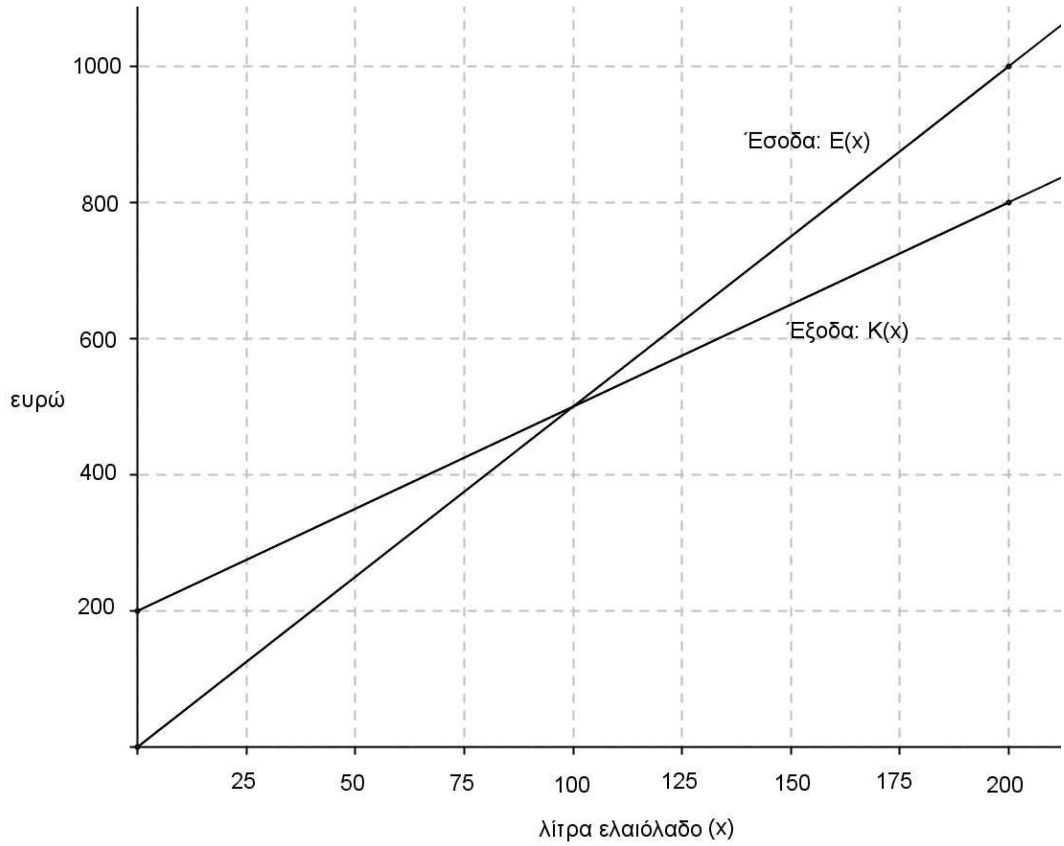
ΘΕΜΑ 4



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα *K(x)* και τα έσοδα *E(x)* από την πώληση *x* λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

α) Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών είναι κατ' εκτίμηση το Α(100, 500).
Η ερμηνεία του είναι η εξής:
Αν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα λάδι τα έσοδα και τα έξοδά της είναι 500 ευρώ, δηλαδή δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β) Τα πάγια έξοδα της εταιρείας είναι 200 ευρώ, διότι Κ(0) = 200. Δηλαδή ακόμα κι αν δεν παραχθεί λάδι (x = 0), υπάρχουν έξοδα.

γ) Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα ή μεγαλύτερα από αυτά. Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει για παραγωγή $x \geq 100$ λίτρων λαδιού.

δ) Έστω $y = \alpha x$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε) που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων Ε(x). Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο Α(200, 1000), οπότε:

$$1000 = 200\alpha \Leftrightarrow \alpha = 5$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$y = 5x$$

και η συνάρτηση των εσόδων είναι η $E(x) = 5x,\ x \geq 0$

Έστω $y = \alpha_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε_1) που περιγράφει τη συνάρτηση εξόδων Κ(x). Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από τα σημεία Β(0, 200) και Γ(200, 800) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\alpha_1 = \frac{800-200}{200-0} = \frac{600}{200} = 3$$

Τότε η ευθεία (ε_1) γράφεται:

$$y = 3x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το Β (0, 200) οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, οπότε:

$$200 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 200$$

Τελικά η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση:

$$y = 3x + 200$$

και η συνάρτηση των εξόδων είναι η $K(x) = 3x + 200,\ x \geq 0$

Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει:

$$E(x) \geq K(x) \Leftrightarrow$$

$$5x \geq 3x + 200 \Leftrightarrow$$

$$2x \geq 200 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 100$$

Επομένως, η εκτίμηση που κάναμε στο σκέλος (γ) ήταν σωστή.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων *ω*, οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(α_ν)$, με $α_1 = 16$ και διαφορά *ω*.

Είναι:

$$α_7 = 28 \Leftrightarrow$$

$$α_1 + (7 - 1)ω = 28 \Leftrightarrow$$

$$16 + 6ω = 28 \Leftrightarrow$$

$$6ω = 12 \Leftrightarrow$$

$$ω = 2$$

Άρα $α_1 = 16$ και $ω = 2$.

β) Έχουμε:

$$α_ν = α_1 + (ν - 1)ω \Leftrightarrow$$

$$α_ν = 16 + (ν - 1)2 \Leftrightarrow$$

$$α_ν = 16 + 2ν - 2 \Leftrightarrow$$

$$α_ν = 14 + 2ν, \quad \text{με } 1 \leq ν \leq 20$$

γ) Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2α_1 + (20 - 1)ω] \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(2 \cdot 16 + 19 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(32 + 38) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10 \cdot 70 \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 700$$

δ) Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος $(β_ν)$ με $β_1 = 6$ και $ω' = 3$. Ο ν – οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$β_ν = β_1 + (ν - 1)ω' \Leftrightarrow$$

$$β_ν = 6 + (ν - 1)3 \Leftrightarrow$$

$$β_ν = 6 + 3ν - 3 \Leftrightarrow$$

$β_ν = 3 + 3ν$, με $1 \leq ν \leq 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δεν μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς. Δηλαδή πρέπει $β_ν \leq α_ν \Leftrightarrow ν \leq 11$)

i) Όλα τα καθίσματα της ν-οστής σειράς θα είναι κενά, όταν:

$$β_ν = α_ν \Leftrightarrow$$

$$3 + 3ν = 14 + 2ν \Leftrightarrow$$

$$ν = 11$$

Άρα από την $11^η$ σειρά μέχρι και την $20^η$ όλα τα καθίσματα του θεάτρου είναι κενά.

ii) Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}[2\beta_1 + (10 - 1)\omega'] \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(2 \cdot 6 + 9 \cdot 3) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(12 + 27) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5 \cdot 39 \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10 - 1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(2 \cdot 16 + 9 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(32 + 18) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός των θεατών αφού από την 11^{η} σειρά και μετά τα καθίσματα είναι κενά.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(8\text{-}\lambda)x^2 -2(\lambda\text{-}2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-\lambda)x^2 -2(\lambda-2)x+1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

α) Η εξίσωση είναι $1^{ου}$ βαθμού όταν

$$8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού για $\lambda \neq 8$. Για να έχει η εξίσωση αυτή μια διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$[-2(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot (8 - \lambda) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda - 2)^2 - 4(8 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 25$ και ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-6}{2 \cdot 9} = -\frac{1}{3}$

γ) Για $\lambda = 4$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0,$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για $\lambda = -1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \geq 0$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$- {-2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των *κ* και *λ*. (Μονάδες 9)

β) Για *κ* = 1 και *λ* = -2,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της *g*. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + κ + λ = 0 \ (1) \quad \text{και} \quad 4 - 2κ + λ = 0 \ (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3κ = 0 \Leftrightarrow 3κ = 3 \Leftrightarrow κ = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $κ = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + λ = 0 \Leftrightarrow λ = -2$$

β) i) Για $κ = 1$ και $λ = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $Δ = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.

Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς, όταν $α \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, **$g(α) < 0$**. Επίσης όταν $α \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, το $(α + 3) \in (2, 4) \cup (4, 5)$, οπότε **$g(α + 3) > 0$.**

Άρα $g(α + 3) > g(α)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $g(x)= \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$- {-2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των *κ* και *λ*. (Μονάδες 9)

β) Για *κ* = 1 και *λ* = -2:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της *g*. (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι *g(α)·g(β)>0*, όταν *α, β* $\in$ (*-1,1*)$\cup$(*1,2*) (Μονάδες 7)

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \ (1) \quad \text{και} \quad 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \ (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x + 1)(x - 2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Επειδή $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, προκύπτει ότι $g(\alpha) < 0$ και $g(\beta) < 0$.

Τελικά $g(\alpha)g(\beta) > 0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

γ) Είναι $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$(\lambda < 0 \text{ και } \Delta \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } \lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\lambda < 0 \text{ και } (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1)]$$

Άρα $\lambda = -1$.

ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (*τ.μ*), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 *τ.μ*, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 *τ.μ.* και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768*τ.μ.*;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 *τ.μ.* και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 *τ.μ.* την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 *τ.μ.* (Μονάδες 9)

Η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι γεωμετρικής προόδου με $α_1 = 3$ και $λ = 2$. Στο τέλος της ν-οστής ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $α_ν = 3{\cdot}2^{ν-1}$ τετραγωνικά μίλια (τ.μ.).

α) Στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια: $α_5 = 3{\cdot}2^{5-1} = 3{\cdot}2^4 = 3{\cdot}16 = 48$ τ.μ.

β) Δεδομένο είναι ότι $α_ν = 768$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$α_ν = 768$$

$$3{\cdot}2^{ν-1} = 768$$

$$2^{ν-1} = 256$$

$$ν - 1 = 8 \qquad (2^8 = 256)$$

$$ν = 9$$

Οπότε στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας θα έχει καλυφθεί από πετρέλαιο θαλάσσια επιφάνεια 768 τ.μ.

γ) Στο τέλος της $10^{ης}$ ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που έχει καλυφθεί από πετρέλαιο είναι 768 - 6 = 762 τ.μ. και κάθε επόμενη ημέρα θα μειώνεται κατά 6 τ.μ. Άρα η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που θα καλύπτει εφεξής το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι αριθμητικής προόδου με $β_1 = 762$ και $ω =- 6$.

Δεδομένο είναι ότι $β_ν = 12$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$β_ν = 12$$

$$762 + (ν - 1){\cdot}(-6) = 12$$

$$6ν = 756$$

$$ν = 126$$

Συνεπώς στο τέλος της $126^{ης}$ ημέρας μετά την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της $9 + 126 = 135^{ης}$ ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $\mathrm{g(x) = x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g αποτελούν λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x). Τότε:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

Άρα οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το Α(– 1, g(– 1)) δηλαδή το Α(– 1, 0) (η ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_h είναι λύσεις της εξίσωσης f(x) = h(x). Δηλαδή:

$$f(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + (2 - \alpha) = 0 \text{ , } \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \alpha) = 4 - 8 + 4\alpha = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$$

i) Αν $\alpha > 1$, τότε $\Delta > 0$ και η η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha < 1$, τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

Τα βακτήρια (το πλήθος τους) στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ με πρώτο όρο $α_1 = 102400$ και λόγο $λ = \frac{1}{2}$.

α) Ο ν – στός όρος της προόδου είναι:

$$α_ν = α_1 \cdot λ^{ν-1} \Leftrightarrow$$

$$α_ν = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{ν-1}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$α_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

β)

i) Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία $(β_ν)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $λ = 3$ και πρώτο όρο $β_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$

ii) Είναι

$$β_ν = β_1 \cdot λ^{ν-1} \Leftrightarrow$$

$$β_ν = 9600 \cdot 3^{ν-1},\ ν \leq 5$$

iii) Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$β_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400$$

ΘΕΜΑ 4

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο *30* μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει *51* θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει *3€* και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει *0,5€* περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο *ν-οστός* επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3 + 0,5 = 3,5€, ο τρίτος θα πληρώσει 3,5 + 0,5 =4€ και ο τέταρτος θα πληρώσει 4 + 0,5 = 4,5€.

β) Δεδομένου ότι ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο, οι αριθμοί $α_1$, $α_2$, …, $α_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $α_1 = 3$ και $ω = 0,5$.

γ) Ο 51^{ος} επιβάτης θα πληρώσει: $α_{51} = 3 + (51 – 1)\cdot 0,5 = 28$€

δ) Ζητάμε την μικότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_ν > 30\cdot 21$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$S_ν > 30\cdot 21$$

$$\frac{ν}{2}\left[2\cdot 3+\left(ν-1\right)\cdot 0,5\right]>630$$

$$\frac{ν}{2}\left[6+\frac{\left(ν-1\right)}{2}\right]>630$$

$$\frac{ν}{2}\left[\frac{12+ν-1}{2}\right]>630$$

$$\frac{ν(11+ν)}{4}>630$$

$$ν^2+11ν-2520>0 \qquad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $Δ = 11^2 – 4(-2520) = 10201$ και ρίζες $ν = 45$, $ν = -56$ (απορρίπτεται). Η (1) αληθεύει για φυσικούς αριθμούς $ν > 45$. Συνεπώς πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)

α) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 25 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

β) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1$$

Συνεπώς και για $\lambda = -1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

γ) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 5$$

δ) Αν

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \qquad \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\},$$

τότε $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0$, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$ είναι αρνητική, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)= \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda \neq 1$ και $x_1, x_2,$ με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

(Μονάδες 6)

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$

Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$ και $\gamma = \lambda$. Οπότε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2+1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$, άρα οι ρίζες του είναι ομόσημες. Αν επιπλέον $\lambda > 0$, τότε και $S > 0$. Οπότε οι ρίζες θα είναι θετικές (δυο ομόσημοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι θετικό, είναι θετικοί).

δ) Για $\boldsymbol{\lambda > 0}$ και $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ το τριώνυμο f(x) έχει δυο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2 που λόγω του γ) ερωτήματος είναι θετικές. Επίσης είναι δεδομένο ότι κ και μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, που έχει

$$\alpha = \lambda > 0$$

x	$-\infty$	0	x_1	κ	x_2	μ	$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου προκύπτει λοιπόν ότι:

f(0) > 0

f(κ) < 0

f(μ) > 0

Άρα: $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu) < 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση *h* της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της *g* σε σημείο του ημιάξονα Οx. (Μονάδες 7)

α) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x τις βρίσκουμε λύνοντας την εξίσωση g(x) = 0. Τότε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα Α(– 3, 0) και Β(3, 0).

β) Είναι:

$f(3) = 4 \cdot 3 + 2 = 14 \neq 0$ και

$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 2 = -10 \neq 0$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (– 3, 0).

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο $(x_0, 0)$ του άξονα x΄x στο οποίο τέμνονται οι C_f, C_g. Τότε ισχύει:

$$(f(x_0) = 0 \text{ και } g(x_0) = 0) \Leftrightarrow$$

$$(4x_0 + 2 = 0 \text{ και } x_0^2 - 9 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0 = -\frac{1}{2} \text{ και } x_0 = \pm 3\right)$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x.

Έστω οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y΄y. Τότε πρέπει:

$$f(0) = g(0) \Leftrightarrow 2 = -9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y΄y.

δ) Επειδή η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, η εξίσωση της θα έχει τη μορφή

$$h(x) = \alpha x + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο Α(0, 3) ισχύει ότι:

$$h(0) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 3$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$$h(x) = \alpha x + 3, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Επίσης η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox οπότε ισχύει:

$$h(3) = g(3) \Leftrightarrow 3\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3\alpha = -3 \ \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση έχει τύπο $h(x) = -x + 3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \qquad \alpha_3 = x^2 - 2, \qquad \text{όπου } x \in \mathbb{Z},$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

α) Ισχύει ότι: $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow$

$$(2x^2 - 3x - 4) - x = (x^2 - 2) - (2x^2 - 3x - 4) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -\frac{2}{3} \text{ (απορρίπτεται γιατί δεν είναι ακέραιος)}$$

Άρα x = 3 και οι τρεις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ και $\alpha_3 = 7$

β) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά ω = 2. Άρα ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\cdot 2 = 2\nu + 1$

Αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014 θα πρέπει η εξίσωση $\alpha_\nu = 2014$ να έχει λύση φυσικό αριθμό.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow$

$$2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow$$

$$\nu = \frac{2013}{2} = 1006,5 \text{ που δεν είναι φυσικός αριθμός}$$

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 3$ και ω' = 4. Πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Έχουμε $\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$. Οπότε το πλήθος των όρων είναι 8.

Οπότε $S = S_8 = \frac{8}{2}\left[2\cdot 3 + (8-1)\cdot 4\right] = 136$

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου.

Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12{,}5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15{,}5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

α) Εάν η εταιρεία δεν κατασκευάζει μπλουζάκια, θέτουμε $x = 0$ στη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και βρίσκουμε $K(0) = 120$ €.

Επομένως η εταιρεία χωρίς να κατασκευάζει μπλουζάκια έχει (πάγια) έξοδα 120 €.

β) Η μοναδιαία μεταβολή στο x, δηλαδή αν τα μπλουζάκια που κατασκευάζονται αυξηθούν κατά 1 (από *x* γίνουν $x + 1$), θα προκαλέσει σταθερή μεταβολή 12,5 ευρώ στο κόστος κατασκευής και σταθερή μεταβολή στα έσοδα 15,5 ευρώ. Δηλαδή $K(x + 1) – K(x) = 12,5$ και $E(x+1) – E(x) = 15,5$.

γ) Τα μπλουζάκια που πρέπει να πωληθούν ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα είναι η λύση της εξίσωσης:

$$E(x) = K(x) \Leftrightarrow$$

$$15,5x = 12,5x + 120 \Leftrightarrow$$

$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Άρα πρέπει να παραχθούν 40 μπλουζάκια ώστε η επιχείρηση να «μην μπαίνει μέσα».

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, τα έσοδα θα είναι:

$$E(60) = 15,5 \cdot 60 = 930 \text{ €}$$

και τα έξοδα:

$$K(60) = 12,5 \cdot 60 + 120 = 870 \text{ €}$$

Άρα το κέρδος τους θα είναι 930 – 870 = 60 €

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2-12\lambda-16.$$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}\ .$$

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2(λ-1)x + (λ+5)$ έχει $α = 1$, $β = -2(λ-1)$, $γ = λ + 5$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = [-2(λ-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (λ+5) = 4(λ^2 - 2λ + 1) - 4λ - 20 = 4λ^2 - 12λ - 16$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow$$

$$4λ^2 - 12λ - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$λ^2 - 3λ - 4 > 0 \qquad (2)$$

Το τριώνυμο $λ^2 - 3λ - 4$ έχει διακρίνουσα: $Δ_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις:

$$λ_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$λ$	$-\infty$ $\quad -1 \qquad 4 \quad$ $+\infty$
$λ^2 - 3λ - 4$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$λ < -1 \text{ ή } λ > 4$$

γ) Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{-2(λ-1)}{1} = 2(λ-1) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{λ+5}{1} = λ + 5$$

Τότε, για $λ \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$[2(λ-1)]^2 - 4(λ+5) = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$4(λ^2 - 2λ + 1) - 4λ - 20 - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4λ^2 - 12λ - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$λ^2 - 3λ - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$λ = 5 \text{ ή } λ = -2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν *Α* και *Β* είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες *x΄x* και *y΄y* αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα *Α* και *Β*. (Μονάδες 8)

α) Πρέπει:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Άρα A_f = (-3, 3)

β) Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με τεταγμένη y = 0, δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(– 2, 0).

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω (ε): y = αx + β η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β είναι:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{2}{3} - 0}{0-(-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας γράφεται:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \beta$$

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(-2, 0), οι συντεταγμένες του σημείου την επαληθεύουν. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$0 = \frac{1}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow$$

$$0 = -\frac{2}{3} + \beta \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{2}{3}$$

Τελικά η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2 +(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \qquad (1), \quad \text{με παράμετρο } \lambda \neq -2.$$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=12\lambda+25$$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1+x_2-1)^2+(x_1 \cdot x_2+3)^2=0$$ (Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $(λ + 2)x^2 + (2λ + 3)x + λ – 2$ έχει

$$α = λ + 2,\ β = 2λ + 3,\ γ = λ – 2$$

και διακρίνουσα:

$Δ = β^2 – 4αγ = (2λ + 3)^2 – 4 \cdot (λ + 2) \cdot (λ – 2) = 4λ^2 + 12λ + 9 – 4(λ^2 – 2^2) = 4λ^2 + 12λ + 9 – 4λ^2 + 16 = 12λ + 25$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow$$

$$12λ + 25 > 0 \Leftrightarrow$$

$$12λ > – 25 \Leftrightarrow$$

$$λ > -\frac{25}{12}$$

Επειδή επιπλέον πρέπει $λ \neq – 2$, τελικά βρίσκουμε:

$$λ \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (– 2, +\infty)$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{2λ+3}{λ+2} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{λ-2}{λ+2}$$

δ) Για $λ \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (– 2, +\infty)$, είναι:

$$(x_1 + x_2 – 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(S – 1)^2 + (P + 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S – 1 = 0 \text{ και } P + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S = 1 \text{ και } P = -3) \quad \overset{(γ)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(-\frac{2λ+3}{λ+2} = 1 \text{ και } \frac{λ-2}{λ+2} = -3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– (2λ + 3) = λ + 2 \text{ και } λ – 2 = -3(λ + 2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– 2λ – 3 = λ + 2 \text{ και } λ – 2 = -3λ - 6) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– 3λ = 5 \text{ και } 4λ = -4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(λ = -\frac{5}{3} \text{ και } λ = -1\right)$$

Επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ που να ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha+1)x + 4+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - (α + 1)x + 4 + α$ έχει διακρίνουσα:

$Δ = [-(α + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 + α) = (α + 1)^2 - 4(4 + α) = α^2 + 2α + 1 - 16 - 4α = (α^2 - 2α + 1) - 16 =$

$=(α - 1)^2 - 16$

β) Το τριώνυμο $x^2 - (α + 1)x + 4 + α$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow$$

$$(α - 1)^2 - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(α - 1)^2 > 16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(α-1)^2} > \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$|α - 1| > 4 \Leftrightarrow$$

$$(α - 1 < -4 \text{ ή } α - 1 > 4) \Leftrightarrow$$

$$α < -3 \text{ ή } α > 5$$

γ) i) Είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(α+1)}{1} = α + 1 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+α}{1} = 4 + α$$

ii) Ισχύει ότι:

$d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1| = |(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)| = |x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |P - S + 1| =$

$=|4 + α - α - 1 + 1| = 4$

ΘΕΜΑ 4

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

α) i) Ισχύει ότι:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή } t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A = t_B, \text{ απορρίπτεται ή } t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta) \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A + t_B = 2t_\Delta) \quad \Leftrightarrow$$

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Είναι:

$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0.$ Άρα $t_\Gamma < t_B$ (1)

Ισχύει ότι:

$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0.$ Άρα $t_\Delta < t_\Gamma$ (2)

Έχουμε:

$t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0.$ Άρα $t_A < t_\Delta$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$$

Επομένως, $1^{ος}$ τερμάτισε ο Αργύρης, $2^{ος}$ ο Δημήτρης, $3^{ος}$ ο Γιώργος και $4^{ος}$ ο Βασίλης.

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $t^2 - 6t + 8 = 0$

ii) Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει ρίζες $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως:

$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ λεπτά και

$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ λεπτά

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$. (Μονάδες 9)

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \lambda x + (\lambda - 1) = 0 \qquad (1)$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές, οπότε οι C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Η (1) έχει μια ρίζα διπλή, δηλαδή οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

Τότε, για $\lambda \neq 2$ έχουμε:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε $|\lambda| = \alpha > 0$ και η εξίσωση (2) γράφεται: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ με ρίζες $\alpha = 2$, $\alpha = -1$ (απορρίπτεται). Άρα:

$$|\lambda| = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε $\lambda = -2$.

ΘΕΜΑ 4

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος *y (*σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος y = 175 m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)

α) Όταν η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$$y = 0 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5t(12 - t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 12$$

Για t = 0sec η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησης οπότε απορρίπτεται. Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από t = 12sec.

β) Ισχύει ότι:

$$y = 175 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 60t + 175 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 5 \text{ ή } t = 7$$

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175m τις χρονικές στιγμές 5 sec και 7 sec.

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν:

$$y > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$-5t^2 + 60t - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 20 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$	2		10		$+\infty$
$t^2 - 12t + 20$	+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 12t + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 10$$

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 sec και 10 sec.

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

α) Ο αθλητής, όταν κολυμπάει ύπτιο, καίει 9 θερμίδες το λεπτό. Άρα σε 32 λεπτά θα έχει κάψει $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.

Ο αθλητής, όταν κολυμπάει πεταλούδα, καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Αν υποθέσουμε ότι κολυμπάει με αυτό το στυλ x λεπτά, τότε θα κάψει $12 \cdot x$ θερμίδες. Επειδή ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες, ισχύει ότι:

$$288 + 12x = 360 \Leftrightarrow$$

$$12x = 72 \Leftrightarrow$$

$$x = 6 \text{ λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα.}$$

β) i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Τότε, για να κάψει 360 θερμίδες κολυμπώντας και με τα δύο στυλ, πρέπει να ισχύει:

$$9x + 12y = 360 \quad \Leftrightarrow$$

$$12y = 360 - 9x \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{360}{12} - \frac{9x}{12} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = 30 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{Άρα: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

ii) Επειδή τα x, f(x) είναι μεταβλητές χρόνου, πρέπει **$x \geq 0$** και $f(x) \geq 0$.

Τότε:

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}x \leq 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x \leq 120 \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x \leq 40}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A_f = [0, 40]$

γ) Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο της με τεταγμένη y = 0,δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(40, 0).

Επίσης έχουμε: $f(0) = 30 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 30$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0, 30).

Η γραφική παράσταση της f είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (τμήμα της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β). Επομένως είναι:

Το σημείο Α δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει πεταλούδα χρειάζεται 40 λεπτά ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες ενώ το σημείο Β δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

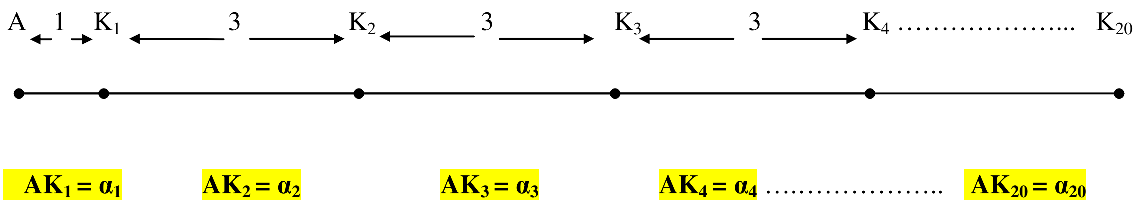
α) Οι αποστάσεις (α_i), $i = 1, 2, \ldots, 20$ των κυψελών $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots, K_{20}$ από την αποθήκη Α διαφέρουν πάντα κατά τον σταθερό αριθμό 3. Αποτελούν επομένως διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ (η απόσταση της κυψέλης K_1 από την αποθληκη Α) και διαφορά $\omega = 3$.

Ο $\nu^{ος}$ όρος της προόδου είναι :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 3$$

$$\alpha_\nu = 3\nu - 2$$



β) Αναζητούμε τον όρο α_{20}.

$$\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58$$

Επομένως η 20η κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α απόσταση 58 m.

γ) i) Η διαδρομές που θα κάνει ο μελισσοκόμος είναι:

$$A \to K_1 \to A, \quad A \to K_2 \to A, \ \ A \to K_3 \to A$$

Άρα θα διανύσει:

$$(1 + 1) + (4 + 4) + (7 + 7) = 24 \text{ μέτρα}$$

ii) Η συνολική απόσταση μέχρι να πάει την 20η κυψέλη είναι S_{20}. Επομένως για να γυρίσει πρέπει να διανύσει πάλι απόσταση S_{20}. Τελικά η ζητούμενη συνολική απόσταση είναι:

$$2S_{20} = 2 \cdot \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 20(1 + 58) = 20 \cdot 59 = 1.180 \text{ μέτρα}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right).x+\lambda-1=0$,   (1)   με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda \neq 0 \ \text{και} \ \lambda \neq 1}$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1] = 0 \overset{\lambda \neq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ -{0, 1} το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0$,

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\lambda+1)) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2 \cdot \lambda} = \frac{\lambda+1 \pm (\lambda-1)}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda} = 1 \\ \frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

(Μονάδες 10)

α) Για λ = 0 η εξίσωση (1) γράφεται:

$$0 \cdot x^2 + 2(0 - 1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

β) i) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4$

Επειδή είναι Δ > 0, για κάθε λ ≠ 0 η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot \lambda} = \frac{(-2\lambda+2) \pm 2}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{-2\lambda+2+2}{2\lambda} = \frac{-\lambda+2}{\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda+2-2}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|-1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|-1 + 1 - \frac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$$

Τελικά $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^{η}$ μέχρι και την $14^{η}$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων ακολουθεί τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

α) Η μεσαία σειρά έχει:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + (13 - 1)\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 12 + 24 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + (25 - 1)\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 12 + 48 = 60 \text{ καθίσματα}$$

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$S = S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}[2\alpha_1 + (14 - 1)\omega] - \frac{6}{2}[2\alpha_1 + (6 - 1)\omega] =$$

$$= 7 \cdot (2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) =$$

$$= 7 \cdot (24 + 26) - 3 \cdot (24 + 10) =$$

$$= 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248$$

ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

α) Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2$ cm^2.

Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d+1)^2$ cm^2.

β) i) Αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι Ε, τότε ισχύει:

$$E = 200d^2 \;\text{ και }\; E = 128(d+1)^2$$

Πρέπει επομένως:

$$200d^2 = 128(d+1)^2 \overset{:8}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$$

Το τριώνυμο $9d^2 - 32d - 16$ έχει $\alpha = 9$, $\beta = -32$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600$$

και ρίζες τις:

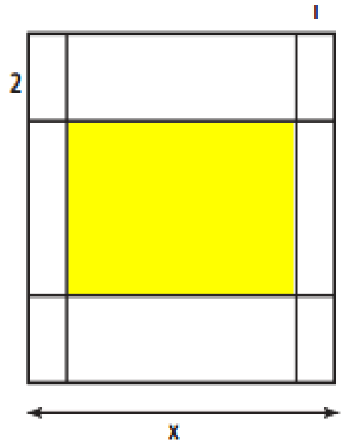
$$d_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-32) \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 9} = \frac{32 \pm 40}{18} = \begin{cases} \frac{32+40}{18} = 4 \\ \frac{32-40}{18} = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Η λύση $d = -\frac{4}{9}$ απορρίπτεται διότι δεν μπορεί το μήκος να είναι αρνητικό. Άρα $d = 4$ cm.

ii) $E = 200d^2 = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 = 3.200$ cm^2.

ΘΕΜΑ 4

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς *x cm* $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *E* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4)$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον *24* cm^2.

(Μονάδες 10)

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x - 1 - 1 = x - 2 \quad \text{και} \quad x - 2 - 2 = x - 4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4), \;\; 5 \le x \le 10$$

β) Είναι:

$$E(x) = 35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5 \le x \le 10$, δεχόμαστε την τιμή x = 9 cm.

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \ge 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \ge 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \ge 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 16$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$		+	0	−	0	+	

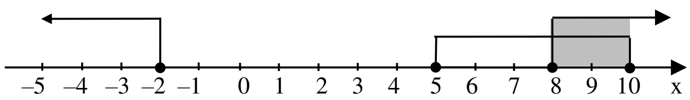
Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 16 \ge 0 \Leftrightarrow (x \le -2 \;\; \text{ή} \;\; x \ge 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty) \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \le x \le 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:

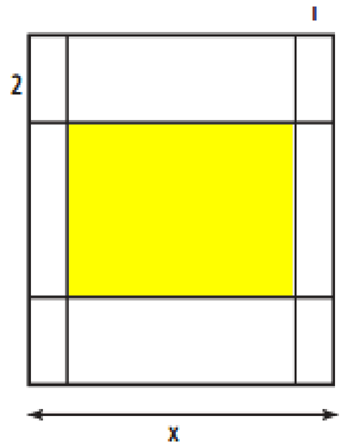


οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$8 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow x \in [8, 10]$$

ΘΕΜΑ 4

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς *x cm* *(5≤x≤10)*, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *E* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=x^2-6x+8$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\ cm^2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\ cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x - 1 - 1 = x - 2 \text{ και } x - 2 - 2 = x - 4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8, \ 5 \leq x \leq 10$$

β) Είναι:

$$E(x) = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5 \leq x \leq 10$, δεχόμαστε την τιμή $x = 8$ cm.

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -27$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

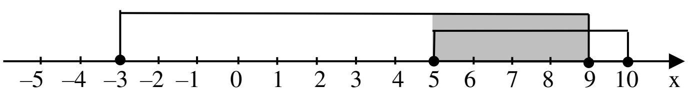
x	$-\infty$	-3		9	$+\infty$
$x^2 - 6x - 27$	$+$	0	$-$	0	$+$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 27 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow x \in [-3, 9] \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \leq x \leq 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$5 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow x \in [5, 9]$$

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.*

Π2: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.*

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^0K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278\ ^0K$ μέχρι $283\ ^0K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^0F.

(Μονάδες 10)

α) Η πρόταση Π1 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$F = 1{,}8C + 32 \quad (1)$$

Η πρόταση Π2 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$K = C + 273 \quad (2)$$

β) Η ισότητα (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1{,}8C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1{,}8} \quad (3)$$

Τότε η ισότητα (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$K = C + 273 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \quad (4)$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$278 \le K \le 283 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 278 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \le 283 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 278 - 273 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 - 273 \le 283 - 273 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \le \frac{F-32}{1{,}8} \le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 1{,}8 \le \frac{F-32}{1{,}8} \cdot 1{,}8 \le 10 \cdot 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \le F - 32 \le 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 32 \le F - 32 + 32 \le 18 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 \le F \le 50$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$, $\gamma = \lambda^2 - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{2\lambda+2}{2} = \lambda + 1 \\ \frac{2\lambda-2}{2} = \lambda - 1 \end{cases}$$

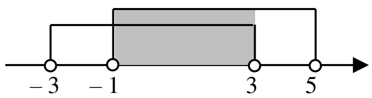
γ) Είναι:

$$(-2 < \lambda + 1 < 4 \text{ και } -2 < \lambda - 1 < 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 - 1 < \lambda + 1 - 1 < 4 - 1 \text{ και } -2 + 1 < \lambda - 1 + 1 < 4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 < \lambda < 3 \text{ και } -1 < \lambda < 5)$$

Συναληθεύουμε τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:



$$-1 < \lambda < 3 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 3)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8 \leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για x $\in$ (-1, 4]. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

α) Είναι:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

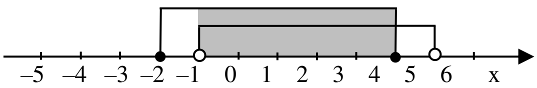
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 2x - 8 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-1 < x \le 4 \Leftrightarrow x \in (-1, 4]$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 4]$ ισχύει ότι:

$$-1 < \rho_1 \le 4 \ (1) \quad \text{και} \quad -1 < \rho_2 \le 4 \ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-1 - 1 < \rho_1 + \rho_2 \le 4 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 + \rho_2 \le 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2} < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le 4$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in (-1, 4]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

α) • Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (2 \le |x| \ \ (1) \ \ \text{και} \ \ |x| \le 3 \ \ (2))$$

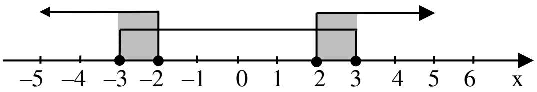
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$|x| \ge 2 \Leftrightarrow (x \le -2 \ \ \text{ή} \ \ x \ge 2) \ \ (3)$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \ \ (4)$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x \le -2 \ \ \text{ή} \ \ 2 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \ \ (5)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \ \ \text{ή} \ \ x = 4)$$

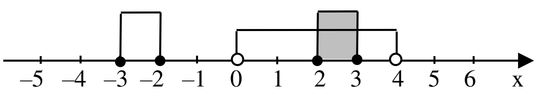
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+		−		+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4) \ \ (6)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$2 \le x \le 3 \ \ \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ ισχύει ότι:

$$2 \le \rho_1 \le 3 \ \ (7) \ \ \ \text{και} \ \ \ 2 \le \rho_2 \le 3 \ \ (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$2 + 2 \le \rho_1 + \rho_2 \le 3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2, 3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)

α) • Είναι:

$$|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -2-1 \le x+1-1 \le 2-1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1 \quad (1)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

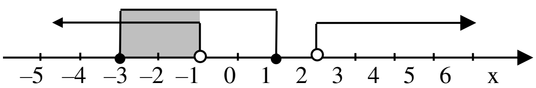
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x < -1 \Leftrightarrow x \in [-3, -1)$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ ισχύει ότι:

$$-3 \le \rho_1 < -1 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$-3 \le \rho_2 < -1 \Leftrightarrow 1 < -\rho_2 \le 3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$-3 + 1 < \rho_1 - \rho_2 < -1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

Άρα $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

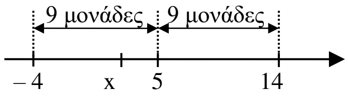
$$|x+4| + |x-14| = 18$$

(Μονάδες 5)

α) Η απόσταση του σημείου M(x) του άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο A(5) είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β) Από το διπλανό σχήμα βρίσκουμε ότι:

$$x \in [-4, 14]$$



γ) Είναι:

$$d(x, 5) \leq 9 \Leftrightarrow |x - 5| \leq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9 \leq x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9 + 5 \leq x - 5 + 5 \leq 9 + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$$

δ) Ισχύει ότι:

$$x \geq -4 \Leftrightarrow x + 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad x \leq 14 \Leftrightarrow x - 14 \leq 0$$

Τότε:

$$|x + 4| + |x - 14| = x + 4 - (x - 14) =$$
$$= x + 4 - x + 14 = 18$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία *Α* , *Β* και *Μ* που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

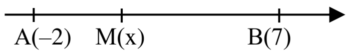
$$|x+2|+|x-7|$$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

α) i) $|x + 2| = |x - (-2)| = d(x, -2) = MA$

ii) $|x - 7| = d(x, 7) = MB$



β) $|x + 2| + |x - 7| = MA + MB = AB$

γ) Ισχύει ότι:

$$|x + 2| + |x - 7| = AB =$$
$$= d(7, -2) = |7 - (-2)| = |9| = 9$$

δ) Είναι:

$$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0, \text{ άρα } |x + 2| = x + 2.$$

Επίσης:

$$x < 7 \Leftrightarrow x - 7 < 0, \text{ άρα}$$
$$|x - 7| = -(x - 7) = 7 - x$$

Τότε:

$$A = |x + 2| + |x - 7| = x + 2 + 7 - x = 9$$

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία *Α* , *Β* και *Μ* αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου *Μ* αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο *Μ*. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

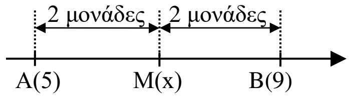
α) $|x-5| = d(x, 5) = MA$

$|x-9| = d(x, 9) = MB$

β) i) Από την ισότητα $|x-5| = |x-9|$

συμπεραίνουμε ότι $MA = MB$,

δηλαδή το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ.



ii) Είναι:

$$AB = d(5, 9) = |5-9| = 4 \text{ μονάδες}$$

Επομένως το σημείο Μ απέχει 2 μονάδες από το σημείο Α(5) και 2 μονάδες από το σημείο Β(9), οπότε $x = 7$.

Αλγεβρικά

$$|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-5 = x-9 \text{ ή } x-5 = -(x-9)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0x = -4 \text{ αδύνατη ή } x-5 = -x+9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

α) Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$.

β) Είναι:

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2\alpha_1 + (40 - 1)\omega] =$$
$$= 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6 + 156) =$$
$$= 20 \cdot 162 = 3240$$

γ) Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε:

$$\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = 59$$

Τότε:

$$S_{59} = \frac{59}{2}(\alpha_1 + \alpha_{59}) = \frac{59}{2}(3 + 235) =$$
$$= \frac{59}{2} \cdot 238 = \frac{14042}{2} = 7021$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \qquad (1) \qquad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

(Μονάδες 10)

α) Το πολυώνυμο: $x^2 - 4x + 2 - λ^2$ έχει $α = 1$, $β = -4$, $γ = 2 - λ^2$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - λ^2) = 16 - 8 + 4λ^2 = 8 + 4λ^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow 8 + 4λ^2 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } λ \in R$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{-4}{1} = 4$$

ii) και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{2-λ^2}{1} = 2 - λ^2$$

γ) i) Έστω $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

ii) Είναι:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - λ^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2 - λ^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^3 = 2 - λ^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - λ^2 \Leftrightarrow λ^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (λ = 1 \text{ ή } λ = -1)$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0 \qquad (1)$$ με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \text{ και}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

β) i) Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2$ έχει $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2 - \lambda$, $\gamma = \lambda - 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 2 \text{ ή } \lambda > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

ii) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2)$$

Η εξίσωση (1) έχει ομόσημες ρίζες, αν και μόνο αν:

$$(\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6 \geq 0 \text{ και } 4(\lambda - 2) > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \leq 2 \text{ ή } \lambda \geq 3 \text{ και } \lambda > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq 3 \Leftrightarrow \lambda \in [3, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\alpha x-\alpha+2$ και $g\left(x\right)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\left(1,2\right)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α . (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη *1*, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 2) αν και μόνο αν:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 1 - \alpha + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = 2, \text{ ισχύει}$$

β) i) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι:

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \alpha + 2 = 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2$$

ii) Για α = 2 οι τύποι των f, g γίνονται:

$$f(x) = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $y = f(x)$ και $y = g(x)$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

Για να έχουν οι C_f, C_g δύο κοινά σημεία, πρέπει η εξίσωση f(x) = g(x) να έχει δύο ρίζες άνισες.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow$$

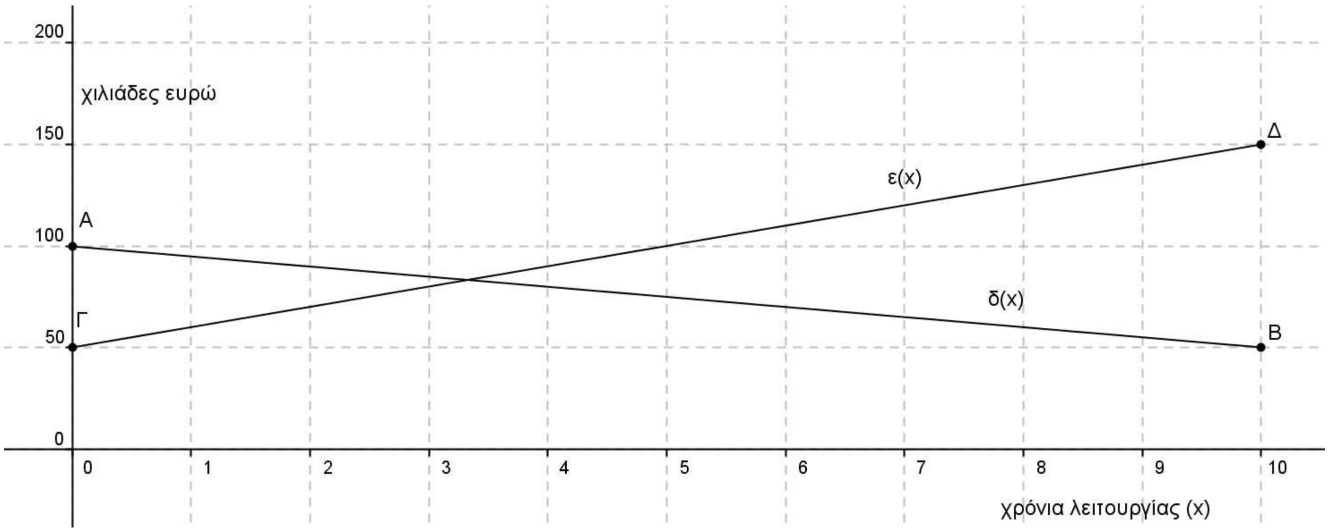
$$\alpha^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -2 \text{ ή } \alpha > 2$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ* με *Α(0,100*) και *Β(10,50)* παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *δ(x)* των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα *x* χρόνια της λειτουργίας της.

Το ευθύγραμμο τμήμα *ΓΔ* με *Γ(0,50)* και *Δ(10,150)* παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων *ε(x)* της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα *x* χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων *δ(x), ε(x*) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων *ΑΒ* και *ΓΔ* και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

α) Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται βρίσκουμε ότι οι τεταγμένες των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην τετμημένη με τιμή 5 κυμαίνονται για τη συνάρτηση εσόδων ε(x) στο 100 και για τη συνάρτηση δαπανών δ(x) στο 75.

β) i) Έστω $\delta(x) = \lambda_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση δαπανών. Η ευθεία (δ) διέρχεται από τα σημεία Α(0, 100) και Β(10, 50) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_1 = \frac{50-100}{10-0} = \frac{-50}{10} = -5$$

Τότε η ευθεία (δ) γράφεται:

$$\delta(x) = -5x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (δ) διέρχεται από το Α οι συντεταγμένες του σημείου Α την επαληθεύουν. Τότε:

$$A \in (\delta) \Leftrightarrow 100 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 100$$

Τελικά η ευθεία (δ) έχει εξίσωση:

$$\delta(x) = -5x + 100$$

Έστω $\varepsilon(x) = \lambda_2 x + \beta_2$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων. Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία Γ(0, 50) και Δ(10, 150) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_2 = \frac{150-50}{10-0} = \frac{100}{10} = 10$$

Τότε η ευθεία (ε) γράφεται:

$$\varepsilon(x) = 10x + \beta_2$$

Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το Γ οι συντεταγμένες του σημείου Γ την επαληθεύουν. Τότε:

$$\Gamma \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 50 = 0 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 = 50$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon(x) = 10x + 50$$

Για $x = 5$ βρίσκουμε:

$$\delta(5) = -25 + 100 = 75 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon(5) = 50 + 50 = 100$$

Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

ii) Η τετμημένη του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Για $x = 10/3$ βρίσκουμε:

$$\varepsilon(10/3) = 10 \cdot 10/3 + 50 = 250/3$$

Άρα το σημείο τομής των ΑΒ και ΓΔ έχει συντεταγμένες Μ(3,3, 83).
Επομένως 3 έτη και 3 μήνες (περίπου) μετά την έναρξη λειτουργίας της η εταιρία εμφάνισε ισοσκελισμό εσόδων και εξόδων.

Σχόλιο

Η παραπάνω εφαρμογή έχει ένα βασικό μειονέκτημα. Οι τιμές «ετήσια έσοδα» και «ετήσια έξοδα» είναι μεμονωμένες μεταβλητές και δεν μπορούν να περιγραφούν με ευθείες.

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον *1^o* μήνα *1 ευρώ*, το *2^o* μήνα *2 ευρώ*, τον *3^o* μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον *1^o* μήνα *100 ευρώ*, το *2^o* μήνα *110 ευρώ*, τον 3^o μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10 ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6* μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

α) i) Από τα δεδομένα που δίνονται για το πρόγραμμα Α διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $α_1 = 1$, $α_2 = 2$, $α_3 = 4$ και $λ = 2$. Ισχύει επομένως ότι:

$$α_ν = α_1λ^{ν-1} \Leftrightarrow α_ν = 1 \cdot 2^{ν-1} \Leftrightarrow α_ν = 2^{ν-1}$$

ii) Το πρόγραμμα Β περιγράφεται από μια αριθμητική πρόοδο με $β_1 = 100$, $β_2 = 110$, $β_3 = 120$ και $ω = 10$. Ισχύει επομένως ότι:

$$β_ν = β_1 + (ν - 1)ω \Leftrightarrow β_ν = 100 + (ν - 1)10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow β_ν = 100 + 10ν - 10 \Leftrightarrow β_ν = 90 + 10ν$$

iii) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι:

$$A_ν = α_1\frac{λ^ν-1}{λ-1} \Leftrightarrow A_ν = 1 \cdot \frac{2^ν-1}{2-1} \Leftrightarrow A_ν = 2^ν - 1$$

iv) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι:

$$B_ν = \frac{ν}{2}(β_1 + β_ν) \Leftrightarrow B_ν = \frac{ν}{2}(100 + 90 + 10ν) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_ν = \frac{ν}{2}(190 + 10ν) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_ν = \frac{190ν+10ν^2}{2} \Leftrightarrow B_ν = 95ν + 5ν^2$$

β) i) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 6 μήνες:

$$A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 6 μήνες:

$$B_6 = 95 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = 570 + 180 = 750 \text{ €}$$

ii) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 12 μήνες:

$$A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4.095 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 12 μήνες:

$$B_{12} = 95 \cdot 12 + 5 \cdot 12^2 = 1.140 + 720 = 1.860 \text{ €}$$

Επομένως, ακολουθώντας το πρόγραμμα Α, θα έχει συγκεντρώσει μεγαλύτερο ποσό.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1+\sqrt{a}$ (Μονάδες 7)

α) Είναι:

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$$

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
	$x^2 - x$	+	o −	o +	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

β) **i)** • $0 < \alpha^2$

• $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$

• $\alpha^2 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$

• $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < 1$

Τελικά:

$$0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$$

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha}^2 < \left(1 + \sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$$

Ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού *Α* της συνάρτησης *f*. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ (Μονάδες 10)

α) Πρέπει:

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$$

Θέτουμε $|x| = y$ (1) και βρίσκουμε:

$$y^2 - 5y + 6$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5|x| + 6 = (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3} = |x| - 2, \ x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

i) Η εξίσωση γράφεται:

$$(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$$

Θέτουμε $|x| = z$ (2) και βρίσκουμε:

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

- $|x| = 3 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3)$, απορρίπτονται
- $|x| = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{S} - \mathrm{P}}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$

$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \text{ και}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Η παράσταση Α έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0 \ (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Επομένως η ανίσωση (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών . (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) i) Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0$, για $\lambda < 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι αρνητικές.

ii) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda^2 + 1| \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, με $\lambda>0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 1$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

Είναι:

$$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) \geq 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Έχουμε:

$$\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} = 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) = 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

α) Είναι:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 4 - 8 + \alpha = -4 + \alpha \text{ και}$$

$$g(2) = 2\alpha - 5$$

Τότε:

$$f(2) = g(2) \Leftrightarrow -4 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + 5 = 2\alpha - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

β) Για α = 1 είναι:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ και}$$

$$g(x) = x - 5$$

i) Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ισχύει ότι:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \quad \alpha^2, \quad \dfrac{a+a^2}{2}$ (Μονάδες 7)

i) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

β) i) • $0 < 1$

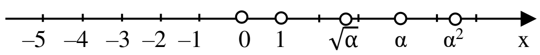
• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{1} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{\alpha}$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} 1 \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$

Τελικά:

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$



ii) Ισχύει ότι:

- $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > \alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha}{2} > \alpha$
- $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$

Τελικά:

$$\alpha < \frac{\alpha^2+\alpha}{2} < \alpha^2$$

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 10)

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0, 2) αν και μόνο αν:

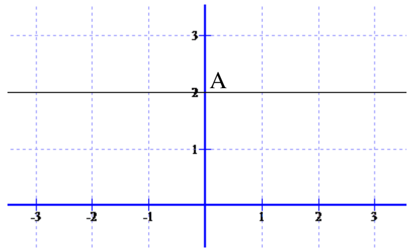
$$f(0) = 2 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2,$$

το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = -1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (-1 + 1)x^2 - (-1 + 1)x + 2 = 2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x Που διέρχεται από το σημείο Α(0, 2).



γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0) και επομένως διέρχεται από αυτό αν και μόνο αν:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 2^2 - (\lambda + 1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Για λ=-2 έχουμε: $f(x) = (-2 + 1)x^2 - (-2 + 1)x + 2 = -x^2 + x + 2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο σημαίνει ότι η τεταγμένη του σημείου είναι 0. Γνωρίζουμε ότι τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο (2,0) άρα για να βρούμε το άλλο σημείο (ρ,0) αρκεί να βρούμε την άλλη λύση ρ της εξίσωσης: $-x^2 + x + 2=0$. Εφόσον S = -2 έχουμε: -2=2+ ρ οπότε ρ = -4. Άρα το άλλο σημείο είναι το (-4,0).

δ) Για λ = 1 ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (1 + 1)x^2 - (1 + 1)x + 2 =$$

$$= 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1)$$

Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12=0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma=0$ (1)

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

α) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

Το τριώνυμο $y^2 - 7y + 12$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -7$, $\gamma = 12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \; \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ \frac{7-1}{2} = 3 \; \text{δεκτή} \end{cases}$$

- Για $y = 4$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$$

- Για $y = 3$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\right)$$

β) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0, \text{ από υπόθεση}$$

Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις οποίες συμβολίζουμε y_1, y_2.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

- $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta}{1} = -\beta > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 είναι θετικές.
- $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{1} = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Τότε:

$$(x^2 = y_1 \text{ ή } x^2 = y_2) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1} \text{ ή } x = \sqrt{y_2} \text{ ή } x = -\sqrt{y_2}\right)$$

Τελικά η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x και επομένως δεν τον τέμνει.

β) Οι τετμημένες των σημείων ης C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης:

$$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	−	0	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

Για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι:

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Επομένως, λόγω του ερωτήματος β, το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν x} < 0\\ x+2, & \text{αν x} \geq 0\end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β) i)Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y’y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i)Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f, και συγκεκριμένα στον κλάδο x + 2 όπου x = 0 και βρίσκουμε:

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Μ(0, 2).

β) i) • Για x = – 1 είναι:

$$f(-1) = -(-1) + 2 = 1 + 2 = 3$$

• Για x = – 2 είναι:

$$f(-2) = -(-2) + 2 = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία y = – x + 2 διέρχεται από τα σημεία Α(– 1, 3) και Β(– 2, 4).

• Για x = 1 είναι:

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

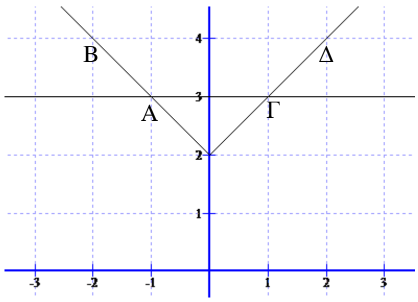
• Για x = 2 είναι:

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία y = x + 2 διέρχεται από τα σημεία Γ(1, 3) και Δ(2, 4).

Η ευθεία y = 3 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Ε(0, 3).

Η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής της f με την ευθεία y = 3 είναι τα Α(– 1, 3) και Γ(1, 3).

ii) Τα σημεία Α και Γ έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες. Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

γ) i) Η ευθεία y = α τέμνει της C_f, όπως διαπιστώνουμε από το γράφημα, σε δύο σημεία αν και μόνο αν α > 2.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = |x| + 2,\ x \in R$$

Τότε:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow |x| + 2 = \alpha \Leftrightarrow |x| = \alpha - 2 \quad (1)$$

- Αν $\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0$ η εξίσωση (1) έχει λύση την:

$$|x| = 2 - 2 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Αν $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει λύσεις τις:

$$|x| = \alpha - 2 \Leftrightarrow (x = \alpha - 2 \ \text{ ή } \ x = -(\alpha - 2)) \Leftrightarrow (x = \alpha - 2 \ \text{ ή } \ x = 2 - \alpha)$$

Επομένως επιβεβαιώνεται και αλγεβρικά το γεγονός ότι για > 2 έχουμε δύο λύσεις.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν α=2. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ **(**Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $αx^2 – 5x + α$ έχει διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 – 4αγ = (– 5)^2 – 4 \cdot α \cdot α = 25 – 4α^2$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$Δ \geq 0 \Leftrightarrow 25 – 4α^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow – 4α^2 \geq – 25 \Leftrightarrow α^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{α^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |α| \leq \frac{5}{2}$$

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{α}{α} = 1$$

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για $α = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$2x^2 – 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 – 5x + 2$ έχει $α = 2$, $β = – 5$, $γ = 2$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 – 4αγ = (– 5)^2 – 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 – 16 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε γράφεται:

$$2y^2 – 5y + 2 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λύθηκε στο σκέλος (ii) και προέκυψε ότι:

$$y = 2 \text{ ή } y = \frac{1}{2}$$

- Για $y = 2$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 – 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x – 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

- Για $y = \frac{1}{2}$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 – x + 2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει $Δ = (– 1)^2 – 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 – 16 = – 15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το Α = R και η g το Β = R. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

- Για x = 1 είναι f(1) = 1 – 2 = – 1
- Για x = 4 είναι f(4) = 16 – 8 = 8

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων είναι τα:

$$A(1, -1) \text{ και } B(4, 8)$$

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$$

Τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 5x + 4$ τις προσδιορίσαμε στο σκέλος (α).

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4)$$

γ) Κάθε ευθεία της μορφής y = α, με α < – 1, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(x) > \alpha \text{ για κάθε } \alpha < -1$$

Τότε:

$$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x - \alpha > 0$$

Η ανίσωση ισχύει διότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) =$$
$$= 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0,$$

για κάθε α < – 1

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \alpha$, με $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

α) Η εξίσωση γράφεται:

$$(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 4 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4(1+\lambda)$, $\gamma = 4 + 3\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3\lambda) =$$

$$= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda =$$

$$= 16\lambda^2 + 20\lambda$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει ρίζες τις:

$$4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda = -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda = 0\right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		0	$+\infty$
$4\lambda^2 + 5\lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως ισχύει:

$$4\lambda^2 + 5\lambda > 0 \Leftrightarrow \left(\lambda < -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda > 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$$

γ) **i)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Είναι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) =$$

$$= 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$$

$$= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$$

$$= 16(4 + 3\lambda) - 12 \cdot 4(1+\lambda) + 9 =$$

$$= 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$