

35ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ

Αθήνα, 7-8 και 9 Δεκεμβρίου 2018

«Μαθηματικά: Έρευνα και Εκπαίδευση τον 21ο αιώνα»

**Η εξελικτική πορεία του πολλαπλασιασμού μέσα από
τις σπειροειδείς τροχιές και υποτροχιές των
Αναλυτικών Προγραμμάτων και Σχολικών Εγχειριδίων
Μαθηματικών του Δημοτικού και του Γυμνασίου**

- Μπούτης Μιχάλης, Υπ. Διδάκτωρ ΤΕΠΑΕΣ, Πανεπιστημίου Αιγαίου, Διευθυντής στο Γυμνάσιο με Λ.Τ Έμπωνας Ρόδου
- MSc Μαλλιάρκας Κώστας, Καθηγητής Μαθηματικών Δ.Ε., 1^ο Γενικό Λύκειο Ρόδου – Βενετόκλειο
- MSc Ταμβακά Ελπίδα, Προϊσταμένη 18^{ου} Νηπιαγωγείου Ρόδου

Εισαγωγή

Σκοπός Εργασίας

Η διερεύνηση του τρόπου εισαγωγής και ανάπτυξης της έννοιας του πολλαπλασιασμού και των ιδιοτήτων του στα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Μέθοδος έρευνας

- Μελέτη Α.Π. και Σ.Ε. Νηπιαγωγείου, Δημοτικού και Γυμνασίου.
- Εντοπισμός τροχιών και υποτροχιών που σχετίζονται με τον πολλαπλασιασμό.

Θεωρητικό μέρος

- Οι διάφορες πράξεις αντιστοιχίζονται σε κατηγορίες καταστάσεων πραγματικότητας. Για τον πολλαπλασιασμό συνήθως είναι καταστάσεις απλής και πολλαπλής αναλογίας και καταστάσεις σύγκρισης μέτρων δύο ή περισσότερων μεγεθών.
- **Piaget:** Τα παιδιά 5-6 ετών μπορούν να αντιμετωπίσουν απλές καταστάσεις πολλαπλασιασμού όταν κατανοούν τη σχέση αντιστοιχίας «ένα - προς - πολλά».
- **Steffe, Μπούφη:** Το παιδί αναπτύσσει την πολλαπλασιαστική του σκέψη όπως οικοδομείται και η έννοια της δεκάδας, δηλαδή με προοδευτική εξέλιξη της αρίθμησης ώστε να συμπεριλάβει και σύνθετες μονάδες. Αργότερα μπορούν να συνεχίζουν την αρίθμηση και από ενδιάμεσα σημεία αλλά και να υπολογίζουν συμβολικά γινόμενα.

- Η διαδικασία εκμάθησης βασικών γινομένων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε τρία στάδια, όχι απαραίτητα διακριτά:

- 1) Εμπλοκή με προβλήματα πολλαπλασιαστικής σκέψης
- 2) Επινόηση δικών τους στρατηγικών υπολογισμού γινομένων
- 3) Απομνημόνευση γινομένων (ter Heege, 1985)

- Η ανάπτυξη στρατηγικών βοηθάει στην απομνημόνευση.
- Η απομνημόνευση πινάκων πολλαπλασιασμού δεν σημαίνει απαραίτητα και απομνημόνευση μεμονωμένων γινομένων.

- **Συνηθισμένες στρατηγικές σκέψης υπολογισμού γινομένων**

- Εφαρμογή επιμεριστικής και αντιμεταθετικής ιδιότητας
(για το 8×7 κάνουν $5 \times 8 = 40$ και μετά $40 + 8 + 8 = 56$)
- Χρήση γινομένων του 10 (για το 9×8 στηρίζονται στο 10×8)
- Διπλασιασμός γινομένων (για 4×7 μέσω του 2×7 , για 8×7 μέσω του 4×7)
- Στρατηγικές του «ένα περισσότερο» ή «ένα λιγότερο»
(για 6×7 κάνουν $5 \times 7 = 35$ και μετά $+7$ ή για 7×8 κάνουν 8×8 και μετά -8)

Θεωρητικό μέρος

- Μια έννοια που σχετίζεται με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις είναι η απαρίθμηση, δηλαδή η εύρεση του πλήθους μιας συλλογής φυσικών ή νοητών αντικειμένων, όπου χρησιμοποιείται η «αρχή του πολλαπλασιασμού». (Καλαβάσης, & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015)
- Κάποια προβλήματα του πολλαπλασιασμού συνδέονται με το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Διακρίνονται σε προβλήματα με συμμετρικές ή ασύμμετρες καταστάσεις. Στις συμμετρικές μπορεί να εναλλάσσονται οι ρόλοι πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου (εμβαδόν ορθογωνίου $E = \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$).
- Ορισμένα προβλήματα με συμμετρικές καταστάσεις όπως οι συνδυασμοί, δεν εμπίπτουν στο μοντέλο επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης αλλά η πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης.

Είδη προβλημάτων πολλαπλασιασμού

- Αν η πολλαπλασιαστική σχέση αφορά 4 μέρη. Δύο διαστάσεις ή δύο χώρους μέτρησης και κάθε μια αφορά 2 αριθμούς.

Παράδειγμα: 1 ποδήλατο έχει 2 ρόδες. Πόσες έχουν 4 ποδήλατα;

- Αν αφορούν στην καρτεσιανή σχέση δύο χώρων μέτρησης, η οποία οδηγεί σε ένα τρίτο χώρο μέτρησης.

Παράδειγμα: Εμβαδό ορθογωνίου με μήκος 4m και πλάτος 3m;

- Αν υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι χώροι μέτρησης που οδηγούν σε ένα τρίτο ανεξάρτητο νέο χώρο, ο οποίος όμως δεν προκύπτει από το γινόμενο των άλλων δύο.

Παράδειγμα: Πόση τροφή καταναλώνουν 10 άνθρωποι σε 2 εβδομάδες αν 1 άνθρωπος καταναλώνει σε 1 ημέρα γνωστή ποσότητα α ;

Εμπόδια

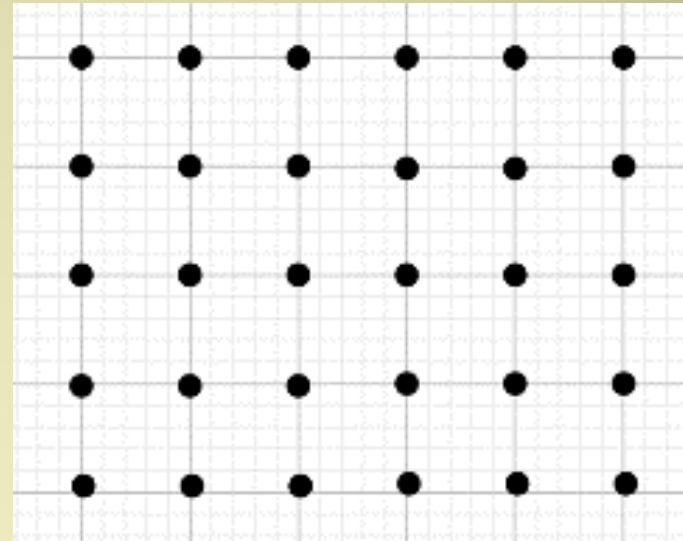
- Γενικές κατηγορίες εμποδίων: α) Επιστημολογικού τύπου
β) Διδακτικού τύπου και γ) Ψυχογενετικής προέλευσης
- **Εμπόδια σχετικά με τον πολλαπλασιασμό**
 - Το διαφορετικό νόημα του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς από ότι στα υπόλοιπα σύνολα αριθμών.
 - Η λεκτική κατανόηση προβλημάτων (σημαντικό ρόλο παίζει και η σειρά παρουσίασης των γεγονότων στην εκφώνηση).
 - Διαδικασία και ιδιότητες των πράξεων (ορίζονται αλλιώς στις διάφορες μαθηματικές δομές και οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες προσαρμογής στο εκάστοτε πλαίσιο).
 - Δυσχέρειες στο χειρισμό των πράξεων που προέρχονται από ελλιπή κατανόηση των αλγορίθμων και των ιδιοτήτων τους.

- Η ισότητα είναι μια σχέση ισοδυναμίας όπου με βάση ένα κριτήριο μπορεί να θεωρηθούν ίδιες δύο παραστάσεις για ένα συγκεκριμένο σκοπό ή οπτική. Η φορά της ισότητας από το ένα μέλος στο άλλο μπορεί να αλλάζει το σκοπό.
- $2+3=(1+1)+(1+1+1)=5 \cdot 1=5$ (απαρίθμηση και πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση – αντίστροφα, ανάλυση του 5)
- $27 \cdot 6=[(2 \cdot 10)+7] \cdot 6 = (2 \cdot 10) \cdot 6+(7 \cdot 6) = (2 \cdot 6) \cdot 10+(7 \cdot 6) = 120+42 = 162$
(βασικά γινόμενα, πλεονέκτημα δεκαδικού συστήματος, επιμεριστική, προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Η αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μόνο ένας τύπος επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (εμπόδιο σε προβλήματα που απαιτούν πολλαπλασιαστικές σκέψεις).
- Η αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει το αποτέλεσμα (εμπόδιο σε προβλήματα με πολλαπλασιαστή μικρότερο του 1)

- Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται πολλές φορές δεν έχουν μονοσήμαντες ερμηνείες και πρέπει να δίνονται διευκρινήσεις αν επιζητούμε κατανόηση συγκεκριμένης γνώσης ή αν θέλουμε να εκμεταλλευτούμε γνωστικά τις διάφορες ερμηνείες για την επέκταση των εννοιών.

Παράδειγμα αναπαράστασης πολλαπλασιασμού και εναλλακτικές ερμηνείες:

- ✓ Ο αριθμός 30
- ✓ $5 \cdot 6$
- ✓ $6 \cdot 5$
- ✓ $2 \cdot 15$ ή $3 \cdot 10$ ή ...
- ✓ $(3 \cdot 6) + (2 \cdot 6)$ ή ...



Ερευνητικό μέρος

Προσέγγιση πολλαπλασιασμού με Θεωρία Τροχιών Μάθησης

- Οι τροχιές μάθησης αποτελούνται από τρία μέρη:

- 1) **Μαθηματικοί στόχοι** (θεμελιώδεις συστάδες εννοιών και δεξιοτήτων)
- 2) **Επίπεδα σκέψης** το ένα πιο εξελιγμένο από το άλλο, δηλαδή μια τυπική διαδρομή ανάπτυξης κατανόησης και ικανοτήτων.
- 3) **Σύνολο διδακτικών έργων** που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα επίπεδα σκέψης και έχουν σχεδιαστεί για να βοηθήσουν τα παιδιά να ολοκληρώσουν το κάθε επίπεδο.

- **Δίνουν απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα όπως:**

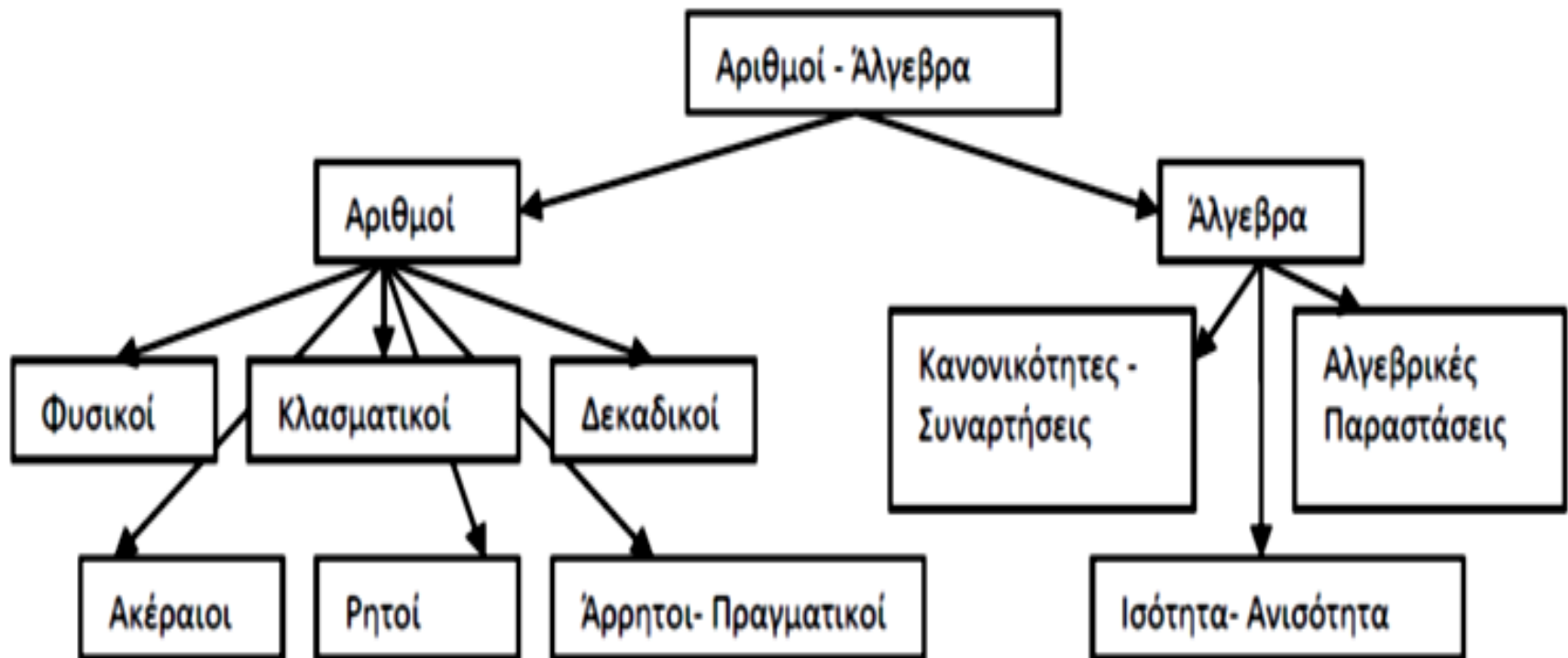
- Ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι και η αφετηρία εκκίνησης;
- Πώς και πού μετακινείται κάθε φορά;
- Πώς επιτυγχάνεις τελικά τον αρχικό σου στόχο;

(Clements & Sarama, 2004)

Θεματική περιοχή έρευνας: Αριθμητική – Άλγεβρα

Η έννοια του πολλαπλασιασμού εμπλέκεται όμως με τις περισσότερες θεματικές περιοχές όπως:

- Γεωμετρία – Χώρος
- Μέτρηση (ειδικά στις μετατροπές μονάδων)
- Στατιστική



Ανάλυση ΑΠΣ και Σχολικών Εγχειριδίων

- Στο Νηπιαγωγείο μεταξύ άλλων επιδιώκεται να μάθουν:
«...να οργανώνουν και επεκτείνουν τις γνώσεις σχετικά με τους αριθμούς, να εκτελούν απλές πράξεις, να εμπλουτίζουν τη γλώσσα με λέξεις που συνδέονται με τα μαθηματικά ...».
- Προτεινόμενες δραστηριότητες: «...να απαριθμούν αντικείμενα, να χειρίζονται ποσότητες, να τις ενώνουν και να δημιουργούν άλλες, να βγάζουν ή να βάζουν ένα μέρος τους και να συγκρίνουν ή να μοιράζουν...»

Πολλαπλασιασμός-
Διαίρεση

Αρ8 Να ομαδοποιούν
αντικείμενα σε
δυάδες, τριάδες,
τετράδες και
πεντάδες

εντοπίζουν πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν αν ομαδοποιήσουν αντικείμενα ή εικονιστικό υλικό σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες. Απαντούν ερωτήσεις του τύπου: “Πόσες δυάδες μπορούν να γίνουν τα έξι ζωάκια;”
γνωρίζοντας τον αριθμό των ομάδων και το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν, δοκιμάζουν να βρουν πόσα είναι όλα μαζί χωρίς να μετρήσουν, επινοώντας υπολογιστικούς ή αναπαραστατικούς τρόπους (π.χ. σημειώνοντας, ζωγραφίζοντας, υπολογίζοντας νοερά).

Δημοτικό

- Ο πολλαπλασιασμός εισάγεται με πρόσθεση ίδιων προσθετέων και χρήση της έκφρασης «φορές» στην Α' και Β' Δημοτικού στην οποία γίνεται πρώτη χρήση του συμβόλου «x».
- Στη Β' Δημοτικού εισάγεται για πρώτη φορά η προπαίδεια κατά σειρά του 10, 5, 2, 4, 8, 7, 3, 6, 9, 11.
- ✓ Η διδασκαλία της προπαίδειας γίνεται με χρήση αριθμητικών μοτίβων, χρήση δακτύλων, με αριθμητικές σειρές, με πίνακα και γεωμετρική ερμηνεία εμβαδών ορθογωνίων.
- ✓ Εισάγεται άτυπα η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα και η χρήση επιμερισμού στον πολλαπλασιασμό.
- Από Γ' Δημοτικού έχουμε πίνακες πολλαπλασιασμού.
- Από Δ' Δημοτικού εμφανίζεται η έννοια των πολλαπλασίων.

Μεταβάσεις από Αριθμητική σε Άλγεβρα

Αριθμητική	Άλγεβρα
Αίσθηση αριθμών	Αίσθηση συμβόλων
Αριθμοί	Μεταβλητές
Αριθμητικές παραστάσεις	Αλγεβρικές παραστάσεις
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση – πολλαπλασιασμός	Ιδιότητα $\alpha + \alpha + \dots + \alpha = \nu \cdot \alpha$
Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός – δύναμη	Ιδιότητα $\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha = \alpha^\nu$
Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων	Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων
ΕΚΠ φυσικών αριθμών	ΕΚΠ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων
ΜΚΔ φυσικών αριθμών	ΜΚΔ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων
Κλάσματα	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
Απλές Εξισώσεις	Εξισώσεις 1ου , 2ου βαθμού, ανισώσεις 1ου βαθμού, συστήματα
Συμμεταβολή	Συναρτήσεις
Προβλήματα αριθμητικής	Προβλήματα Άλγεβρας

Υποτροχιά για μέγεθος και είδη αριθμών

ΤΑΞΕΙΣ	Είδη αριθμών	Μέγεθος αριθμών
Α' ΔΗΜ.	Φυσικοί αριθμοί	Έως το 100 σταδιακά
Β' ΔΗΜ.		Έως το 1000
Γ' ΔΗΜ.	Φυσικοί αριθμοί Κλασματικοί αριθμοί Δεκαδικοί αριθμοί	Έως το 10.000
Δ' ΔΗΜ.		Έως το 1.000.000
Ε' ΔΗΜ.		Έως το 1.000.000.000
ΣΤ' ΔΗΜ.		Οποιοιδήποτε
Α' ΓΥΜΝ.	Φυσικοί αριθμοί Κλασματικοί αριθμοί Δεκαδικοί αριθμοί Αρνητικοί αριθμοί	
Β' ΓΥΜΝ.	Ρητοί, Άρρητοι, Πραγματικοί	
Γ' ΓΥΜΝ.	Πραγματικοί αριθμοί	

Η πράξη του πολλαπλασιασμού και οι ιδιότητες του αναπτύσσονται ανάλογα σε κάθε νέο σύνολο αριθμών...

Υποτροχιά για Ε.Κ.Π., Μ.Κ.Δ., Παραγοντοποίηση

ΤΑΞΕΙΣ	Ε.Κ.Π. - Μ.Κ.Δ	Παραγοντοποίηση
Α'-Δ' ΔΗΜ	ΟΧΙ	ΟΧΙ
Ε' ΔΗΜ.	Διαιρέτες, Παράγοντας, Ε.Κ.Π, Διαιρετότητα με 2, 3, 5, 9, 10	ΟΧΙ
ΣΤ' ΔΗΜ.	Ε.Κ.Π., Μ.Κ.Δ., κριτήρια διαιρετότητας με 2,3,4,5,9,10,25	Πρώτοι, σύνθετοι αριθμοί και ανάλυση σε γινόμενο πρώτων
Α' ΓΥΜΝ.		
Β' ΓΥΜΝ.	Χρήση Ε.Κ.Π. σε εξισώσεις με κλάσματα	Κενό !!!
Γ' ΓΥΜΝ.	Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων	Αλγεβρικές παραστάσεις

Παραδείγματα δραστηριοτήτων για ΕΚΠ στην Ε΄ Δημοτικού

Συμπληρώνω τους πίνακες των πολλαπλασίων Π2 = πολλαπλάσια του αριθμού 2.
Κ.Π. (2,3) = Κοινά Πολλαπλάσια του 2 και του 3.

Π2	2	4	6											
Π3														
Π....	5	10												

Η δασκάλα της Ε΄ τάξης παίζει με τα παιδιά στο προαύλιο το παιχνίδι των σχηματισμών. Όταν χωρίζονται σε τριάδες, τετράδες ή εξάδες, δεν περισσεύει κανένα παιδί.

- Πόσα παιδιά μπορεί να είναι σε αυτή την τάξη;
- Η Θεοδώρα λέει πως τα παιδιά είναι τουλάχιστον 18. Συμφωνώ με την άποψη της Θεοδώρας; Εξηγώ στην τάξη πώς σκέφτηκα.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων για ΜΚΔ στην ΣΤ΄ Δημοτικού

Γράψε:

- τους διαιρέτες του 18:
- τους διαιρέτες του 36:
- τους κοινούς διαιρέτες του 18 και του 36:
- το Μ.Κ.Δ. (18, 36):

Έχω 225 γραμμάτσημα και θέλω να τα τακτοποιήσω σε άλμπουμ. Κάθε σελίδα χωρά μέχρι 30 γραμμάτσημα. Πόσα το πολύ γραμμάτσημα μπορώ να βάλω ώστε να χρησιμοποιήσω τις λιγότερες σελίδες και σε όλες τις σελίδες να υπάρχει ο ίδιος αριθμός γραμματοσήμων;

Παραδείγματα δραστηριοτήτων ΕΚΠ και ΜΚΔ από Γ' Γυμνασίου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 24, 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.
2. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ.
των μονωνύμων $12x^3y^2$, $24x^2y^3$, $300x^4y$ και
των πολυωνύμων $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$.

2 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων:

$$A = 12x^2 - 12, \quad B = 18x^2 - 36x + 18 \quad \text{και} \quad \Gamma = 9x^2 - 9x.$$

Δηλαδή, αρχικά θυμίζει πως βρίσκουμε ΕΚΠ και ΜΚΔ φυσικών αριθμών και επεκτείνει την μεθοδολογία με αλγεβρικές παραστάσεις που είναι παραγοντοποιημένες ή και που απαιτείται να παραγοντοποιηθούν πρώτα. Θεωρούμε ότι προσεγγίζει σωστά τις έννοιες αυτές, κάνει σωστή σύνδεση με τα προηγούμενα και ακολουθεί σωστά την αντίστοιχη υποτροχιά.

Υποτροχιά για παραστάσεις και ιδιότητες πράξεων

ΤΑΞΕΙΣ	Αριθμητικές και Αλγεβρικές παραστάσεις	Ιδιότητες πράξεων
Α΄ ΔΗΜ.	Απλές πράξεις με φυσικούς	Υπόνοια αντιμεταθετικής
Β΄ ΔΗΜ.		Επιμεριστική ιδιότητα
Γ΄ ΔΗΜ.	Αριθμητικές παραστάσεις Προτεραιότητα πράξεων στην παρένθεση και του πολλαπλασιασμού από πρόσθεση	Επιμεριστική ιδιότητα
Δ΄ ΔΗΜ.	Αριθμητικές παραστάσεις	Προσεταιριστική, αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα
Ε΄ ΔΗΜ.		
ΣΤ΄ ΔΗΜ.	Προτεραιότητα πράξεων	
Α΄ ΓΥΜΝ.	Προτεραιότητα πράξεων Αλγεβρικές παραστάσεις	Επιμεριστική ιδιότητα (εκτός ύλης όμως)
Β΄ ΓΥΜΝ.	Αλγεβρικές παραστάσεις	Επιμεριστική ιδιότητα
Γ΄ ΓΥΜΝ.	Αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις	Σύνθετη επιμεριστική Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Κενό!

Συμπεράσματα - Συζήτηση

- Η ανάπτυξη της έννοιας του πολλαπλασιασμού λαμβάνει υπόψη τις προτάσεις της Διδακτικής σε μεγάλο βαθμό.
- Όμως διαπιστώνονται και αδυναμίες ή άστοχα διδακτικά έργα και πρέπει οι εκπαιδευτικοί και ιδιαίτερα οι δάσκαλοι στο Δημοτικό να γνωρίζουν καλά το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών ώστε να συμβάλλουν στην ομαλή μετάβαση στα επόμενα επίπεδα σκέψης των σχετικών εννοιών.
- Δημιουργούνται εμπόδια λόγω των διαφορετικών συγγραφέων βιβλίων αλλά και λόγω διαφόρων οδηγιών διδασκαλίας.
- Η μελέτη των τροχιών βασικών εννοιών μέσω ανάλογων προσεγγίσεων θα βοηθήσει στη βελτίωση των Α.Π. και Σ.Ε.

Daily Coin Quiz

10 2×7
★★★

21 4×5
★★★

32 6×7
★★★

11 2×8
★★★

22 4×6
★★★

33 6×8
★★★

12 2×9
★★★

23 4×7
★★★

34 6×9
★★★

13 3×3
★★★

24 4×8
★★★

35 7×7
★★★

14 3×4
★★★

25 4×9
★★★

36 7×8
★★★

15 3×5
★★★

26 5×5
★★★

37 7×9
★★★

16 3×6
★★★

27 5×6
★★★

38 8×8
★★★

17 3×7
★★★

28 5×7
★★★

39 8×9
★★★

18 3×8
★★★

29 5×8
★★★

40 9×9
★★★

19 3×9
★★★

30 5×9
★★★

41 Tens, Elevens, Twelves
★

20 4×4
★★★

31 6×6
★★★

42 Complete Coin Quiz
★★★

Treasure Chest
7505 Coins

kid's Avatar

	Boy	Girl
Hair	21	24
Eyes	14	17
Mouth	7	0
Skin Tone	6	0
Tops	21	23
Bottoms	16	21
Shoes	22	26
Hats		37
Backgrounds		18
Costumes		11
Pets		12
Accessories		11

Click item above to customize your Avatar.

Name: Sleek-Sleep

Save

Your Trophies

You have earned 177 trophies so far.

Click & Drag to see your...

Ευχαριστούμε...