

35ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ
Αθήνα, 7-8 και 9 Δεκεμβρίου 2018
«Μαθηματικά: Έρευνα και Εκπαίδευση τον 21ο αιώνα»

ΜΙΑ «ΑΚΤΙΝΟΓΡΑΦΙΑ» ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

**MSc Μαλλιάκας Κώστας, kmath1967@gmail.com,
Καθηγητής Μαθηματικών Δ.Ε., 1ο Γενικό Λύκειο Ρόδου - Βενετόκλειο**

**Μαλλιάκα Καθολική, aliki4495@gmail.com,
Φοιτήτρια Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Κρήτης - Ηράκλειο**

Εισαγωγή

- **Πανελλαδικές:** Προβληματισμός ως προς την επιλογή των θεμάτων, βαθμολόγηση, επίδοση και σχέση με διδασκαλία.
 - Στην εργασία μας εστιάζουμε ειδικότερα στην εξέταση της απόδειξης μιας πρότασης.
 - Καταγράψαμε τις αποδείξεις που είναι πιθανό να ζητηθούν, αναλύσαμε τις δυσκολίες, τις ιδιαιτερότητες και την διδακτική αξία τους.
 - Προτείνουμε αλλαγές που θεωρούμε ότι θα ενισχύσουν τη μάθηση αλλά και το έργο των καθηγητών.
- **Ερευνητικό ερώτημα:**
Οι αποδείξεις που εξετάζονται καλύπτουν τον απαιτούμενο διδακτικό και παιδαγωγικό τους ρόλο;

Ορισμός Μαθηματικής Απόδειξης

«Απόδειξη μιας πρότασης q μέσα σε ένα Μαθηματικό Σύστημα A είναι η διαδικασία παραγωγής της ισχύος της q με τη βοήθεια πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του A , των οποίων η ισχύς είτε είναι δεδομένη είτε προκύπτει από άλλες γνωστές προτάσεις του A ».

(Εξαρχάκος, 1990)

Οι «μαθηματικές αποδείξεις» δηλαδή, είναι μια αλληλουχία συλλογισμών και συμπερασμάτων που προκύπτουν μέσω των νόμων της Μαθηματικής Λογικής και συνδυάζουν ιδέες, εμπνεύσεις, εικασίες και παρατηρήσεις.

(Καρδαμίτσης, 2010)

Απαρχές της Μαθηματικής Απόδειξης

- Οι Έλληνες (αρχικά στη Γεωμετρία με τον Ευκλείδη) καθιέρωσαν ένα τρόπο ανάπτυξης εννοιών που βασίζονταν σε πρωταρχικές έννοιες, ορισμούς, αξιώματα και συνέπειες αυτών που έπρεπε να αποδειχθούν.
- Έβαλαν τις βάσεις για το τι θεωρείται αποδεκτή απόδειξη και με ποιους τρόπους επιτυγχάνεται.
- Ξεκαθάρισαν τη διαφορά μιας απόδειξης από τα παρατηρούμενα εμπειρικά συμπεράσματα.
- Προσπαθούσαν για την πληρότητα μιας αποδεικτικής διαδικασίας με βάση κανόνες της Λογικής που επίσης καθιέρωσαν.

Δομή και είδη Μαθηματικών Αποδείξεων

Δομικά στοιχεία απόδειξης

Υπόθεση – Συμπέρασμα – Αποδεικτικά στοιχεία – Αποδεικτικοί κανόνες

Κυριότερες μέθοδοι απόδειξης

1. Συνεπαγωγή
2. Απαγωγή σε άτοπο
3. Αντιθετοαντιστροφή

Άλλες μέθοδοι απόδειξης

- Αναλυτική και Συνθετική μέθοδος (κυρίως στη Γεωμετρία)
- Τέλεια ή Μαθηματική Επαγωγή (κυρίως στη Θεωρία Αριθμών)
- Μέθοδος αντιπαραδείγματος
- Μέθοδος των δυνατών περιπτώσεων ...

(Εξαρχάκος 1990, Καρδαμίτσης 2010)

Ωφελιμότητα Αποδεικτικής διαδικασίας

- Γενικά, είναι καλό να είναι **κομψή** και να **συμπεριλαμβάνει**:
 - Πειραματισμό και διερεύνηση
 - Παραδείγματα ή και αντιπαραδείγματα
 - Γεωμετρικές ερμηνείες
 - Χρήση λογισμικών
 - Συμπληρωματικές εξηγήσεις που την κάνουν πληρέστερη
 - Διαφορετικές εναλλακτικές αποδείξεις
- Ενισχύει τη **δημιουργία στρατηγικών και μεθόδων**
- Ενισχύει την **ικανότητα επιχειρηματολογίας**
- Βοηθά στην **πλήρη αποδοχή της αλήθειας**
- Βοηθά στην **εξάλειψη αμφισβητήσεων**
- Βοηθά στην κατανόηση του **τρόπου κατασκευής μαθηματικών θεωριών** δίνοντας εμπνεύσεις και ιδέες για ανακάλυψη νέων προτάσεων
- Προσφέρει **πνευματική ικανοποίηση**

Απόψεις για τις Μαθηματικές αποδείξεις

- Σημαντικοί ερευνητές διαπιστώνουν μεγάλη **εξάρτηση** από «**αυστηρές τυπικές αποδείξεις**», δηλαδή ακολουθίες σωστών συντακτικά κανόνων των Μαθηματικών και της Λογικής που περιέχουν τυπικά αποδεικτικά στοιχεία τα οποία δείχνουν μόνο την αλήθεια μιας πρότασης.

Προτείνουν:

- Να δίνουμε έμφαση στο ρόλο των αποδείξεων ως **επικοινωνία** και ως **πειστικά επιχειρήματα**.
- Να δίνουμε έμφαση στα **κοινωνικά κριτήρια** για την αποδοχή μιας μαθηματικής αλήθειας.
- Να γίνεται **διάρθρωση των μαθηματικών ιδεών** που περιέχονται στις αποδείξεις σε αυτόνομες ενότητες.
- Να υπάρχει **επιστημονική συζήτηση** για τα επιχειρήματα που διατυπώθηκαν κατά την αποδεικτική διαδικασία.

(Hanna, 1990)

- **Έρευνες σε σχολικά εγχειρίδια διαφόρων κρατών δείχνουν:**

- Το είδος των αποδείξεων δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πλούτου της μαθηματικής πρακτικής τόσο ως προϊόν όσο και ως διαδικασία.
- Η απόδειξη παρουσιάζεται με διαφορετικό τρόπο σε θεωρία και ασκήσεις και δεν συνηθίζεται η παραγωγή εικασιών.
- Έτσι γίνεται ελλειμματική σύνδεση του συστήματος «μαθηματικά ως επιστήμη» με το σύστημα «μαθηματικά ως σχολικό μάθημα».

(Μούτσιος-Ρέντζος & Πιτσιλή-Χατζή, 2014)

- Επιβάλλεται να υπάρχουν **εναλλακτικές μαθηματικές αποδείξεις** που να περιέχουν και **επεξηγηματικά στοιχεία** τα οποία αναδεικνύουν τις μαθηματικές ιδέες που εμπλέκονται και τον τρόπο κατασκευής τους.
- Οι αποδείξεις αυτές **να γίνονται αποδεκτές** από τη μαθηματική κοινότητα.

(Balacheff 1988)

Οι αποδείξεις στα Α.Π.Σ. Μαθηματικών

- Η Απόδειξη στη Δ.Ε. στηρίζεται κυρίως στη Μαθηματική Λογική, όμως με βάση οδηγίες και εξαιρέσεις από την ύλη δεν διδάσκεται κανονικά **(Εισαγωγικό κεφάλαιο Άλγεβρας Α' Λυκείου)**.
- Οι περισσότερες αποδείξεις που υπάρχουν είναι ευθείες, δηλαδή κυρίως με τη μέθοδο της **συνεπαγωγής**.
- Την «**εις άτοπον απαγωγή**» τη συναντάμε μόνο στην Α' Λυκείου και κυρίως στη **Γεωμετρία**, όπου εκεί δίνονται και οι περισσότερες δυνατότητες για εκμάθηση της απόδειξης.
- Η **Μαθηματική Επαγωγή** είναι εκτός ύλης πια.

Ανάλυση και σχολιασμός αποδείξεων

- **Ορίζουμε:**

- **Εργαλειακή απόδειξη:** Περιέχει ένα απλό ορισμό ή ιδιότητες και απαιτεί κυρίως αλγεβρικές δεξιότητες.
- **Εννοιολογική απόδειξη:** Συνδυάζει μαθηματικές έννοιες, ορισμούς, θεωρήματα, αλγεβρικά τεχνάσματα.

- **Στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου καταγράψαμε:**

- **25 αποδείξεις** (όλες ευθείες – μέθοδος συνεπαγωγής)
(3 στο 1ο κεφάλαιο, 20 στο 2ο και 2 στο 3ο κεφάλαιο)
- **15 εργαλειακές και 10 εννοιολογικές αποδείξεις.**

- **Στις Πανελλαδικές Εξετάσεις έχουν τεθεί:**

- 20 αποδείξεις (3 είναι εκτός ύλης) με **μόνο 1 εργαλειακή.**

- **Στις Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις έχουν τεθεί:**

- 18 αποδείξεις (4 είναι εκτός ύλης) με **μόνο 2 εργαλειακές.**

Εργαλειακές αποδείξεις

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ–ΟΡΙΑ–ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1.1) Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1.2) Όριο ρητής συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Απλή χρήση ιδιοτήτων πράξεων με όρια.
- Η 1.2 είναι εφαρμογή της 1.1. Θεωρούμε ότι είναι δύσκολο για ένα μαθητή να θυμάται τη παραπομπή στην 1.1.
- Δεν έχουν τεθεί ποτέ ως θέμα εξετάσεων.
- Θεωρούμε ότι **γνωστικά, δεν προσφέρουν ιδιαίτερα.**

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.2) Παράγωγος σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

2.3) Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

2.4) Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

2.5) Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$.

2.6) Θεώρημα: Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων

- Απλή χρήση ορισμού παραγώγου και αλγεβρικών πράξεων.

!! Θα ήταν καλό να είναι εντός ύλης και η παράγωγος γινομένου.

2.9) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}, v \in \mathbb{N}^*$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.

2.11) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

2.7) Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$.

2.8) Για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:
$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

2.10) Ισχύει ότι αν $k \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, τότε $(x^k)' = kx^{k-1}$.

Οι 2.7 , 2.8 και 2.10, θεωρούμε ότι είναι «κρυμμένες» αποδείξεις και δεν είναι ξεκάθαρο αν μπορεί να ζητηθούν στις εξετάσεις.

!!! Γενικά με αυτό το ζήτημα θεωρούμε ότι επιβάλλεται να δοθεί οδηγία που να διευκρινίζει με σαφήνεια ποιες αποδείξεις μπορούν να ζητηθούν στις εξετάσεις.

2.12) Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή $(x^a)' = ax^{a-1}$.

2.13) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή $(a^x)' = a^x \ln a$.

2.12 και 2.13: Εργαλειακές αποδείξεις με χρήση κανόνα ορίου και παραγώγου σύνθεσης συναρτήσεων και της ιδιότητας λογαρίθμων $f^g = e^{g \ln f}$. Οι αποδείξεις 2.6 έως και 2.13 (εργαλειακές) δεν έχουν τεθεί ποτέ ως θέμα.

2.14) Η $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

Η 2.14 είναι η μοναδική εργαλειακή απόδειξη που ζητήθηκε στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

Εννοιολογικές αποδείξεις

1.3) Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών: Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

- Εννοιολογική απόδειξη με τεχνική που εφαρμόζεται σε ασκήσεις. Απαιτείται σύνθεση εννοιών συνέχειας και συνόλου τιμών και εφαρμογή Θ. Bolzano.

- Περιέχει γεωμετρική ερμηνεία σαν επεξηγηματικό στοιχείο.

Με βάση την εμπειρία μας, διαπιστώνουμε δυσκολίες λόγω:

- Χρήσης του υπαρξιακού αλλά και του καθολικού ποσοδείκτη
- Της έννοιας του «μεταξύ» (ανάγκη αναφοράς περιπτώσεων)
- Επιλογής του γράμματος «η» που είναι λίγο άστοχη γιατί μπορεί στην ανάγνωση να παραπέμψει στο άρθρο «η» αλλά και στο διαζευκτικό «ή», κυρίως σε αδύναμους μαθητές.
- Την θεωρούμε όμως **γνωστικά ωφέλιμη απόδειξη**.

2.1) Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

- Εννοιολογική απόδειξη που η τεχνική της εφαρμόζεται και σε ασκήσεις.
- Απαιτείται σύνθεση ορισμών συνέχειας και παραγωγισιμότητας σε σημείο, χρήση απλών ιδιοτήτων ορίων και αλγεβρικών τεχνασμάτων.

Θα ήταν καλό να συμπληρωθεί κατάλληλα και με το γεγονός ότι:

- ✓ **δεν ισχύει γενικά η αντίστροφή της πρόταση αλλά και**
- ✓ **η απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή ή απαγωγή σε άτοπο της πρότασης:**

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

2.15) Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Εννοιολογική απόδειξη, συνέπεια θεωρήματος μέσης τιμής, κάτι που βοηθά το μαθητή να ανακαλέσει στη μνήμη του τη διαδικασία απόδειξης. Δυσκολία στον όχι και τόσο προφανή τρόπο απόδειξης ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή και στην αναφορά των περιπτώσεων διάταξης των x_1, x_2 .

2.16) Πόρισμα: Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c , ώστε για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) = g(x) + c$.

Κατάλληλη εφαρμογή του θεωρήματος 2.15, ανάλογη της 1.3. Δεν έχει τεθεί ποτέ ως θέμα, πιθανώς γιατί είναι πόρισμα που παραπέμπει σε προηγούμενο θεώρημα και είναι δύσκολο να το θυμάται κάποιος μαθητής. Ίσως να μην πρέπει να εξετάζονται τέτοιες αποδείξεις (όπως και το 1.2).

2.17) Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

- Εννοιολογική απόδειξη, συνέπεια Θ.Μ.Τ. ανάλογη της 2.15, με αλγεβρικό τέχνασμα προσήμου γινομένου σε συνδυασμό με ορισμό μονοτονίας.
- Ανάλογα αποδεικνύεται για την περίπτωση αρνητικής παραγώγου που είναι γνησίως φθίνουσα.

!!! Όμως αυτή η απόδειξη επειδή δεν αναγράφεται στο σχολικό βιβλίο δεν μπορεί να ζητηθεί στις εξετάσεις.

2.18) Θεώρημα Fermat: Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

Εννοιολογική απόδειξη, σύνθεση εννοιών εσωτερικού σημείου, ορισμού παραγωγισιμότητας με πλευρικά όρια, προσήμου κλάσματος, ιδιότητας ορίων και διάταξης και μάλιστα σε ειδική περίπτωση που δεν αναφέρεται στη θεωρία και χρήση της όχι και τόσο συνηθισμένης αλγεβρικής ιδιότητας: " $\text{αν } A \leq 0 \text{ και } A \geq 0 \text{ τότε } A = 0$ ". Διευκρινίζουμε ότι η ιδιότητα διάταξης ορίων που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο είναι η εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ ή ≥ 0 τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ ή ≥ 0 , δηλαδή

εφαρμογή αντί $f(x)$ το $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και για $g(x) = 0$ και μάλιστα με πλευρικά

όρια. Θεωρούμε ότι είναι από τις δυσκολότερες εννοιολογικά αποδείξεις.

2.19) Θεώρημα: Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

2.20) Θεώρημα: Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Οι 2.19 και 2.20 είναι εννοιολογικές αποδείξεις, σύνθεση θεωρήματος 2.17 και ορισμών μονοτονίας και τοπικού ακρότατου. Δυσκολία στο συνδυασμό των περιπτώσεων (ειδικά στη 2.20) και στο ότι περιλαμβάνονται μαζί στην διατύπωση και πρέπει να διακρίνουν τις δύο προτάσεις για να επιλέξουν την κατάλληλη απόδειξη. Δεν είναι βέβαιο αν πρέπει να συμπεριλάβει σχήματα.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

3.1) Θεώρημα: Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Εννοιολογική απόδειξη, σύνθεση ορισμού παράγουσας και παράγωγου αθροίσματος για το πρώτο μέρος και πορίσματος 2.16 για το δεύτερο μέρος. Δυσκολία λόγω διπλής απόδειξης. Απαιτείται προσοχή στη διατύπωση.

3.2) Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Έστω f συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$.

Εννοιολογική απόδειξη, σύνθεση θεωρήματος για συνάρτηση-ολοκλήρωμα, ορισμού παράγουσας και θεωρήματος 3.1. Τα τελευταία χρόνια επικρατεί μια σύγχυση με τη συνάρτηση ολοκλήρωμα όπου σύμφωνα με οδηγίες, είναι εκτός εξεταστέας ύλης όσον αφορά θέματα ασκήσεων και είναι εντός μόνο για την κατανόηση της απόδειξης του Θ.Θ.Ο.Λ. Άποψη μας είναι να μπει ξανά στην ύλη αλλιώς η απόδειξη αυτή να βγει εκτός ύλης αφού χρειάζεται μόνο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος «απαγωγή σε άτοπο», η αντιθετοαντιστροφή και η Μαθηματική Επαγωγή δεν χρησιμοποιούνται σε καμία από τις εξεταζόμενες αποδείξεις.
- Η μέθοδος αντιπαραδείγματος εμφανίστηκε τα τελευταία χρόνια σε θέματα με ισχυρισμούς που έπρεπε να αποδειχθεί ότι είναι ψευδείς.

Προτάσεις που οι αποδείξεις τους μπορούν να προσφέρουν μεγαλύτερη ποικιλία μεθόδων:

Στα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$. Περιλαμβάνει ανισοτική ιδιότητα απολύτων τιμών και χρήση κριτηρίου παρεμβολής.
- Το κριτήριο σύγκρισης που περιέχει έξυπνες αλγεβρικές τεχνικές:
 - Αν $f(x) \geq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
 - Αν $f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Στις παραγώγους:

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ ή $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$
- Η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων.

Στις έννοιες συναρτήσεων:

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε θα είναι και 1-1 στο Δ . Εδώ γίνεται και διερεύνηση περιπτώσεων.
- Αν f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε και η αντίστροφή της είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $f(\Delta)$ με ίδιο είδος μονοτονίας. Εδώ μπορεί να συμπεριληφθεί και «επεξήγηση» με τη συμμετρία τους.

Με απαγωγή σε άτοπο ή αντιθετοαντιστροφή:

- Μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της A αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$. Ανάλογα αν f γνησίως φθίνουσα.

Με Μαθηματική Επαγωγή (στην απλή μορφή της):

- Παράγωγος αθροίσματος ή και γινομένου περισσοτέρων συναρτήσεων.

Συμπεράσματα

Με βάση την ανάλυση μας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

- Η διδασκαλία και αξιολόγηση αυτών των αποδείξεων καλύπτει ελάχιστα τον παιδαγωγικό της ρόλο και ίσως οδηγεί σε μια λανθασμένη πορεία διδασκαλίας και μάθησης.
- Η συγκεκριμένη ύλη και η αξιολόγηση με Πανελλαδικές Εξετάσεις καθιστά δύσκολη όμως τη συμπερίληψη και μη τυπικών αποδείξεων.
- Πρέπει να διευκρινιστεί με σαφήνεια ποιες αποδείξεις μπορεί να ζητηθούν στις εξετάσεις.
- Πρέπει οι εκάστοτε υπεύθυνοι των αναλυτικών προγραμμάτων και των οδηγιών για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση να λάβουν υπόψη όλες αυτές τις παραμέτρους για την βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών.