Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ταλαντώσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Κυριακή 13 Οκτώβρη 2019

Θέμα Α

Α.1. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α και ενέργεια Ε. Αν τριπλασιάσουμε το πλάτος ταλάντωσης του σώματος, τότε τριπλασιάζεται:

(α) το πλάτος της επιτάχυνσης.

Α.2. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση παραμένει σταθερός. Στην περίπτωση αυτής της ταλάντωσης το πλάτος της ταλάντωσης:

(β) μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο

Α.3. Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση η περίοδος του διεγέρτη είναι μικρότερη από την ιδιοπερίοδο του ταλαντωτή. Μειώνουμε συνεχώς την περίοδο του διεγέρτη. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:

(β) μειώνεται συνεχώς.

Α.4. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις οι οποίες γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση με ίδια περίοδο και ενέργειες E_1 και $E_2 \neq E_1$. η συνιστάμενη κίνηση του σώματος θα είναι σίγουρα:

(δ) απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με ενέργεια που θα εξαρτάται από την διαφορά φάσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα.

Α.5.

(α) Η περίοδος μιας φθίνουσας ταλάντωσης διατηρείται χρονικά σταθερή, για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης. **Σωστό**

(β) Κατά το συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα κατά το βέλτιστο τρόπο και γι' αυτό το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. **Σωστό**

(γ) Η δύναμη απόσβεσης σε μια φθίνουσα ταλάντωση κατευθύνεται πάντα προς τη θέση ισορροπίας. **Λάθος**

(δ) Το φαινόμενο της παλίρροιας στον κόλπο Fundy στον Καναδά οφείλεται στην εξαναγκασμένη ταλάντωση της μάζας του νερού στην επιφάνεια της Γης, εξαιτίας της βαρυτικής της έλξης από την Σελήνη. **Σωστό**

(ε) Περίοδος του διακροτήματος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της απομάκρυνσης. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ένα σώμα εκτελεί σύνθετη ταλάντωση που προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος ταλάντωσης και γωνιακές συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.Οι εξισώσεις των δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων στο (SI) είναι της μορφής $x_1 = A\eta\mu\,(399\pi t)$ και $x_2 = A\eta\mu\,(401\pi t)$.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα μεταξύ τριών διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι ίσος με:

(α) 400

Η γωνιακή συχνότητα και η περίοδος της ιδιομόρφης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα θα είναι:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 400\pi rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{200}s$$

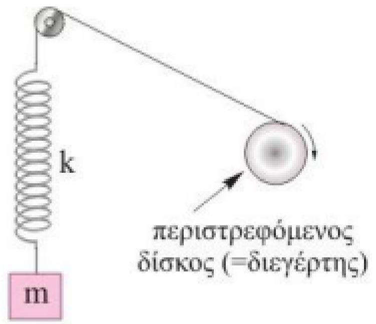
Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους (περίοδος διακροτήματος) θα είναι:

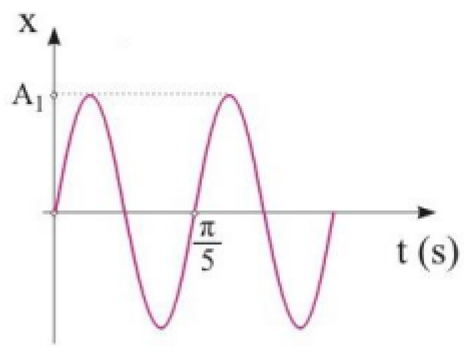
$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = 1s$$

Ανάμεσα σε τρεις διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους ταλάντωσης το σώμα εκτελεί N ταλαντώσεις:

$$2T_\delta = NT \Rightarrow N = 400$$

Β.2. Ένα σύστημα μάζας – ελατηρίου ($m = 1kg$, $k = 400N/m$) εκτελεί κατακόρυφη εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου δίσκου (διεγέρτη). Το διάγραμμα απομάκρυνσης – χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



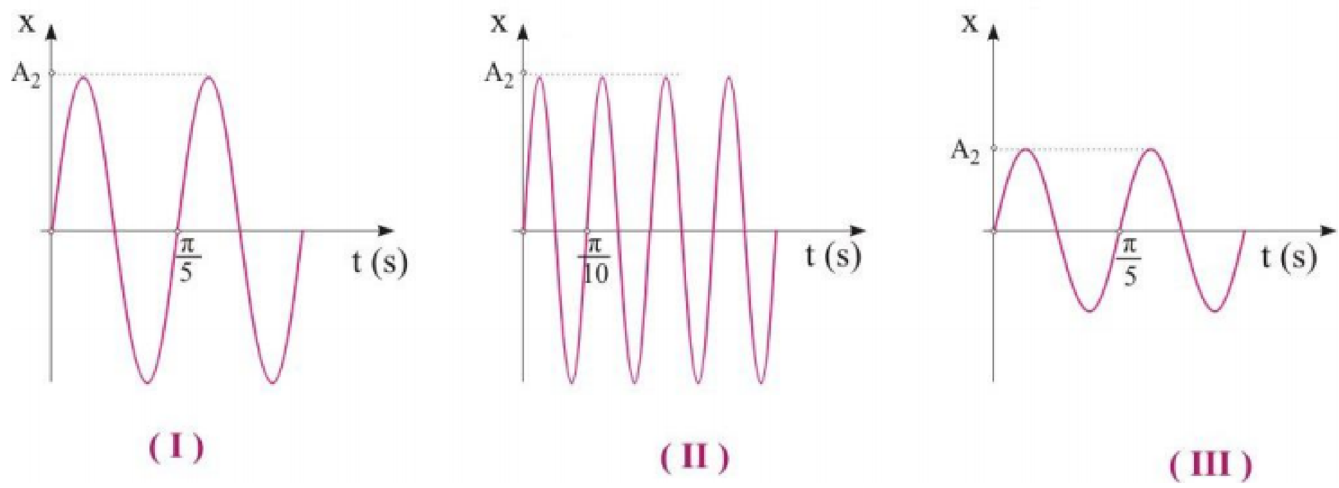


Αντικαθιστούμε το σώμα με άλλο τετραπλάσιας μάζας και θέτουμε το σύστημα σε νέα εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη. Το διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου για τη νέα ταλάντωση μπορεί να είναι το

(α) (I)

Από τα δεδομένα της εκφώνησης θα προκύψει η ιδιοπερίοδος του συστήματος:

$$D = k = m\omega_o^2 \Rightarrow \omega_o = 20rad/s \Rightarrow T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{\pi}{10}s$$



Για την αρχική ταλάντωση η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση με $\frac{\pi}{5}s$ που είναι και η περίοδος του διεγέρτη, άρα το σύστημα είναι εκτός συντονισμού.

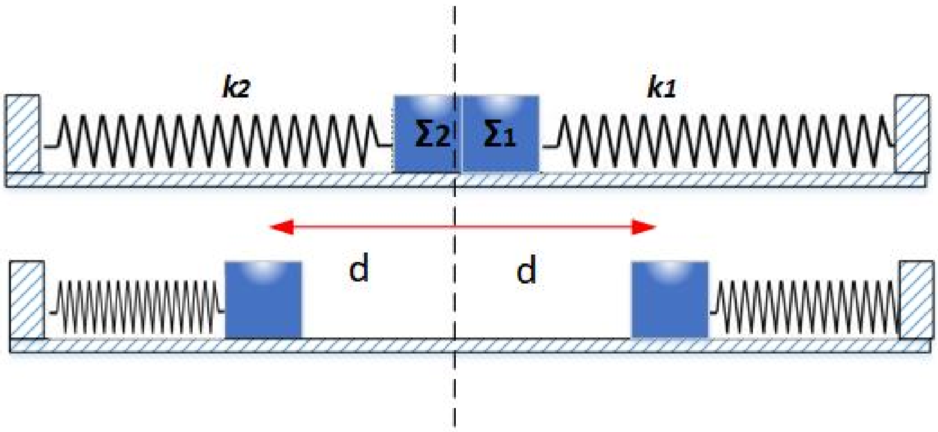
Αυξάνοντας την μάζα του ταλαντούμενου συστήματος αλλάζουμε την ιδιοπερίοδο του συστήματος, χωρίς να επηρεάζουμε την περίοδο της ταλάντωσης.

$$\omega'_o = \sqrt{\frac{k}{4m}} = 10rad/s \Rightarrow T'_o = \frac{2\pi}{\omega'_o} = \frac{\pi}{5}s$$

Αφού η περίοδος της ταλάντωσης έγινε ίση με την νέα ιδιοπερίοδο του συστήματος το σύστημα έρχεται σε συντονισμό και το πλάτος αυξάνεται.

B.3. Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ισορροπούν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες. Τα σώματα είναι αντίστοιχα δεμένα στα ελεύθερα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 τα οποία έχουν το άλλο άκρο τους στερεωμένο και βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος με τα σώματα να είναι σε επαφή μεταξύ τους.

Εκτρέπουμε κατά d και τα δύο σώματα και τα αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερα, ώστε να εκτελέσουν αρμονική ταλάντωση. Την στιγμή που το Σ_1 διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου το Σ_2 μεγιστοποιεί για δεύτερη φορά την Κινητική του ενέργεια. Την παραπάνω στιγμή τα σώματα συγκρούονται πλαστικά για πρώτη φορά, με αποτέλεσμα να δημιουργείται συσσωμάτωμα που θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος:



(α) $\dfrac{2\sqrt{5}d}{5}$

Η άσκηση έχει επιστημονικό λάθος, καθώς τα σώματα θα έχουν συγκρουστεί πριν την χρονική στιγμή που μας δίνουν τα δεδομένα της εκφώνησης. Παρόλα ταύτα, αν κάποιος δεν το αντιληφθεί αυτό η ¨μαθηματική¨ λύση θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη.

$$\frac{T_1}{4} = \frac{3T_2}{4} \Rightarrow T_1 = 3T_2 \Rightarrow \omega_2 = 3\omega_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 3\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \Rightarrow k_2 = 9k_1$$

Πριν την κρούση τα σώματα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, έχοντας την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, έχουν επίσης το ίδιο πλάτος d. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα είναι πάλι στην ΘΙΤ, άρα θα έχει και αυτό την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο.

$$m\upsilon_1 + m\upsilon_2 = 2m\upsilon_k \Rightarrow \omega_1 d + \omega_2 d = \omega A$$

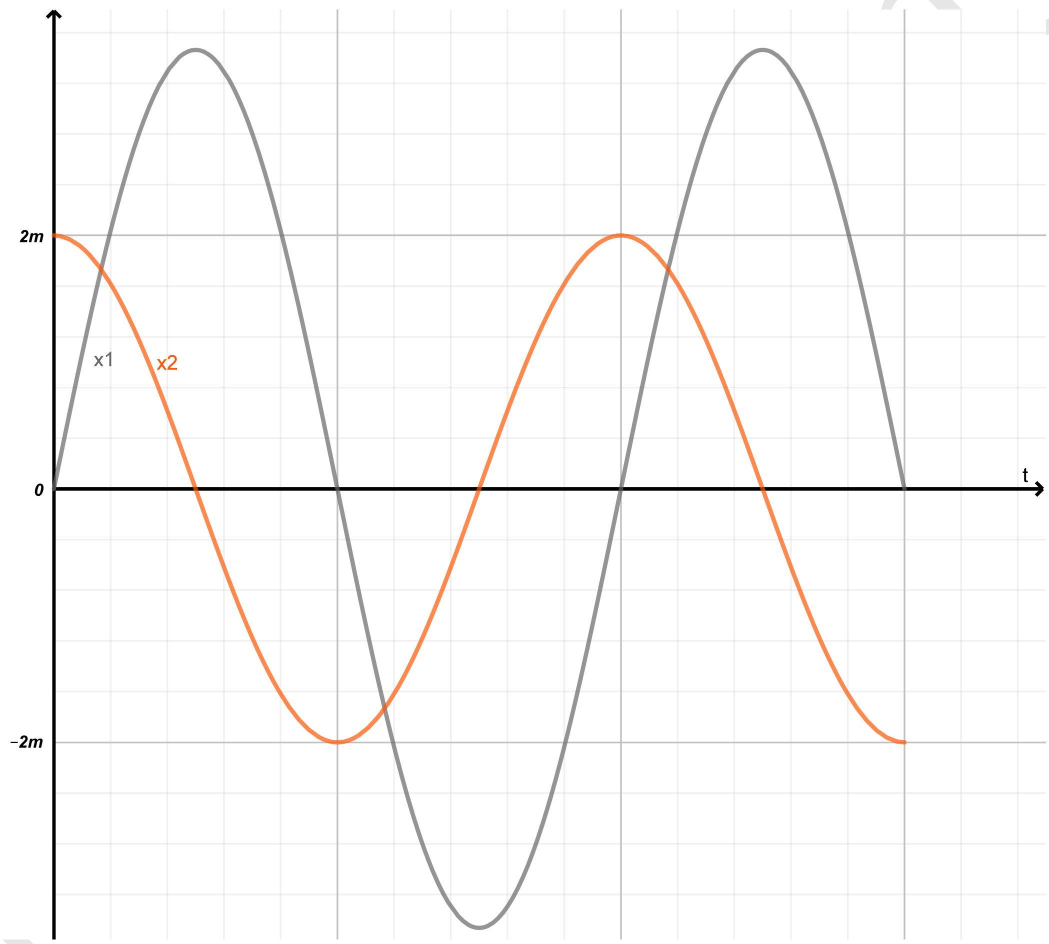
Για την ταλάντωση του συσσωματώματος ισχύει ότι:

$$D = k_1 + k_2 = (m+m)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}\omega_1$$

Από τα παραπάνω θα προκύψει η απάντηση.

Θέμα Γ

Ένα σώμα μάζας $m = 2gr$ που βρίσκεται μέσα σε πειραματική διάταξη υψηλού κενού, εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις πάνω στον άξονα $x'Ox$, γύρω από τον σημείο Ο. Το σώμα διέρχεται κάθε $0,1s$ από την θέση ισορροπίας του έχοντας κινητική ενέργεια $16J$. Δίνεται το κοινό διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ για τις συνιστώσες ταλαντώσεις που εκτελεί το σώμα.



Γ.1 Να βρεθεί η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας, καθώς και ο χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιήσει μια πλήρη ταλάντωση.

Από τα δεδομένα προκύπτουν:

- $$\frac{T}{2} = 0,1s \Rightarrow T = 0,2s \Rightarrow \omega = 10\pi rad/s \Rightarrow D = m\omega^2 = 2N/m$$

– $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 4m$

Η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι το πλάτος Α της ταλάντωσης και ο χρόνος για μια πλήρη ταλάντωση είναι η περίοδος Τ

Γ.2 Να γραφτούν οι χρονικές εξισώσεις των δύο επιμέρους ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα, καθώς και η χρονική εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

Από το διάγραμμα προκύπτει:

– $A_2 = 2m$
– $\phi = \frac{\pi}{2}$

Όπου $\phi = \phi_{o2} - \phi_{o1}$ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων. Προκύπτει από τό διάγραμμα ότι την $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ εξαιτίας της ταλάντωσης (1) και στην ακραία θετική θέση εξαιτίας της ταλάντωσης (2). Άρα $\phi_{o1} = 0$ και $\phi_{o2} = \frac{\pi}{2}$

Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi} \Rightarrow A_1 = 2\sqrt{3}m$$

Η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Οι ζητούμενες εξισώσεις στο $(S.I.)$ θα είναι:

$$x = 4\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_1 = 2\sqrt{3}\eta\mu\left(10\pi t\right)$$

$$x = 2\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Γ.3 Την χρονική στιγμή που η φάση της συνιστώσας ταλάντωσης x_1 είναι ίση με 2π να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας του σώματος.

$$\phi_1 = \omega t = 2\pi$$

Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \upsilon = -Dx\upsilon = -DA\eta\mu\left(\omega t + \theta\right)\omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \theta\right) = -80\pi\sqrt{3}J/s$$

Κάποια στιγμή που το σώμα βρίσκεται σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης αυξάνουμε την πίεση του αέρα, έτσι ώστε να του ασκείται δύναμη απόσβεσης που έχει μέτρο ανάλογο της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος με σταθερά αναλογίας $b = 0,02kg/s$, οπότε το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση $A' = Ae^{-\Lambda t}$, όπου $\Lambda = \dfrac{b}{2m}$

Γ.4 Να βρεθεί το έργο της δύναμης απόσβεσης κατά τα πρώτα $0,2ln2s$ από την στιγμή που αυξήθηκε η πίεση του αέρα. ($ln2 = 0,7$)

Το πλάτος της ταλάντωσης λόγο της απόσβεσης θα έχει γίνει:

$$A' = Ae^{-\Lambda t} = 2m$$

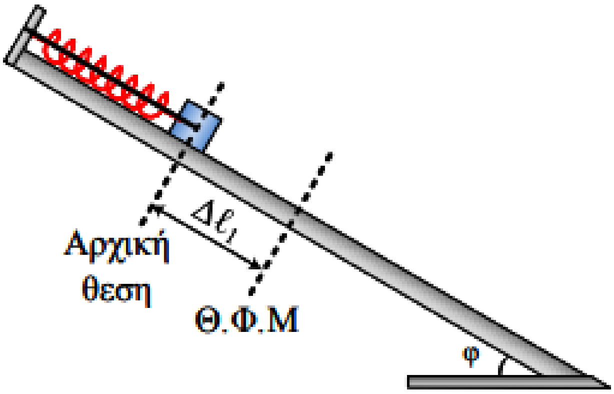
Το ζητούμενο έργο θα είναι:

$$W = E' - E = \frac{1}{2}DA'^2 - \frac{1}{2}DA^2 = -12J$$

Θέμα Δ

Οι λύσεις του θέματος Δ στο παρακάτω link,από την ομάδα του study4exams
https://perifysikhs.files.wordpress.com/2017/12/oscillation
study2017-sol.pdf

Στο σχήμα δείχνεται ένα λείο πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^o$, στην κορυφή του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο το πάνω άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$.



Στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$. Με τη βοήθεια νήματος που έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και είναι στερεωμένο στο σώμα Σ_1 συμπιέζουμε το ελατήριο μέχρι τη θέση όπου η τάση του νήματος γίνεται $20N$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ_1 εκτελεί ταλάντωση. Να βρείτε:

Δ.1 το πλάτος της ταλάντωσης.

Δ.2 το λόγο της μέγιστης κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης προς τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2,4kg$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = \frac{7}{3}m/s$ και φορά προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Το Σ_1 και το Σ_2 συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά σε κάποια θέση της ταλάντωσης του Σ_1, με αποτέλεσμα μετά την κρούση το συσσωμάτωμα να μείνει στη θέση αυτή μόνιμα ακίνητο. Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Να βρείτε:

Δ.3 το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v_1}$ που έχει το Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα Σ_2 .

Δ.4 το μήκος της διαδρομής που διάνυσε το σώμα Σ_2 από τη θέση εκτόξευσης μέχρι τη θέση της σύγκρουσης.