Διαγώνισμα *Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου*

Κρούσεις - Αρμονική Ταλάντωση

Ενδεικτικές Λύσεις

Σάββατο 6 Σεπτέμβρη 2019

Βαθμολογία | | | | | % |

Ονοματεπώνυμο:

Θέμα Α

Α.1. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση $x = A\eta\mu\omega t$, τότε η τιμή της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

(γ) $F = -m\omega^2 A\eta\mu\omega t$

Α.2. Σφαίρα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 τετραπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση:

(δ) ισχύει $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$, όπου $\Delta\vec{P}_1$,$\Delta\vec{P}_2$ οι μεταβολές των ορμών των δύο σφαιρών.

Α.3. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T. Αντικαθιστούμε το σώμα μάζας m με ένα άλλο σώμα τετραπλάσιας μάζας και το αναγκάζουμε πάλι να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος της νέας ταλάντωσης είναι:

(β) $2T$

Α.4. Σε ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, όταν η επιτάχυνσή του είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται, τότε η ταχύτητα του σώματος είναι:

(α) θετική και το μέτρο της αυξάνεται

Α.5.

(α) Στην κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή της ορμής του ενός σώματος είναι πάντα αντίθετη από την μεταβολή της ορμής του άλλου σώματος **Σωστό**

(β) Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων, η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή. **Λάθος**

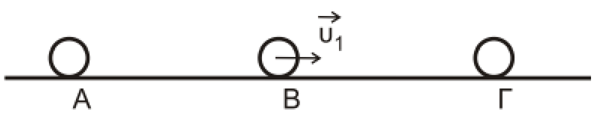
(γ) Για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση το διάνυσμα της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας και το διάνυσμα της ταχύτητας έχουν συνεχώς την ίδια διεύθυνση. **Σωστό**

(δ) Ο ρυθμός μεταβολής της Ορμής για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερός. **Λάθος**

(ε) Η σταθερά επαναφοράς μιας αρμονικής ταλάντωσης είναι ανάλογη της δύναμης επαναφοράς που ασκείτε στο ταλαντούμενο σώμα. **Λάθος**

Θέμα Β

Β.1. Τρεις σφαίρες Α, Β, Γ ίδιων διαστάσεων με μάζες $m_A = 2m$, $m_B = m$ και $m_\Gamma = 2m$, αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η σφαίρα Β έχει τεθεί από εξωτερικό αίτιο σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ προς τα δεξιά χωρίς να περιστρέφεται. Η σφαίρα Β, αφού συγκρουστεί με τη σφαίρα Γ στη συνέχεια συγκρούεται με τη σφαίρα Α. Αν όλες οι κρούσεις είναι κεντρικές και ελαστικές ο λόγος της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας Β είναι:

(α) $\dfrac{1}{81}$

Για την πρώτη κρούση ανάμεσα στην Β και Γ οι ταχύτητες μετά θα είναι:

$$\upsilon_\Gamma = \frac{2m_B}{m_B + m_\Gamma}\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon_1$$

$$\upsilon'_B = \frac{m_B - m_\Gamma}{m_B + m_\Gamma}\upsilon_1 = -\frac{1}{3}\upsilon_1$$

Για την δεύτερη κρούση ανάμεσα στην Β (που γυρνάει προς τα πίσω) με την Α οι ταχύτητα της Β μετά θα είναι:

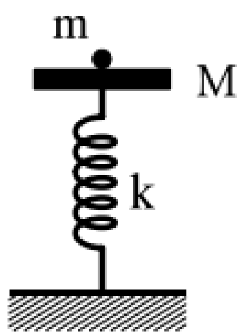
$$\upsilon''_B = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}\upsilon'_B = \frac{1}{9}\upsilon_1$$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} = ... = \left(\frac{\upsilon''_B}{\upsilon_1}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

**Μετά την δεύτερη κρούση της η Β επιστρέφει προς τα δεξιά, όμως δεν θα συγκρουστεί ξανά με την Γ αφού $\upsilon''_B < \upsilon_\Gamma$*

Β.2. Δίσκος μάζας $M = 2m$ είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, και ισορροπεί (όπως στο σχήμα). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο έδαφος. Στο δίσκο τοποθετούμε χωρίς αρχική ταχύτητα σώμα μάζας m. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά ίση με την σταθερά του ελατηρίου.



Ο λόγος της μέγιστης δύναμης επαναφοράς, προς την μέγιστη δύναμη του ελατηρίου θα είναι ίση με:

(β) $\frac{1}{4}$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του Δίσκου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_1. Από την συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = Mg = 2mg$$

Στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συστήματος Δίσκος-σώμα το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_2. Από την συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_2 = (M+m)g \Rightarrow k\Delta l_2 = 3mg$$

Στην αρχική θέση η ταχύτητα του συστήματος είναι μηδέν, άρα είναι μια ακραία θέση, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$$

Ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{\Sigma F_{max}}{F_{\varepsilon\lambda(max)}} = \frac{kA}{k\Delta l_{max}} = \frac{A}{A+\Delta l_2} = \frac{1}{4}$$

** Το ελατήριο έχει την μέγιστη παραμόρφωση του στην κάτω ακραία θέση.*

Β.3. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο μια σφαίρα Σ_1 μάζας m μικρών διαστάσεων συγκρούεται ελαστικά, αλλά όχι κεντρικά, με δεύτερη όμοια σφαίρα Σ_2 ίσης μάζας m, η οποία είναι αρχικά ακίνητη.

Μετά την κρούση οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{v_1}$ και $\vec{v_2}$ αντίστοιχα. Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v_1}$ με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v_2}$ είναι:

(β) 90^o

Για την κρούση η οποία γίνεται στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \Rightarrow P_1^2 = P_1'^2 + P_2'^2 + 2P'_1P'_2\sigma\upsilon\nu\phi$$

**τα διανύσματα των ορμών μετά την κρούση σχηματίζουν γωνία ϕ μεταξύ τους και εφαρμόζω τον κανόνα του παραλληλογράμμου.*

Η κρούση είναι ελαστική, άρα ισχύει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2'^2$$

Από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90^o$

Θέμα Γ

Ένα σώμα μάζας $m = 2kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η δύναμη επαναφοράς που του ασκείται, μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Sigma F = -40\eta\mu\omega t \quad (SI)$$

Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών περασμάτων του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $\Delta t = \frac{\pi}{10}s$.

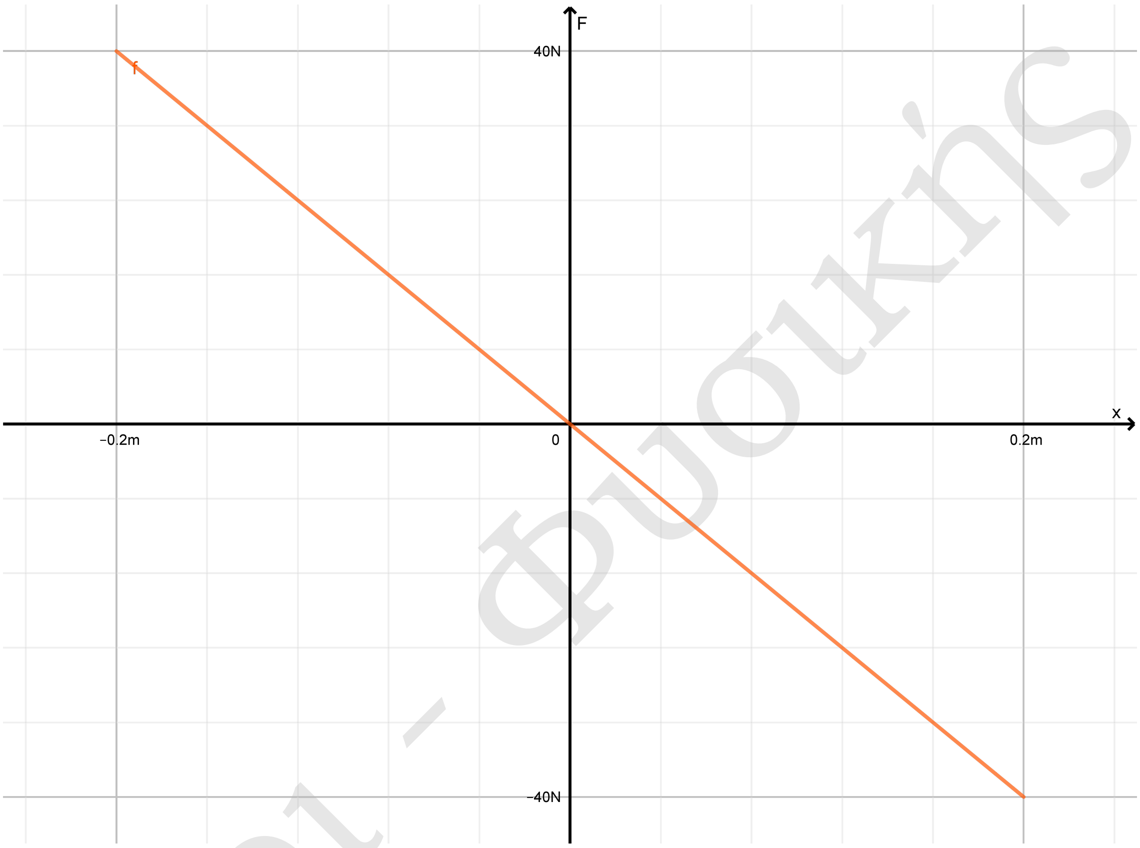
Γ.1 Να βρείτε πόσο απέχουν μεταξύ τους οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του σώματος.

Από τα δεδομένα προκύπτει:

- $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 10rad/s \Rightarrow D = m\omega^2 = 200N/m$
- $\Sigma F_{max} = DA = 40N \Rightarrow A = 0,2m$

Γ.2 Να γράψετε την εξίσωση και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε αριθμημένους άξονες.

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow \Sigma F = -200x \quad (S.I.)$$
$$-0,2m \leq x \leq 0,2m$$



Γ.3 Να υπολογίσετε τη μετατόπιση καθώς και το διάστημα που διένυσε το σώμα στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_1 = 0$, έως τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5\pi}{60}s$.

Η θέση του σώματος την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ είναι στην ΘΙΤ.Την χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$x_2 = 0,2\eta\mu\left(10\frac{5\pi}{60}\right) = 0,1m$$

Η μετατόπιση θα είναι:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0,1 - 0 = 0,1m$$

Την στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από την ΘΙΤ με θετική ταχύτητα ενώ την t_2 η ταχύτητα του είναι $\upsilon = \omega A \sigma \upsilon \nu \left(10\frac{5\pi}{60}\right) = -\sqrt{3}m/s < 0$, άρα διέρχεται για δεύτερη φορά από την θέση x_2. Το διάστημα που θα έχει διανύσει θα είναι:

$$S = 0,2 + 0,1 = 0,3m$$

Γ.4 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$, όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης και επιταχύνεται.

Στην θέση $A/2 = 0,1m$, για να επιταχύνεται πρέπει να κινείται προς την θέση ισορροπίας, άρα να έχει αρνητική ταχύτητα. Οπότε ο ρυθμός μεταβολής μου μας ζητείται είναι η χρονική στιγμή t_2

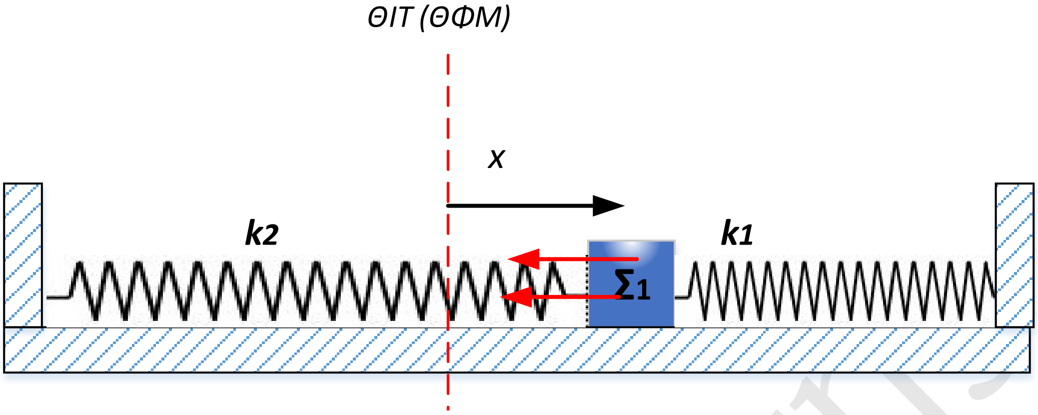
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx\upsilon = +20\sqrt{3}J/s$$

Θέμα Δ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα ελεύθερα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = k_2 = k = 50N/m$ τα οποία έχουν το ένα άκρο τους ακλόνητα στερεωμένο και βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.

Εκτρέπω το σώμα από την ισορροπία, έτσι ώστε η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του κάθε ελατηρίου να γίνει $1J$ και την χρονική στιγμή $t_o = 0$ το αφήνω ελεύθερο από την θέση αυτή.

Δ.1 Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σε συνάρτηση με τον



χρόνο, θεωρώντας ως θετική την φορά της αρχικής εκτροπής.

Σε μια τυχαία θέση που απέχει x από την θέση ισορροπίας που είναι και θέση φυσικού μήκους σχεδιάζω τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τα ελατήρια.

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x = -2kx$$

Άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k = 100N/m$

Η αρχική εκτροπή είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = 0,2m$$

$$t_{=}0 \Rightarrow x = +A \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10rad/s$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης στο $(S.I.)$ θα είναι:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

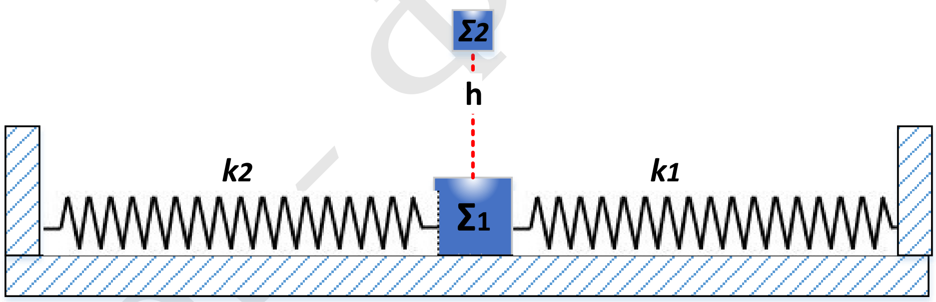
Δ.2 Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε μια χρονική στιγμή για τον οποία το σώμα διέρχεται επιταχυνόμενο από την θέση $x_1 = -0,1m$.

Εφαρμόζω την ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{3}m/s$$

Αφού διέρχεται επιταχυνόμενο από μια αρνητική θέση, θα πρέπει να κινείται προς την ΘΙΤ, άρα η ταχύτητα θα είναι θετική. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής θα είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot v = +D \cdot x \cdot v = -10\sqrt{3}J/s$$



Δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$ αφήνεται να πέσει από ύψος h και πέφτει πάνω στο Σ_1, χωρίς να αναπηδήσει, όταν εκείνο διέρχεται από την θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την θετική φορά. Το σύστημα των δύο σωμάτων συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ.3 Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος της νέας ταλάντωσης.

Για την κρούση εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον οριζόντιο άξονα, την στιγμή που το Σ_1 διέρχεται από την ΘΙΤ:

$$0 + m_1 v_{max} = (m_1 + m_2)v'_{max} \Rightarrow m_1 \omega A = (m_1 + m_2)\omega' A'$$

Επειδή $\omega' = \sqrt{\dfrac{D}{m_1+m_2}} = 5rad/s$, *προκύπτει ότι το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι* $A' = 0,1m$ *και η περίοδος* $T = 2\pi/5sec$

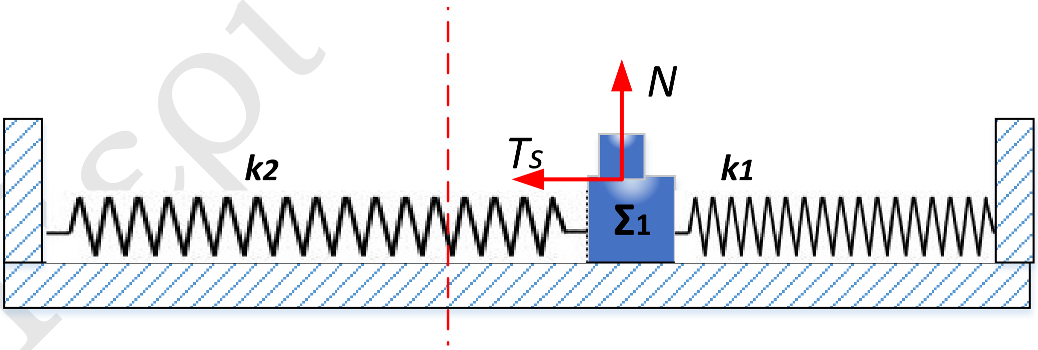
Δ.4 Να βρεθεί η εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με τον χρόνο. Να θεωρήσετε θετική την φορά προς τα δεξιά και $t_o = 0$ την στιγμή μετά την κρούση.

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -Dx = -DA'\eta\mu\left(\omega' t + \phi'_o\right)$$

Η κρούση γίνεται στην ΘΙΤ και η ταχύτητα είναι θετική την $t = 0$ *,άρα* $\phi'_o = 0$ *, οπότε προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός σε συνάρτηση με τον χρόνο:*

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -10\eta\mu\,(5t) \quad (S.I.)$$

Δ.5 Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στα δύο σώματα, ώστε να παραμένουν σε επαφή σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης τους. *Το* Σ_2 *θα εκτελεί ταλάντωση με σταθερά επανα-*



φοράς $D_2 = m_2\omega'^2$. *Η στατική τριβή θα παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς.*

$$\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow -T_s = -m_2\omega'^2 x$$

Για να μην ολισθαίνει σε σχέση με το Σ_1 πρέπει:

$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{T_s}{N} \Rightarrow \mu_s \leq \frac{m_2 \omega'^2 A'}{m_2 g} \Rightarrow \mu_{s(min)} = 0,25$$

Επιμέλεια: Δρ. Μιχάλης Καραδημητρίου, Φυσικός