# **Διαγώνισμα** *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

# Μηχανική Στερεού - μέρος ΙΙ

Ενδεικτικές Λύσεις

Κυριακή 28 Φλεβάρη 2016



# Θέμα Α

**Α.1.** Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί η στροφορμή του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια:

**(δ)** τετραπλασιάζεται

**Α.2.** Σε ένα σώμα ασκείται ζεύγος δυνάμεων:

**(β)** η στροφορμή του θα μεταβληθεί

**Α.3.** Σε στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής ενεργεί σταθερή ροπή .Το μέγεθος που αυξάνεται με σταθερό ρυθμό είναι:

**(γ)** η στροφορμή του στερεού.

**Α.4.** Υποθέτουμε ότι κλιματολογικές συνθήκες επιβάλλουν την μετανάστευση του πληθυσμού της Γης προς τις πολικές ζώνες. Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της:

**(γ)** θα αυξηθεί.

**A.5.**

**(α)** Η μεταφορική κίνηση ενός μηχανικού στερεού μπορεί να είναι καμπυλόγραμμη . **Σωστό**

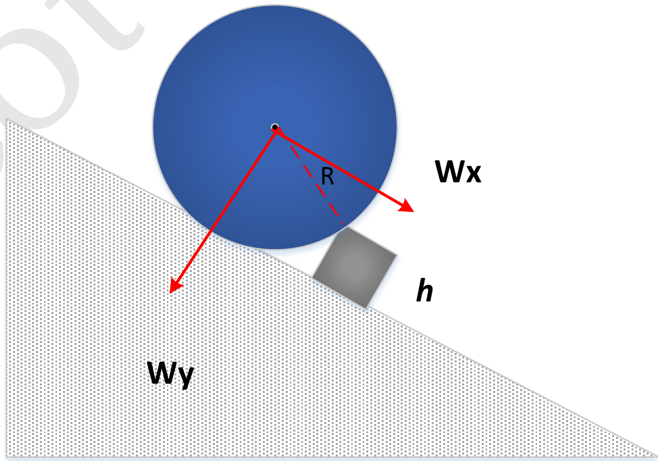
**(β)** Η ροπή αδράνειας εκφράζει στην περιστροφή ότι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση και, όπως και η μάζα, είναι ένα σταθερό μονόμετρο μέγεθος. **Λάθος**

**(γ)** Η περίοδος της ιδιοπεριστροφής της Γης είναι σταθερή επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δεν δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της δύναμης αυτής διέρχεται από το κέντρο μάζας της Γης. **Σωστό**

**(δ)** Στην κύλιση ενός τροχού, το υλικό σημείο που απέχει την μεγαλύτερη απόσταση από το δάπεδο έχει κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από την αντίστοιχη ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού. **Λάθος**

**(ε)** Το συνολικό έργο της τριβής που ασκείται σε ένα στερεό το οποίο κυλίεται με ταυτόχρονη ολίσθηση είναι μηδενικό. **Λάθος**

# Θέμα Β



**B.1.** Η ομογενής και συμπαγής σφαίρα ακτίνας $R$ του σχήματος ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi$ με την βοήθεια ακλόνητου εμποδίου το οποίο έχει ύψος $h = \frac{R}{2}$.

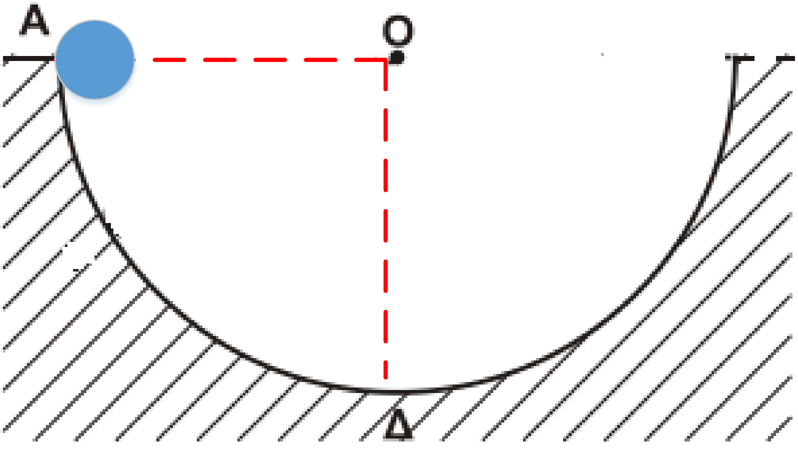
Η σφαίρα υπερπηδά το εμπόδιο αν η γωνία κλίσης $\phi$ του κεκλιμένου επιπέδου είναι μεγαλύτερο από:

**(β)** $60^o$

*Η σφαίρα θα περιστραφεί με στιγμιαίο άξονα περιστροφής το σημείο επαφής της σφαίρας με το σώμα, αν η ροπή της οριζόντιας συνιστώσας του βάρους υπερνικήσει την ροπή της κατακόρυφης συνιστώσας του βάρους δηλαδή:*

$$\tau_{w_x} > \tau_{w_y} \Rightarrow mg\eta\mu\phi\frac{R}{2} > mg\sigma\upsilon\nu\phi\sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} \Rightarrow \epsilon\phi\phi > \sqrt{3}$$

**B.2.** Μια ομογενής σφαίρα μάζας $m$ και ακτίνας $r$ αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από το ανώτερο σημείο Α ενός ημικυκλικού μεταλλικού οδηγού α-κτίνας $R = 8r$. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η ροπή αδράνειας ως προς τη κέντρο μάζας της ισούται με $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$.




Όταν η σφαίρα διέρχεται από το κατώτερο σημείο Δ της τροχιάς της η κάθετη δύναμη που δέχεται από το ημισφαίριο έχει μέτρο:

**(γ)** $\frac{17}{7}mg$

*Επειδή το κέντρο μάζας της σφαίρας κινείται πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R - r$ θα ισχύει ότι:*

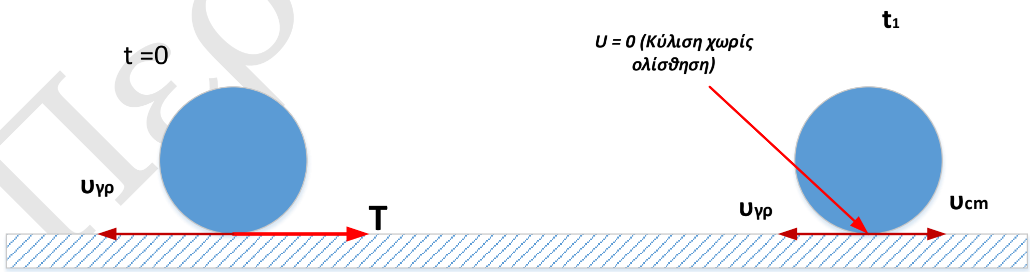
$$N - mg = F_k \Rightarrow N = m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R - r} + mg$$

*Για την κάθοδο του σώματος θα εφαρμόσω το ΘΜΚΕ ώστε να υπολογίσω την ταχύτητα του κέντρου μάζας στο κατώτερο σημείο Δ. Λαμβάνω υπόψιν ότι στην κύλιση χωρίς ολίσθηση $\upsilon_{cm} = \omega r$*

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = mg(R - r) \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = \frac{10gR}{8}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $N = \frac{17}{7}mg$

**B.3.** Λεπτή κυκλική στεφάνη ακτίνας $R$ και μάζας $M$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_o$, ενώ το κέντρο μάζας της είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε τη στεφάνη, χωρίς να επηρεάσουμε την κίνηση της σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής $\mu$. Την χρονική στιγμή $t_1$ η ταχύτητα του σημείου επαφής της στεφάνης με το δάπεδο θα έχει μηδενιστεί. Για την χρονική στιγμή $t_1$ ισχύει:




**(α)** $t_1 = \frac{\omega_o R}{2\mu g}$

*Η ροπή αδράνειας για την κυκλική στεφάνη θα είναι:*

$$I = m_1R^2 + m_2R^2 + m_3R^2 + ..... \Rightarrow I = MR^2$$

Η τριβή ολίσθηση θα είναι ίση με $T = \mu N = \mu mg$. Εφαρμόζωντας τους θεμελιώδεις νόμους της μηχανικής για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα προκύψουν οι επιταχύνσεις.

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\mu g}{R}$$

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \mu g$$

*Το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει την χρονική στιγμή $t_1$ που η ταχύτητα του σημείου επαφής με το δάπεδο αποκτά ταχύτητα μηδέν, δηλαδή την στιγμή που η ταχύτητα λόγο της στροφικής κίνησης γίνει ίση με την ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης.*

$$\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \alpha_{cm}t_1 = (\omega_o - \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1)R \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_o R}{2\mu g}$$

# Θέμα Γ

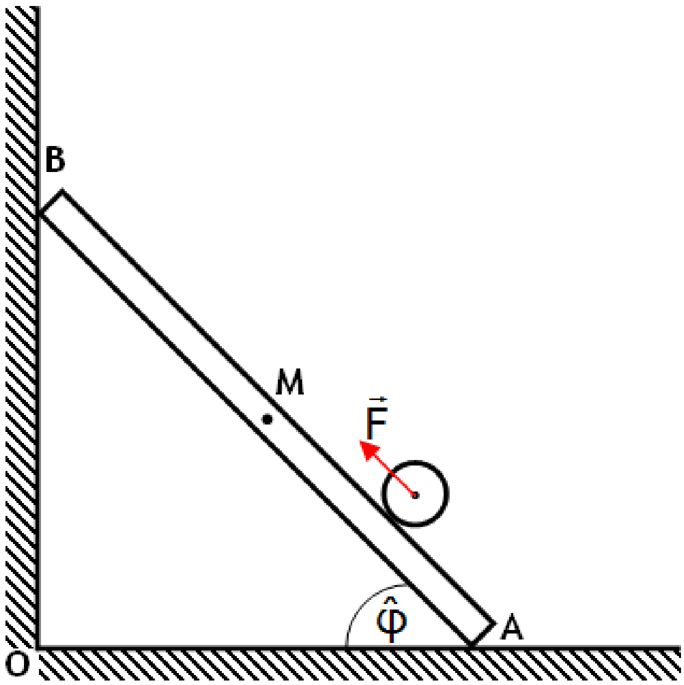
Η λεπτή ομογενής δοκός ΑΒ του σχήματος μήκους $L = 7,5\sqrt{2}m$και μάζας $M = 20kg$ ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο ΟΒ και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\phi = 45^o$ με το οριζόντιο δάπεδο. Ένας ομογενής, λεπτός δίσκος μάζας $m = 1kg$ και ακτίνας $R$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος της δοκού προς το άκρο Β, υπό την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 20\sqrt{2}N$, παράλληλης στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**Γ.1** Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας $\alpha_{cm}$του δίσκου.

*Εφαρμόζω για τον δίσκο τους νόμους της κίνησης*

– **Μεταφορική Κίνηση**

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\phi - T_s = ma_{cm} \quad , \Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\phi = N$$




– **Περιστροφική Κίνηση**

$$\Sigma\tau = I a_\gamma \Rightarrow T_s R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma$$

– **Συνθήκη Κύλισης χωρίς ολίσθηση**

$$a_{cm} = a_\gamma R$$

*Λύνω το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και προκύπτει:* $a_{cm} = 10\sqrt{2} m/s^2$

**Γ.2** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}$ του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο Β της δοκού, αν ο δίσκος ξεκίνησε να κινείται από τη βάση Α χωρίς ταχύτητα.

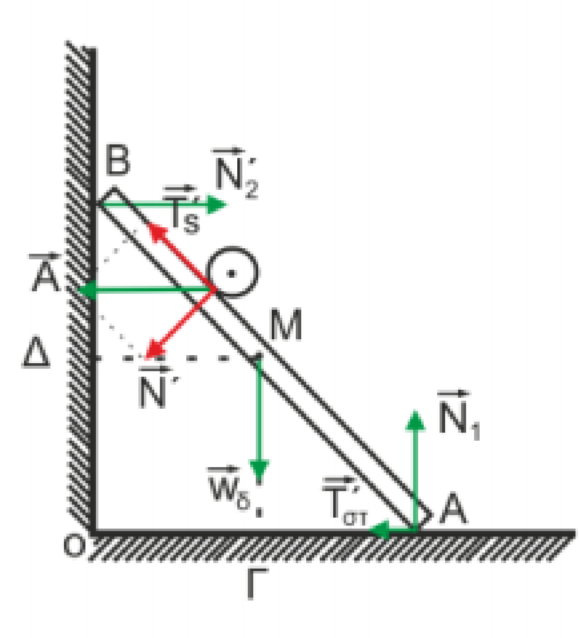
*Ο δίσκος ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση:*

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t \quad x_{cm} = L = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

*Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:*

$$\upsilon_{cm} = 10\sqrt{3} m/s$$

**Γ.3** Να υπολογίσετε το μέτρο και την διεύθυνση της δύναμης που ασκεί ο δίσκος στην ράβδο κατά την άνοδο.




*Ο δίσκος ασκεί στην ράβδο δύο δυνάμεις την Στατική τριβή που είναι παράλληλη στην ράβδο και την κάθετη αντίδραση που είναι κάθετη στην ράβδο. Υπολογίζω πρώτα την δύναμη που ασκεί η ράβδος στον δίσκο και η ¨αντίδραση¨ της θα είναι η δύναμη στην ράβδο.*

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y = mg\sigma\upsilon\nu\phi = 5\sqrt{2}N$$

$$T_s = \frac{1}{2}ma_{cm} = 5\sqrt{2}N$$

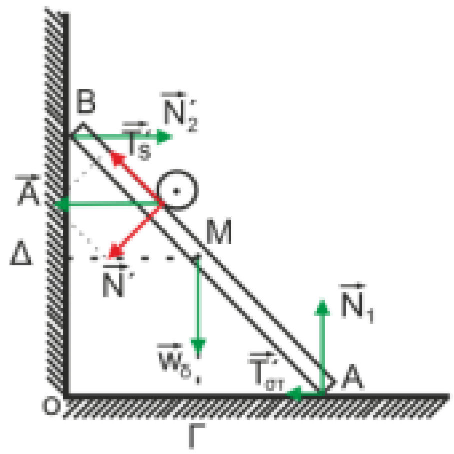
*Η συνισταμένη δυνάμεων θα είναι:*

$$A = \sqrt{T_s^2 + N^2} = 10N$$

Η κατεύθυνση της θα είναι $\epsilon\phi\theta = \dfrac{N}{T_s} = 1$

**Γ.4** Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δαπέδου ώστε ο δίσκος να φτάσει στο άκρο Β της δοκού, χωρίς η δοκός να ολισθήσει στο δάπεδο.

*Εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας για την δοκό:*




$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = Mg = 200N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = T_s + A \Rightarrow N_2 = T_s + 10$$

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow N_2 L\eta\mu\phi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi = +FL\eta\mu_\phi \Rightarrow N_2 = 110N$$

*Από τα παραπάνω προκύπτει ότι* $T_s = 100N$

*Για να μην ολισθαίνει η δοκός πρέπει :*

$$T_s \leq \mu_s N_1 \Rightarrow \mu_s \geq 0,5 \Rightarrow \mu_{s(min)} = 0,5$$

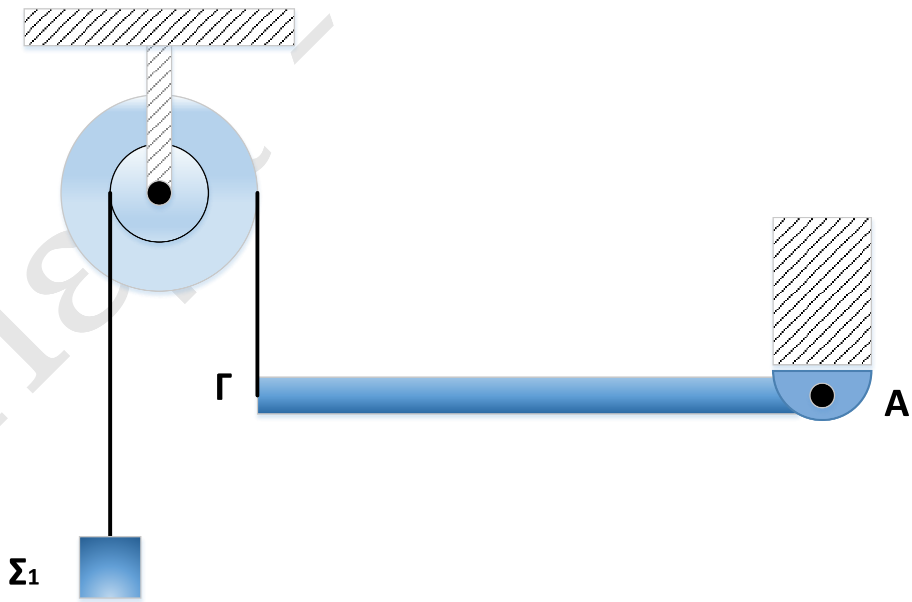
**Γ.5** Να υπολογίσετε το % ποσοστό του έργου της δύναμης $F$ που έχει μετατραπεί σε Κινητική ενέργεια περιστροφής κατά την μετακίνηση από την θέση Α στην θέση Β.

$$\frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{W_F} \cdot 100\% = 20\%$$

**Τα σχήματα είναι από το study4exams.gr*

# Θέμα Δ

Σας δίνεται μια διπλή τροχαλία που αποτελείται από δύο ομόκεντρους δίσκους που είναι συγκολλημένοι μεταξύ τους και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

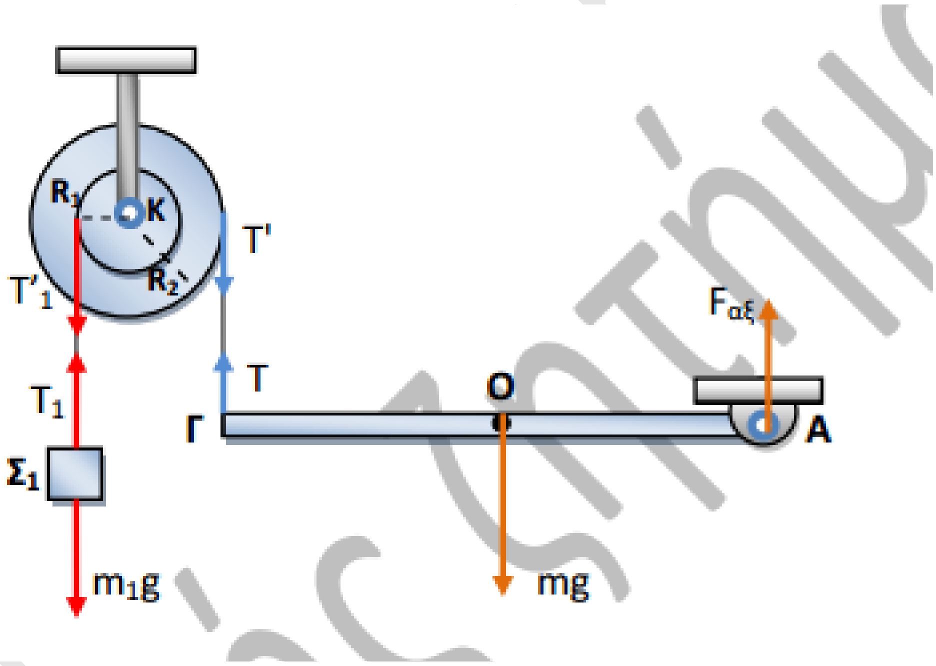



Ο δίσκος (1) έχει ακτίνα $R_1 = 0,2m$ και μάζα $M_1 = 1kg$ και έχουμε τυλίξει στην περιφέρεια του αβαρές και μη εκτατό νήμα στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχουμε συνδέσει σώμα $\Sigma_!$ μάζας $m_1$. Ο δίσκος (2) έχει ακτίνα $R_2 = 2R_1$ και μάζα $M_2 = 2M_1$ και έχουμε τυλίξει σε αυτόν αβαρές και μη εκτατό νήμα στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχουμε συνδέσει το άκρο Γ μιας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδους μάζας $m = 1kg$ και μήκους $L = 0,3m$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άλλο άκρο της Α που είναι στερεωμένο σε άρθρωση.

**Δ.1** Αν το σύστημα των τριών σωμάτων ισορροπεί να υπολογίσετε:

**α.** τη μάζα $m_1$ του σώματος $\Sigma_1$.

*Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας σε κάθε σώμα. Για την ράβδο:*




$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow TL = mg\frac{L}{2} \Rightarrow T = 5N = T' \tag{1}$$

*Για την τροχαλία:*

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T_1'R_1 = T'R_2 \Rightarrow T_1' = 10N = T_1 \tag{2}$$

*Για το σώμα:*

$$m_1 g = T_1 \Rightarrow m_1 = 1kg \tag{3}$$

**β.** το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

*Για την ράβδο:*

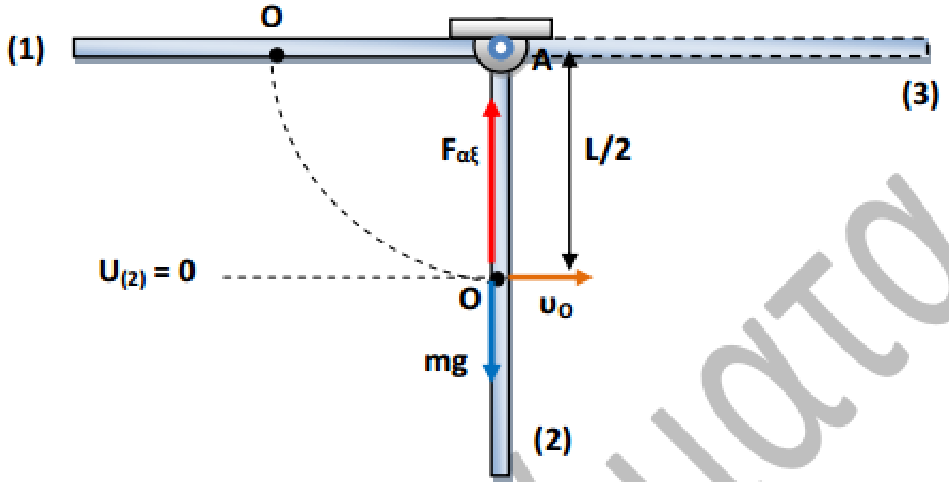
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha\xi} + T = mg \Rightarrow F_{\alpha\xi} = 5N \quad (4)$$

**Δ.2** Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t_o = 0$ κόβουμε το νήμα που συγκρατεί την ράβδο. Να υπολογίσετε:

*Εφαρμόζω το Θεώρημα Steiner για την ράβδο:*

$$I = I_{cm} + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

*Η ράβδος αποκτά την μέγιστη ταχύτητα της στην κατακόρυφη θέση, εφαρμόζω ΘΜΚΕ για την κάθοδο της ράβδου:*

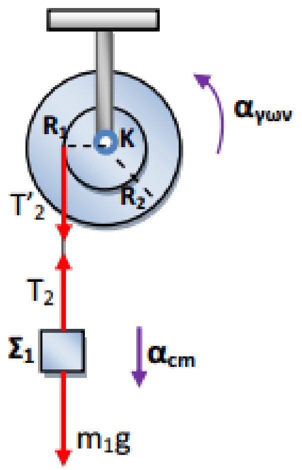



$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega = 10rad/s$$

*Υπολογίζω την ροπή αδράνειας για το σύστημα της διπλής τροχαλίας:*

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2$$

*Για το σύστημα τροχαλίας - μάζας εφαρμόζω τους Νόμους της Κίνησης:*




$$mg - T_2 = ma$$

$$T_2R_1 = Ia_\gamma$$

$$a = a_\gamma R_1$$

*Προκύπτει ότι:* $a = \frac{20}{11}m/s$ *και* $a_\gamma = \frac{100}{11}m/s^2$

**α.** τη χρονική στιγμή $t_1$ που η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας γίνεται τετραπλάσια από την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου κατά την κάθοδο της.

$$\omega' = 4\omega = 40rad/s = a_\gamma t_1 \Rightarrow t_1 = 4,4s$$

**β.** τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής της, όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση της.

*Όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση:*

$$\Sigma F_y = \frac{mv_{cm}^2}{r} \Rightarrow F - mg \Rightarrow F = mg + m\omega^2\frac{L}{2} \Rightarrow F = 25N$$

**γ.** τη θέση στην οποία σταματάει η ράβδος για πρώτη φορά, αφού περάσει από την κατακόρυφη θέση της. *Λόγω της διατήρησης της Ενέργειας κατά την περιστροφή της ράβδου η ράβδος θα σταματήσει όταν περιστραφεί κατά* $180^o$ *από την αρχική της θέση στην. Αν εφαρμόσουμε ΑΔΜΕ ή ΘΜΚΕ θα το δείξουμε.*

**δ.** τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος διπλή τροχαλία - $\Sigma_1$.

$$\frac{dL_{\text{ολ}}}{dt} = \Sigma\tau_{\text{εξ}} = m_1 g R_1 = 2kgm/s^2$$

**ε.** το έργο της τάσης του νήματος που ασκείται από το νήμα στην τροχαλία, από την στιγμή $t_o = 0$ μέχρι την στιγμή $t_1$.

*Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ στην τροχαλία για την παραπάνω κίνηση*

$$\Delta K = W \Rightarrow W = \frac{1}{2} I \omega'^2 = 144J$$

*Τα σχήματα είναι από τον συνάδελφο vmarousis*