Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Απλή Αρμονική Ταλάντωση - Κρούσεις

Ενδεικτικές Λύσεις - Γ έκδοση

Α.1. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύει ότι:

(δ) η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή.

Α.2. Σφαίρα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β μεγαλύτερης μάζας. Η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση:

(γ) θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική,

Α.3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του είναι μέγιστος σε απόλυτη τιμή όταν :

(β) η ορμή του σώματος είναι μηδέν,

Α.4. Σε μια γραμμική αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση: $x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι:

(γ) $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Α.5.

(α) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος της. **Λάθος**

(β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, το ταλαντούμενο σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι μηδενικός. **Σωστό**

(γ) Η σταθερά επαναφοράς μιας ταλάντωσης είναι ανάλογη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος. **Λάθος**

(δ) Σκέδαση ονομάζεται κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μικρές δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. **Λάθος**

(ε) Σε μια κρούση αμελητέας χρονικής διάρκειας η δυναμική ενέργεια των σωμάτων, που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο , δεν μεταβάλλεται. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Σε μια γραμμική αρμονική ταλάντωση περιόδου Τ η απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu(2\pi t).$$

Ο λόγος του μέτρου της επιτάχυνσης προς το μέτρο της ταχύτητας την χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ θα ισούται με:

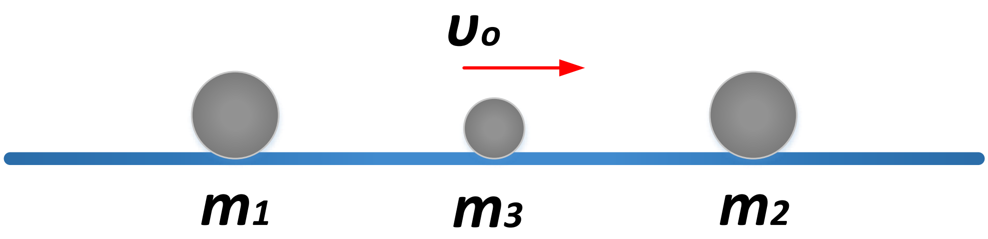
(α) 2π

$$\frac{|a|}{|\upsilon|} = \frac{|-\omega^2 A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}\right)|}{\omega A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}\right)} = \omega = 2\pi$$

Β.2. Όλες οι σφαίρες του σχήματος βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ελαστικές και αρχικά είναι ακίνητες. Οι μάζες των σφαιρών συνδέονται με τη σχέση: $m_1 = m_2 = 4m_3$.

Στη σφαίρα μάζας m_3 δίνουμε αρχική ταχύτητα υ_o και οι κρούσεις που ακολουθούν είναι κεντρικές. Ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι:

(α) 2



Για την πρώτη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3+m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3' = \frac{m_3-m_2}{m_3+m_2}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon_3' = -\frac{3}{5}\upsilon_o$$

Το Σ_3 αλλάζει φορά και με την ταχύτητα υ_3' συγκρούεται με το ακίνητο Σ_1, άρα για την δεύτερη κρούση:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_3}{m_3+m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_2' = -\frac{6}{25}\upsilon_o$$

$$\upsilon_3'' = \frac{m_3-m_1}{m_3+m_1}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = -\frac{3}{5}\upsilon_3' \Rightarrow \upsilon_3'' = \frac{9}{25}\upsilon_o$$

Το Σ_1 μετά τις παραπάνω δύο κρούσεις θα κινείται προς τα αριστερά και τα δύο άλλα σώματα προς τα δεξιά. Αφού $|\upsilon_2'| > |\upsilon_3''|$ δεν θα υπάρξει άλλη κρούση. Άρα θα πραγματοποιηθούν δύο κρούσεις συνολικά.

Β.3. Σφαίρα Α μάζας m κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά και έκκεντρα με ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Μετά την σύγκρουση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν την ίδια γωνία ϕ με την αρχική διεύθυνση κίνησης της σφαίρας Α. Η γωνία ϕ είναι ίση με:

(β) 45^o

Μετά την κρούση τα δύο σώματα θα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 2ϕ. Για την ελαστική κρούση ισχύουν:

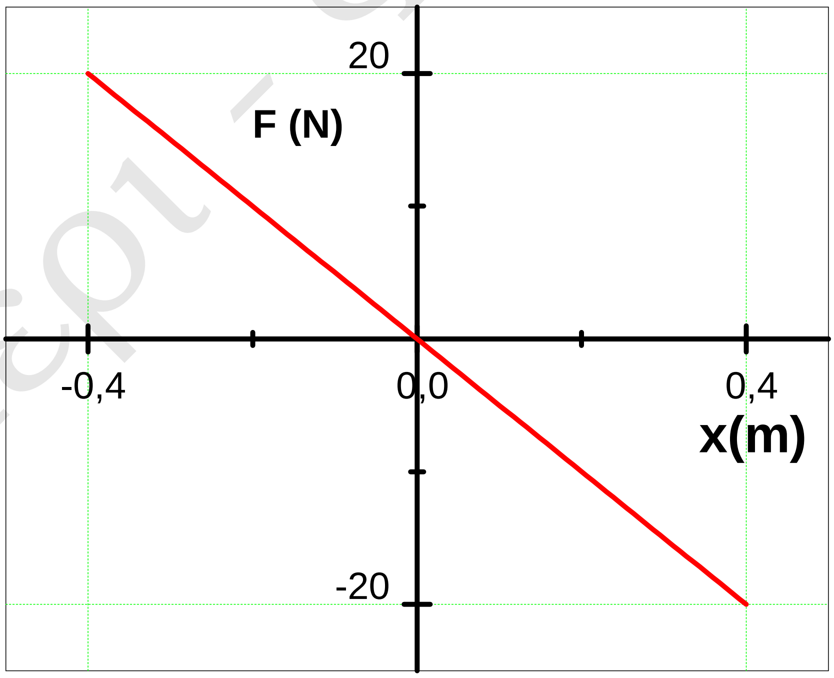
$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} \Rightarrow mv = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2 + 2(mv_1)(mv_2)\sigma\upsilon\nu(2\phi)}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu(2\phi) = 0 \Rightarrow 2\phi = 90^o$

Θέμα Γ

Μικρό σώμα μάζας $m = 2kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και γωνιακής συχνότητας ω, σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση κατάλληλης δύναμης $\Sigma F = f(x)$, που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα.



Σας είναι γνωστό ότι το σώμα την χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται επιβραδυνόμενο από την θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

Από το διάγραμμα υπολογίζω το πλάτος $A = 0,4m$ και από την κλίση του την σταθερά επαναφοράς $D = 50N/m$.

για την αρχική φάση: $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A = A\eta\mu(\phi_o) \Rightarrow \eta\mu(\phi_o) = \eta\mu(\frac{\pi}{4})$ και $\upsilon > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi_o) > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{4}rad$

Γ.1 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δt για δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{5}s$$

Γ.2 Να γραφτούν οι χρονικές εξισώσεις $f(t)$ της απομάκρυνσης (x), ταχύτητας (υ), επιτάχυνσης (α) του σώματος και να σχεδιαστεί το διάγραμμα απομάκρυνσης - χρόνου ($x - t$).

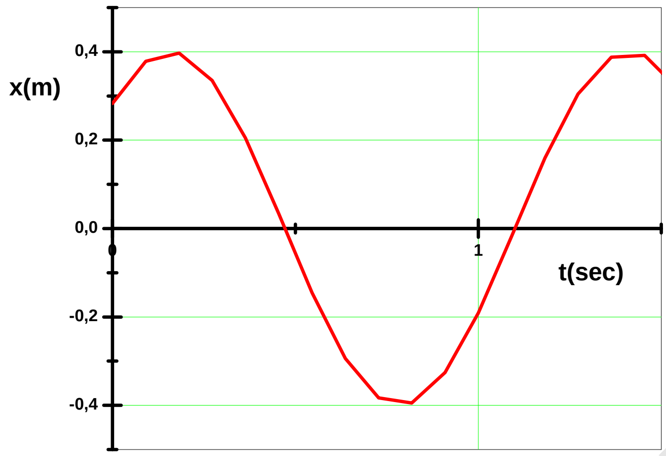
Οι χρονικές εξισώσεις στο S.I. είναι:

$$x = 0,4\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4})$$

$$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu(5t + \frac{\pi}{4})$$

$$a = -10\eta\mu(5t + \frac{\pi}{4})$$

και το διάγραμμα θέσης - χρόνου:



Γ.3 Να υπολογίσετε την ελάχιστη χρονική διάρκεια για την μετάβαση του σώματος από την αρχική θέση, στην θέση που μηδενίζεται για δεύτερη φορά η Δυναμική Ενέργεια.

Η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται για δεύτερη φορά, όταν το σώμα διέρχεται από την Θ.Ι.Τ. με αρνητική ταχύτητα. Με τη χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος προκύπτει:

$$\Delta\phi = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{7\pi}{20}s$$

(Θα μπορούσε να λυθεί και με την χρήση της εξίσωσης κίνησης !)

Γ.4 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας την χρονική στιγμή που το μέτρο της δύναμης ΣF είναι ίσο με το μισό της μέγιστης τιμής της για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v = -Dxv$, επίσης $|\Sigma F| = \frac{DA}{2} = Dx \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} = \pm 0,2m$

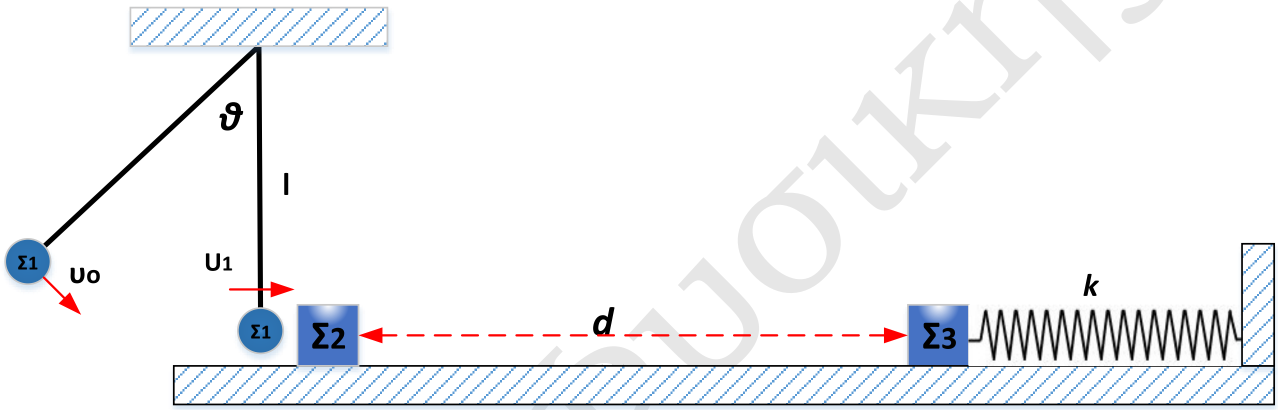
Με την χρήση της ΑΔΕΤ προκύπτει η ταχύτητα: $E = K + U \Rightarrow v = \pm\sqrt{3}m/s$.

Για πρώτη φορά $x = 0,2m$ και $v = -\sqrt{3}m/s$

Άρα $\frac{dK}{dt} = +10\sqrt{3}J/s$

Θέμα Δ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ ισορροπεί κρεμασμένο από νήμα μήκους $l = 1,6m$. Εκτρέπουμε το σώμα, ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ με την αρχική του θέση και από την θέση αυτή το εκτοξεύουμε με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon_o}$, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο το Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 8m/s$ και προσπίπτει κεντρικά και ελαστικά σε αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$.



Αμέσως μετά την κρούση το Σ_2 ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο και αφού διανύσει διάστημα $d = 1,75m$ προσκρούει σε αρχικά ακίνητο σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 1,5kg$ με αποτέλεσμα την δημιουργία συσσωματώματος.

Το Σ_3 είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 36N/m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το ελατήριο την στιγμή της κρούσης βρίσκεται στο φυσικό μήκος του και τα σώματα Σ_2 και Σ_3 παρουσιάζουν με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Να υπολογίσετε:

Δ.1 το μέτρο της μεταβολής της ορμής του Σ_1 εξαιτίας της κρούσης του με το Σ_2.

Για την ελαστική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 4m/s$$

Η μεταβολή της ορμής θα είναι:

$$|\Delta P_1| = |m_1\upsilon_1' - 0| = 4kg\cdot m/s$$

Δ.2 την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2.

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T - m_2 g = \frac{m\upsilon_2'^2}{l} \Rightarrow T = 60N$$

Δ.3 τη μέγιστη γωνία που θα διαγράψει το νήμα μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την ανύψωση του Σ_2 μετά την κρούση

$$0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -m_1 g h \Rightarrow h = 0,8m$$

Από το τρίγωνο που σχηματίζεται

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{l-h}{l} = ...$$

Δ.4 την ενέργεια που χάθηκε στο περιβάλλον εξαιτίας της πλαστικής κρούσης.

Για την επιβράδυνση του Σ_2 πριν την δεύτερη κρούση του εφαρμόζω το ΘΜΚΕ

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow \upsilon_2'' = 3m/s$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζω την Α.Δ.Ο.:

$$m_2 \upsilon_2'' = (m_2 + m_3)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = 2m/s$$

Οι ζητούμενες ενεργειακές απώλειες λόγω της πλαστικής κρούσης θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2''^2 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = ...$$

Δ.5 την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Για την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, εφαρμόζω ΘΜΚΕ στο συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

$$0 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_k^2 = 0 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \mu(m_2 + m_3)g\Delta l$$

Λύνω την δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει και βρίσκω την ζητούμενη παραμόρφωση Δl.

Σημείωση:

Είναι προφανές ότι απαιτείται σχήμα για την επίλυση των θεμάτων, ειδικά εκείνων που έχουν ελατήρια. Για λόγους περιορισμένου χρόνου δεν τα παραθέτω στις λύσεις μου.