Διαγώνισμα στη μηχανική στερεού σώματος 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ, **Α2.** β, **Α3.** α, **Α4.** γ, **Α5.** Σ, Σ, Λ, Λ, Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστό το **β**.

Αφού το $Σ_2$ κατεβαίνει και το $Σ_1$ ανεβαίνει θα ισχύει:

$$s = s_1 + s_2 = rθ + Rθ = rθ + 3rθ = 4rθ \Rightarrow 10r = 4rθ \Rightarrow θ = 2{,}5 \text{ rad} \Rightarrow \frac{1}{2}α_γ t^2 = 2{,}5 \Rightarrow \mathbf{t = 1\ s}.$$

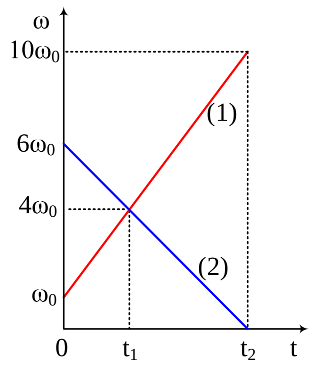
Β2. Σωστή απάντηση το **α**.

Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές οπότε:

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow 2mυr = 2mυ'\frac{d}{2} \Rightarrow υ\frac{d}{4} = υ'\frac{d}{2} \Rightarrow υ = 2υ'$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{2\frac{1}{2}mυ^2}{2\frac{1}{2}mυ'^2} = \frac{υ^2}{υ'^2} = \frac{4υ'^2}{υ'^2} \Rightarrow \mathbf{\frac{K_1}{K_2} = 4}$$

Β3. Σωστή απάντηση το **β**.



Για την γωνιακή επιτάχυνση του $Τ_2$ ισχύει:

$$α_{γ2} = \frac{0 - 6ω_0}{t_2} \text{ αλλά και } α_{γ2} = \frac{4ω_0 - 6ω_0}{t_1} \text{ άρα:}$$

$$\frac{0 - 6ω_0}{t_2} = \frac{4ω_0 - 6ω_0}{t_1} \Rightarrow \frac{-6ω_0}{t_2} = \frac{-2ω_0}{t_1} \Rightarrow \mathbf{t_2 = 3t_1}$$

Για τον τροχό $Τ_1$ έχουμε: $α_{γ1} = \dfrac{4ω_0 - ω_0}{t_1} = \dfrac{3ω_0}{\frac{t_2}{3}} = \dfrac{9ω_0}{t_2}$

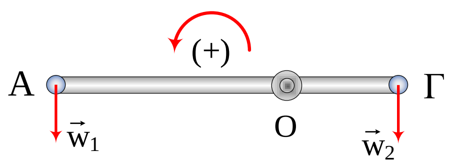
και η τελική του γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$ω_1 = ω_0 + α_{γ1}t_2 = ω_0 + \frac{9ω_0}{t_2}t_2 \Rightarrow \mathbf{ω_1 = 10ω_0}.$$

Η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με το εμβαδόν της συνάρτησης και του άξονα των χρόνων.

$$\frac{Δθ_1}{Δθ_2} = \frac{Εμβ_1}{Εμβ_2} = \frac{\frac{ω_0 + 10ω_0}{2}t_2}{\frac{6ω_0 t_2}{2}} \Rightarrow \mathbf{\frac{Δθ_1}{Δθ_2} = \frac{11}{6}}$$

Β4. Σωστή απάντηση το **γ**.



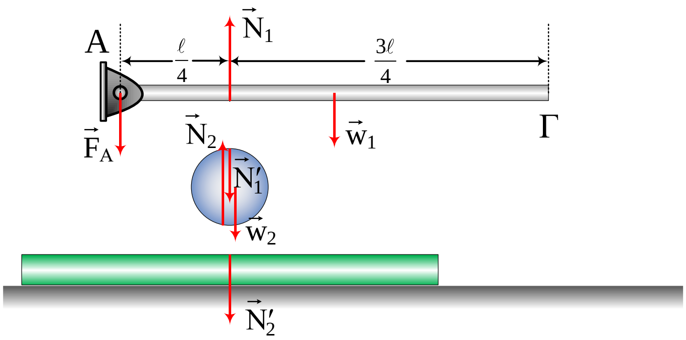
Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ίσος με:

$$\frac{dL}{dt} = Στ_{εξ} = m_1 g\frac{2\ell}{3} - m_2 g\frac{\ell}{3} = 2mg\frac{2\ell}{3} - mg\frac{\ell}{3} \Rightarrow \mathbf{\frac{dL}{dt} = mg\ell}$$

ΘΕΜΑ Γ

α. Για την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow N_1\frac{\ell}{4} - w_1\frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = 2w_1 \Rightarrow \mathbf{N_1 = 20\ N}.$$



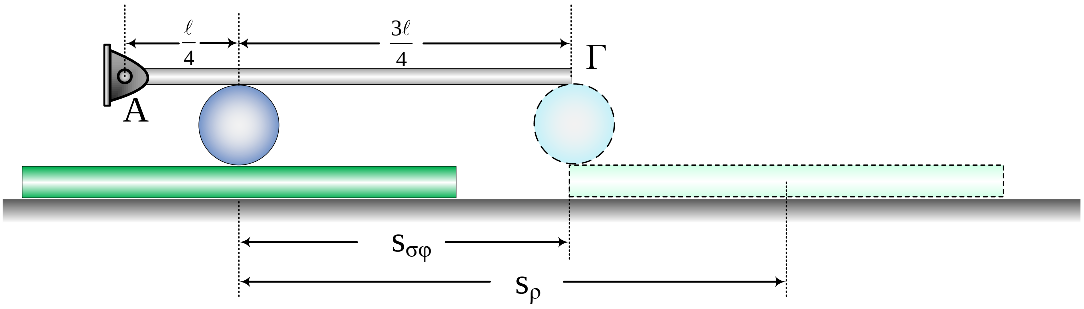
Η σφαίρα δέχεται από τη ράβδο δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς $N'_1 = N_1 = 20\,\text{N}$

Για την ισορροπία της σφαίρας:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N'_1 + w_2 = N_2 \Rightarrow N_2 = 40\ \text{N}.$$

Η ράβδος ρ2 δέχεται από τη σφαίρα δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς $\mathbf{N'_2 = N_2 = 40\,N}$

β. Εφόσον η σφαίρα δεν ολισθαίνει σε καμία ράβδο, πρέπει τα σημεία επαφής να έχουν ίδια ταχύτητα με αυτά των ράβδων.



Ανώτερο σημείο: $\upsilon_{αν} = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} - \upsilon_{γρ} = 0$
$\Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{γρ}$

Κατώτερο σημείο $\upsilon_{κατ} = \upsilon \Rightarrow \upsilon_{cm} + \upsilon_{γρ} = \upsilon \Rightarrow \upsilon_{cm} + \upsilon_{cm} = \upsilon \Rightarrow 2\upsilon_{cm} = \upsilon$

Για τις αποστάσεις $s_{σφ}$ της σφαίρας και $s_ρ$ της ράβδου 2 ισχύει:

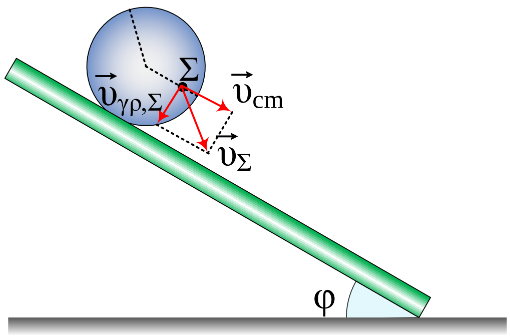
$\frac{s_{σφ}}{s_ρ} = \frac{\upsilon_{cm}t}{\upsilon t} = \frac{\upsilon_{cm}}{2\upsilon_{cm}} = \frac{1}{2} \Rightarrow s_ρ = 2s_{σφ}$, αλλά η σφαίρα φτάνει στο άκρο της πάνω ράβδου, οπότε $s_{σφ} = 3\ell/4$

άρα $s_ρ = 2s_{σφ} = 3\ell/2 = 6$ m.

Σύμφωνα με το σχήμα $s_ρ = d/2 + 3\ell/4 \Rightarrow d = 2s_ρ - 3\ell/2 \Rightarrow$ **d = 6 m**.

γ. Για τη σφαίρα ισχύει: $s_{σφ} = N\cdot 2\pi R \Rightarrow N = \frac{s_{σφ}}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{3}{2\pi\cdot 0,2} \Rightarrow \mathbf{N = \frac{7,5}{\pi}}$ περ.

δ. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, άρα: $\upsilon_{cm} = \upsilon_{γρ(R)}$ όπου $\upsilon_{γρ(R)}$ η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας.



$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\upsilon_{γρ(R)}}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha_γ$$

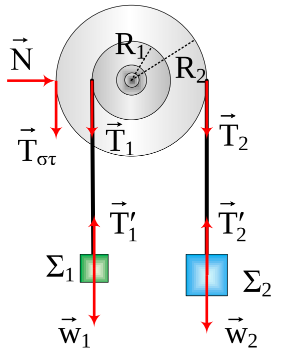
Για την ταχύτητα του Σ έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_Σ = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{γρ,Σ} \Rightarrow \upsilon_Σ = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega(R-r))^2} =$$

$$\sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}(R-r)\right)^2} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \frac{9}{16}\upsilon_{cm}^2} = \sqrt{\frac{25}{16}\upsilon_{cm}^2} = \frac{5}{4}\upsilon_{cm} \Rightarrow$$

$$\upsilon_Σ = \frac{5}{4}\alpha_{cm}t \Rightarrow t = \frac{4\upsilon_Σ}{5\alpha_{cm}} \Rightarrow \mathbf{t = 0,4\ s}.$$

ΘΕΜΑ Δ



α. Από τις ισορροπίες του $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουμε: $T_1' = w_1 = T_1$ και $T_2' = w_2 = T_2$

Η τροχαλία δε στρέφεται άρα

$Στ_K = 0 \Rightarrow T_1R_1 – T_2R_2 + T_{στ}R_2 = 0 \Rightarrow m_1gR_1 – m_2g2R_1 + T_{στ}2R_1 = 0 \Rightarrow$

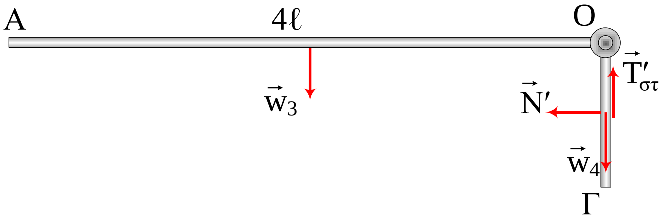
$m_1g = 2m_2g – 2T_{στ} \Rightarrow$ **$m_1 = 2$ kg**.

β. Για την διπλή τροχαλία χωρίς το $Σ_2$ ισχύει:

$Στ_K = 0 \Rightarrow T_{στ,max}R_2 – m_2gR_2 = 0 \Rightarrow T_{στ,max} = m_2g \Rightarrow$ **$T_{στ,max} = 50$ N**.

Αλλά $T_{στ,max} = μN \Rightarrow$ **$N = 100$ N**.

Η τροχαλία ασκεί – ως δράση αντίδραση – μία δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς στο σύστημα των ράβδων. **$N' = N = 100$ N**.



γ. Το σύστημα των ράβδων ισορροπεί. Άρα

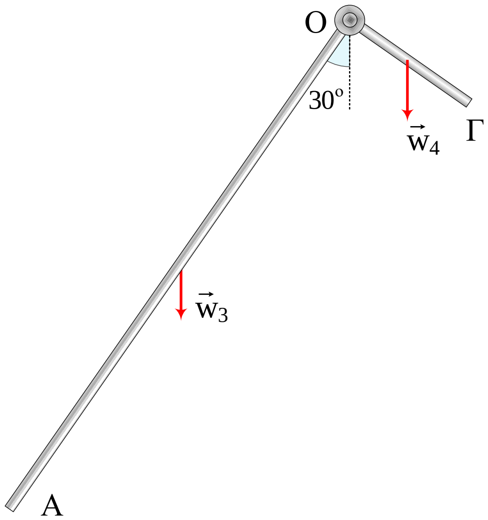
$Στ_O = 0 \Rightarrow w_3 2\ell – N'\ell/2 = 0 \Rightarrow w_3 = N'/4 \Rightarrow$ **$w_3 = 25$ N**.

δ. Για τη νέα ισορροπία έχουμε:

$Στ_O = 0 \Rightarrow w_3 ημ30 \cdot 2\ell – w_4 ημ60 \cdot \ell/2 = 0 \Rightarrow$

$$w_3 \frac{1}{2} 2\ell = w_4 \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$w_3 = w_4 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow w_4 = \frac{4w_3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathbf{w_4 = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ N}.$$



Αν οι δύο ράβδοι ήταν κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό θα έπρεπε

$w_4 = \frac{w_3}{4}$ (αφού έχει μήκος το ¼ της οριζόντιας ράβδου). Άρα άτοπο,

οπότε είναι κατασκευασμένες από διαφορετικό υλικό.