

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 1⁰ ΓΕΛ ΑΧΑΡΝΩΝ

1. Να βρεθούν τα επόμενα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x} - 2 + 2x}{x^4 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu \frac{x-1}{x} \right)$$

2. Αν η συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ επαληθεύει τη σχέση

$$x \cdot \epsilon\phi x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2x^2 + 1}, \text{ να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

3. Αν για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ ισχύει ότι $|x^2 \cdot f(x) - \eta\mu^2 x| \leq 2x^4$ να βρείτε τα

$$\text{όρια: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu 2x}{x + \eta\mu x}$$

4. Έστω η $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3.$

$$\text{Να βρείτε τα όρια: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(2x)}{x^2 + f^2(x)}.$$

5. Έστω η $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 3f(4-x)) = 4.$ Να

$$\text{βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

6. Έστω η $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ η οποία είναι περιττή και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + x - 2) = 3. \text{ Να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

7. Αν $f(x) = \frac{\kappa + \sigma\upsilon\nu 2x + \lambda x \eta\mu x}{x^2}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ και λ .

8. Αν $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 3, & x < 1 \\ \beta x^2 - 3\beta x + 20, & x > 1 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

9. Να βρεθούν τα επόμενα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$$

10. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + \lambda}{|x-2|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-a}{\sqrt{x+1} - \beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$ για τις διάφορες τιμές των α και β .

12. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές του λ .

13. Αν $f(x) = \frac{x^3 + 3\alpha x + \beta - 6}{x-2}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$, να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

14. Έστω η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha \neq 2$ για να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(\alpha-2)\eta\mu 5x}{\sqrt{x+9} - 3} = -\infty$.

15. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-5| - \alpha|x-2| + \beta}{x^2 - 4} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$.

17. α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

β) Έστω η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:
 $2f(x) + \eta \mu^2 x \leq f^2(x) + 1 \leq 2f(x) + x^2, \forall x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1)^2 = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 1| = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

18. Έστω η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2, \forall x \geq 0$.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{x + 2} - 2}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 16}{x - 2}$

v) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - \sqrt{5}}{x - 2}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 1| - 3}{x^2 - 4}$

19. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - x}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

20. Ο αριθμός των μκητών που ευδοκιμούν σε δυο ζυμώσεις δίνονται από τις συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ αντίστοιχα. Η μελέτη του φαινομένου έδειξε ότι

$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)}{t - 2} = 1$ και $\lim_{t \rightarrow 2} (g(t)(t^2 - t - 2)) = 9$ όπου t ο χρόνος σε ώρες ενώ τα όρια

εκφράζουν αριθμούς σε μύκητες / ώρες.

A) Δείξτε ότι στην πρώτη ζύμωση δεν θα υπάρχουν σχεδόν καθόλου μύκητες μετά από δυο ώρες.

B) Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow 2} (f(t) \cdot g(t))$.

21. Αν $f(x) = \frac{3\alpha^{x+1} - 2\beta^{x-1}}{\alpha^x + 5\beta^{x+1}}$ με $\alpha, \beta > 0$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

22. Να βρεθούν τα επόμενα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\ln(6x) - \ln(x^2+1)]$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\sqrt{x^2+1} - x)]$$

23. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + \sqrt{x^2+x+2} - x + 1] = 4$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

24. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση $|e^x f(x) - 2e^x| \leq \eta\mu e^x$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

25. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{x^4+1} + 3x^2}{2x}, x \in (-\infty, 0). \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

26. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f^2(x) - 2}{f^2(x) + 3f(x) + 1}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^3(x) - f(x) - 2| + 3}{f^2(x) + |f(x) + 5|}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f^2(x) + f(x) + 2} - f(x))$$

27. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα επόμενα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)x^2 - x + 1}{\lambda x + 5}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} - \lambda x).$$

28. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για να έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 5} + ax - \beta) = 4$.

29. Έστω f μια πολωνυμική συνάρτηση για την οποία ξέρουμε ότι $f(0) = -3$, $f(2) = 5$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + \alpha} = 1, \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + \alpha} = \beta \in \mathbb{R}^*. \text{ Να βρείτε την } f \text{ και τα } \alpha \text{ και } \beta.$$