Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 31 Ιουλίου 2021

Θέμα Α

Α.1. Μια μικρή σφαίρα Σ κινούμενη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με κατακόρυφο τοίχο. Αν η κρούση είναι ελαστική τότε

(δ) το μέτρο της ορμής της σφαίρας δεν μεταβάλλεται.

Α.2. Ένα σύστημα μάζας- ελατηρίου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια ταλάντωσης E και συχνότητα f. Αν θέσουμε το ίδιο σύστημα σε ταλάντωση με ενέργεια $4E$, τότε η συχνότητα ταλάντωσης θα:

(α) μείνει ίδια.

Α.3. Απαραίτητη προϋπόθεση για να ανταλλάξουν ταχύτητες δύο σώματα σε μια κεντρική ελαστική κρούση, είναι αυτά να έχουν:

(β) ίδιες μάζες.

Α.4. Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες :

(β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του γίνεται μέγιστο

Α.5.

(α) Η αρχή διατήρησης της ορμής εφαρμόζεται σε κάθε σύστημα σωμάτων, είτε αυτό είναι μονωμένο είτε όχι. **Λάθος**

(β) Σκέδαση ονομάζουμε κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα χωρίς να έρχονται σε επαφή μεταξύ τους. **Σωστό**

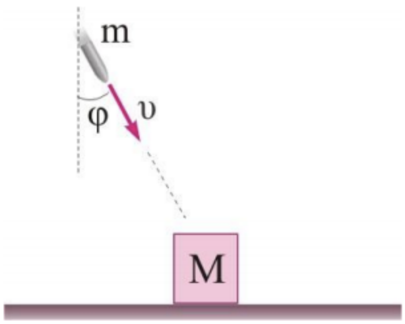
(γ) Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι ομόρροπα κάθε φορά που το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας του. **Σωστό**

(δ) Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να γίνεται η κινητική ενέργεια ίση με τη δυναμική σε ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι μικρότερο από $T/2$. **Λάθος**

(ε) Στην πλαστική κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. **Σωστό**

Θέμα Β

Β.1. Το σώμα μάζας M του σχήματος βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Ένα βλήμα μάζας $m = M$ κινούμενο με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία $\phi = 30^o$ με την κατακόρυφη διεύθυνση και έχει μέτρο υ, σφηνώνεται στο σώμα μάζας M. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται οριζόντια χωρίς να αναπηδήσει.



Η μεταβολή της ορμής του βλήματος κατά την κρούση έχει μέτρο:

(α) $\dfrac{m\upsilon\sqrt{13}}{4}$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται προς τα δεξιά (άξονας $x'Ox$) με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_k. Εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον οριζόντο άξονα $x'Ox$ αφού εκεί $\Sigma F_{x(\varepsilon\xi)} = 0$:

$$m\upsilon_x = (M+m)\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon_x}{2} = \frac{\upsilon\eta\mu\phi}{2} \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon}{4}$$

Υπολογίζω την μεταβολή της ορμής του βλήματος σε κάθε άξονα:

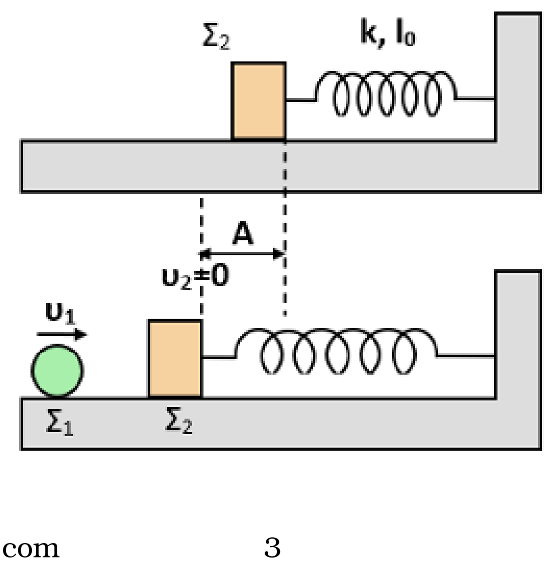
$$\Delta P_x = m\upsilon_k - m\upsilon_x = m\frac{\upsilon}{4} - m\frac{\upsilon}{2} \Rightarrow \Delta P_x = -\frac{m\upsilon}{4}$$

$$\Delta P_y = 0 - m\upsilon_y = -m\upsilon\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \Delta P_y = -\frac{m\upsilon\sqrt{3}}{2}$$

Η μεταβολή της ορμής είναι το διάνυσμα $\Delta\vec{P} = \left(\Delta P_x, \Delta P_y\right)$, άρα το ζητούμενο μέτρο της θα είναι ίσο με:

$$\Delta P = \sqrt{(\Delta P_x)^2 + (\Delta P_y)^2} = ... = \frac{m\upsilon\sqrt{13}}{4}$$

B.2. Σώμα Σ_2 , μάζας m_2, είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω και πλάτος Α.



Τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_2 διέρχεται από την ακραία θέση της ταλάντωσης, συγκρούεται μετωπικά, ελαστικά και ακαριαία με σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = \dfrac{m_2}{3}$, το οποίο ακριβώς πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2A\omega\sqrt{3}$. Το πλάτος A' της νέας ταλάντωσης του Σ_2 θα είναι:

(γ) $A' = 2A$

Για την κεντρική ελαστική κρούση από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας θα προκύψει η ταχύτητα του Σ_2 μετά:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2}$$

***Το Σ_2 πριν την κρούση ήταν στιγμιαία ακίνητο αφού βρισκόνταν στην ακραία θέση της ταλάντωσης του.*

Για την ταλάντωση του Σ_2 μετά την κρούση εφαρμόζω την Α.Δ.Ε.Τ. στο σημείο που έγινε η κρούση για να υπολογίσω το νέο πλάτος της ταλάντωσης του. Επειδή η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, το σημείο είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης που έκανε το σώμα πριν την κρούση του $x = A$. Επίσης για την σταθερά επαναφοράς ισχύει ότι $D = k = m_2\omega^2$

$$E' = K' + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow A'^2 = \frac{m_2}{k}\left(\frac{2A\omega\sqrt{3}}{2}\right)^2 + A^2$$

Τελικά προκύπτει ότι: $A' = 2A$

Β.3. Σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης. Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος $\left(\dfrac{K}{U}\right)$ τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{T}{8}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης, είναι

(α) 1

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}Dx^2} = \frac{m}{m\omega^2} \cdot \left(\frac{v}{x}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} \cdot \left(\frac{\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_o)}{A\eta\mu(\omega t + \phi_o)}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon\phi^2(\omega t + \phi_o)}$$

Αφού το σώμα την χρονική στιγμή $t_o = 0$ είναι στην ακραία θέση θα υπολογίσουμε την αρχική φάση ($0 \leq \phi_o < 2\pi$) :

$$x = A\eta\mu(0 + \phi_o) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = 1 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

Την χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ η φάση της ταλάντωσης θα είναι ίση με :

$$\phi = \omega t + \phi_o = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα για τον ζητούμενο λόγο θα προκύψει:

$$\frac{K}{U} = \frac{1}{\epsilon\phi^2(3\pi/4)} = 1$$

Θέμα Γ

Σώμα μάζας $m = 2kg$ ισορροπεί δεμένο στο δεξί άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$ πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, με το άλλο άκρο του ελατηρίου να είναι στερεωμένο ακλόνητα σε κατακόρυφο τοίχο. Ασκώντας στο σώμα κατάλληλη δύναμη το εκτρέπουμε από την παραπάνω θέση συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά $0,2m$ και από την θέση αυτή την $t_o = 0$ το εκτοξεύουμε με μια ταχύτητα μέτρου $2\sqrt{3}m/s$ προς τα δεξιά.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος θα είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την συχνότητα της.

Σχεδιάζουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση που βρίσκεται x δεξιά από την Θέση Ισορροπίας η οποία ταυτίζεται με την θέση Φυσικού μήκους του ελατηρίου. Στην θέση αυτή ασκείται στο σώμα η δύναμη του ελατηρίου η οποία έχει φορά προς τα αριστερά. Άρα θα προκύψει ότι:

$$\Sigma F = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx$$

η παραπάνω σχέση είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη , ώστε το σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10rad/s \Rightarrow 2\pi f = 10 \Rightarrow f = \frac{5}{\pi}Hz$$

Γ.2 Να γράψετε την χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα κατά την κίνηση του, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα δεξιά.

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\Sigma F = -Dx = -DA\eta\mu\left(\omega t + \phi_o\right)$$

Για τον υπολογισμό του πλάτους εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ την χρονική στιγμή $t_o = 0$, για την οποία γνωρίζουμε την θέση $x = -0,2m$ και την ταχύτητα $\upsilon = +2\sqrt{3}m/s$:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow A = 0,4m$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης έχουμε:

$$x(t_o = 0) = -0,2 = 0,4\eta\mu\left(0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση με απαίτηση $0 \leq \phi_o < 2\pi$:

$$\phi_o = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \phi_o = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

και

$$\phi_o = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \phi_o = \pi + \frac{\pi}{6}$$

Αφού την $t_o = 0$ η ταχύτητα είναι θετική πρέπει:

$$\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$$

Άρα θα προκύψει ότι $\phi_o = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\Sigma F = -80\eta\mu\left(10t + \frac{11\pi}{6}\right) \quad (SI)$$

***Η αρχική φάση θα μπορούσε να υπολογιστεί ευκολότερα με την χρήση της ¨αναπαράστασης περιστρεφόμενου διανύσματος¨.*

Γ.3 Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το ελατήριο βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης επιμήκυνσης.

*Την χρονική στιγμή t_1 το σώμα θα βρίσκεται στην θέση $x = +A$(**έχει γίνει λάθος στην εκφώνηση και θα έπρεπε να γίνεται αναφορά αν είναι η πρώτη φορά ή όχι. Εδώ θα υπολογίσουμε την πρώτη φορά.)*

$$A = A\eta\mu\left(10\cdot t_1 + \frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10\cdot t_1 + \frac{11\pi}{6}\right) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση (για $\kappa = 1$, ώστε $t_1 > 0$ και να είναι ο μικρότερος χρόνος):

$$10\cdot t_1 + \frac{11\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 10\cdot t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15}sec$$

***Η ζητούμενη χρονική στιγμή θα μπορούσε να υπολογιστεί ευκολότερα με την χρήση της ¨αναπαράστασης περιστρεφόμενου διανύσματος¨.*

Γ.4 Για την χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha = -\omega^2 x = -\omega^2 A = -40m/s^2$$

Γ.5 Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας του σώματος κατά την χρονική στιγμή που η κινητική του ενέργεια είναι ίση για δεύτερη φορά με την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ για την παραπάνω χρονική στιγμή:

$$E = K + U = U + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$E = K + U = K + K \Rightarrow E = 2K \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\upsilon_{max}}{\sqrt{2}}$$

΄Οταν διέρχεται για δεύτερη φορά από την θέση αυτή βρίσκεται στην θέση $x = +\frac{A}{\sqrt{2}}$ *κινούμενο προς τα αριστερά* ($\upsilon < 0$)*. ΄Αρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής θα είναι:*

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D \cdot x \cdot \upsilon = -k\left(+\frac{A}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{\omega A}{\sqrt{2}}\right) = 160J/s$$

Θέμα Δ

Σώμα Σ_1 μάζας M ισορροπεί στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ που το πάνω άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή.

Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m, εκτοξεύεται από το δάπεδο με ταχύτητα μέτρου υ_o κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω και αφού διανύσει απόσταση $d = 1,2m$ συγκρούεται μετωπικά πλαστικά και ακαριαία με το ακίνητο Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0s$.

Μετά την κρούση το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με την απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του να μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως στο παρακάτω διάγραμμα.

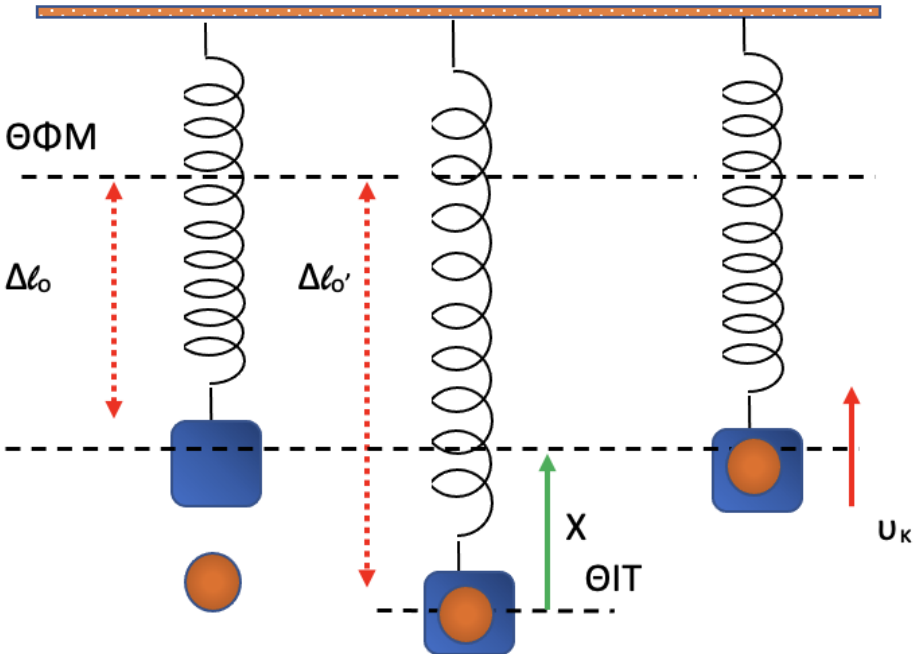
Δ.1 Να υπολογίσετε τις μάζες m και M των δύο σωμάτων.

Από το διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου συμπεραίνουμε ότι:

- $A = 0,2m$
- την $t_o = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην θέση $x = +0,1m$ και έχει θετική ταχύτητα.
- την $t_1 = \dfrac{\pi}{15}s$ το συσσωμάτωμα διέρχεται για 1η φορά από την ακραία θετική θέση και την $t_2 = \dfrac{4\pi}{15}s$ διέρχεται για 1η φορά από την ακραία αρνητική θέση. Άρα $t_2 - t_1 = \dfrac{T}{2} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{15}s \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5rad/s$

Αφού το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση προκύπτει ότι:

$$D = k = (M + m) \cdot \omega^2 \Rightarrow M + m = 4kg$$



Αρχικά το Σ_1 ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά $\Delta\ell_o$. Σε αυτή την θέση γίνεται η κρούση και η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος θα βρίσκεται χαμηλότερα, εκεί που η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι $\Delta\ell_o'$. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας μετά την κρούση θα είναι $|x| = \Delta\ell_o' - \Delta\ell_o$ και η ταχύτητα του συσσωματώματος στην ίδια θέση υ_κ.

Εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας για την θέση πριν την κρούση και για την ΘΙΤ του συσσωματώματος:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_o = Mg \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{Mg}{k}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell'_o = (M+m)g \Rightarrow \Delta\ell'_o = \frac{(M+m)g}{k}$$

προκύπτει ότι:

$$|x| = \Delta\ell'_o - \Delta\ell_o = \frac{mg}{k} \Rightarrow 0,1 = \frac{m \cdot 10}{100} \Rightarrow m = 1kg$$

Άρα $M + m = 4 \Rightarrow M = 3kg$

Δ.2 Να γράψετε την χρονική εξίσωση της ορμής του Σ_1 κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Υπολογίζουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης με δεδομένο ότι την $t_o = 0$ *γνωρίζουμε θέση και πρόσημο της ταχύτητας.*

$$x(t_o = 0) = +0,1 = 0,2\eta\mu\left(\omega \cdot 0 + \phi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

επιλύουμε τη τριγωνομετρική εξίσωση με τους γνωστούς περιορισμούς για την τιμή της αρχικής φάσης (Θέμα Γ)

$$\phi_o = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \phi_o = \pi - \frac{\pi}{6}$$

Αφού η ταχύτητα είναι θετική $\sigma\upsilon\nu\phi_o > 0 \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{6}$ *Η ζητούμενη ορμή θα είναι:*

$$P_1 = M\upsilon = M\omega A\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_o\right) \Rightarrow P_1 = 3\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \ (SI)$$

Δ.3 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης υ_o.

Υπολογίζουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος την χρονική στιγμή $t_o = 0$, *δηλαδή αμέσως μετά την κρούση:*

$$\upsilon_\kappa = \upsilon(t_o = 0) = \omega A \sigma \upsilon \nu(0 + \phi_o) \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2} m/s$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της ορμής για την κρούση, ώστε να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ *του* $\Sigma 2$ *ακριβώς πριν την κρούση:*

$$m\upsilon = (m + M)\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{3} m/s$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την ανύψωση του Σ_2, *ώστε βα υπολογίσουμε την ταχύτητα εκτόξευσης :*

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = -mgd \Rightarrow \upsilon_o = 6m/s$$

Δ.4 Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου από την στιγμή της κρούσης μέχρι την στιγμή $t_1 = \frac{3\pi}{15} s$

Την στιγμή της κρούσης η παραμόρφωση του ελατηρίου θα ειναι $\Delta\ell_o$ *που σύμφωνα με τα παραπάνω (Δ.1) είναι ίση με* $\Delta\ell_o = \frac{Mg}{k} = 0,3m$

Το συσσωμάτωμα την χρονική στιγμή t_1 *θα βρίσκεται στην θέση* x_1 *και το ελατήριο θα έχει παραμόρφωση* $\Delta\ell$.

$$x_1 = 0,2\eta\mu\left(5 \cdot \frac{3\pi}{15} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,2\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -0,1m$$

Αφού είναι $0,1m$ *κάτω από την ΘΙΤ η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι* $\Delta\ell = \Delta\ell'_o + |x_1| = 0,5m$*

* *Προκύπτει παραπάνω (Δ.1) ότι* $\Delta\ell'_o = \frac{(M + m)g}{k} = 0,4m$

Το ζητούμενο έργο θα είναι:

$$W = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_o)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = -8Joule$$

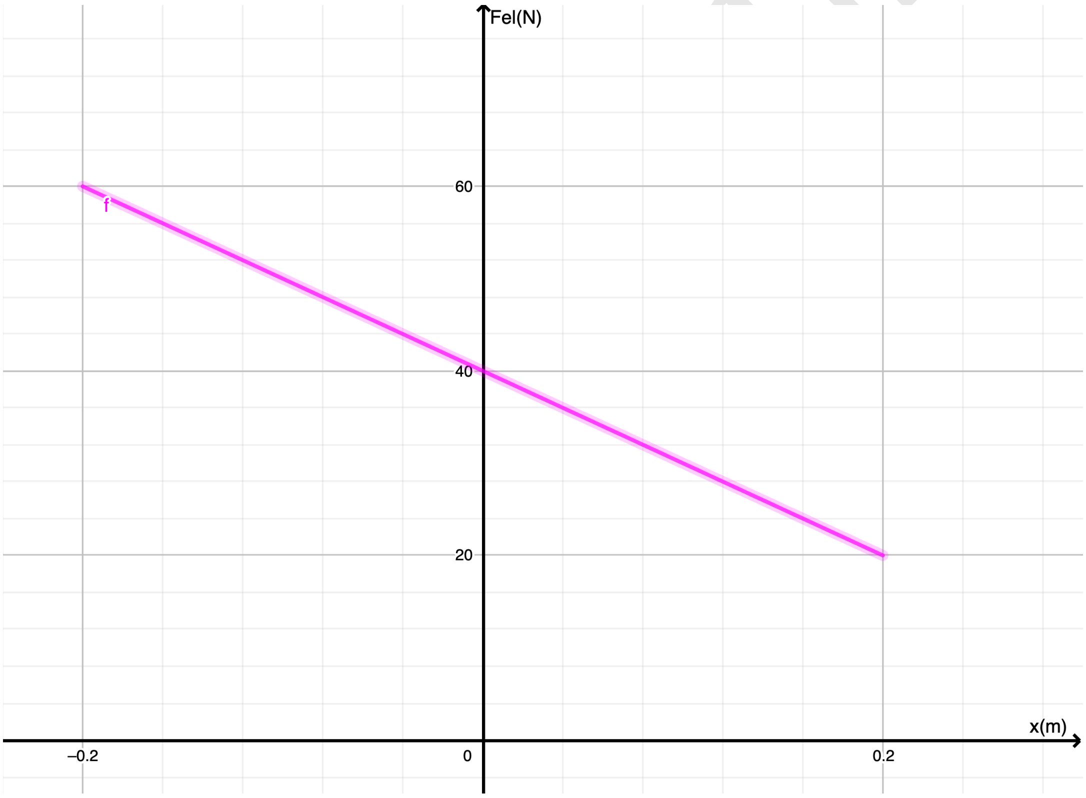
Δ.5 Να γράψετε την εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης από την Θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

Σε κάθε θέση κατά την διάρκεια της ταλάντωσης ισχύει ότι:

$$\Sigma\vec{F} = -D\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = -k\vec{x} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - (M+m)g = -kx$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$F_{\varepsilon\lambda} = 40 - 100x \quad -0,2 \leq x \leq +0,2 \;\; (SI)$$



Επιμέλεια :Μ. Καραδημητρίου