ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (Εφ' όλης της ύλης) - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (δ) Α1β. (γ)

Α2α. (α) Α2β. (δ)

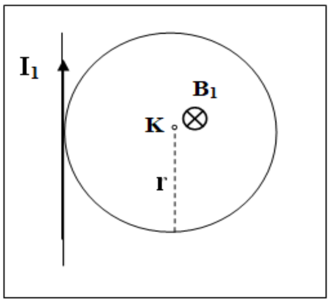
Α3α. (β) Α3β. (γ)

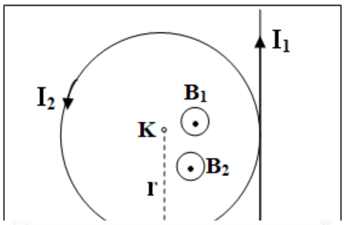
Α4α. (β) Α4β. (γ)

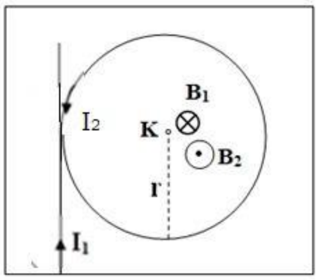
Α5. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σωστή επιλογή είναι η **α.**







Στην αρχή, η ένταση B_1 του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό στο κέντρο Κ του κυκλικού αγωγού έχει φορά από τα μάτια του αναγνώστη προς τη σελίδα, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Όταν αλλάξουμε τη θέση του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού, η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου εξαιτίας και των δύο αγωγών B_1 και B_2 αυξάνεται. Άρα, στην δεύτερη περίπτωση οι εντάσεις των μαγνητικών πεδίων, που δημιουργούν οι δύο ρευματοφόροι αγωγοί είναι ομόρροπες, ενώ στην πρώτη περίπτωση ήταν αντίρροπες. Κατά συνέπεια ο κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I_2 που έχει φορά αντίθετη απ' αυτή των δεικτών του ρολογιού, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Η συνισταμένη ένταση B_B, στην 2η περίπτωση είναι ίδιας φοράς με την συνισταμένη ένταση B_A, στην 1η περίπτωση. Στη δεύτερη περίπτωση είναι από τη σελίδα προς τα μάτια του αναγνώστη, άρα στην πρώτη περίπτωση, η ένταση B_2 είναι μεγαλύτερη από την B_1. Έτσι έχουμε

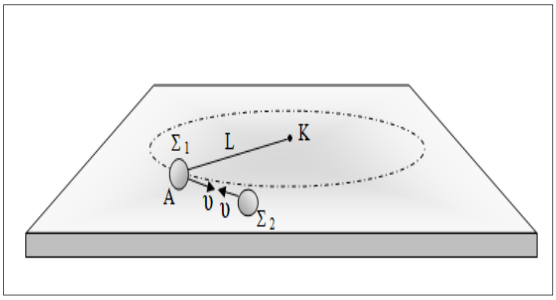
$$B_B = 2B_A \Rightarrow B_1 + B_2 = 2\left(B_2 - B_1\right) \Rightarrow$$

$$3B_1 = B_2 \Rightarrow 3\frac{2K_\mu I_1}{r} = \frac{2\pi K_\mu I_2}{r} \Rightarrow I_2 = \frac{3I_1}{\pi}$$

Άρα σωστή είναι η σχέση **α.**

Β2. Η σωστή επιλογή είναι η **β.**

Για την ελαστική κρούση των δύο σφαιριδίων δεχόμαστε θετική φορά αυτήν της ταχύτητας του σφαιριδίου $Σ_1$, άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του άλλου σφαιριδίου, $Σ_2$, θα είναι -υ.

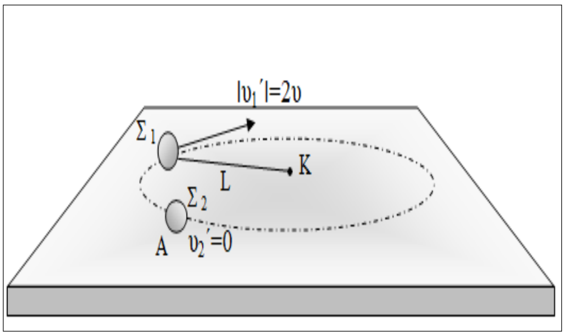


Για τις ταχύτητες των σφαιριδίων μετά την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-\upsilon) \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m - 3m}{m + 3m}\upsilon + \frac{2 \cdot 3m}{m + 3m}(-\upsilon) \Rightarrow \upsilon_1' = -2\upsilon$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(-\upsilon) \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m}{m + 3m}\upsilon + \frac{3m - m}{m + 3m}(-\upsilon) \Rightarrow \upsilon_2' = 0$$

Όταν το σφαιρίδιο $Σ_1$ εκτελέσει μία περιστροφή θα συγκρουστεί ξανά ελαστικά με το ακίνητο σφαιρίδιο $Σ_2$ και οι τελικές ταχύτητες των σφαιριδίων, μετά τη δεύτερη κρούση θα είναι



$$\upsilon_{1\tau} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1' = \frac{m - 3m}{m + 3m}(-2\upsilon) \Rightarrow \upsilon_{1\tau} = \upsilon$$

$$\upsilon_{2\tau} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1' = \frac{2m}{m + 3m}(-2\upsilon) \Rightarrow \upsilon_{2\tau} = -\upsilon$$

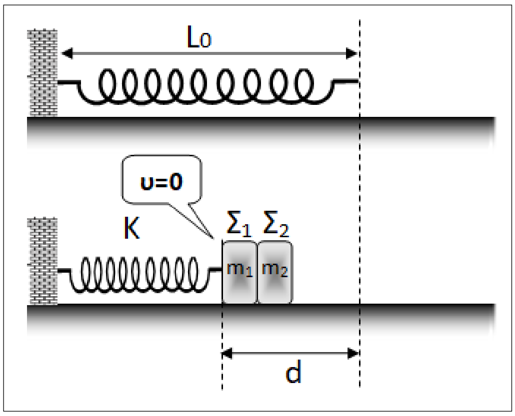
Άρα, ο λόγος των μέτρων των τελικών ταχυτήτων των δύο σφαιριδίων είναι ίσος με

$$\frac{|\upsilon_{2\tau}|}{|\upsilon_{1\tau}|} = \frac{|-\upsilon|}{|\upsilon|} = 1$$

Άρα σωστή είναι η σχέση **β.**

Β3. Η σωστή επιλογή είναι η **α.**

Τα δύο σώματα, μέχρι να χαθεί η επαφή τους, στη θέση ισορροπίας, εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α=d και περίοδο

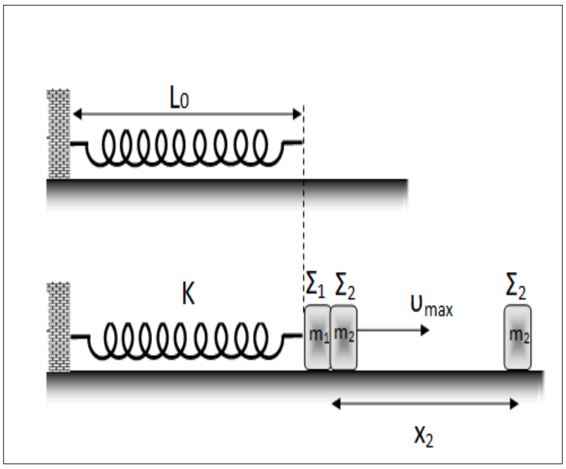


$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m + 3m}{k}} \Rightarrow T_1 = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Στη θέση ισορροπίας, που συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, τα δύο σώματα έχουν τη μέγιστη ταχύτητα που είναι

$$\upsilon_{max} = \omega \cdot d = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \cdot d = \sqrt{\frac{k}{m + 3m}} \cdot d \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot d$$

Τη χρονική στιγμή t_1, που χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων, έχει περάσει χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}{4} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



Μέχρι τη χρονική στιγμή $3t_1$, δηλαδή για χρονικό διάστημα $2t_1$ μετά το χάσιμο της επαφής, το σώμα $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα την $υ_{max}$, ενώ το σώμα $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T_2

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2t_1$$

Άρα στο χρονικό διάστημα $2t_1$, το σώμα $Σ_1$ εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση και επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του, στο φυσικό μήκος του ελατηρίου.

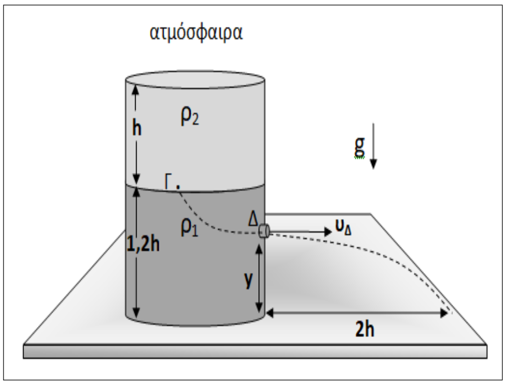
Το σώμα $Σ_2$ στο ίδιο χρονικό διάστημα μετατοπίζεται κατά

$$x_2 = \upsilon_{max} \cdot 2t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} d \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow x_2 = \pi d$$

που είναι και η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $3t_1$.

Άρα, σωστή είναι η σχέση **α.**

Β4. Η σωστή επιλογή είναι η **γ.**



Η πίεση $p_Γ$, στο σημείο Γ, της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών είναι ίση με

$$p_Γ = p_{ατμ} + \rho_2 g h$$

Η πίεση $p_Δ$, στο σημείο Δ ισούται με την ατμοσφαιρική, αφού το υγρό εξέρχεται στον αέρα, άρα $p_Δ = p_{ατμ}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού που διέρχεται από τα σημεία Γ και Δ. Επειδή η οπή είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου, θεωρούμε ότι η ταχύτητα $υ_1$ με την οποία κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού πυκνότητας $ρ_1$ είναι μηδενική, $υ_1$=0.

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_1^{\ 2} + \rho_1 g\left(1,2h - y\right) = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_\Delta^{\ 2} \Rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho_2 gh + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_1^{\ 2} + \rho_1 g\left(1,2h - y\right) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_\Delta^{\ 2} \Rightarrow$$

$$0,8\rho_1 gh + \rho_1 g\left(1,2h - y\right) = \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_\Delta^{\ 2} \Rightarrow 2gh - gy = \frac{1}{2}\upsilon_\Delta^{\ 2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{2g\left(2h - y\right)}$$

Η κίνηση που κάνει το υγρό, μετά την έξοδό του στον αέρα, είναι οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, η χρονική διάρκεια της πτώσης, μέχρι η φλέβα να φθάσει στο έδαφος, εξαρτάται από το ύψος που εκτοξεύεται και είναι

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Η φλέβα που εξέρχεται από το δοχείο, φτάνει σε σημείο του οριζόντιου επιπέδου, που απέχει απόσταση S=2h από τη βάση του δοχείου. Άρα

$$S = 2h \Rightarrow \upsilon_\Delta t = 2h \Rightarrow \sqrt{2g\left(2h - y\right)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2h \Rightarrow \sqrt{\left(2h - y\right)y} = h \Rightarrow$$

$$\left(2h - y\right)y = h^2 \Rightarrow h^2 + y^2 - 2hy = 0 \Rightarrow \left(h - y\right)^2 = 0 \Rightarrow y = h$$

Άρα, σωστή είναι η σχέση **γ.**

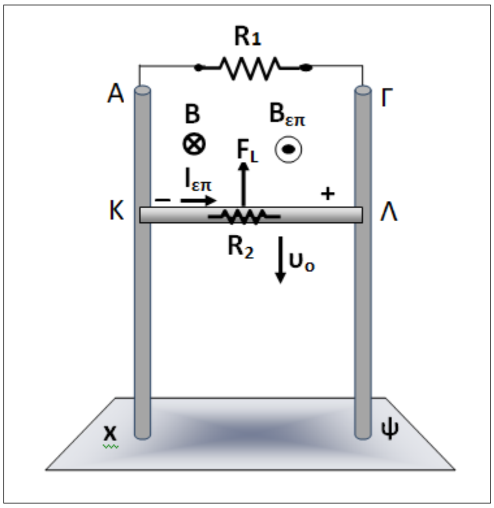
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Οι δύο μεταλλικοί οδηγοί, η ράβδος και ο αντιστάτης αποτελούν ένα κλειστό πλαίσιο από το οποίο διέρχεται μαγνητική ροή Φ=BS, όπου S το εμβαδόν του σχηματιζόμενου πλαισίου. Καθώς η ράβδος κινείται, μεταβάλλεται η επιφάνεια S με συνέπεια να αυξάνεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο και να εμφανίζεται επαγωγική τάση. Αν σε χρόνο Δt η ράβδος έχει μετατοπιστεί κατά Δy, τότε η επαγωγική τάση που εμφανίζεται στο πλαίσιο είναι

$$E_{\varepsilon\pi} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Phi_{\tau\varepsilon\lambda} - \Phi_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{BS_{\tau\varepsilon\lambda} - BS_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{B\left(S_{\tau\varepsilon\lambda} - S_{\alpha\rho\chi}\right)}{\Delta t} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL\Delta y}{\Delta t} \qquad (1)$$

Όμως, το $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ ισούται την ταχύτητα της ράβδου, άρα η σχέση (1) γίνεται $E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon L$.

Επειδή το κύκλωμα είναι κλειστό δημιουργείται επαγωγικό ρεύμα, του οποίου η φορά βρίσκεται από τον κανόνα του Lenz, που λέει ότι το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Για να συμβεί αυτό, το δευτερογενές μαγνητικό πεδίο, $B_{\varepsilon\pi}$, πρέπει να έχει φορά αντίθετη του B, από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, για την δημιουργία μαγνητικού πεδίου σε κυκλικό αγωγό, αφού το μαγνητικό πεδίο έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, το επαγωγικό ρεύμα, $I_{επ}$, έχει φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού και διαρρέει τον αγωγό ΚΛ με φορά από το Κ προς το Λ, όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



ii. Η ράβδος ΚΛ βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης Β και διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Κ προς το Λ, άρα δέχεται δύναμη Laplace, η οποία σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δαχτύλων είναι αντίθετη της ταχύτητας, δηλαδή προς τα πάνω, όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

Τη χρονική στιγμή t_o=0, η επαγωγική τάση είναι

$$E_{επ,0} = B\upsilon_o L = 2T\cdot 4\frac{m}{s}\cdot 1m \Rightarrow E_{επ,0} = 8V$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I_{επ,0} = \frac{E_{επ,0}}{R_1+R_2} = \frac{8V}{3\Omega+1\Omega} \Rightarrow I_{επ,0} = 2A$$

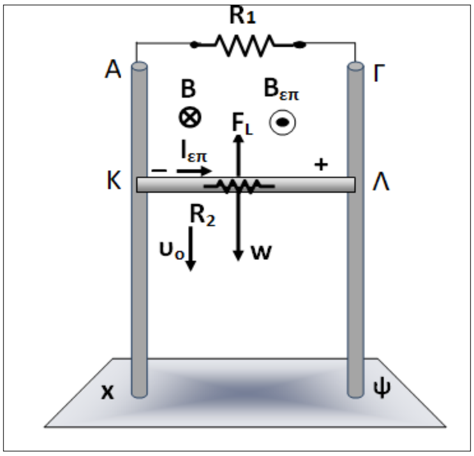
Το μέτρο της δύναμης Laplace τη χρονική στιγμή t_o=0 είναι

$$F_{L,0} = BI_{επ,0}L = 2T\cdot 2A\cdot 1m \Rightarrow F_{L,0} = 4N$$

iii. Τη χρονική στιγμή t_1, που η επιτάχυνση της ράβδου μηδενίζεται, η ταχύτητά της είναι ίση με υ_1=1m/s. Η επαγωγική τάση είναι

$$E_{επ} = B\upsilon_1 L = 2T\cdot 1\frac{m}{s}\cdot 1m \Rightarrow E_{επ} = 2V$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι



$I_{επ} = \dfrac{E_{επ}}{R_{ολ}}$ και τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με

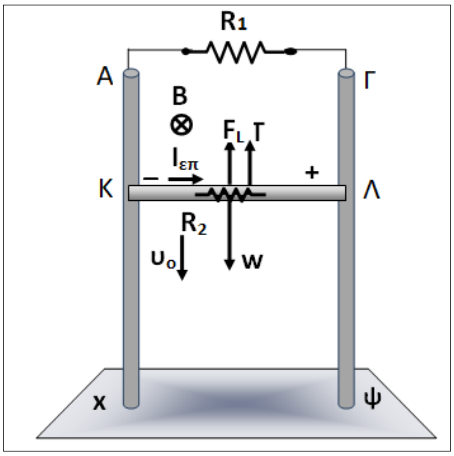
$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R_1+R_2} = \frac{2V}{3\Omega+1\Omega} \Rightarrow I_{επ} = 0,5A$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$F_L = BI_1L = 2T\cdot 0,5A\cdot 1m \Rightarrow F_L = 1N$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη ράβδο, τη χρονική στιγμή t_1, είναι μηδέν, σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

$$\Sigma F = m\alpha = 0 \Rightarrow w - F_L = 0 \Rightarrow mg - F_L = 0 \Rightarrow 0,5kg \cdot 10\frac{m}{s^2} - 1N = 0 \Rightarrow 4N = 0$$



Το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι αδύνατο, άρα οι κατακόρυφοι οδηγοί ασκούν δυνάμεις τριβής στη ράβδο.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη σχέση ισορροπίας συνυπολογίζοντας το μέτρο της συνισταμένης της τριβής, που θα είναι προς τα πάνω.

$$\Sigma F = m\alpha = 0 \Rightarrow w - F_L - T = 0 \Rightarrow$$
$$T = mg - F_L = 5N - 1N \Rightarrow T = 4N$$

Γ2. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη ράβδο, τη χρονική στιγμή t_o=0, αν πάρουμε θετικά προς τα κάτω, είναι:

$$\Sigma F = w - F_{L,0} - T = mg - F_{L,0} - T \Rightarrow \Sigma F = 5N - 4N - 4N \Rightarrow \Sigma F = -3N$$

Η αρχική ταχύτητα της ράβδου είναι $υ_0$=4m/s και έπειτα γίνεται $υ_1$=1m/s, άρα η κίνηση της ράβδου είναι επιβραδυνόμενη. Παίρνοντας θετικά προς τα κάτω, αφού το μέτρο της επιτάχυνσης της ράβδου είναι 2m/s^2, η αλγεβρική της τιμή είναι αρνητική, α=-2m/s^2. Το μέτρο της δύναμης Laplace σε συνάρτηση με την ταχύτητα ισούται με

$$F_L = BIL = B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}L = B\frac{B\upsilon L}{R_1 + R_2}L = \frac{B^2\upsilon L^2}{R_1 + R_2}$$

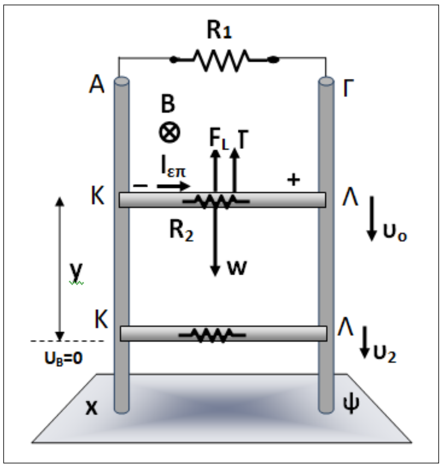
Άρα ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow w - F_L - T = m\alpha \Rightarrow mg - \frac{B^2\upsilon L^2}{R_1 + R_2} - T = m\alpha \Rightarrow \frac{B^2\upsilon L^2}{R_1 + R_2} = mg - m\alpha - T \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{(mg - m\alpha - T)(R_1 + R_2)}{B^2L^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{\left(0,5kg \cdot 10\frac{m}{s^2} - 0,5kg \cdot \left(-2\frac{m}{s^2}\right) - 4N\right)(3\Omega + 1\Omega)}{(2T \cdot 1m)^2} \Rightarrow$$

$$\upsilon = 2\frac{m}{s}$$

Γ3. Έστω y η μετατόπιση της ράβδου από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα υποδιπλασιάζεται. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η αρχική μηχανική ενέργεια της ράβδου, θα ισούται με την τελική μηχανική ενέργεια της ράβδου, συν τη θερμική ενέργεια που εκλύθηκε στους ωμικούς αντιστάτες, συν τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών. Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από την θέση που η ταχύτητα υ_2 της ράβδου γίνει μισή της αρχικής, $\upsilon_2 = \upsilon_0/2 = 2m/s$, έχουμε:



$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} + Q_{R_{ολ}} + Q_T \Rightarrow$$

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} + Q_{R_{ολ}} + |W_T| \Rightarrow mgy + \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2} = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^{\,2} + Q_{R_{ολ}} + |-Ty| \Rightarrow$$

$$mgy - Ty = \frac{1}{2}m\upsilon_2^{\,2} - \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2} + Q_{R_{ολ}} \Rightarrow (mg - T)y = \frac{1}{2}m\upsilon_2^{\,2} - \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2} + Q_{R_{ολ}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2^{\,2} - \frac{1}{2}m\upsilon_0^{\,2} + Q_{R_{ολ}}}{mg - T} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{2}0,5kg\left(2\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2}0,5kg\left(4\frac{m}{s}\right)^2 + 4,5J}{0,5kg \cdot 10\frac{m}{s^2} - 4N} \Rightarrow y = 1,5m$$

Γ4. Η ισχύς στις αντιστάσεις είναι

$$P_{R_{ολ}} = I^2 R_{ολ} = \left(\frac{E_{επ}}{R_{ολ}}\right)^2 R_{ολ} = \frac{B^2\upsilon^2L^2}{R_1 + R_2}$$

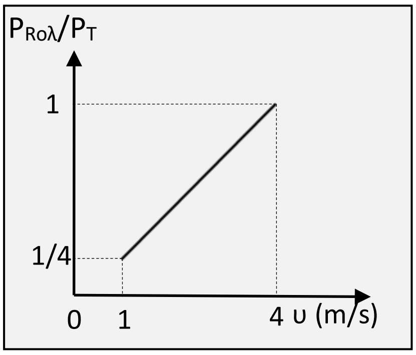
Ο ρυθμός μετατροπής ενέργειας σε θερμική λόγω των τριβών είναι

$$P_T = \frac{Q_T}{\Delta t} = \frac{|\Delta W_T|}{\Delta t} = \frac{T\Delta x}{\Delta t} = T\upsilon$$

Ο λόγος $P_{Rολ}/P_T$ σε συνάρτηση με την ταχύτητα της ράβδου, αν διαιρέσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις, είναι

$$\frac{P_{R_{ολ}}}{P_T} = \frac{\frac{B^2\upsilon^2L^2}{R_1+R_2}}{T\upsilon} = \frac{B^2\upsilon L^2}{(R_1+R_2)T} = \frac{(2T)^2\cdot(1m)^2}{(3\Omega+1\Omega)\cdot 4N}\upsilon \Rightarrow \frac{P_{R_{ολ}}}{P_T} = \frac{1}{4}\upsilon \quad (S.I)$$

Το διάγραμμα του λόγου $P_{Rολ}/P_T$ σε συνάρτηση με την ταχύτητα της ράβδου,δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Η ταχύτητα της ράβδου παίρνει τιμές από την αρχική τιμή, υ_0=4m/s, μέχρι την οριακή ταχύτητα, υ_1=1m/s, όταν η επιτάχυνση της ράβδου μηδενίζεται. Έπειτα η κίνηση της ράβδου είναι ευθύγραμμη ομαλή και η ταχύτητά της είναι σταθερή.

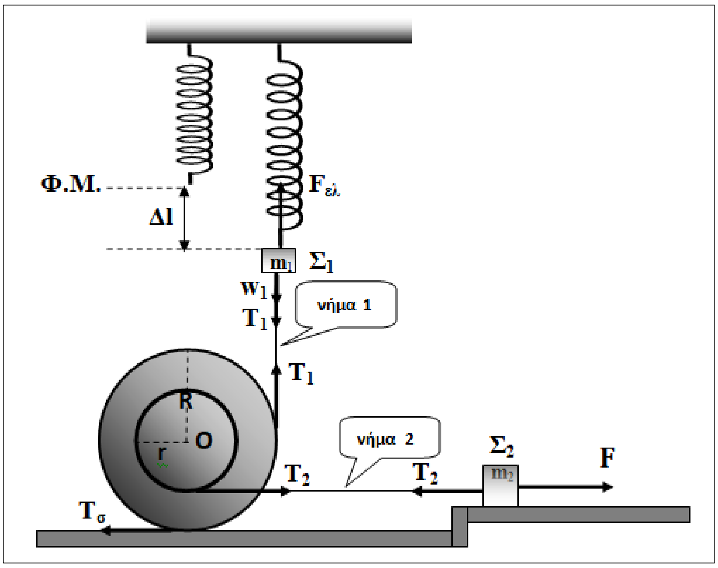


ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο σώμα $Σ_2$, στον οριζόντιο άξονα, ασκούνται η δύναμη F και η τάση T_2 του νήματος 2 και λόγω της ισορροπίας του ισχύει

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = 20N$$

Στη διπλή τροχαλία, στην οριζόντια διεύθυνση, ασκείται προς τα δεξιά, η τάση T_2 του νήματος 2 και λόγω της μεταφορικής ισορροπίας του θα πρέπει να υπάρχει μία οριζόντια δύναμη προς τα αριστερά και αυτή είναι η στατική τριβή, $T_{στ}$. Άρα



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_\sigma - T_2 = 0 \Rightarrow T_\sigma = T_2 = 20N$$

Λόγω της στροφικής ισορροπίας της τροχαλίας, για τη συνολική ροπή των δυνάμεων, ισχύει Στ=0. Βρίσκουμε το Στ=0 ως προς το κέντρο της τροχαλίας Ο,

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_\sigma R - T_1 R - T_2 r = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{T_\sigma R - T_2 r}{R} \Rightarrow T_1 = \frac{T_\sigma 2r - T_2 r}{2r} = \frac{2T_\sigma - T_2}{2} = \frac{2\cdot 20N - 20N}{2}$$

$$T_1 = 10N$$

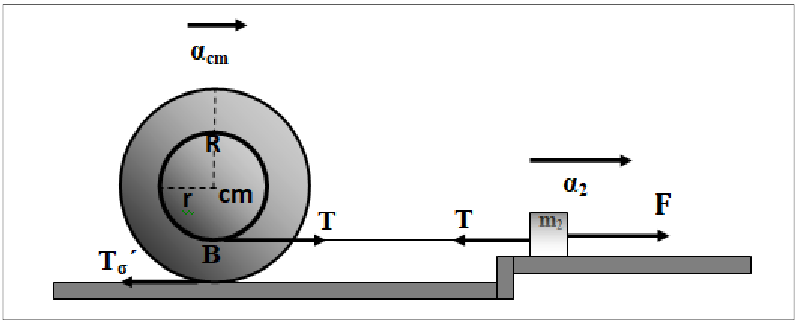
Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος στη θέση που ισορροπεί το σώμα $Σ_1$. Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται το βάρος του, w_1, η δύναμη του ελατηρίου, $F_{ελ}$, προς τα πάνω και η τάση του νήματος 1, T_1, προς τα κάτω. Λόγω της ισορροπίας του $Σ_1$ ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w_1 - T_1 = 0 \Rightarrow k\cdot\Delta\ell = m_1 g + T_1 \Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_1 g + T_1}{k} = \frac{1kg\cdot 10\frac{m}{s^2} + 10N}{100N/m}$$

$$\Delta\ell = 0,2m$$

Δ2. Τη χρονική στιγμή t_0=0 κόβουμε το νήμα 1, με αποτέλεσμα η διπλή τροχαλία να αρχίσει να κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει.

Στο σώμα $Σ_2$, στον οριζόντιο άξονα, ασκούνται η δύναμη F και η τάση T του νήματος 2.



Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F_x = m_2\alpha_2 \Rightarrow F - T = m_2\alpha_2 \quad (1)$$

Η στατική τριβή, $T_σ{'}$, συνεχίζει να υπάρχει και στην κύλιση και διατηρεί την ίδια φορά με πριν. Για τη μεταφορική κίνηση της τροχαλίας, ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow T - T_σ' = M\alpha_{cm} \quad (2)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας ισχύει

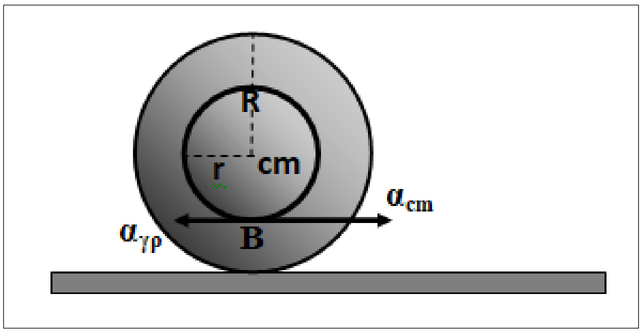
$$\Sigma\tau_{(O)} = I\alpha_{γων} \Rightarrow \tau_{T_σ}{'} + \tau_T = I\alpha_{γων} \Rightarrow T_σ{'}R - Tr = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων} \Rightarrow T_σ{'}R - T\frac{R}{2} = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων} \Rightarrow$$

$$T_σ{'} - \frac{T}{2} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow 2T_σ{'} - T = M\alpha_{cm} \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει

$$T_σ{'} = 2M\alpha_{cm} \quad (4)$$

Η επιτάχυνση του σώματος $Σ_2$, α_2, ισούται με την επιτάχυνση, α_B, του σημείου B της τροχαλίας, στο οποίο εφάπτεται το νήμα 2, και είναι



$$\alpha_2 = \alpha_B = \alpha_{cm} - \alpha_{γρ} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \alpha_{cm} - \alpha_{γων}r = \alpha_{γων}R - \alpha_{γων}r$$

$$\alpha_2 = \alpha_{γων}R - \alpha_{γων}\frac{R}{2} = \alpha_{γων}\frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_{cm}}{2} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2\alpha_2 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) προκύπτει

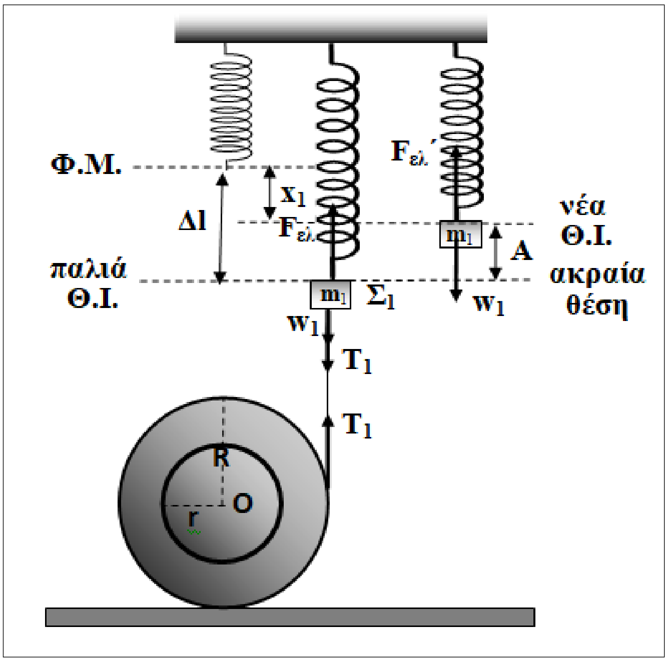
$$2T_σ{'} - T = M\alpha_{cm} \Rightarrow 2\cdot 2M\alpha_{cm} - T = M\alpha_{cm} \Rightarrow T = 3M\alpha_{cm} = 6M\alpha_2 \quad (6)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (1) και (6) προκύπτει

$$F - T = m_2\alpha_2 \Rightarrow F - 6M\alpha_2 = m_2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{F}{6M + m_2} = \frac{20N}{6\cdot 4kg + 1kg} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}8 m/s^2$$

Δ3. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται όταν το ελατήριο βρεθεί στο φυσικό του μήκος, $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Θα ελέγξουμε πότε φτάνει το σώμα $Σ_1$ στη θέση που το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος.



Όταν κόψουμε το νήμα 1, το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η παλιά θέση ισορροπίας του γίνεται η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, καθώς ξεκινάει να κινείται χωρίς ταχύτητα. Η νέα θέση ισορροπίας θα βρίσκεται x_1 κάτω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και προκύπτει από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}{}' - w_1 = 0 \Rightarrow kx_1 = m_1 g \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{1\text{kg}\cdot 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100\text{N/m}} \Rightarrow x_1 = 0{,}1\text{m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με

$$A = \Delta\ell - x_1 \Rightarrow A = 0{,}2\text{m} - 0{,}1\text{m} \Rightarrow A = 0{,}1\text{m}$$

Κατά συνέπεια η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Το $Σ_1$ θα φτάσει εκεί για πρώτη φορά μετά από μισή περίοδο και για δεύτερη μετά από μία επιπλέον περίοδο. Δηλαδή, συνολικά σε χρόνο

$$t = \frac{3T}{2} = \frac{3\cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}}{2} \Rightarrow t = 3\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\text{N/m}}} = 0{,}3\pi\,\text{s}$$

Η διπλή τροχαλία κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση

$$\alpha_{cm} = 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_{cm} = 2\cdot 0{,}8\text{m/s}^2 = 1{,}6\text{m/s}^2$$

και η απόσταση που θα διανύσει το κέντρο μάζας της στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι

$$x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 = \frac{1}{2}1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(0{,}3\pi\ \text{s})^2 \Rightarrow x_{cm} = 0{,}72\text{m}$$

Δ4. Την τυχαία χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_2$ είναι

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2{}^2 = \frac{1}{2}m_2(\alpha_2 t_1)^2 = \frac{1}{2}1\text{kg}\left(0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t_1\right)^2 \Rightarrow K_2 = 0{,}32t_1{}^2 \quad (7)$$

Η κινητική ενέργεια της διπλής τροχαλίας, που κάνει σύνθετη κίνηση, την ίδια χρονική στιγμή, είναι το άθροισμα της μεταφορικής και της στροφικής κινητικής ενέργειας και επειδή $\upsilon_{cm}=\omega R$, είναι

$$K_{\tau\rho} = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}Mu_{cm}^{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mu_{cm}^{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}Mu_{cm}^{2} + \frac{1}{4}Mu_{cm}^{2} \Rightarrow$$

$$K_{\tau\rho} = \frac{3}{4}Mu_{cm}^{2} = \frac{3}{4}M(\alpha_{cm}t_1)^2 = \frac{3}{4}\cdot 4kg\left(1{,}6\frac{m}{s^2}t_1\right)^2 \Rightarrow K_{\tau\rho} = 7{,}68t_1^2 \quad (8)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (8) και (7) προκύπτει ότι $K_{\tau\rho}=24K_2$

Το έργο της δύναμης F, σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, μετατρέπεται εξολοκλήρου σε κινητική ενέργεια στο σώμα Σ_2 και στη διπλή τροχαλία. Η στατική τριβή δεν καταναλώνει ενέργεια.

-Για την κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 είναι

$$W_F = K_2 + K_{\tau\rho} = K_2 + 24K_2 \Rightarrow W_F = 25K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{4}{100}W_F = 4\%W_F$$

-Για την κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι

$$W_F = K_2 + K_{\tau\rho} \Rightarrow K_{\tau\rho} = W_F - K_2 = W_F - \frac{4}{100}W_F \Rightarrow K_{\tau\rho} = 96\%W_F$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ:

Στο σώμα Σ_2 πηγαίνει το έργο της συνισταμένης δύναμης που του ασκείται, δηλαδή της F-T και το υπόλοιπο πηγαίνει στην τροχαλία.

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση προκύπτει

$$F - T = 1kg\cdot 0{,}8\frac{m}{s^2} \Rightarrow F - T = 0{,}8N$$

$$\frac{W_{F-T}}{W_F}100\% = \frac{(F-T)\Delta x}{F\Delta x}100\% = \frac{(F-T)}{F}100\% \Rightarrow \frac{W_{F-T}}{W_F}100\% = \frac{0{,}8}{20}100\% \Rightarrow$$

$$\frac{W_{F-T}}{W_F}100\% = 4\%$$

Άρα, στο σώμα Σ_2 πηγαίνει το 4% και στην τροχαλία το 96%.

Δ5. Από τη σχέση της στροφορμής της διπλής τροχαλίας υπολογίζουμε τη γωνιακή της ταχύτητα

$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}MR^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{\frac{1}{2}MR^2} \Rightarrow \omega = \frac{0{,}64kgm^2/s}{\frac{1}{2}4kg\cdot(0{,}2m)^2} \Rightarrow \omega = 8\frac{rad}{s}$$

Η διπλή τροχαλία κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, που συνδέεται με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας με τη σχέση

$$\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1,6\frac{m}{s^2}}{0,2m} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 8\frac{rad}{s^2}$$

Η χρονική στιγμή t_2 που η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας θα γίνει ίση με ω=8rad/s είναι

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = \frac{8\frac{rad}{s}}{8\frac{rad}{s^2}} \Rightarrow t_2 = 1s$$

Το έργο της δύναμης F, από την χρονική στιγμή $t_0=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_2, είναι

$$W_F = F \cdot x_2 = F \cdot \frac{1}{2}\alpha_2 {t_2}^2 \Rightarrow W_F = 20N \cdot \frac{1}{2} 0,8\frac{m}{s^2}(1\,s)^2 \Rightarrow W_F = 8J$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Βανταράκης Θάνος, Γκιόκας Κώστας, Μπετσάκος Παναγιώτης, Πασσαλίδης Δημοσθένης, Σφυρής Γιώργος,** φυσικοί.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Αντώνιο Παλόγο,** φυσικό.