Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Σε μια κρούση δύο σφαιρών:

(γ) το άθροισμα των ορμών των σφαιρών πριν από την κρούση είναι πάντα ίσο με το άθροισμα των ορμών τους μετά από την κρούση.

Α.2. Όταν μια μικρή σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε λείο κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται με αυτόν ελαστικά, τότε η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα έχει διεύθυνση:

(δ) κάθετη στον τοίχο.

Α.3. Η σταθερά επαναφοράς ενός συστήματος μάζας- ελατηρίου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο:

(γ) ισούται με τη σταθερά k του ελατηρίου.

Α.4. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αυξάνεται όταν το σώμα:

(α) κινείται προς ακραίες θέσεις της τροχιάς του.

Α.5.

(α) Σε μία απλή αρμονική ταλάντωση καθώς αυξάνεται το μέτρο της δύναμης επαναφοράς, αυξάνεται και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος που ταλαντώνεται. **Λάθος**

(β) Κρούση στο μικρόκοσμο ονομάζεται το φαινόμενο στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μικρές δυνάμεις για μεγάλο χρονικό διάστημα. **Λάθος**

(γ) Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες. **Σωστό**

(δ) Σε ένα σύστημα μάζας ελατηρίου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν διπλασιάσουμε τη μάζα του σώματος χωρίς να μεταβάλουμε το πλάτος της ταλάντωσης, τότε η ενέργεια της ταλάντωσης θα διπλασιαστεί. **Λάθος**

(ε) Σώμα Α συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αρχικά ακίνητο σώμα Β που έχει την ίδια μάζα με το Α. Τότε η ορμή του σώματος Α μετά την κρούση μηδενίζεται. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα μάζας m_2. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με ίσες ορμές.

Ο λόγος $\dfrac{m_1}{m_2}$ των δύο σφαιρών είναι:

(γ) 3

Μετά την ελαστική κρούση τα σώματα μετά θα αποκτούν ταχύτητες υ_1' και υ_2' για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon \qquad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon$$

Αφού θα έχουν την ίδια ορμή:

$$m_1 v_1' = m_2 v_2' \Rightarrow ....m_1 = 3m_2$$

Β.2. Δύο σώματα Α και Β κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Το σώμα Α έχει μάζα m_1 και κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 4m/s$. Το σώμα Β έχει μάζα $m_2 = 3kg$ και κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 2m/s$. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα κινείται με ταχύτητα μέτρου $V = 2m/s$.

Η μάζα του σώματος Α είναι:

(α) $m_1 = 2kg$

Για την πλάγια κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$$

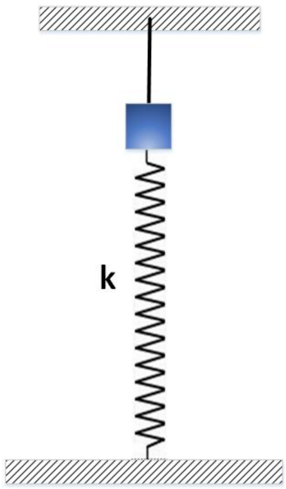
Αφού οι ορμές είναι κάθετες πριν την κρούση, εφαρμόζω την μέθοδο του παραλληλογράμμου για την διανυσματική άθροιση των ορμών.

$$(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2 = \Big((m_1 + m_2)V\Big)^2 \Rightarrow ...m_1 = 2kg$$

Β.3. Σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k. Με την βοήθεια ενός νήματος το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, όπως στο σχήμα. Σε μια χρονική στιγμή κόβω το νήμα, οπότε το σώμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Ο λόγος της Μέγιστης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, προς την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου $\dfrac{U_{max}}{U_{\varepsilon\lambda max}}$ είναι:

(γ) $\dfrac{1}{4}$



Την στιγμή που κόβεται το νήμα το ελατήριο βρίσκεται στην θέση φυσικού μήκους του, άρα αυτή η θέση θα είναι και η ακραία θέση της ταλάντωσης του. Η θέση ισορροπίας θα βρίσκεται χαμηλότερα κατά $\Delta l = A$ με Δl την παραμόρφωση του ελατηρίου λόγο του βάρους του σώματος. Στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = A = \frac{mg}{k}$$

Το ελατήριο έχει την μέγιστη παραμόρφωση του στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης δηλαδή όταν $\Delta l' = 2A$. Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{U_{max}}{U_{\varepsilon\lambda max}} = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}k(\Delta l')^2} = \frac{1}{4}$$

** Όπου βέβαια $D = k$ αφού το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση*

Θέμα Γ

Σώμα μάζας $m = 1kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση που εξελίσσεται στον οριζόντιο άξονα $x'Ox$ με θέση ισορροπίας το σημείο Ο. Για την ταλάντωση του σώματος σας δίνεται το διάγραμμα Δύναμης - χρόνου.

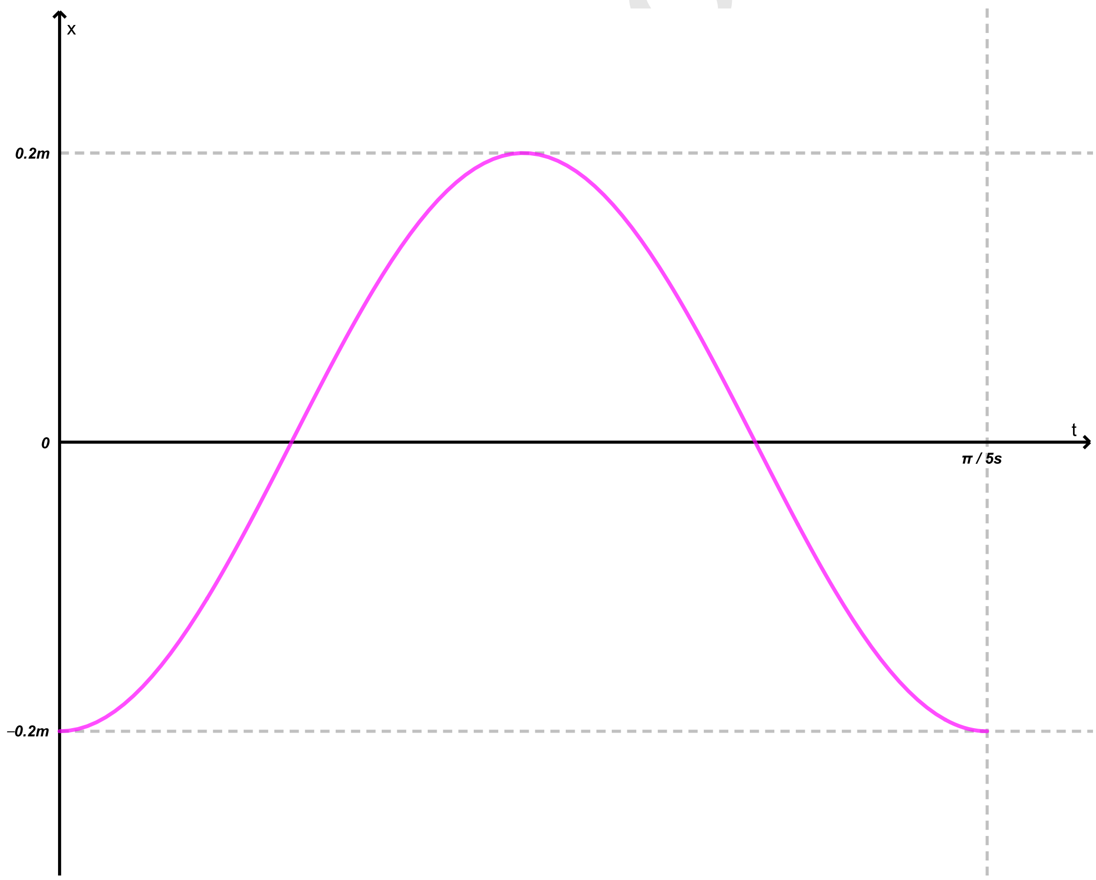
Από το διάγραμμα δύναμης χρόνου βλέπουμε ότι: $\Sigma F_{max} = DA = 20$, $\frac{2\pi}{5} = 2T \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 10rad/s$. Άρα $D = m\omega^2 = 100N/m$, οπότε $A = 0,2m$

Γ.1 Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα για να μετατοπιστεί το σώμα από την μια ακραία θέση στην άλλη και το διάστημα που διανύει το σώμα κατά την μετατόπιση αυτή.

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}s$$

$$S = 2A = 0,4m$$

Γ.2 Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.



Από το διάγραμμα παρατηρώ ότι την $t_o = 0$ η δύναμη έχει την μέγιστη θετική της τιμή, άρα το σώμκα βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση.

$$-A = A\eta\mu\left(0+\phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = -1 \Rightarrow \phi_o = \frac{3\pi}{2}$$

Οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο θα είναι:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Γ.3 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η κινητική ενέργεια του σώματος είναι για δεύτερη φορά ίση με με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για να υπολογίσω τις θέσεις στις οποίες κινητική και δυναμική ενέργεια είναι ίσες.

$$E = K + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

Την δεύτερη φορά που είναι ίσες οι δύο ενέργειες το σώμα διέρχεται από την θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$ *για πρώτη φορά.*

$$0,1\sqrt{2} = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$10t + \frac{3\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \ \text{ ή } \ 10t + \frac{3\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$$

Από την επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης και κρατώντας τον μικρότερο χρόνο προκύπτει:

$$t_1 = \frac{3\pi}{40}s$$

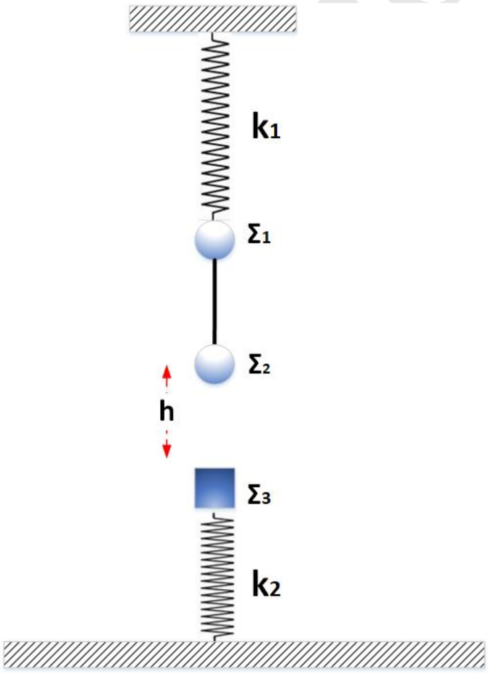
**Είναι προφανές ότι μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό με χρήση της αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος συντομότερα.*

Γ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Ορμής την χρονική στιγμή t_1.

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = -D\frac{\sqrt{2}}{2}A = -10\sqrt{2}kg \cdot m/s^2$$

Θέμα Δ

Στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1 = 100N/m$ ισορροπούν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = 1kg$ όπως στο σχήμα, με το Σ_1 να είναι στερεωμένο απευθείας στο ελατήριο και το Σ_2 στο άκρο κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Κάποια χρονική στιγμή σπάει το νήμα ανάμεσα στα σώματα.



Δ.1 Να δείξετε ότι το Σ_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την συχνότητα και το πλάτος της.

Αρχικά το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά Δl

$$\Sigma F_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = ...$$

Την στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα 1 ξεκινά με μηδενική ταχύτητα. Στην θέση ισορροπίας του το ελατήριο είναι επιμηκυσμένο κατά Δl_1

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g = k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = ...$$

Σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας του ισχύει:

$$\Sigma F = m_1 g - k\left(\Delta l_1 + x\right) = m_1 g - k\Delta l_1 - kx \Rightarrow \Sigma F = -kx$$

Άρα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k = m_1\omega^2$ και πλάτος $A = \Delta l - \Delta l_1 = 0,1m$. Από τα παραπάνω προκύπτει η συχνότητα της ταλάντωσης $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{5}{\pi}Hz$

Το Σ_2 αφού διανύσει κατακόρυφη απόσταση h συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 3kg$ που ισορροπεί ακίνητο στο πάνω άκρο δεύτερου κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_2 = 400N/m$.Το συσσωμάτωμα που θα προκύψει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $5cm$.

Δ.2 Θεωρώντας ως θετική την φορά της ταχύτητας του Σ_2 πριν την κρούση να γράψετε την χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Για την πτώση του Σ_2 εφαρμόζω το ΘΜΚΕ

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 \tag{1}$$

Για την πλαστική κρούση με το Σ_3 εφαρμόζω την ΑΔΟ

$$m_2 \upsilon = (m_2 + m_3)\, \upsilon_k \tag{2}$$

Το Σ_3 αρχικά ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά Δl_3

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_3 g = k \Delta l_3 \Rightarrow \Delta l_3 = ...$$

Το συσσωμάτωμα που προκύπτει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l'$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_3 + m_2)\, g = k \Delta l' \Rightarrow \Delta l' = ...$$

Η θέση στην οποία πραγματοποιείται η κρούση είναι μια τυχαία θέση που απέχει $y_1 = \Delta l' - \Delta l_3 = \dfrac{1}{40} m$ από την νέα θέση ισορροπίας. Σε αυτή την θέση εφαρμόζω την ΑΔΕΤ αφού γνωρίζω και το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

$$\frac{1}{2} k_2 A^2 = \frac{1}{2}(m_3 + m_2)\, \upsilon_k^2 + \frac{1}{2} k_2 y_1^2 \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\sqrt{3}}{4} m/s$$

Άρα $(2) \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{3} m/s$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την ΘΙΤ θα είναι:

$$y = A \eta \mu \,(\omega t + \phi_o)$$

όπου $D = k_2 = (m_2 + m_3)\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 rad/s$

Για την αρχική φάση έχω ότι την $t_o = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση $y = -y_1$ και έχει θετική ταχύτητα

$$-0,025 = 0,05\eta\mu\phi_o \Rightarrow \eta\mu\phi_o = -\frac{1}{2}$$

$$\upsilon > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\phi_o = \dfrac{11\pi}{6}$*. Προφανώς θα μπορούσα να κάνω χρήση της αναπαράστασης του περιστρεφόμενου διανύσματος.*

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$y = 0,05\eta\mu\left(10t + \frac{11\pi}{6}\right) \quad (S.I.)$$

Δ.3 Να υπολογίσετε την κατακόρυφη απόσταση h που διάνυσε το Σ_2 πριν την κρούση.

$(1) \Rightarrow h = 0,15m$

Δ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας την στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση στην οποία έγινε η κρούση.

Την στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση που έγινε η κρούση θα έχει ταχύτητα αντίθετη με αυτή που είχε την στιγμή της κρούσης λόγω της Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης. Άρα:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = -Dy\upsilon = -400 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -2,5\sqrt{3}j/s$$

Δ.5 Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης ισχύει ότι:

$$\Sigma\vec{F} = -D\vec{y} \Rightarrow \vec{F_{el}} + \vec{w} = -D\vec{y} \Rightarrow F_{el} = -\left(m_3 + m_2\right)g - k_2 y$$

$$F_{el} = -40 - 400y \quad -0,05 \leq y \leq 0,05 \quad (S.I.)$$

** είναι προφανές ότι αφού ως θετική φορά ορίζεται η φορά της αρχικής ταχύτητας η δύναμη του ελατηρίου πρέπει να είναι συνεχώς αρνητική αφού έχει πάντα φορά προς τα πάνω που είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.*