

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (1⁰ ΓΕΛ ΑΧΑΡΝΩΝ)

1) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\lambda x^2 + 4x + \lambda}$ να είναι όλο το \mathbb{R} .

2. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f(x)+1 = g(x)+e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x-\lambda-1}{x-3\lambda+4}$ και $g(x) = \frac{x^2-5x+\lambda+4}{(x-\lambda^2+\lambda)^2}$. Να βρεθεί

το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $f=g$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : [3,8] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x^2-1)$.

5. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 + \lambda x + 3$ και $g(x) = \sqrt[3]{x-2} \cdot \ln x$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση $g \circ f$ να ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

6. Να βρείτε την συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(f \circ g)(x) = \eta\mu x + x^2$ και $f(x) = x+2$

β) $(f \circ g)(x) = x+1$ και $f(x) = \ln x, g(x) > 0$.

7. Να βρεθεί η συνάρτηση f για να ισχύει:

α) $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x^4 + 2x^2 + 5}$ και $g(x) = x^2$.

β) $(f \circ g)(x) = |\eta\mu x|$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$

8. Αν $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ x+3, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & x < 3 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right), & x \geq 3 \end{cases}$ να βρεθεί η $g \circ f$.

9. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $3f(x)+f(-x)=5\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$

β) $x^2 \cdot f(x) \geq e^x - e^{-x}$ με f περιττή.

10. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση: $f(f(x)) = 4 - e^{2x-1}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln x, x > 0$ και $a \in (0,1)$

α) Ναδειχτεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $a^{x^2+x+4} - a^{x^2+9} < \ln(x^2+x+4) - \ln(x^2+9)$

12. Αν η γραφική παράσταση μιας '1-1' συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περνάει από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,4)$ να λύσετε την εξίσωση: $f(2 + f^{-1}(1-x)) = 4$.

13. Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περνάει από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(4,-1)$ να λύσετε την ανίσωση: $f(f^{-1}(x)-1) < 2$.

14.α) Ναδειχτεί ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$.

15. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = -x^3$. Στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι '1-1' στο \mathbb{R}

β) Να βρεθεί η αντίστροφή της.

17. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθεί η f^{-1} και να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$3f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{9}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναδειχτεί ότι η f δεν αντιστρέφεται.

19. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f=f^{-1}$ και $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι σταθερή και για αυτήν ισχύει η σχέση:

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της C_f .

γ) Να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

