Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Σύνολο Σελίδων: οκτώ (8) - Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

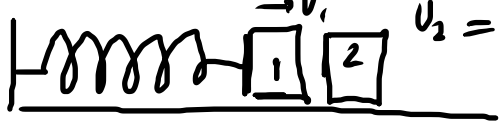
Σάββατο 3 Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα Α

Α.1 → (α), Α.2 → (α), Α.3 → (δ), Α.4 → (γ)

Α.5 → Λ, Σ, Λ, Σ, Λ

Β.1.



↳ (β)

$v_1 = v_{max}$

$v_K = v_{max}$

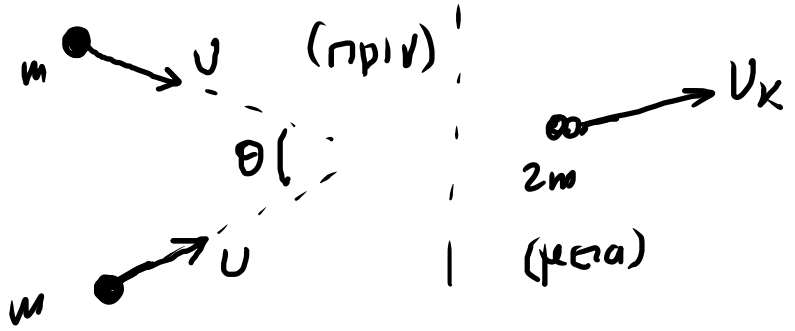
ΑΔΟ: $\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}^{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_K$

$\Rightarrow v_K = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ (1)

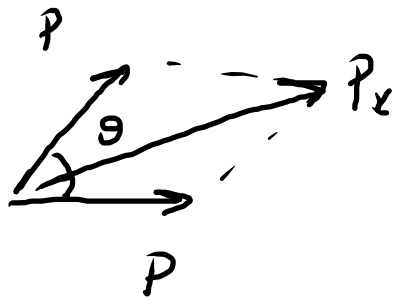
$E' = \frac{1}{4} E \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_K^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4m_1 = m_1 + m_2 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

Β.2. → (β)



ΑΔΟ $\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{P_K}$



$P_1 = P_2 = P = mU$ (2)

$P_K = 2mU_K$

$K_{\text{μετά}} = \frac{75}{100} K_{\text{πριν}} = \frac{1}{2} 2mU_K^2 = \frac{3}{4}\left(2 \cdot \frac{1}{2} mU^2\right)$

$\Rightarrow U_K^2 = \frac{3}{4} U^2 \Rightarrow U_K = \frac{\sqrt{3}}{2} U$ (1)

$P^2 + P^2 + 2P \cdot P \sigma\upsilon\nu\theta = P_K^2$

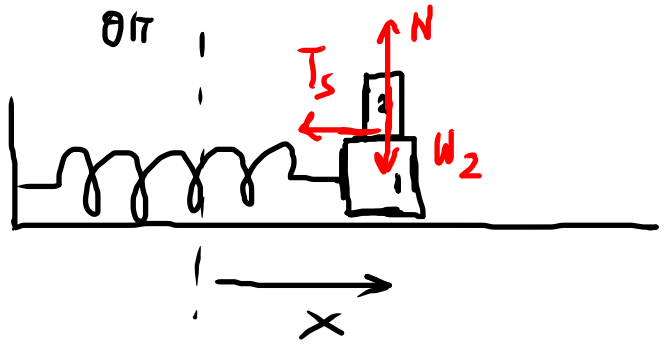
$2P^2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) = P_K^2$

(1),(2)

$\Rightarrow 2m^2U^2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{4m^2 3U^2}{4} \Rightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}}$

Β.3

↳ (α)



Για να μην έχουμε ολίσθηση πρέπει

στο Σ_2 $|T_s| \le \mu_s N$

$\Sigma F_{y_2} = 0 \Rightarrow N = W_2 = m_2 g$ $\Big\}$ $\underline{|T_s| \le \mu_s m_2 g}$

Όμως για το Σ_2 : $\Sigma F_{2x} = m_2 a$

$\Rightarrow T_s = m_2(-\omega^2 x) \Rightarrow \underline{T_s = -m_2\omega^2 x}$

Άρα $m_2\omega^2|x| \le \mu_s m_2 g$

για το σώμα $\Sigma_1 - \Sigma_2$

$D = k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{4m}$

$\frac{k}{4m}|x| \le \mu_s g$

$|x| \le \frac{\mu_s 4mg}{k}$

Το μέγιστο πλάτος ώστε να μην έχουμε ολίσθηση είναι το $\mu_s 4mg/k$

Άρα η μέγιστη δυνατή ταχύτητα εκτόξευσης είναι $U_0 = U_{max} = \omega A_{max} = \sqrt{\frac{k}{4m}}\frac{\mu_s 4mg}{k} = \sqrt{\frac{k}{4m}\frac{16m^2}{k^2}}\mu_s g \Rightarrow \boxed{U_0 = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\mu_s g}$

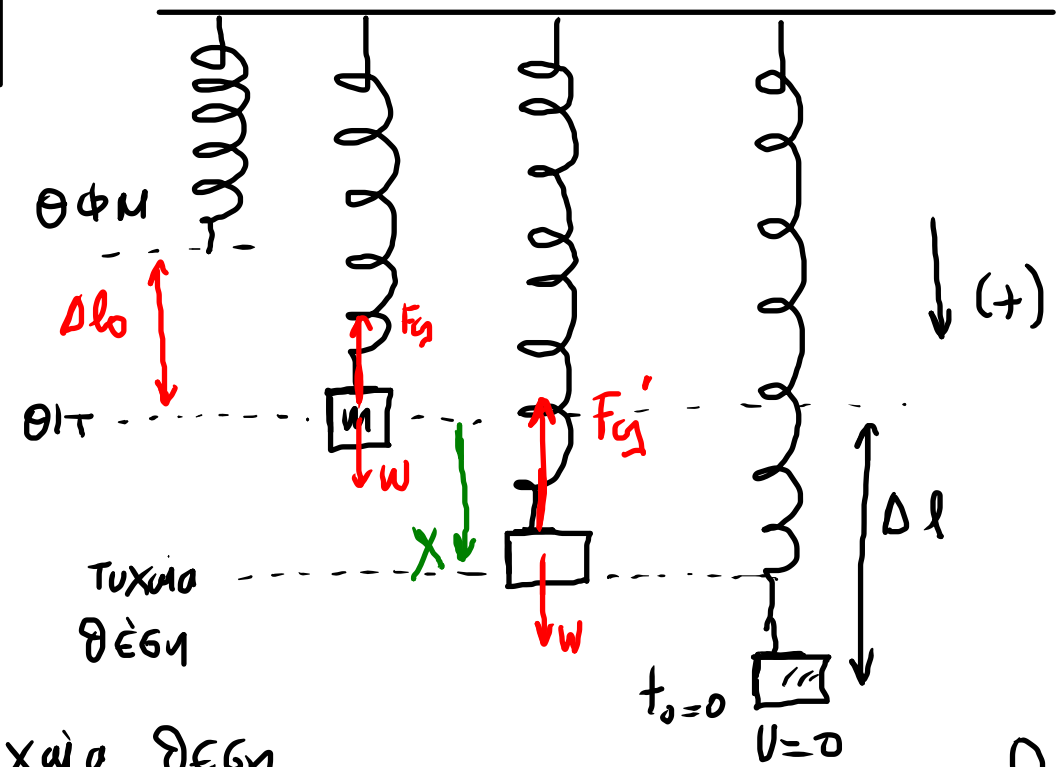
Θέμα Γ

στη ΘΙΤ

$\Sigma F = 0$

$F_{ελ} = W$

$k\Delta l_0 = mg$ (1)



Γ.1) στην τυχαία θέση

$\Sigma F = W - F_{ελ}' = mg - k(\Delta l_0 + x)$

(1)

$\Rightarrow \boxed{\Sigma F = -Kx}$ απ' με $D = K$

Γ.2) Η αρχική θέση είναι αυτή, άρα $A = \Delta l = 0,2m$.

Την t_1 η μάζα έχει ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2}DA^2 = K + \frac{1}{2}D \cdot x_1^2$$

$$\Rightarrow D = \frac{2K}{A^2 - x_1^2} \Rightarrow \boxed{D = 100\,N/m}$$

$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = 10\,r/s$

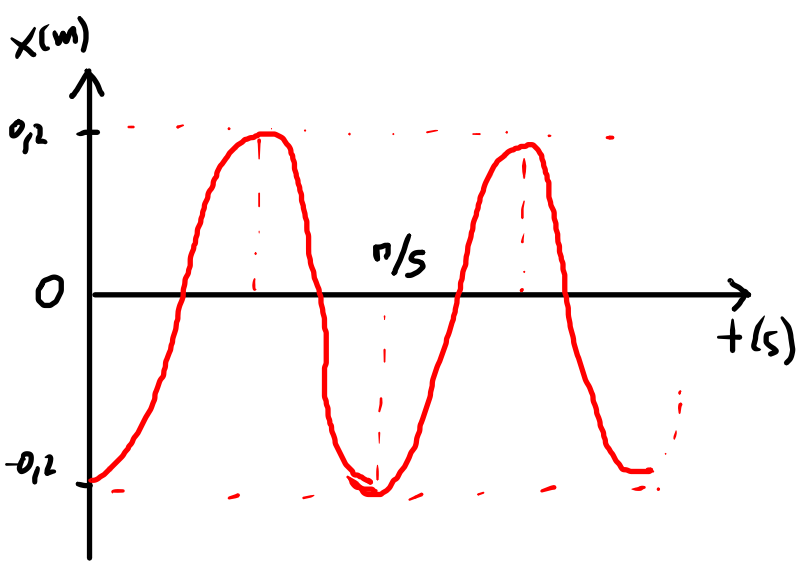
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\,sec$$

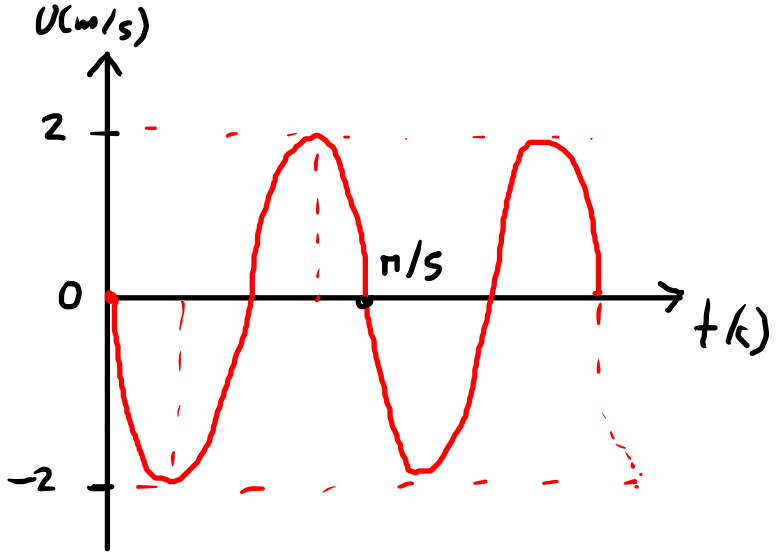
Επανέρχεται 1η φορά από την αρχ. θέση

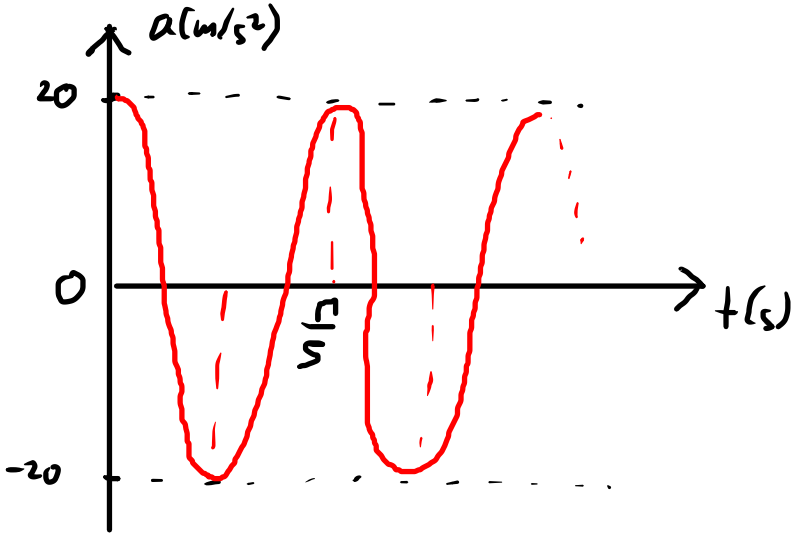
σε χρόνο $\boxed{\Delta t = T = \frac{\pi}{5}\,sec}$

Γ.3) Την $t_0 = 0$ $x = +A \Rightarrow A = A\eta\mu(0+\varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$x = 0{,}2\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI),\quad v = 2\sigma\upsilon\left(10t + \frac{\pi}{2}\right),\quad a = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)$$







Γ.4) $0{,}1\sqrt{3} = 0{,}2\,\eta\mu\left(10t_1 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$

$$10t_1 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 10t_1 + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Bigg\} \xrightarrow{k=0}$$

$10t_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \rightarrow t < 0$ απορ.

$10t_1 = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 10t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$t_1 = \frac{\pi}{60}\ s$ 1η φορά, για $\kappa = 1$

$10t_1 + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 10t_1 = 2\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$

$10t_1 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{11\pi}{60}\ s$

$10t_1 + \frac{\pi}{2} = 3\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 10t_1 = 3\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$

$10t_1 = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{13\pi}{60}\ s$

Γ.5) $\frac{dU_{ελ}}{dt} = -\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = -\frac{F_{ελ}\,dx}{dt} = -F_{ελ}\cdot \upsilon$

$= -K\Delta\ell'\cdot \upsilon$

$U = 3K$ ΑΔΕΤ

$E = K + U \longrightarrow E = \frac{U}{3} + U = \frac{4U}{3}$

$E = 4K \Rightarrow$

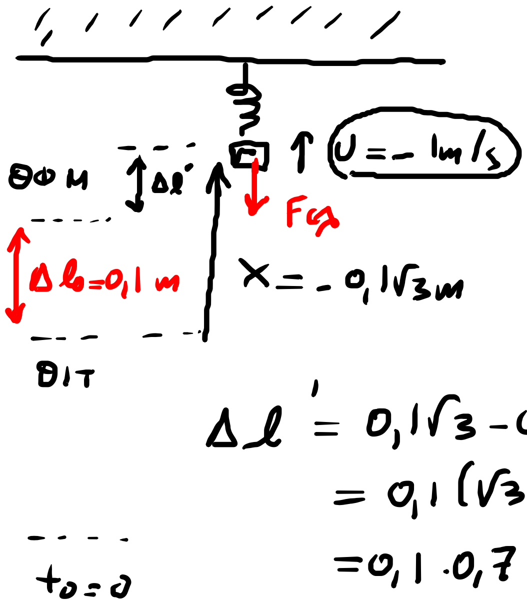
$\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = 4\frac{1}{2}m\upsilon^2$

$\upsilon = \pm\frac{\upsilon_{max}}{2} \Rightarrow \upsilon = \pm 1\ m/s$

$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{2}Dx^2$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

$x = \pm 0{,}1\sqrt{3}\ m$



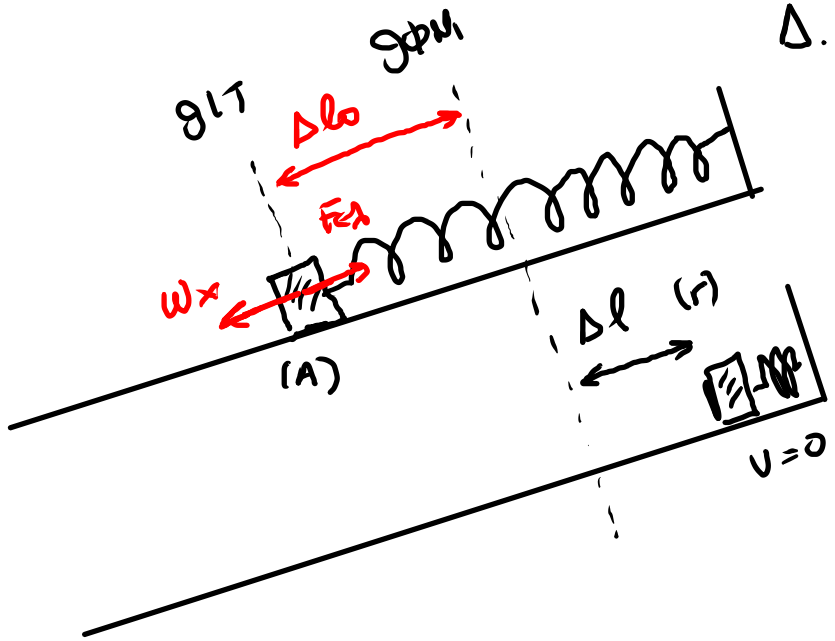
$\Delta\ell' = 0{,}1\sqrt{3} - 0{,}1$
$= 0{,}1(\sqrt{3}-1)$
$= 0{,}1\cdot 0{,}7$
$= 0{,}07\ m$

$F_{ελ} = -70N$

Άρα

$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -70\ J/s$

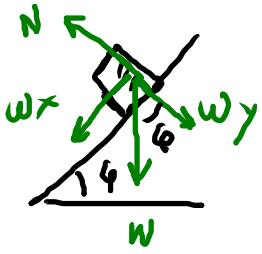
Θέμα Δ



Δ.1) Η θέση (Γ) είναι ακραία θέση

άρα $A = \Delta l_0 + \Delta l$

$A = 0,1\,m$



$W_x = W \eta\mu\varphi$

στη ΘΙΤ

$\Sigma F_x = 0$

$W_x = F_{ελ}$

$Mg\eta\mu\varphi = K\Delta l_0$

$\Delta l_0 = 0,05m$

$E_{ταλ} = E = \frac{1}{2} DA^2$ με $D = k$

άρα $\boxed{E_{ταλ} = 0,5\,J}$

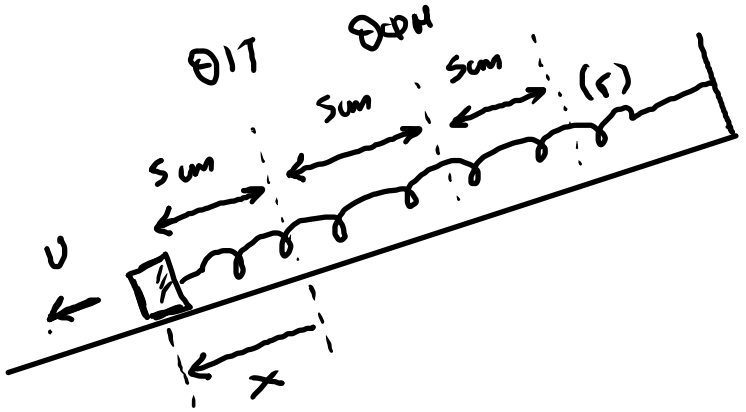
Δ.2) $D = Mω^2 \Rightarrow ω = \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow ω = 10\,r/s \rightarrow T = \frac{2\pi}{ω} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\,sec$

Θα περάσει ξανά από την αρχική θέση (Α) σε $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{20}\,s}$

με ταχύτητα $υ = -U_{max} = -ωA \Rightarrow \boxed{U = -1\,m/s}$

Δ3) Η θέση (Δ) βρίσκεται 15cm κάτω από την θέση (Γ) δηλ. 5cm κάτω από την ΘΙΤ. ($x = -0,05\,cm$)

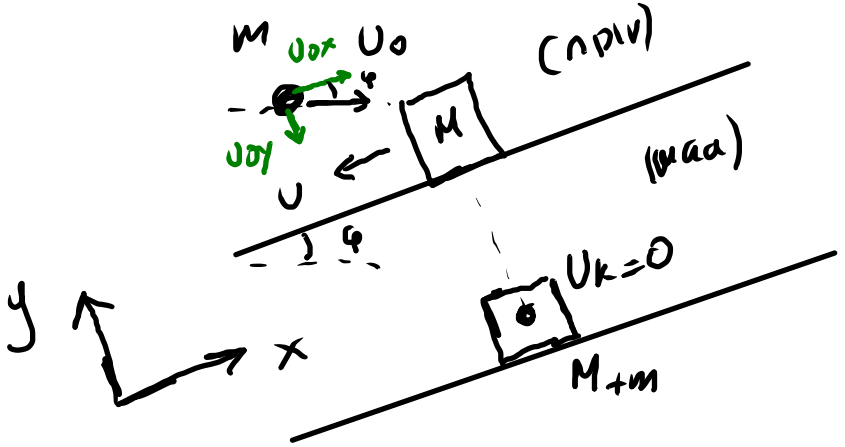
Από ΑΔΕΤ θα βρούμε την ταχύτητα σε αυτή την θέση



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{k}{M}(A^2 - x^2) \Rightarrow \boxed{U = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,m/s}$$

Για την κρούση εφαρμόζουμε ΑΔΟ στον x-άξονα

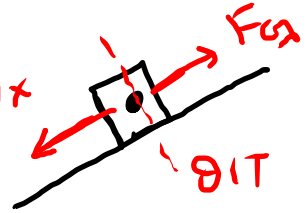


$$P_{ολ(x)}^{πριν} = P_{ολ(x)}^{μετα} \Rightarrow mU_{0x} - MU = 0 \Rightarrow mU_{0x} = MU$$

$$\Rightarrow 3\,U_0\,\sigma\upsilon\nu 30 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{1}{3}\,m/s}$$

$$\Delta P_{ολ} = P_{μετα} - P_{πριν} = 0 - mU_0 \Rightarrow \boxed{\Delta P_{ολ} = -1\,kg \cdot m/s}$$

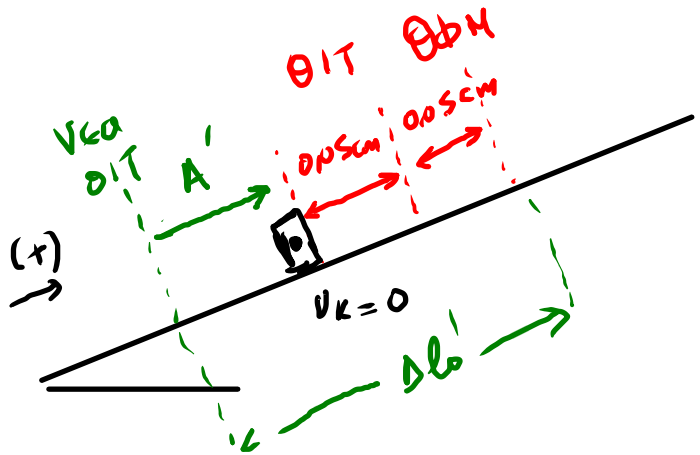
Δ.4) Το συσσωμάτωμα ισορροπεί σε νέα θέση με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta\ell_0'$



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_0' = (M+m)g\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow \Delta\ell_0' = 0,2m$

Η θέση μετά την πρώτη θα είναι αυτή θέση όπου $v_K = 0$



από το σχήμα $A' = 0,2 - 0,1 = \underline{0,1m}$

$D = k = (M+m)\omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \underline{\omega' = 5r/s}$

και $f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \underline{\frac{5}{2\pi} Hz}$

Δ.5) την $t_0 = 0$ $x = +A'$ άρα $A' = A'\eta\mu(0+\varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{2} rad}$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0{,}1\,ημ\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad SI$$

Δ.6) $K = U$ Απο ΑΔΕΤ $E = K + U = 2U$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} D A'^2 = 2\frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A'}{\sqrt{2}}$$

1η φορά
$x = + A'\sqrt{2}/2$
με $υ < 0$

$$0{,}1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}1\,ημ\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow ημ\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = ημ\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 5t + \frac{\pi}{2} = 2κ\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5t = 2κ\pi - \frac{\pi}{4}$$

ή

$$5t + \frac{\pi}{2} = 2κ\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5t = 2κ\pi + \frac{\pi}{4}$$

αρνητικός απορρ...

$$\xrightarrow{κ=0} 5t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20}\,s$$

1η