <math>\chi</math> : <math>\psi</math> : <math>\nu</math></p> <p data-bbox="858 1144 1070 1176">τύπωση : <math>\psi/:\chi</math></p> <p data-bbox="858 1209 948 1240">τέλος</p> <p data-bbox="858 1274 1158 1305">αίνιγμαB 80 80 10</p>
---	--

3<sup>η</sup> Φάση: Στην τρίτη φάση οι μαθητές εμπλέκονται με τη διερεύνηση της σχέσης που συνδέει τις κλίσεις που έχουν διαφορετικές σκάλες. Για αυτό το λόγο κατασκευάζονται αρχικά διάφορες σκάλες που περιλαμβάνουν σκάλες ίδιου ύψους και πλήθους σκαλοπατιών αλλά διαφορετικής κλίσης. Το ζητούμενο είναι να βρεθούν οι τιμές του πλάτους των σκαλοπατιών ώστε να κατασκευαστεί μια σκάλα με ενιαία κλίση.

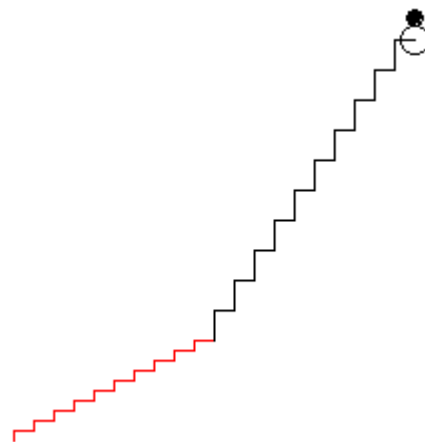
Στη φάση οι ομάδες των μαθητών αλληλεπιδρούν ανά δύο:

Ζητείται από τη μία ομάδα να δημιουργήσει μια διαδικασία που θα παράγει απλές σκάλες, όπως εκείνες της 1<sup>ης</sup> φάσης, με τη δέσμευση ότι θα έχουν 10 σκαλοπάτια και θα ανυψώνονται ακριβώς 50 μονάδες. Ομοίως, η δεύτερη ομάδα δημιουργεί μια δεύτερη

διαδικασία για να κατασκευάσει σκάλες που έχουν επίσης 10 σκαλοπάτια, αλλά ανυψώνονται 150 μονάδες ακριβώς. Και στις δύο διαδικασίες θα πρέπει οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το μοναδικό μεταβλητό μέγεθος είναι το πλάτος ( $\pi$ ) των σκαλοπατιών. Έπειτα, καλούνται από κοινού οι δύο ομάδες να δημιουργήσουν μια διαδικασία η οποία δημιουργεί σκάλες που το πρώτο τους τμήμα είναι η σκάλα της πρώτης ομάδας ενώ το δεύτερο τμήμα τους είναι η σκάλα της δεύτερης ομάδας. Διαδικασίες που αναμένεται να προκύψουν είναι οι παρακάτω:

```
για σκάλα_50 :π
θέσεχρωμαστυλο 4
σκάλα :π 5 10
θέσεχρωμαστυλο 0
τέλος

για σκάλα_150 :π
σκάλα :π 15 10
τέλος
```



Εικόνα 66

```
για διώροφη_σκάλα :π
σπ π 100 σκ
σκάλα_50 :π
σκάλα_150 :π
τέλος
διώροφη_σκάλα 10
```

Στη συνέχεια της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να δοκιμάσουν να ‘διορθώσουν’ την παραπάνω διαδικασία ώστε να «κολλάνε» σωστά οι δύο σκάλες. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές μετακινήσουν το μεταβολέα  $\pi$  ώστε να διαπιστώσουν ότι αλλαγή

στο πλάτος των σκαλοπατιών δεν λύνει το πρόβλημα.. Ερωτήματα που μπορεί να διατυπωθούν από τους μαθητές: Μήπως η συγκεκριμένη δυσκολία οφείλεται στο ότι η δεύτερη σκάλα έχει ψηλότερα σκαλοπάτια; Μήπως θα έπρεπε αυτά να είναι περισσότερα και πιο χαμηλά; Θα μπορούσε μια τέτοια κατασκευή να υπάρξει πραγματικά;

Σ' αυτό το σημείο προτείνεται να δοθεί στους μαθητές η διερεύνηση του αίνιγματος Γ :

για αίνιγμαΓ :π1 :π2

σπ π 100 α 90

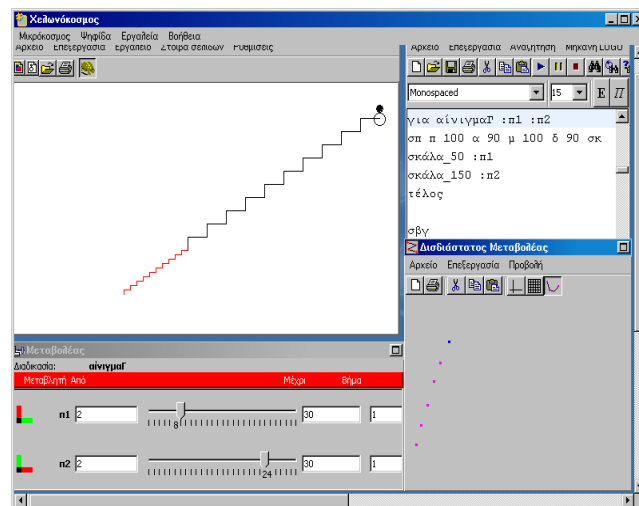
μ 100 δ 90 σκ

σκάλα\_50 :π1

σκάλα\_150 :π2

τέλος

αίνιγμαΓ 10 10



Εικόνα 67

Η διαφορά της διαδικασίας αίνιγμαΓ από τη διαδικασία διώροφη\_σκάλα είναι ότι στην πρώτη χρησιμοποιούνται διαφορετικές μεταβλητές για το πλάτος των σκαλοπατιών κάθε σκάλας. Έτσι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εντοπίσουν ζεύγη αριθμών που «λύνουν» το πρόβλημα. Μάλιστα, με τη βοήθεια του δισδιάστατου μεταβολέα και την επιλογή της διακριτής-σημειακής παράστασης καλούνται να μελετήσουν τη συμμεταβολή των π1 και π2 και να ανακαλύψουν ποια σχέση συνδέει τα πλάτη των σκαλοπατιών κάθε σκάλας στις περιπτώσεις που λύνεται το αίνιγμα Γ και να διατυπώσουν κατάλληλα συμπεράσματα. Π.χ. Για να «κολλούν» οι δύο σκάλες θα πρέπει η σκάλα με το τριπλάσιο ύψος να έχει σκαλοπάτια τριπλάσιου πλάτους. Δηλαδή, θα πρέπει οι δύο σκάλες να έχουν ίδια κλίση (κ): το ποσοστό ανύψωσης σε σχέση με την απομάκρυνση θα πρέπει να είναι το ίδιο.

Αυτό το σημείο είναι κρίσιμο να αναδειχθεί μέσα από μια σύντομη ανοιχτή συζήτηση των ομάδων που θα συντονίσει ο εκπαιδευτικός. Θα πρέπει λοιπόν να συμφωνήσουν οι ομάδες ποιον αριθμό θα ονομάζουν κλίση σκάλας – ευθείας. Να παρατηρήσουν ότι είναι αριθμός

ανεξάρτητος από μονάδες και ότι είναι ένα σημαντικό στοιχείο για τη δημιουργία διώροφων σκαλών.

4<sup>η</sup> Φάση: Η τέταρτη φάση αφορά την χρήση της κλίσης μιας σκάλας για την κατασκευή διώροφων σκαλών που προκύπτουν από τη συνένωση δύο διαφορετικών σκαλών. Δηλαδή, οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες επανασχεδίασης της διώροφης σκάλας με χρήση της κλίσης ως μεταβλητής.

Αν το κοινό χαρακτηριστικό των δύο σκαλών που αποτελούν τη διώροφη σκάλα είναι η κλίση τους ( $\kappa$ ), τότε οι διαδικασίες που τις παράγουν και τις ενώνουν χωρίς προβλήματα θα πρέπει να είναι ως ακολούθως:

για σκάλα_50β : $\kappa$ θέσεχρωμαστιυλο 4 σκάλα 5/: $\kappa$ 5 10 θέσεχρωμαστιυλο 0 τέλος	για σκάλα_150β : $\kappa$ σκάλα 15/: $\kappa$ 15 10 τέλος	για διώροφη_σκάλαB : $\kappa$ σπ π 100 σκ σκάλα_50β : $\kappa$ σκάλα_150β : $\kappa$ τέλος διώροφη_σκάλαB 1
--	---	--

Εδώ οι μαθητές καλούνται να «παίξουν» με το μεταβολέα (αφού ρυθμίσουν το βήμα της μεταβλητής  $\kappa$  στο 0.05) για να παρατηρήσουν ότι η κλίση 1 (100%) σημαίνει ίση κατακόρυφη ανύψωση με οριζόντια απομάκρυνση (γωνία 45°). Επίσης, ότι όταν η κλίση ξεπερνά τη μονάδα η σκάλα γίνεται απότομη ενώ όταν είναι μικρότερη της μονάδας η σκάλα είναι πιο ομαλή.

Το επόμενο βήμα είναι να κληθούν οι μαθητές να αντικαταστήσουν μία από τις παραμέτρους  $\pi$  (πλάτος σκαλιού) ή  $\nu$  (ύψος σκαλιού) με την κλίση του σκαλιού ( $\kappa$ ). Έτσι αναμένεται να ανακύψει έδαφος για πειραματισμό σχετικά με τη δημιουργία σκαλών με ελεγχόμενη κλίση: Ενδεικτικές διαδικασίες:

για νέα\_σκάλα : $\pi$  : $\nu$  : $\kappa$

σκάλα : $\pi$  : $\pi^*$  : $\kappa$  : $\nu$

τέλος

νέα\_σκάλα 10 8 1

Ο πειραματισμός των μαθητών με τη δυναμική μεταβολή των τριών παραμέτρων στην παραπάνω διαδικασία αναμένεται να προσφέρει υποστήριξη στους μαθητές προκειμένου να ανακαλύψουν ότι:

- Όταν η κλίση είναι περίπου 0 η σκάλα είναι σχεδόν οριζόντια.
- Η κλίση μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη θελήσουμε.
- Όσο μεγαλώνει η κλίση μιας σκάλας τόσο αυτή γίνεται πιο απότομη.
- Σε κάθε γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο αντιστοιχεί μια διαφορετική τιμή για την κλίση της σκάλας και αντίστροφα.
- Η κλίση δεν επηρεάζεται από το πλήθος  $n$  των σκαλοπατιών.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί επίσης να καλέσει τους μαθητές να διερευνήσουν τι θα συμβεί αν η κλίση πάρει αρνητικές τιμές;

Και επειδή οι νέες σκάλες επανασχεδιάστηκαν για να μπορούν να «κολληθούν» επιτυχώς, οι μαθητές ολοκληρώνουν αυτή τη φάση δημιουργώντας μια διαδικασία που «κολλά» δυο νέες σκάλες (με την ίδια κλίση φυσικά):

```
για νεα_διώροφη_σκάλα :π1 :ν1 :π2 :ν2 :κ
θεσεχρωμαστυλο 4
νεα_σκάλα :π1 :ν1 :κ
θέσεχρωμαστυλο 0
νεα_σκάλα :π2 :ν2 :κ
τέλος
```

### **Επέκταση της δραστηριότητας.**

#### A. Παίζοντας με τους ρητούς

Θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να εκτελέσουν διαδοχικά τις εξής διαδικασίες:

σκάλα 10 10 10

σκάλα 10 -10 10

σκάλα -10 -10 10

σκάλα -10 10 10

Το σχέδιο που προκύπτει μοιάζει με ένα μπισκότο (εικόνα 67).

Το ζητούμενο είναι να ερμηνεύσουν την ανοδική – καθοδική κίνηση της χελώνας και να τη συσχετίσουν με τα σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου, αλλά και με τις πράξεις ακεραίων. Φυσικά, αφού το «μπροστά -10» σημαίνει «πίσω 10», το πρόσημο ‘-’ δε σημαίνει τίποτε άλλο από το «αλλαγή διεύθυνσης». Έτσι, για παράδειγμα, εκτελώντας την τρίτη εντολή η χελώνα κινείται και προς τα αριστερά και προς τα κάτω.

B. Μελετώντας τις «παράλληλες» και τις «κάθετες» σκάλες (κυρίως στην Α΄ Λυκείου για τη συνθήκη παραλληλίας – καθετότητας ευθειών)

Για τις παράλληλες σκάλες ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές τη διαδικασία αμυστήριο για να διερευνήσουν τη συνθήκη κατά την οποία οι δύο σχηματιζόμενες σκάλες είναι παράλληλες:

για αμυστήριο :π1 :ν1 :κ1 :π2 :ν2 :κ2

νέα\_σκάλα :π1 :ν1 :κ1

σπ π :π1\*:ν1\*:κ1 α 90

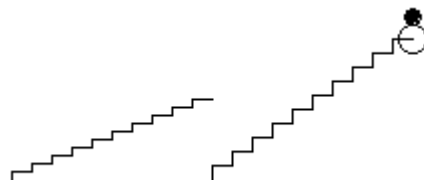
μ :π1\*:ν1 π 100 δ 90 σκ

νέα\_σκάλα :π2 :ν2 :κ2

τέλος

σβγ

αμυστήριο 10 10 0.4 10 10 0.7



Εικόνα 68: Διερεύνηση της συνθήκης παραλληλίας

Για τις κάθετες σκάλες ομοίως μπορεί να δοθεί στους μαθητές το βμυστήριο. Επειδή η διερεύνηση είναι πιο δύσκολη εδώ, ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποδείξει ότι τα  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  θα μπορούσαν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Μάλιστα διευκολύνεται η διερεύνηση αν τροφοδοτηθεί η διαδικασία βμυστήριο με τις σωστές τιμές των  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα της εικόνας 69.

```

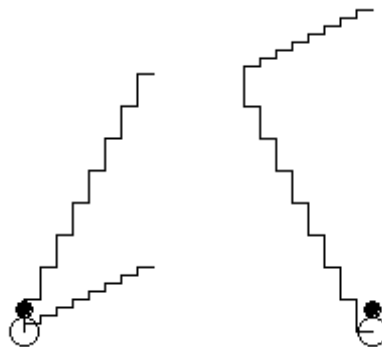
για βμυστήριο :π1 :ν1 :κ1 :π2 :ν2 :κ2
  νέα_σκάλα :π1 :ν1 :κ1
  σπ π :π1*ν1*κ1 α 90
  μ :π1*ν1 δ 90 σκ
  νέα_σκάλα :π2 :ν2 :κ2
τέλος

```

```

σβγ
βμυστήριο 8 8 0.5 8 8 2
σβγ
βμυστήριο 8 8 0.5 8 8 -2

```



Εικόνα 69: Διερεύνηση της συνθήκης καθετότητας

### Γ. Εικαστικές δημιουργίες

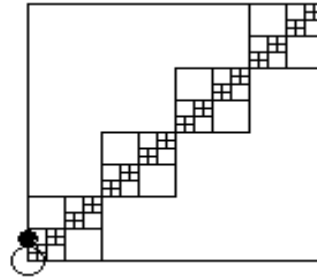


Μια άλλη ενδιαφέρουσα επέκταση, που προϋποθέτει την κατανόηση και την εξοικείωση των μαθητών με τις διαδικασίες που συναντήθηκαν στο παρόν σενάριο μαθήματος, είναι η ελεύθερη καλλιτεχνική έκφραση. Δηλαδή, η δημιουργία σύνθετων σχημάτων με δομικό στοιχείο τις σκάλες. Αν γίνει και χρήση αναδρομικών διαδικασιών, τα αποτελέσματα μπορούν να είναι εντυπωσιακά.

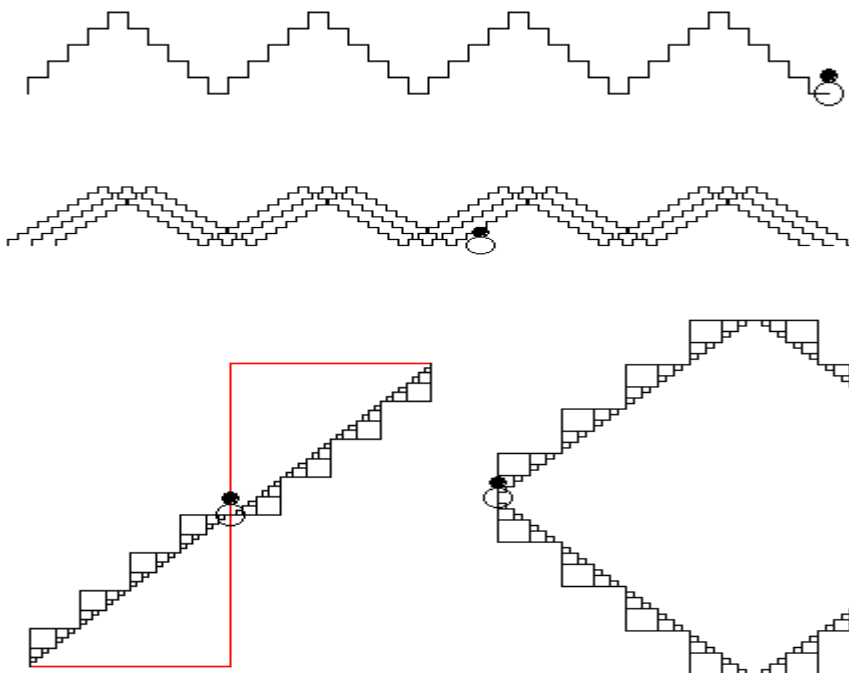
```

για τετράγωνο :ν
αν :ν>8 [σταμάτησε]
επανάλαβε 2 [
σκαλα 32/:ν 32/:ν 4* :ν
π 128 α 90 μ 128 δ 90
μ 128 δ 90 μ 128 δ 90]
τετράγωνο 2* :ν
τέλος
τετράγωνο 1

```



Άλλα ενδεικτικά σχέδια είναι τα εξής:



## **Σενάριο 2: Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ\_ΚΑΡΕΤΑ**

Συγγραφέας:

Καλλιόπη Αρδαβάνη, Επιμορφώτρια Μαθηματικών (Β' επιπέδου).

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα

Ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης.

Μελέτη της γραφικής παράστασης της  $y=ax+\beta$ .

Αλλαγή κλίμακας της γραφικής παράστασης

Μετασχηματισμοί της  $y=ax$ .

Έννοια της αντίστροφης συνάρτησης .

Θέμα:

Το θέμα του σεναρίου αφορά τη μελέτη της συνάρτησης  $y=ax+\beta$  και τη χρήση της ως εργαλείο για τη διερεύνηση και επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Η διαδικασία που προτείνεται στο συγκεκριμένο σενάριο κατά μια έννοια “αντιστρέφει” την παραδοσιακή διαδικασία που ακολουθείται στην συνήθη διδακτική πρακτική για την μελέτη των συναρτήσεων και τη λύση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν έχουν δεδομένη τη συνάρτηση, ώστε μέσω της μελέτης της να απαντήσουν στα ερωτήματα του προβλήματος. Αντίθετα, μέσω των δραστηριοτήτων του σεναρίου εμπλέκονται σε διαδικασίες προσέγγισης ερευνητικών δεδομένων και μέσω αυτών οδηγούνται στην κατασκευή της συνάρτησης. Αυτή ακριβώς η διαδικασία δεν είναι εύκολα προσεγγίσιμη με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας, ενώ αντίθετα ενθαρρύνεται με τη χρήση του προτεινόμενου λογισμικού.

Τεχνολογικά εργαλεία

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Function Probe.

**Σκεπτικό**

Βασική ιδέα

Η ιδέα του σεναρίου προήλθε από μια εφαρμογή του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου. Το πρόβλημα με την δοσολογία φαρμάκου και τον χρόνο επίδρασης αναισθητικού προσφέρεται για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης. Οι μαθητές καλούνται να διαλέξουν και να ορίσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος - ποσότητα φαρμάκου), να φτιάξουν πίνακα αντίστοιχων τιμών και να δουν τα αντίστοιχα ζευγάρια ως σημεία στο επίπεδο. Ερευνούν, αναζητούν, πειραματίζονται αν υπάρχει ευθεία ή καμπύλη που διέρχεται από αυτά. Η μαθηματικοποίηση του προβλήματος δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και επίλυσης του προβλήματος.

#### Προστιθέμενη αξία

Οι μαθητές γνωρίζουν την ευθεία ως γεωμετρικό σχήμα και ως γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $y=x$ ,  $y=ax$ ,  $y=ax+b$  ανεξάρτητων μεταξύ τους και άσχετα από την καθημερινότητα. Δυσκολεύονται να κατασκευάσουν συναρτήσεις για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Δεν κατανοούν τον συσχετισμό δύο μεταβλητών και τη χρησιμότητα της γνώσης αυτής.

Το σενάριο βάζει τους μαθητές αλλά και τους διδάσκοντες σε διερευνητική διαδικασία που δεν μπορεί να γίνει παραδοσιακά. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν και να μελετήσουν μια συνάρτηση προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα, έχοντας διαθέσιμες πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης όπως του πίνακα τιμών της, του τύπου της και του γραφήματός της.

Πιο συγκεκριμένα: Οι μαθητές επιλέγουν την ανεξάρτητη μεταβλητή και ορίζουν το πεδίο ορισμού. Αναπροσαρμόζουν την κλίμακα ώστε να βλέπουν στο γράφημα τα σημεία μιας περιοχής. Προσεγγίζουν σημεία μέσω μιας ευθείας πειραματιζόμενοι σαν να κρατούν ένα χάρακα στο χέρι και να τον μετακινούν ώστε να περάσει όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτά. Το FP τους παρέχει τη δυνατότητα σε κάθε φάση του πειραματισμού τους να βλέπουν τον τύπο της ευθείας. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα στον διδάσκοντα να αναφερθεί και σε ήδη διδαγμένες έννοιες όπως π.χ. τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

#### Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο μπορεί να εφαρμοστεί με κατάλληλες προσαρμογές στις Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και στην Α΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2-3 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί στο εργαστήριο των Η/Υ. Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων ανά υπολογιστή.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν διδαχθεί τις συναρτήσεις  $y=ax$ ,  $y=ax+b$ ,  $y=a/x$  καθώς και τις γραφικές τους παραστάσεις.

Να γνωρίζουν βασικές λειτουργίες του λογισμικού FP.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Για την διεξαγωγή της δραστηριότητας απαιτούνται φύλλο εργασίας για τους μαθητές και βασικές οδηγίες για την λειτουργία του λογισμικού FP.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης

Οι μαθητές είναι σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων με κοινό φύλλο εργασίας. Συνεργάζονται, συζητούν, πειραματίζονται, ερευνούν και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά και με το λογισμικό. Διατυπώνουν κανόνες. Οι μαθητές ενθαρρύνονται από τον διδάσκοντα όταν κάνουν λάθη να πειραματίζονται και να προσπαθούν μέχρι να ικανοποιηθούν από το αποτέλεσμα. Ο διδάσκων παρακολουθεί, παροτρύνει, και καθοδηγεί τις ομάδες.

Στόχοι

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο οι μαθητές

να αλληλεπιδράσουν με το πρόγραμμα,

να κατανοήσουν τις έννοιες του πεδίου ορισμού και τιμών μιας συνάρτησης και το τι σημαίνουν οι έννοιες αυτές σε ένα πραγματικό πρόβλημα,

να ξεκαθαρίσουν την έννοια των αντιστρόφως ανάλογων ποσών,

να αναγνωρίσουν μια ευθεία του επίπεδου ως μετασχηματισμό της  $y=ax$  και να μπορούν να πραγματοποιούν μετασχηματισμούς της για να κάνουν τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνάρτησης,

να κατανοήσουν την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

### **Ανάλυση του σεναρίου:**

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από τα βήματα του φύλλου εργασίας που δίνεται σε κάθε ομάδα. Σε αυτό έχουν συναφθεί οδηγίες και εικόνες των εργαλείων του λογισμικού για την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές ενημερώνονται για το πρόβλημα συνολικά και κατόπιν απαντούν στα ερωτήματα.

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις φάσεις:

1η Φάση:

Στην 1<sup>η</sup> φάση οι μαθητές ενημερώνονται για το πρόβλημα, ενεργοποιούνται για να καταχωρήσουν τα δεδομένα σε πίνακα του FP και παρατηρούν το είδος της σχέσης τους. Συζητούν και προτείνουν την ανεξάρτητη μεταβλητή της σχέσης αυτής. Στέλνουν τα ζεύγη τιμών που ορίζονται από αυτή τη διαδικασία σαν σημεία στο γράφημα και αλλάζουν την κλίμακα για να τα διακρίνουν.

Πιο συγκεκριμένα, δίνεται στους μαθητές σε φύλλο εργασίας το παρακάτω πρόβλημα:

*Το πρόβλημα: Σώστε τις χελώνες KAPETA - KAPETA!. Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός αναισθητικού σε 10 χελώνες Καρέτα - Καρέτα προκειμένου να το προωθήσει σε χειρουργούς για λεπτές σωτήριες επεμβάσεις σε αυτές. Μελετά τους χρόνους που μεσολάβησαν ώσπου οι χελώνες να χάσουν τις αισθήσεις τους (να λιποθυμήσουν) εμβολιάζοντας τις με διαφορετική δόση κάθε φορά. Παρατηρεί ότι όταν οι δόσεις είναι 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80 mgr οι αντίστοιχοι χρόνοι λιποθυμίας είναι :12.5, 11.5, 11, 8.5, 7, 6, 5, 4, 2.5, 2 sec.*

Ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τις 2 πρώτες στήλες στο παράθυρο Πίνακας του FP γράφοντας στην πρώτη στήλη τις δόσεις φαρμάκου σε mgr και στη δεύτερη τους αντίστοιχους χρόνους λιποθυμίας σε sec των χελωνών ονομάζοντας την πρώτη m και την δεύτερη t .

Πίνακας				
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα	Πίνακας
m	t			
δοση(Mar)	χρονος			
0.3	12.5			
0.35	11.5			
0.4	11			
0.45	8.5			
0.55	7			
0.6	6			
0.65	5			
0.7	4			
0.75	2.5			
0.8	2			

Εικόνα 70

Καλούνται ακολούθως να παρατηρήσουν τα δεδομένα στον πίνακα και να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Αν παρατηρήσουν ότι (ίσως) τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα μπορεί ο διδάσκων να τους παροτρύνει να το ψάξουν με την βοήθεια του FP και σε μια νέα στήλη του πίνακα να ζητήσουν μια σχέση που θα πρέπει να ικανοποιούν αυτά π.χ  $z=m*t$ .

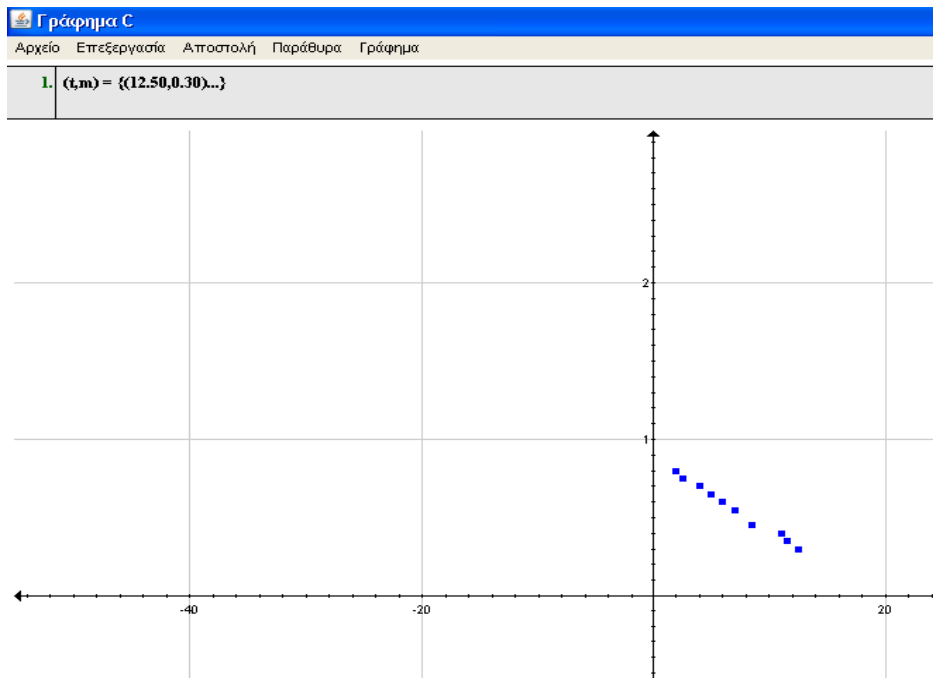
Κατόπιν θα πρέπει να συζητήσουν για το ποιο από τα δύο ποσά εξαρτάται από το άλλο. Αυτό μπορεί να γίνει θέτοντας ο διδάσκων την ερώτηση: Από τι εξαρτάται τι;

Στη συνέχεια καλούνται να βάλουν το  $\otimes$  στη στήλη της ανεξάρτητης μεταβλητής και το  $\odot$  στη στήλη της εξαρτημένης.

Πίνακας				
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα	Πίνακας
$\otimes$	$\odot$			
m	t			
δοση(Mar)	χρονος			
0.3	12.5			
0.35	11.5			
0.4	11			
0.45	8.5			
0.55	7			
0.6	6			
0.65	5			
0.7	4			
0.75	2.5			
0.8	2			

Εικόνα 71

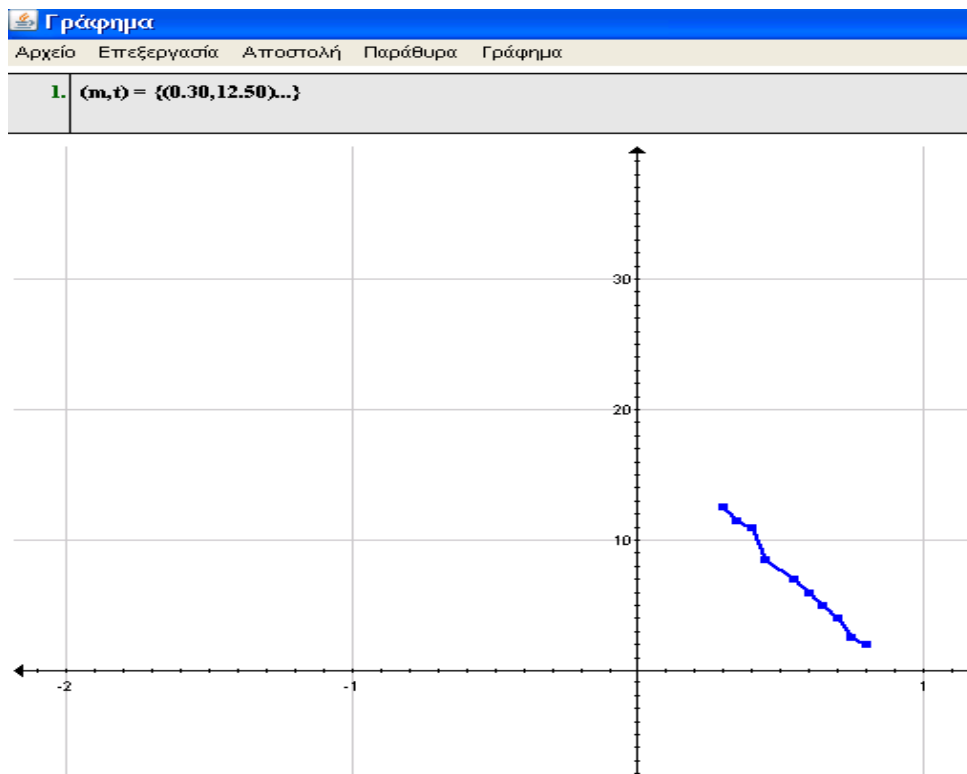
Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να στείλουν τα αντίστοιχα ζευγάρια τιμών ( $x$ ,  $y$ ) στο επίπεδο και να ελέγξουν αν αυτά εμφανίζονται στο παράθυρο Γράφημα. Αν δεν τα διακρίνουν, ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να αναρωτηθούν και να συζητήσουν με την ομάδα τους τη γνώμη τους για το τι συμβαίνει και τι πρέπει να αλλάξει προκειμένου να εμφανιστούν (Αλλαγή κλίμακας).



Εικόνα 72



## 2<sup>η</sup> Φάση

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές καλούνται όταν έχουν στο οπτικό τους πεδίο τα σημεία να ζητήσουν από το γράφημα «σύνδεση σημείων» και να συζητήσουν σχετικά με το είδος της γραμμής που τα ενώνει (π.χ. αν τους θυμίζει περισσότερο ευθεία ή καμπύλη).



Εικόνα 73

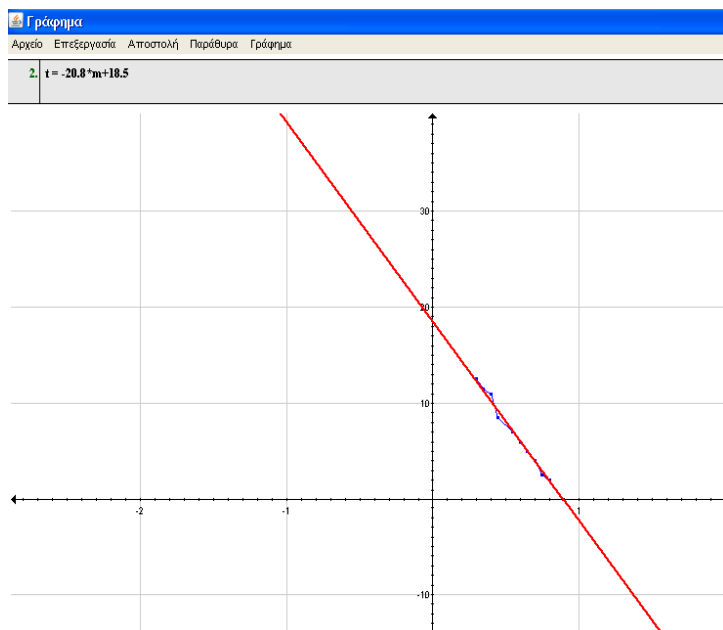
Αν ο μαθητές θεωρήσουν τη γραμμή ως ευθεία καλούνται να πληκτρολογήσουν στο πλαίσιο συναρτήσεων τον πιο απλό τύπο συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μια ευθείας. Οι μαθητές μπορεί να πληκτρολογήσουν την  $t=m$ ,  $t=-m$  ή κάτι άλλο. Καλούνται να ζητήσουν: γράφημα → επιλογές γραφήματος → εμφάνιση μετασχηματισμών. Έχοντας ως αφετηρία την ευθεία που πληκτρολόγησαν να προσεγγίσουν τη γραμμή που συνδέει τα σημεία. Να

χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία μετατόπισης  και αυξομείωσης  του FP σε αυτήν την προσπάθεια.


Καλούνται ακολούθως να σημειώσουν τον τύπο της παραπάνω ευθείας. Μια ενδεικτική απάντηση μπορεί να είναι η παρακάτω:

$$t=-20.8m+18.5$$






Εικόνα 74

Ακολούθως, οι μαθητές καλούνται να πληκτρολογήσουν στο παράθυρο Πίνακας τον τύπο της ευθείας. Βάζοντας το εικονίδιο  στην αντίστοιχη στήλη θα ενημερωθούν αυτόματα από το λογισμικό οι αντίστοιχες τιμές της στήλης για την κάθε τιμή δόσης του φαρμάκου.

Με αυτό τον τρόπο δίνεται η ευκαιρία να συζητήσουν οι μαθητές για το τι αντιπροσωπεύει ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν πώς θα βοηθήσουν τον ερευνητή ώστε, χωρίς να πραγματοποιήσει πείραμα, να μπορεί να ξέρει τι θα αναμένει όσον αφορά το χρόνο αναισθησίας των χελωνών μετά από δόση φαρμάκου 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5, 0.73, 0.9 και 1 mgr. Ο διδάσκων μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν περισσότερους τρόπους για τους υπολογισμούς αυτούς όπως π.χ. το εργαλείο 'Γέμισμα πίνακα' ή την κατασκευή κουμπιού  στην αριθμομηχανή.

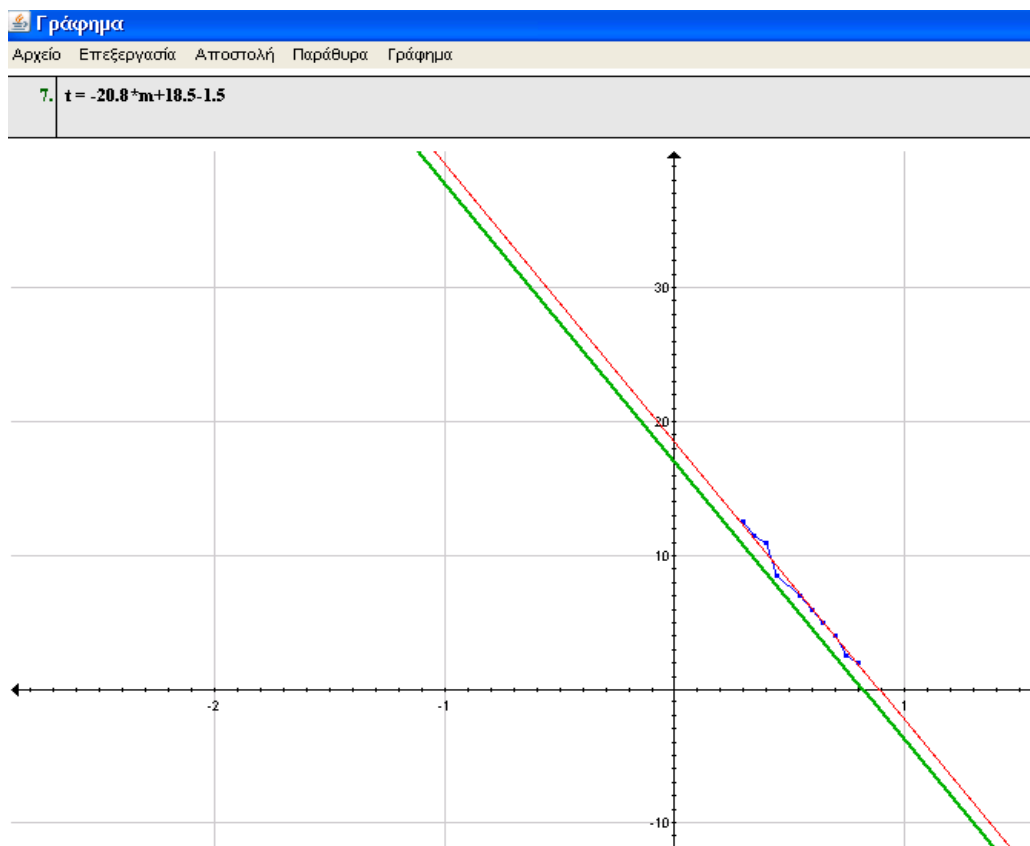
### 3<sup>η</sup> Φάση

Στην 3<sup>η</sup> φάση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο αν η ευθεία τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία, να ερμηνεύσουν τα ευρήματά τους για το πείραμα και να διατυπώσουν εξηγήσεις.

Να γράψουν ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών στην παραπάνω συνάρτηση που κατασκεύασαν στο FP.

Εδώ είναι μια καλή ευκαιρία να γίνει αντικείμενο διαπραγματεύσεων το τι σημαίνει για το πείραμα το σημείο τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα  $χχ'$  και να απαντήσουν στο ερώτημα: Με πόση ποσότητα φαρμάκου πρέπει να εφοδιαστεί ο ερευνητής ώστε να εξασφαλίσει τη δυνατότητα 23 τουλάχιστον πειραματισμών ακόμη και πόσο θα του κοστίσει αν το φάρμακο έχει 120.000 ευρώ το κιλό?

Αν ένα νέο φάρμακο βελτιώνει το χρόνο αναισθησίας κατά 1.5 sec να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης ευθείας και τα χρήματα που θα ωφεληθεί ο ερευνητής για την αγορά του φαρμάκου.



Εικόνα 75

Τέλος, μπορεί να τεθεί από τον διδάσκοντα σε φύλλο εργασίας το εξής ερώτημα:

Ο ερευνητής θέλει να αναισθητοποιήσει μια χελώνα σε χρόνο  $t = 5.3$  sec. Πόση θα είναι η απαιτούμενη ποσότητα φαρμάκου?

Οι μαθητές καλούνται να βοηθήσουν τον ερευνητή να έχει ένα τύπο υπολογισμού της δόσης όταν για την επέμβαση απαιτείται συγκεκριμένος χρόνος αναισθητοποίησης. Αν αυτό είναι μια νέα συνάρτηση να βρουν το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της, να τα συγκρίνουν και

να τα αντιπαραβάλλουν με την αρχική. Τέλος, να κάνουν τις παρατηρήσεις τους και να διατυπώσουν κανόνες.

### **Επέκταση της δραστηριότητας**

Επέκταση στη μελέτη άλλων τύπων συναρτήσεων.

Π.χ. της μορφής  $y=ax^2$ ,  $y=a(x-p)^2$ ,  $y=ax^2+q$ ,  $y=a(x-p)^2+q$ ,  $y=ax^2+bx+c$ ,

Εκθετικές συναρτήσεις,  $y=e^x$ ,  $y=a e^x$ ,  $y=a e^{bx}$ ,  $y=a e^{bx} +c$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις,  $y=p \sin x$ ,  $y=p \sin ax$ ,  $y=p \sin (ax+b)$ ,  $y=p \sin (ax+b) +q$