Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Ταλαντώσεις

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α

Α.1. Σε μία φθίνουσα ταλάντωση στην οποία το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο:

(β) όταν η σταθερά απόσβεσης b μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα.

Α.2. Σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Παρατηρείται ότι για δύο διαφορετικές συχνότητες f_1 και f_2 του διεγέρτη με $f_1 < f_2$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίδιο. Για την ιδιοσυχνότητα f_o του συστήματος ισχύει:

(γ) $f_1 < f_o < f_2$

Α.3. Στη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση, το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

(α) σε κάθε περίπτωση σταθερό

Α.4. Διακρότημα δημιουργείται μετά από σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, όταν οι ταλαντώσεις έχουν:

(δ) ίσα πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.

Α.5.

(α) Κατά τον συντονισμό η ενέργεια του διεγέρτη μεταφέρεται στο ταλαντούμενο σύστημα, κατά τον βέλτιστο τρόπο. **Σωστό**

(β) Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας του σώματος που ταλαντώνεται καθώς αυξάνεται το μέτρο της δύναμης επαναφοράς. **Λάθος**

(γ) Το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη. **Σωστό**

(δ) Σε ένα σύστημα μάζας - ελατηρίου που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ταυτίζεται πάντα με την δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου. **Λάθος**

(ε) Σε ένα σύστημα ταλαντωτή ενεργεί μια δύναμη απόσβεσης που το μέτρο της είναι ανάλογο της ταχύτητας ταλάντωσης. Η μείωση του πλάτους σε κάθε ταλάντωση θα παραμένει σταθερή. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση , με την επίδραση δύναμης μικρής απόσβεσης με μέτρο ανάλογο της ταχύτητας ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ έχει ενέργεια E_o και πλάτος A_o. Σας είναι γνωστό ότι στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_o$ το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι ίσο $-\frac{15}{16}E_o$. Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος A της ταλάντωσης είναι:

(β) $\frac{A_o}{4}$

Από το έργο της δύναμης προκύπτει ότι:

$$W = E - E_o \Rightarrow E = \frac{E_o}{16} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}DA_o^2 \Rightarrow A = \frac{A_o}{4}$$

B.2. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου T, για την οποία δίνεται η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θέση ισορροπίας:

$$x = A\eta\mu(\omega t) + A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι $t = \frac{T}{8}$ είναι:

(α) $-\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$W = \frac{1}{2}Dx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2}Dx_{\text{τελ}}^2$$

όπου:

$$x_{\text{αρχ}} = A\eta\mu 0 + A\sigma\upsilon\nu 0 = A$$

$$x_{\text{τελ}} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}\right) + A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}\right) = A\sqrt{2}$$

Οπότε:

$$W = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}D2A^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

B.3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu(2\pi f_1 t) \qquad x_2 = A\eta\mu(2\pi f_2 t)$$

Οι συχνότητες f_1, f_2 των δύο ταλαντώσεων είναι παραπλήσιες. Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της συνιστάμενης ταλάντωσης, το σώμα έχει εκτελέσει N ταλαντώσεις. Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα τις συχνότητες των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, οι οποίες εξακολουθούν να παραμένουν παραπλήσιες. Για την νέα συνιστάμενη ταλάντωση ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα, ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα είναι N'. Ο λόγος $\frac{N}{N'}$ ισούται με:

(β) 1

Από την αρχή της επαλληλίας θα προκύψει:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι: $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{f_1 + f_2}$.

Η περίοδος διακροτήματος θα είναι: $T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που θα εκτελεί το σώμα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα είναι:

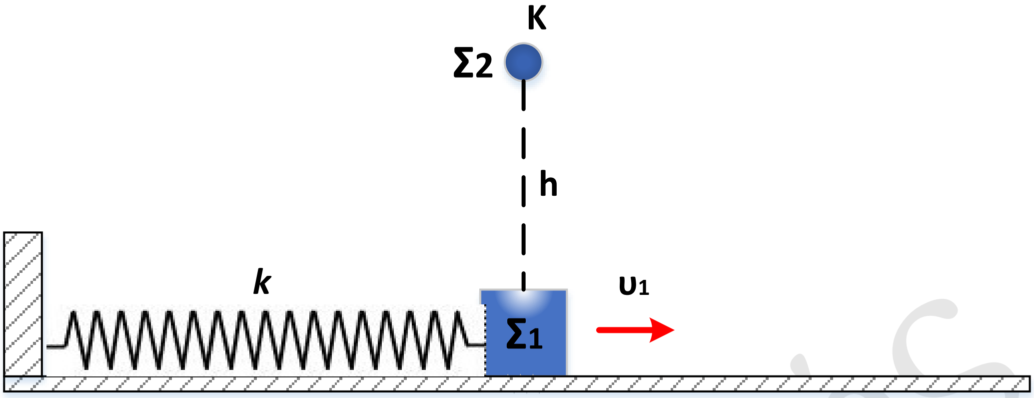
$$N = \frac{T_\delta}{T} = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$$

Μετά τον διπλασιασμό των δύο συχνοτήτων ο αριθμός θα είναι:

$$N' = \frac{T'_\delta}{T'} = \frac{2f_1 + 2f_2}{2|2f_1 - 2f_2|} \Rightarrow N' = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|} = N$$

Θέμα Γ

Ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,4m$ πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο.



Από σημείο Κ που βρίσκεται στην κατακόρυφο που διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αφήνουμε να πέσει ελεύθερα ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$, την στιγμή ακριβώς που το Σ_1 διέρχεται από την θέση ισορροπίας του. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά τη στιγμή που το Σ_1 επιστρέφοντας διέρχεται πάλι από την θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

Γ.1 Να υπολογιστεί η ταχύτητα του Σ_1 μόλις πριν την κρούση, καθώς και το ύψος h από το οποίο αφέθηκε το Σ_2.

Για την ταλάντωση του Σ_1 *ισχύει ότι:* $k = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = 20rad/s \Rightarrow T = \frac{\pi}{10}s$

Ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι να συγκρουστούν τα δύο σώματα είναι $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{20}s$.

Η ταχύτητα του Σ_1 *πριν την κρούση θα είναι* $\upsilon_1 = -\upsilon_{max} = -\omega A \Rightarrow \upsilon_1 = -8m/s$

Το Σ_2 *θα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον ίδιο χρόνο* Δt, *άρα* $h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{1}{8}m$

Γ.2 Να γραφτεί η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t = 0$ την στιγμή της κρούσης και θετική την φορά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζω την αρχή διατήρησης της ορμής για τον x *άξονα εξαιτίας της κρούσης:*

$$0 + m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = 2m/s = \upsilon'_{max}$$

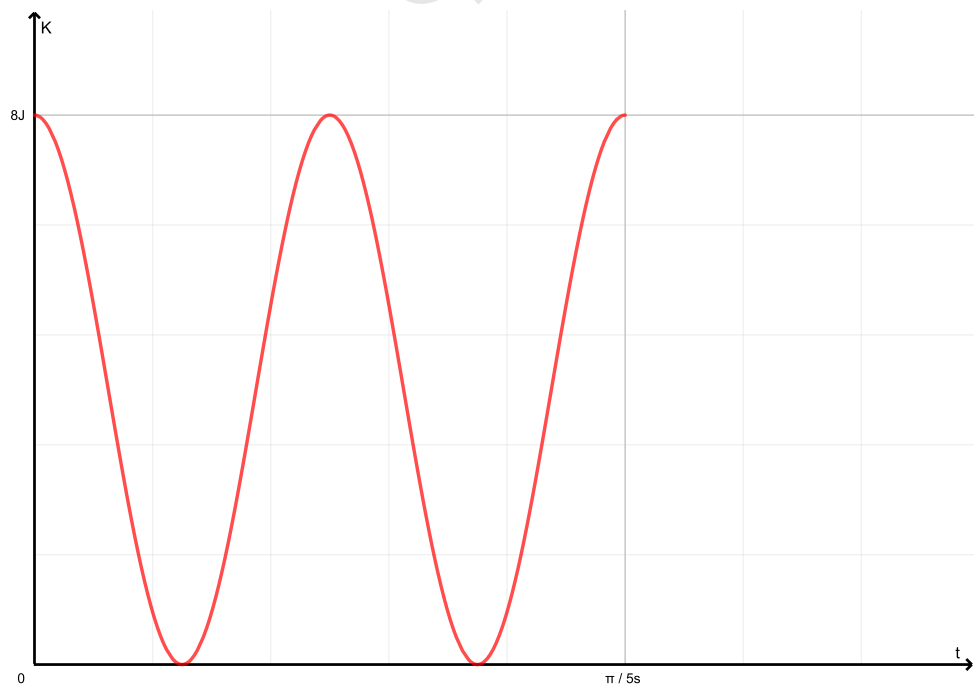
Υπολογίζω την νέα γωνιακή συχνότητα για το συσσωμάτωμα:
$D = k = (m_1 + m_2)\omega'^2 \Rightarrow \omega' = 10rad/s$, *άρα η ζητούμενη εξίσωση της ταχύτητας με δεδομένο ότι την χρονική στιγμή* $t_o = 0$ *το σώμα διέρχεται από την ΘΙΤ με αρνητική ταχύτητα θα είναι:*

$$\upsilon = 8\sigma\upsilon\nu\,(10t + \pi) \quad (S.I.)$$

Γ.3 Να γραφτεί η συνάρτηση της Κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος σε σχέση με τον χρόνο και να παρασταθεί γραφικά σε κατάλληλο διάγραμμα βαθμολογημένων αξόνων.

Για την κινητική ενέργεια έχουμε:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \Rightarrow K = 8\sigma\upsilon\nu^2(10t + \pi) \quad (S.I.)$$



Γ.4 Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου κατά την κίνηση του συσσωματώματος από την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}s$ μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα.

Το πλάτος της ταλάντωσης για το συσσωμάτωμα θα είναι :$\upsilon'_{max} = \omega' A' \Rightarrow A' = 0,2m$

Βρίσκω την θέση του συσσωματώματος στην χρονική στιγμή που μας δίνεται $x = 0,2\eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{30} + \pi\right) \Rightarrow x = -0,1\sqrt{3}m.$ *Την στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα βρίσκεται σε ακραία θέση. Άρα με δεδομένο ότι ταυτίζεται η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου με την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έχουμε:*

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l_{\alpha\rho\chi})^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l_{\tau\epsilon\lambda})^2 = -2J$$

Γ.5 Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας του συσσωματώματος την χρονική στιγμή που η Κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίσες για πρώτη φορά.

Ο ζητούμενος ρυθμός θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D \cdot x \cdot \upsilon$$

Όταν η Κινητική είναι ίση με την δυναμική ενέργεια έχουμε:

$$K + U = E \Rightarrow 2U = E \Rightarrow x = \pm\frac{A'}{\sqrt{2}}$$

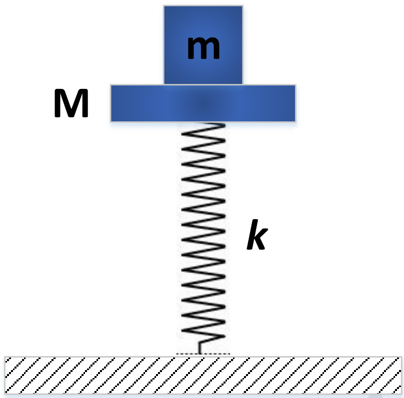
$$K + U = E \Rightarrow 2K = E \Rightarrow \upsilon = \pm\frac{\upsilon'_{max}}{\sqrt{2}}$$

Άρα θα προκύψει για την πρώτη φορά ότι:

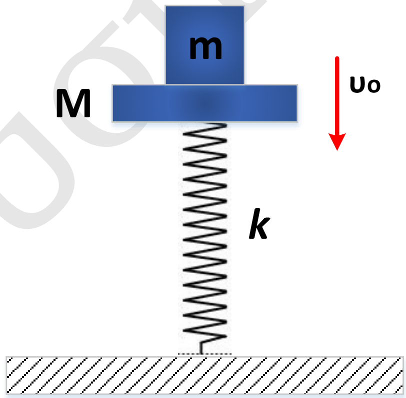
$$\frac{dK}{dt} = -k\left(-\frac{A'}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\upsilon'_{max}}{\sqrt{2}}\right) = -320J/s$$

Θέμα Δ

Στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 80N/m$ ισορροπεί στερεωμένος δίσκος **Δ** μάζας $M = 4kg$, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ αφήνεται πάνω στον δίσκο χωρίς αρχική ταχύτητα σώμα **Σ** μάζας m και το σύστημα ξεκινά αμέσως να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από αυτή την θέση (*σχήμα 1*). Το σύστημα των δύο σωμάτων ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{4}s$. Να υπολογίσετε:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Δ.1 τη μάζα του σώματος **Σ**.

Την στιγμή που αφήνεται το σώμα πάνω στον δίσκο το σύστημα αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με την αρχική θέση να είναι η ακραία θέση, αφού αφήνεται χωρίς ταχύτητα. Άρα θα φτάσει στην άλλη ακραία θέση την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{2}$. *Οπότε:*

$$T = \frac{\pi}{2}s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 4rad/s$$

Άρα θα προκύψει:

$$D = k = (M+m)\omega^2 \Rightarrow m = 1kg$$

Δ.2 Την μέγιστη κινητική ενέργεια ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων.

Στην αρχική θέση ισορροπίας του δίσκου το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά Δl_1 και από την συνθήκη ισορροπίας για τις ασκούμενες δυνάμεις ισχύει ότι: $\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = Mg \Rightarrow \Delta l_1 = \dfrac{Mg}{k}$

Στη Θέση ισορροπίας της ταλάντωσης των δύο σωμάτων το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά Δl_2 και από την συνθήκη ισορροπίας ισχύει ότι:
$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_2 = (M+m)g \Rightarrow \Delta l_2 = \dfrac{(M+m)g}{k}$

Αφού η αρχική θέση είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης, τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{mg}{k} = \frac{1}{8}m$$

Άρα για την μέγιστη κινητική ενέργεια έχουμε ότι:

$$K_{max} = E = \frac{1}{2}DA^2 = 0,625J$$

Δ.3 Τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, την χρονική στιγμή που η Κινητική ενέργεια του συστήματος είναι για πρώτη φορά μετά την $t_o = 0$ τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για να υπολογίσω την απομάκρυνση από την ΘΙΤ για του σύστημα των δύο σωμάτων, όταν η Κινητική είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας.

$$E = K + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow y = \pm\frac{A}{2} = \pm\frac{1}{16}m$$

Την πρώτη φορά θα βρίσκεται πάνω από την Θέση ισορροπίας, άρα κάτω από την θέση φυσικού μήκους. Άρα η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι $\Delta l = \Delta l_2 - |y|$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{405}{32}J$$

Δ.4 Το ρυθμό μεταβολής της ορμής για το σώμα **Σ** την χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{\pi}{16}s$.

Η ζητούμενη ποσότητα θα είναι:

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = m\alpha = -m\omega^2 y = -m\omega^2 A\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης λαμβάνω υπόψη ότι την $t_o = 0$ *βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση, άρα* $\eta\mu\phi_o = -1 \Rightarrow \phi_o = \dfrac{3\pi}{2}$ *Άρα την* t_2 *θα έχω:*

$$\frac{dP}{dt} = +\sqrt{2}kg \cdot m/s^2$$

Επαναφέρω το σύστημα των σωμάτων στην αρχική θέση και με κατάλληλο τρόπο τα εκτοξεύω από την θέση αυτή με αρχική ταχύτητα υ_o με φορά προς τα κάτω *(σχήμα 2)*.

Δ.5 Να υπολογίσετε την μέγιστη ταχύτητα εκτόξευσης, ώστε τα δύο σώματα να παραμένουν συνεχώς σε επαφή μεταξύ τους.

Για να παραμένουν τα δύο σώματα σε επαφή θα πρέπει να ασκεί δύναμη το ένα πάνω στο άλλο. Δηλαδή αν Ν η δύναμη που ασκεί ο δίσκος πάνω στο σώμα τότε πρέπει $N \geq 0$.

Σε μια τυχαία απομάκρυνση y *πάνω από την θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων εφαρμόζω τον Θεμελιώδη Νόμο της μηχανικής για το σώμα Σ.*

$$\Sigma F = -m\omega^2 y \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 y \Rightarrow N = mg - m\omega^2 y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{5}{8}m$$

Άρα για να μην χάνουν επαφή τα δύο σώματα πρέπει το πλάτος της νέας ταλάντωσης τους να είναι $A' = \frac{5}{8}m$. Εφαρμόζω ΑΔΕΤ στην αρχική θέση ($y = A$) έχοντας αυτή την φορά και ταχύτητα υ την οποία αναζητώ.

$$E' = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow |\upsilon| = \omega\sqrt{A'^2 - y^2} \Rightarrow |\upsilon| = \sqrt{6}m/s$$

Είναι προφανές ότι ειδικά στο θέμα Δ πρέπει να γίνουν σχήματα στα οποία να φαίνονται αναλυτικά οι θέσεις των σωμάτων στα διάφορα ερωτήματα. Δεν τα έχω παραθέσει λόγο περιορισμένου χρόνου.