Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Μηχανική Στερεού - μέρος Ι

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Η γωνιακή επιτάχυνση ενός ομογενούς δίσκου που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι ανάλογη:

(δ) με τη ροπή που ασκείται στο δίσκο

Α.2. Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκούνται ομοεπίπεδες δυνάμεις έτσι ώστε αυτό να εκτελεί μόνο επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση, γύρω από άξονα Ο. Για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ που του ασκούνται και για το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών $\Sigma\tau$ ως προς τον άξονα περιστροφής, ισχύει:

(β) $\Sigma\vec{F} = 0, \qquad \Sigma\tau \neq 0$

Α.3. Μία σφαίρα κυλίεται χωρίς ολίσθηση κινούμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου (αρχικά ανέρχεται και στη συνέχεια κατέρχεται).

(β) Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.

Α.4. Ένας απομονωμένος ομογενής αστέρας σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από τον εαυτό του (ιδιοπεριστροφή) με περίοδο T_o . Ο αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσης του η νέα περίοδος ιδιοπεριστροφής του θα είναι:

(α) μικρότερη από την αρχική περίοδο T_o.

Α.5.

(α) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους. **Σωστό**

(β) Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. **Σωστό**

(γ) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από την γωνιακή επιτάχυνση του. **Λάθος**

(δ) Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. **Σωστό**

(ε) Όταν ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, όλα τα σημεία του έχουν την ίδια ταχύτητα. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Ομογενής λεπτός δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο του ίση με $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Αν αφαιρέσουμε από το δίσκο ένα εσωτερικό ομόκεντρο τμήμα του ακτίνας $r = \frac{R}{2}$, η ποσοστιαία μείωση της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής θα ισούται με:

(δ) $6,25\%$

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίζεται θα υπολογίζεται $I' - \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$. *Η μάζα* m *του αφαιρούμενου τμήματος θα σχετίζεται με την συνολική μάζα, αφού η πυκνότητα θα είναι σταθερή, η μάζα θα είναι ανάλογη* *της ακτίνας στο τετράγωνο.* $\dfrac{M}{R^2} = \dfrac{m}{r^2} \Rightarrow m = M\dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{M}{4}$. *Οπότε η ροπή αδράνειας θα προκύψει να είναι:* $I' = \dfrac{15}{32}MR^2$. Το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\frac{I'-I}{I}100\% = 6,25\%$$

Β.2. Μια αβαρής ράβδος μήκους L περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα που είναι κάθετος στην ράβδο και διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο μέσο της ράβδου είναι τοποθετημένο ένα σημειακό σφαιρίδιο **Α** μάζας m και στο άλλο άκρο της ράβδου ένα σημειακό σφαιρίδιο **Β** μάζας $2m$. Κατά την διάρκεια της περιστροφής το σφαιρίδιο **Α** μετακινείται στο άκρο της ράβδου όπου βρίσκεται και το σφαιρίδιο **Β**. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος γίνεται:

(γ) $\omega' = \dfrac{3}{4}\omega$

Αρχικά η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_1 = m(\frac{L}{2})^2 + 2mL^2 = \frac{9}{4}mL^2$$

Τελικά η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι:

$$I_1 = mL^2 + 2mL^2 = 3mL^2$$

Αφού $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$ *μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για το σύστημα:*

$$I_1\omega = I_2\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{3}{4}\omega$$

Β.3. Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα της άκρο Α. Στο άλλο άκρο Γ της ράβδου υπάρχει κολλημένη σημειακή μάζα $m = M/6$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα ράβδου-μάζας ελεύθερο από την οριζόντια θέση.

Αν για τη χρονική στιγμή $t = 0$, συμβολίσουμε με $\frac{\Delta L_{\text{ράβδου}}}{\Delta t}$ και $\frac{\Delta L_{\text{μάζας}}}{\Delta t}$ τους ρυθμούς μεταβολής της στροφορμής της ράβδου και της σημειακής μάζας αντίστοιχα, θα ισχύει, ως προς τον άξονα περιστροφής Α:

(γ) $\frac{\Delta L_{\text{ράβδου}}}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{\Delta L_{\text{μάζας}}}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta L_{\text{μάζας}}}{\Delta t} = \Sigma\tau_{\text{μάζας}} = mL^2\alpha_{\text{γων}} = \frac{M}{6}L^2\alpha_{\text{γων}}$$

$$\frac{\Delta L_{\text{ράβδου}}}{\Delta t} = \Sigma\tau_{\text{ράβδου}} = (\frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2)\alpha_{\text{γων}} = \frac{1}{3}ML^2\alpha_{\text{γων}}$$

Διαιρώ κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις!

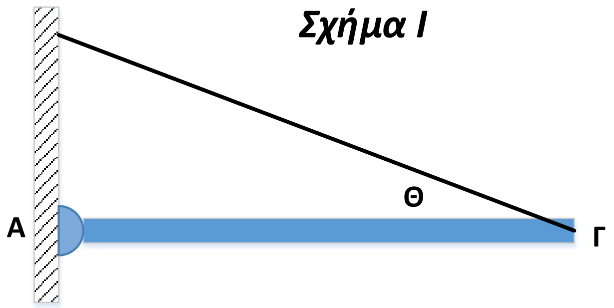
Θέμα Γ

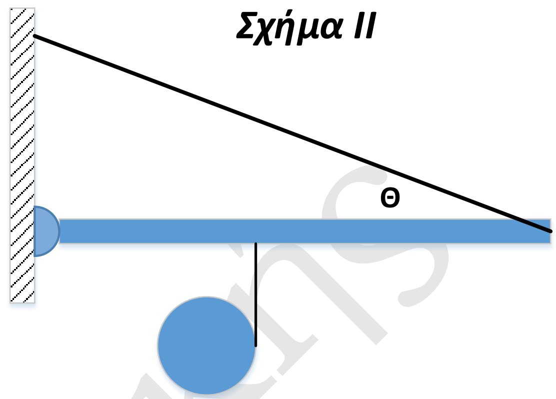
Ομογενής και ισοπαχής δοκός μάζας $M = 5,5kg$ ισορροπεί οριζόντια με το ένα της άκρο αρθρωμένο σε κατακόρυφο τοίχο και το δεύτερο άκρο της δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα που σχηματίζει με την δοκό γωνία $\theta = 30^o$ **(Σχήμα Ι)**.

Γ.1 Να βρεθεί η τάση του νήματος και η δύναμη που θα δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην δοκό από την άρθρωση και από το νήμα και εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T\eta\mu\theta L - Mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T = 55N$$





$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = T\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\eta\mu\theta + F_{Ay} - Mg = 0 \Rightarrow F_{Ay} = Mg - T\eta\mu\theta$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 55N$$

Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας $m = 3kg$ και ακτίνας $R = 50cm$, τυλίγουμε ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου δένουμε στο μέσον της δοκού **(Σχήμα ΙΙ)**. Συγκρατούμε τον κύλινδρο, ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο και τεντωμένο και σε μια χρονική στιγμή που την θεωρούμε, ως χρονική στιγμή $t_o = 0$, αφήνουμε τον κύλινδρο να κινηθεί. Σας δίνεται ότι ο άξονας του κυλίνδρου μετατοπίζεται παράλληλα και το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου κατά την κάθοδο.

Γ.2 Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου κατά την κάθοδο του και να σχεδιαστεί το διάνυσμα της.

Ο κύλινδρος θα εκτελεί σύνθετη κίνηση:

$$\Sigma F = ma_{cm} \Rightarrow mg - T_1 = m\alpha_{cm}$$

$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R = \frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}mRa_{\gamma\omega\nu}$$

Το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου και έχει σε κάθε σημείο του ταχύτητα $\upsilon = 0$ *αφού το πάνω άκρο του είναι στερεωμένο στην δοκό. Για το σημείο επαφής νήματος κυλίνδρου ισχύει ότι* $\upsilon_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu R}$. *Λύνω το σύστημα των εξισώσεων και υπολογίζω:*

$$a_{cm} = \frac{2g}{3} = \frac{20}{3}m/s^2 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{40}{3}rad/s^2 \Rightarrow T_1 = 10N$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης είναι κάθετη στην σελίδα με φορά προς τα έξω.

Γ.3 Να υπολογιστεί το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, την χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα του ανώτερου σημείου της περιφέρειας του έχει μέτρο $20\sqrt{2}m/s$.

Το ανώτερο σημείο της περιφέρειας του τροχού έχει δύο ταχύτητες εξαιτίας της σύνθετης κίνησης που είναι κάθετες μεταξύ τους. Η κατακόρυφη συνιστώσα εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης (υ_{cm}) *και η οριζόντια συνιστώσα εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης* ($\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R$). *Η συνισταμένη τους θα είναι* $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon\gamma\rho^2} = \sqrt{2}\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \omega R = 20m/s$

Η στροφορμή θα δίνεται:

$$L = I\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega = 15kgm^2/s$$

Γ.4 Να υπολογιστεί ο αριθμός των περιστροφών που έχει εκτελέσει ο κύλινδρος στην διάρκεια του 2ου δευτερολέπτου της κίνησης του.

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\theta(2) - \theta(1)}{2\pi} = \frac{10}{\pi}\text{στροφές}$$

Γ.5 Αν γνωρίζεται ότι το όριο θραύσης του νήματος που συγκρατεί την δοκό σε οριζόντια θέση κατά την κάθοδο του κυλίνδρου είναι $140N$, να εξετάσετε αν η δοκός θα συνεχίσει να ισορροπεί κατά την κάθοδο του κυλίνδρου.

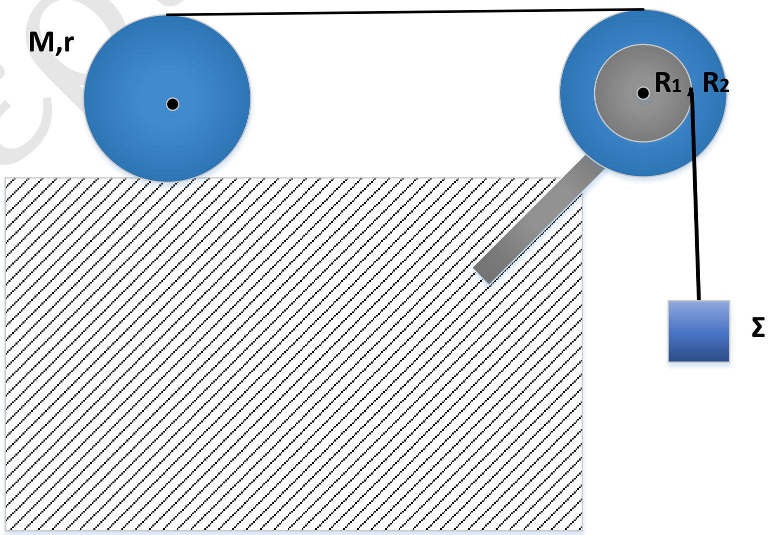
Κατά την κάθοδο του κυλίνδρου ασκείται στο κέντρο της δοκού μια επιπλέον δύναμη από το τεντωμένο νήμα για την οποία ισχύει ότι $T_1' = T_1 = 10N$(αβαρές και μη εκτατό νήμα). Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για να υπολογίσουμε την τάση του νήματος που είναι στερεωμένη η δοκός.

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T'\eta\mu\theta L - Mg\frac{L}{2} - T_1'\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T' = 65N$$

Αφού $T' < 140N$ το πάνω νήμα δεν σπάει, άρα η δοκός συνεχίζει να ισορροπεί.

Θέμα Δ

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομογενείς κυλίνδρους με ακτίνες $R_1 = 10cm$ και $R_2 = 20cm$, οι οποίοι είναι ενωμένοι μεταξύ τους.



Ο άξονας περιστροφής της τροχαλίας διέρχεται από το κοινό κέντρο των δύο κυλίνδρων. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 3 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2$. Γύρω από το δίσκο ακτίνας R_1 είναι τυλιγμένο νήμα, στο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα Σ μάζας $m_1 = 5kg$. Γύρω από τον δίσκο ακτίνας R_2 είναι τυλιγμένο δεύτερο νήμα, το οποίο από την άλλη πλευρά του είναι τυλιγμένο γύρω από κύλινδρο μάζας $M = 8kg$ και ακτίνας $r = 20cm$, ο οποίος είναι σε επαφή με οριζόντιο επίπεδο.

Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο, οπότε αρχίζει να μετατοπίζεται σε κατακόρυφο επίπεδο και ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε:

Δ.1 τη γωνιακή επιτάχυνση της διπλής τροχαλίας και τις επιταχύνσεις του σώματος Σ και του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα τους νόμους της κίνησης:

– **Σώμα**

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - T_1 = ma \tag{1}$$

– **Διπλή τροχαλία**

$$\Sigma\tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1' R_1 - T_2' R_2 = I a_{\gamma\omega\nu} \tag{2}$$

Το νήμα ξετυλίγεται από τον δίσκο 1 της τροχαλίας χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρεια του, άρα θα πρέπει:

$$\upsilon = \omega R_1 \Rightarrow a = a_{\gamma\omega\nu} R_1 \tag{3}$$

– **Κύλινδρος**

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow T_2 + T_s = M a_{cm} \tag{4}$$

$$\Sigma\tau = I_{cm} a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2 r - T_s r = \frac{1}{2} M r^2 a'_{\gamma\omega\nu} \tag{5}$$

Ο κύλινδρος κυλίεται στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει, άρα η ταχύτητα του σημείου επαφής είναι μηδενική, οπότε:

$$\upsilon_{cm} = \omega' r \Rightarrow a_{cm} = a'_{\gamma\omega\nu} r \tag{6}$$

Κάθε σημείο του νήματος έχει την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση άρα αν Ζ το ανώτερο σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου και Δ το σημείο επαφής νήματος - δίσκου 2 τότε πρέπει:

$$\upsilon_z = \upsilon_{cm} + \omega' r = \upsilon_\Delta = \omega R_2 \Rightarrow 2a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R_2 \tag{7}$$

Πρέπει να λυθεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Από την λύση θα προκύψει ότι:

$$a_{\gamma\omega\nu} = 25rad/s^2 \Rightarrow a = 2,5m/s^2 \Rightarrow a_{cm} = 2,5m/s^2$$

Δ.2 την ταχύτητα του σώματος Σ και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή κατά την οποία έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $h = 5m$.

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = 2s \Rightarrow \upsilon = at = 5m/s \qquad \upsilon_{cm} = a_{cm}t = 5m/s$$

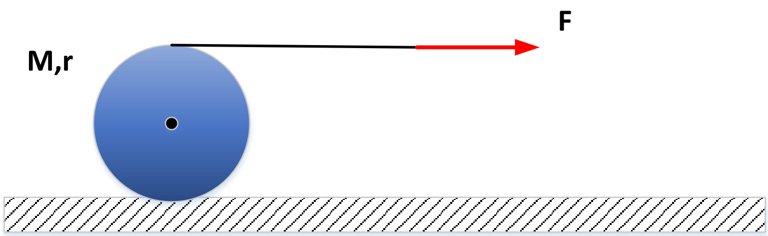
Δ.3 τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της διπλής τροχαλίας κατά την διάρκεια της κίνησης του συστήματος.

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I a_{\gamma\omega\nu} = 0,075kgm^2/s^2$$

Αφαιρώ από το σύστημα το σώμα Σ και την διπλή τροχαλία, επανατοποθετώ τον κύλινδρο στην αρχική του θέση με το νήμα τυλιγμένο στην περιφέρεια του και την $t_o = 0$ ασκώ στο ελεύθερο άκρο του νήματος μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 30N$. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Δ.4 Να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο από το επίπεδο.

Υποθέτω ότι η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και εφαρμόζω τους νόμους της κίνησης.:



$$\Sigma F_x = Ma_{cm} \Rightarrow T + T_s = Ma_{cm} \tag{8}$$

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Tr - T_s r = \frac{1}{2}Mr^2 a_{\gamma\omega\nu} \tag{9}$$

Λύνω το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων, θέτοντας $F = T$ (αβαρές νήμα) :

$$T = \frac{3}{2}Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 5m/s^2 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 25rad/s^2 \Rightarrow T_s = 10N > 0$$

Άρα η στατική τριβή έχει την φορά που υπέθεσα.

Ο κύλινδρος κυλίεται στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει, άρα η ταχύτητα του σημείου επαφής είναι μηδενική, οπότε:

$$\upsilon_{cm} = \omega r \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} r \tag{10}$$

Δ.5 Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχτεί από τον κύλινδρο την $t_1 = 2s$.

$$l_{\nu\eta\mu} = r\theta = r\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2 = 10m$$

Δ.6 Να προσδιορίσετε το μέγιστο μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο.

Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος πρέπει η στατική τριβή να ικανοποιεί την σχέση:

$$T_s \leq T_{s(max)} \Rightarrow T_s \leq \mu_s N$$

Από το αρχικό σύστημα εξισώσεων (8),(9),(10) λύνω ως προς T_s και προκύπτει:

$$T_s = \frac{T}{3} = \frac{F}{3}$$

Αφού η κίνηση γίνεται στον οριζόντιο άξονα :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg$$

Άρα από την ανίσωση προκύπτει:

$$\frac{F}{3} \leq \mu_s Mg \Rightarrow F \leq 80N$$

Άρα η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να ασκήσουμε στο άκρο του νήματος, ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είναι τα 80 N

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός