

ΜΕΛΕΤΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΚΑΙ Η ΕΝΤΑΞΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κώστας Μαλλιάρης Καθηγητής Δ.Ε., 1^ο ΓΕΛ Ρόδου, kmath@otenet.gr
Τάσος Σωτηράκης, Καθηγητής Δ.Ε., 2^ο ΓΕΛ Ρόδου, tasotirakis@gmail.com

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διδακτικές προτάσεις διδασκαλίας Μαθηματικών της Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό προτείνουμε για τους μαθητές της Β' Λυκείου ορισμένες δραστηριότητες βασισμένες σε αρχαιοελληνικά γεωμετρικά κείμενα επικεντρωμένα στην έννοια του εμβαδού. Από αυτά τα κείμενα μπορούμε να αποτυπώσουμε αξιώματα και θεωρήματα καθώς επίσης και διακρίσεις μεταξύ ομοιοτήτων και διαφορών σύμφωνα με τη θεώρηση των συγγραφέων. Με αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να αποδείξουμε στα μαθήματα της γεωμετρίας, την χρησιμότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών στο κεφάλαιο των εμβαδών

ABSTRACT

In this paper we propose for the students of the second class of the lyceum certain activities based on texts concerning Ancient Greek geometry focused on the concept of the area. For these texts we can depict axioms and theorems as well, distinguishing similarities and differences according to the doctrine of the authors. Thereby we are able to prove the usefulness of the History of Mathematics regarding the Chapter relative to the area in the lectures of geometry.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από τη αρχαιότητα η έννοια του εμβαδού αποτελούσε αντικείμενο μελέτης και έρευνας. Πολλοί Έλληνες Μαθηματικοί όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Ήρωνας και άλλοι με διαφορετικές προσεγγίσεις αλλά και κοινά σημεία κατόρθωσαν να αναπτύξουν σημαντικές θεωρίες, τεχνικές και μεθόδους βασιζόμενοι στην έννοια του εμβαδού. Στόχος της εργασίας μας είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία να καταστεί πιο ελκυστική και ευχάριστη στους μαθητές όλων των τάξεων και ειδικότερα στους μαθητές της Β'

Λυκείου, καθώς πιστεύουμε ότι το μάθημα της Γεωμετρίας έχει υποβαθμιστεί περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη τάξη. Οι βασικοί προτεινόμενοι άξονες όπου θα κινηθεί ο «Δάσκαλος των Μαθηματικών» για να πετύχει αυτό τον στόχο βρίσκονται σε ιστορικά γεωμετρικά προβλήματα τα οποία αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης καθώς και την θεώρηση των Αρχαίων δημιουργών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Θεμελιώδεις έννοιες της Γεωμετρίας αποτελούν η ισότητα, η ομοιότητα, το εμβαδόν και ο όγκος. Τα παρακάτω αποσπάσματα από συναφή κείμενα μας προσφέρουν το θεωρητικό υπόβαθρο για να αναπτύξουμε τις θέσεις μας: *«Η Γεωμετρία είναι η μελέτη των σχημάτων μέσω των ιεραρχημένων ιδιοτήτων τους. ... Τα σχήματα μπορεί να είναι ίσα. Όταν δεν είναι ίσα μπορεί να μοιάζουν οπότε είναι όμοια και όταν δεν μοιάζουν, μπορεί να μετρηθούν και να βγουν ίσα, δηλαδή να είναι ισεμβαδικά. ... Για να γίνει αυτή η μελέτη πρέπει να μουν τα αξιώματα, πρέπει αυτές οι έννοιες να θεωρητικοποιηθούν και μετά να βρούμε και εργαλεία ώστε να υπόκεινται σε λογισμό. Δηλαδή σκοπεύουμε στο εμβαδόν; Πρέπει να βρεθούν εργαλεία τα οποία να υπολογίζουν το εμβαδόν. ... Ο υπολογισμός δεν είναι κατ' ανάγκη αριθμητικός. Μπορεί να είναι αλγοριθμικός. Δηλαδή το εμβαδόν είναι θεωρητική έννοια. Είναι το διαμεριστικό εμβαδόν. Το εμβαδόν του τριγώνου δεν είναι κατ' ανάγκη ο τύπος ένα δεύτερο, βάση επί ύψος. Είναι μια ολόκληρη διαδικασία, που μπορεί να συγκρίνει τα σχήματα τεμαχίζοντας τα και συγκρίνοντας τα συστατικά τους» (Λάμπας Δ., 2009).*

«Η επαφή με πρωτότυπες πηγές, η ενασχόληση με εργασίες που έχουν προσανατολισμό προς την ιστορία και η προσπάθεια ανακατασκευής μιας μεθόδου ή λύσης ενός προβλήματος βάσει πρωτότυπων ή και δευτερογενών πηγών, προσομοιώνει την διαδικασία δημιουργίας στον χώρο των Μαθηματικών με ευεργετικά αποτελέσματα τόσο για τον διδάσκοντα, όσο και για τον διδασκόμενο. ... Μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών ο δάσκαλος των Μαθηματικών μπορεί να έχει μια ευρεία δεξαμενή προβλημάτων, ερωτημάτων, καταστάσεων κλπ για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας του και την κινητοποίηση των μαθητών του» (Τζανάκης Κ., 2009)

Έτσι λοιπόν ο διδάσκων έχει την δυνατότητα ανάλογα με την τάξη και το επίπεδο των μαθητών να επιλέγει δραστηριότητες που θα προσφέρουν το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΑΡΧΑΙΑ ΚΕΙΜΕΝΑ

Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» χρησιμοποιούσε την λέξη «περιεχόμενο» αντί για «εμβαδό» σχήματος και μάλιστα θεωρούσε πολύ γνωστή και προφανή αυτή την έννοια ώστε δεν χρειάστηκε να την ορίσει, όπως επίσης δεν όρισε την ισότητα εμβαδών καθώς και τις ιδιότητες της αν και τις χρησιμοποιεί (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ., 2001). Επίσης δεν ενδιαφερόταν για τον αριθμητικό υπολογισμό των εμβαδών αλλά για την αναγωγή των εμβαδών, σε εμβαδά γνωστών σχημάτων όπως για παράδειγμα σε εμβαδά τετραγώνων (τετραγωνισμός). Η αναγωγή αυτή γινόταν συγκρίνοντας τα εμβαδά ενώ για καμπυλόγραμμα σχήματα ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε μια σύνθεση σύγκρισης και υπολογισμού. Τα εμβαδά δύο ευθυγράμμων σχημάτων θεωρούνταν ίσα, αν το καθένα από αυτά μπορούσε να διαιρεθεί σε υπο-σχήματα τα οποία ήταν δυνατό να αντιστοιχηθούν έτσι ώστε τα αντίστοιχα μεταξύ τους υπο-σχήματα να είναι ίσα (ισεμβαδικά) (Στράντζαλος Χ., 1987).

Οι σχετικές με τα εμβαδά «κοινές έννοιες - αξιώματα» που αναφέρει ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» και χρησιμοποιούνται σήμερα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι:

1. Δύο ίσα σχήματα είναι ισεμβαδικά.
2. Το άθροισμα και η διαφορά ισεμβαδικών σχημάτων ορίζει ισεμβαδικά σχήματα.
3. Τα μισά ισεμβαδικών σχημάτων είναι ισεμβαδικά σχήματα.
4. Το εμβαδόν σχήματος είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν μέρους του σχήματος.
5. Δύο ισεμβαδικά τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές.
6. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1 τετραγωνική μονάδα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι δύο ισεμβαδικά σχήματα δεν είναι απαραίτητα ίσα. Μάλιστα βασικά θα ακολουθήσουμε την τεχνική μετατροπής ενός σχήματος σε άλλο ισοδύναμο γνωστού τύπου για την απόδειξη των εμβαδών βασικών πολυγώνων αξιοποιώντας έτσι και τις παραπάνω έννοιες.

Πιστεύουμε ότι η παρουσίαση κάποιων προτάσεων από τα «Στοιχεία» θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα διευκολύνει την κατανόηση τεχνικών για αποδείξεις θεωρημάτων ή για επίλυση ανάλογων ασκήσεων. Ειδικά η λογική της αλληλουχίας των προτάσεων 34 μέχρι 41 είναι εντυπωσιακή και χρήσιμη σε μια απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος το οποίο υπάρχει στο ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι προτάσεις αυτές των «Στοιχείων» είναι:

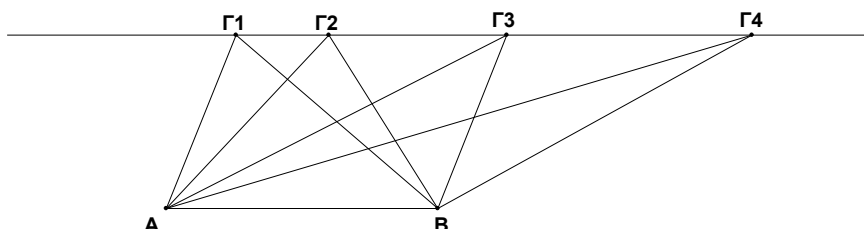
Π.34: Τα εμβαδά τριγώνων στα οποία διαιρείται ένα παραλληλόγραμμο από μια διαγώνιο του είναι ίσα.

Π.35-36: Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν ίδια βάση (ίσες βάσεις στην ίδια ευθεία) και τις παράλληλες σε αυτή πλευρές στην ίδια ευθεία, έχουν ίσα εμβαδά.

Π.37-38: Δύο τρίγωνα που έχουν ίδια βάση (ίσες βάσεις στην ίδια ευθεία) και κορυφές σε ευθεία παράλληλη στην ευθεία της βάσης, έχουν ίσα εμβαδά.

Π. 39-40: Αντίστροφες των 37-38.

Π41: Αν ένα παραλληλόγραμμο και ένα τρίγωνο έχουν ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ παραλλήλων, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου.



Αυτές οι προτάσεις χαρακτηρίζονται από τον Πρόκλο, σχολιαστή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, ως θεωρήματα «τόπου» και ως «παράδοξα» θεωρήματα αφού για παράδειγμα ένα τρίγωνο μπορεί να έχει περίμετρο η οποία να «τείνει στο άπειρο», και το εμβαδόν του να παραμένει «αναλλοίωτο».

Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι αυτό το παράδειγμα εμπλουτίζεται με θεμελιώδεις Μαθηματικές έννοιες, όπως «όριο», «άπειρο», «αναλλοίωτη». Επίσης η απόδειξη της πρότασης 35 που χρησιμοποίησαν ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης περιέχει βασικές έννοιες της θεωρίας των ισοδιαχωρίσιμων σχημάτων (Θεώρημα Bolyai – Gerwin: Αν δύο επίπεδα σχήματα είναι ισοδιαχωρίσιμα τότε είναι ισεμβαδικά και αντιστρόφως (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.,2001).

Οι προτάσεις 43 μέχρι και 45 είναι εξαιρετικά χρήσιμες. Στην θεωρία των εμβαδών αυτές έδωσαν την δυνατότητα στους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς και κυρίως στους Πυθαγορείους να δημιουργήσουν αυτό που ονομάστηκε «Γεωμετρική Άλγεβρα».

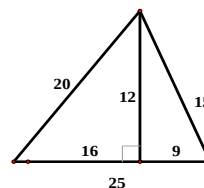
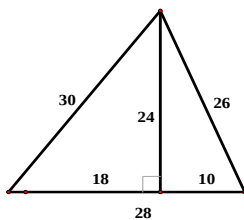
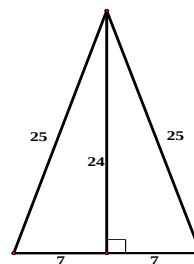
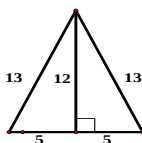
Ειδικότερα η πρόταση 44 αναφερόμενη στην κατασκευή ενός παραλληλογράμμου με δοθείσα πλευρά, με γωνία δοθείσα και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοθέντος τριγώνου, χαρακτηρίστηκε από πολλούς μελετητές όπως πχ. από τον Heath(ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.,2001) ως η εντυπωσιακότερη της Γεωμετρίας. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Εύδημος και οι μαθητές του («οι περί τον Εύδημον») απέδιδαν την πρόταση αυτή στην «Πυθαγόρεια

Μούσα» και σημειώνει ότι η ισότητα εμβαδών (παραβολή) και η ανισότητα εμβαδών (υπερβολή ή έλλειψη), στάθηκαν η αφορμή για την ονομασία των αντίστοιχων κωνικών τομών. (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.,2001).

Στα έργα του Ήρωνα από την Αλεξάνδρεια «Ονόματα γεωμετρικών όρων – Γεωμετρικά – Μετρικά – Διόπτρα» (Κηπουρός Χ., 1995) τονίζεται ότι αντικείμενα της μέτρησης επιφανειών αποτελούν: τα τετράγωνα, τρίγωνα, ρόμβοι, τραπέζια και κύκλοι. Ισχύουν για αυτά 18 θεωρήματα από τα οποία 2 αναφέρονται σε τετράπλευρα (το ισόπλευρο ορθογώνιο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), 6 σε τρίγωνα (ισόπλευρο, ισοσκελές, σκαληνό, ορθογώνιο, οξυγώνιο, αμβλυγώνιο), 2 σε ρόμβους (ρόμβος και ρομβοειδές), 4 σε τραπέζια (ορθογώνιο τραπέζιο, ισοσκελές, οξυγώνιο, αμβλυγώνιο) και 4 σε κύκλους (κύκλος, ασίς, ημικύκλιο και τμήματα μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου). Στα έργα αυτά παρουσιάζει λύσεις για διάφορα υπολογιστικά προβλήματα συνδεδεμένα με την μέτρηση εμβαδών των παραπάνω σχημάτων, τα οποία έχουν επιλεγεί όμως με κατάλληλες διαστάσεις για πρακτικούς, αλλά και παιδαγωγικούς λόγους ώστε να είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν στην διδασκαλία μας. Στο σημείο αυτό οφείλουμε να υπογραμμίσουμε την διαφορά ανάμεσα στον Ευκλείδη ο οποίος δεν ενδιαφερόταν τόσο για αριθμητικούς υπολογισμούς και στον Ήρωνα, που βασικά υπολόγιζε εμβαδά. Αν μελετήσουμε προσεκτικά την λογική την σχετιζόμενη με την επιλογή των διαστάσεων των σχημάτων αυτών μπορούμε να προσδώσουμε στην διδασκαλία μας τόσο μια χροιά ανακάλυψης όσο και ένα διαθεματικό χαρακτήρα.

Συνήθως ο Ήρωνας επιλέγει τα σχήματα με τέτοιο τρόπο ώστε οι διαστάσεις αλλά και άλλα στοιχεία τους να είναι ακέραιοι αριθμοί. Εκμεταλλεύεται τις πυθαγόρειες τριάδες και τους συνδυασμούς τριγώνων οι οποίοι ικανοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, όπως τα παρακάτω σχήματα.

Αρχικά υπολογίζει το ύψος του τριγώνου χρησιμοποιώντας αυτό που σήμερα ονομάζουμε γενίκευση του

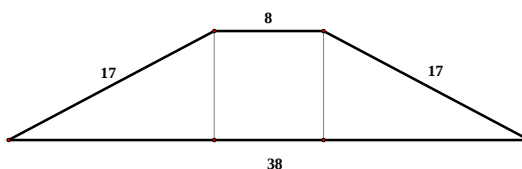
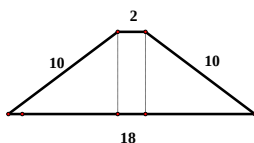
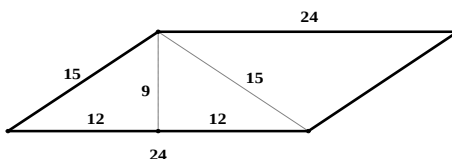
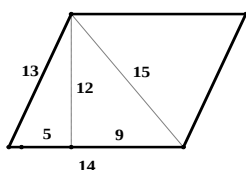
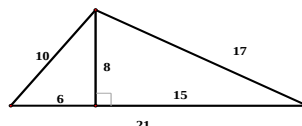
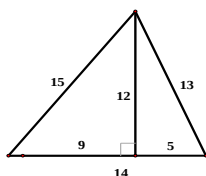


πυθαγορείου θεωρήματος. Δηλαδή υπολογίζει την προβολή μιας πλευράς και κατόπιν χρησιμοποιεί το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσει το ύψος και μετά το εμβαδόν.

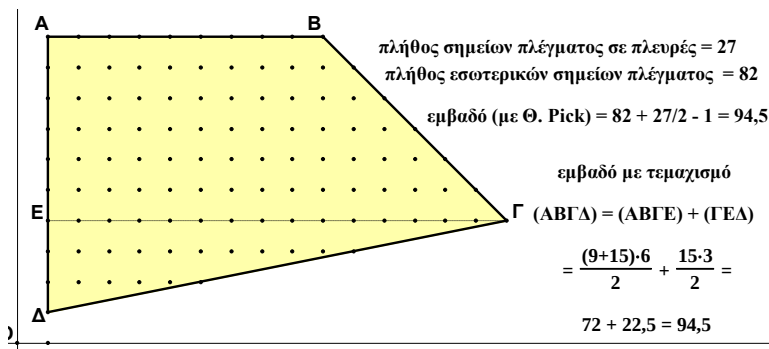
Σε επόμενα όμως προβλήματα του, δείχνει τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίς να υπολογίζει το ύψος, δηλαδή το γνωστό τύπο του Ήρωνα με τον οποίο

υπολογίζει το εμβαδό μόνο από τις πλευρές. Εδώ υπάρχει η δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε και την ομοιότητα και να παρακινήσουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα εμβαδών ενός σχήματος για να υπολογίσουν κάποιου όμοιου με αυτό έχοντας λόγο εμβαδών ομοίων τριγώνων.

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιεί τρίγωνα με ίδιες διαστάσεις και στα παραλληλόγραμμα και στα τραπέζια τα οποία επιλέγει. Επίσης χρησιμοποιείται και η μέθοδος τεμαχισμού για τον υπολογισμό του εμβαδού από τα υπο-σχήματα στα οποία διαιρείται.



Η επιλογή αυτών των σχημάτων τοποθετημένα σε πλέγμα ευνοεί επίσης την πληροφόρηση των μαθητών

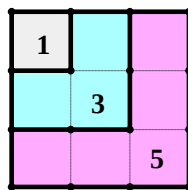
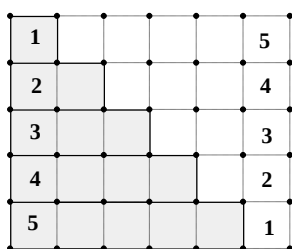


για το θεώρημα του Pick: «το εμβαδόν ενός πολυγώνου του οποίου οι κορυφές του είναι σημεία ενός πλέγματος εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πλέγματος που υπάρχουν τόσο στο εσωτερικό του πολυγώνου όσο και πάνω στην περίμετρο του.» Συγκεκριμένα αν M το πλήθος των σημείων στο εσωτερικό του πολυγώνου και N το πλήθος των σημείων στην περίμετρο του, τότε το εμβαδόν του πολυγώνου δίνεται από την σχέση

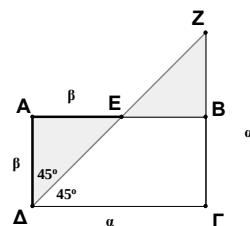
$$E = M + N/2 - 1.$$

Εδώ πρέπει να επισημαίνουμε και την πιθανή διασύνδεση της διδασκαλίας με έννοιες σχετικές με την θεωρία αριθμών, με βάση την γεωμετρική απόδειξη των σχέσεων $1+2+3+\dots+v = v(v+1)/2$ και $1+3+5+\dots+(2v-1)^2 = v^2$ που απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα (Κολέζα Ε., Σούρλας Κ., 1990) ή την γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας Cauchy για $v = 2$ (Αναγνώστου Κ., 1990).

$$E_{\text{γραμ.}} = \frac{E_{\text{ορθογ.}}}{2} = \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2}$$



$$1 + 3 + 5 = 3^2$$



$$(Z\Gamma A) + (A\epsilon A) > (AB\Gamma A) \quad \text{οπότε} \quad \frac{a^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} > a \cdot \beta$$

$$\text{και αν θέσουμε } a^2 = x \text{ και } \beta^2 = y \text{ τότε } \frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$$

Μετά την διδασκαλία αναφορικά με τους τύπους υπολογισμού εμβαδών βασικών σχημάτων, ακολουθούν στην Β' Λυκείου οι διάφοροι τύποι υπολογισμού εμβαδού τριγώνου οι οποίοι προφανώς προέρχονται από τα σημαντικότερα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία ασχολούμαστε. Στο σημείο αυτό το μάθημα γίνεται αρκετά αλγεβρικό, αφού χωρίς να υπάρχει σχήμα μπορούμε να βρούμε διάφορους συμμετρικούς και κομψούς τύπους οι οποίοι συνδέουν στοιχεία ενός τριγώνου και προκύπτουν με κατάλληλο συνδυασμό αυτών των τύπων. Στα σχολικά βιβλία υπάρχουν ανάλογες ασκήσεις αλλά πιστεύουμε ότι σε αυτές χάνεται λίγο η γοητεία της γεωμετρίας και πρέπει να χρησιμοποιούνται με μέτρο.

Ενδεικτικά αναφέρουμε τους παρακάτω τύπους – ασκήσεις.

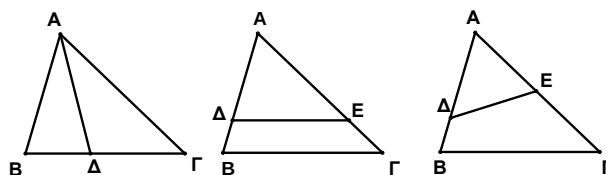
$$1) \mu_a^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad 2) \alpha\beta\gamma = 4\tau\rho R$$

$$3) \delta_a = \frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma} \sqrt{\frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma}} \quad 4) \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_\beta} + \frac{1}{v_\gamma} = \frac{1}{\rho}$$

Το επόμενο μέρος αφορά θεωρήματα σχετικά με λόγους εμβαδών κυρίως για τρίγωνα, που έχουν είτε μια πλευρά ίση ή ένα ίσο ύψος ή είναι όμοια ή έχουν μια γωνία τους ίση ή παραπληρωματική. Αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα ενότητα αν σκεφτούμε ότι ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» βασικά ενδιαφέρεται για σύγκριση εμβαδών η οποία γίνεται με λόγους και όχι για υπολογισμό. Επίσης τόσο στον Ευκλείδη όσο και στον Ήρωνα αλλά και σε άλλους συγγραφείς μια σειρά γεωμετρικών προβλημάτων αναφέρεται στον χωρισμό σχήματος σε μέρη τα οποία ικανοποιούν μια αναλογία πρόβλημα το οποίο πηγάζει και από πρακτικούς λόγους καθώς πολλοί λαοί χρειάζονταν να διαμερίσουν εκτάσεις με δίκαιο τρόπο και όχι τυχαίο. Πρέπει να τονίσουμε την χρησιμότητα της πρότασης ότι η διάμεσος τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, αναγκαία για την επίλυση αρκετών ασκήσεων. Μια ενδιαφέρουσα σχετική δραστηριότητα είναι και η διερεύνηση διαμέρισης ενός τριγώνου σε 2 ή 3 ή 4 ή 6 ισοδύναμα χωρία με διάφορους τρόπους. Προβλήματα χωρισμού ενός τριγώνου σε μέρη με συγκεκριμένο λόγο και με διάφορους τρόπους συναντάμε επίσης και στον Ήρωνα (Κηπουρός Χ., 2000).

Πρόβλημα: Να διαιρεθεί τριγωνικό χωρίο σε δύο τριγωνικά χωρία τα οποία έχουν κοινή κορυφή και τα εμβαδά τους έχουν δοθέντα λόγο.

Ο Ήρωνας λύνει το πρόβλημα διαίρεσης του ίδιου τριγώνου σε δύο χωρία με δοθέντα λόγο με μια ευθεία παράλληλη στη βάση ή με ευθεία που τέμνει δύο πλευρές.

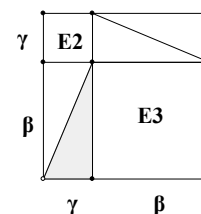
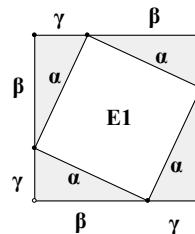
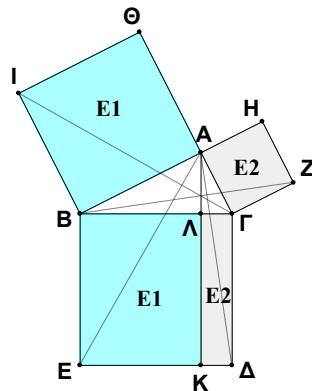
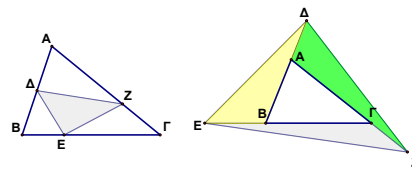


Στο πρώτο πρόβλημα ο Ήρωνας επιλέγει πάλι τρίγωνο με πλευρές 13, 14, 15 (το οποίο έχει και ακέραιο εμβαδό 84) και λόγο 5/3. Η τεχνική του, βασίζεται σε μια ιδιότητα αναλογιών (την οποίαν καλεί σύνθεση) και που μετατρέπει τον λόγο σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο δηλαδή εκτελεί την μετατροπή:

$$\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma) + (AB\Delta)} = \frac{5}{3+5} \Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow (AB\Delta) = \frac{5}{8} \cdot (AB\Gamma)$$

Επίσης για την εύρεση των σημείων Δ, Ε χρησιμοποιεί την τεχνική διαίρεσης τμήματος σε δοθέντα λόγο. Εδώ οφείλουμε να υπογραμμίσουμε την αξία και την λογική της παραπάνω ιδιότητας αναλογιών στα προβλήματα που συχνά χρησιμοποιεί ο Ήρωνας και ο Ευκλείδης, η οποία δικαιολογεί και την ένταξη τους στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αν και φαίνεται σαν Άλγεβρα.

Δραστηριότητες οι οποίες συμβάλουν στην κατανόηση της θεωρίας των λόγων εμβαδών αποτελεί και η άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ή του θεωρήματος της



$$E1 = E2 + E3 = (\beta + \gamma)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma\right)$$

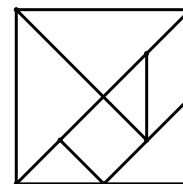
$$\downarrow \text{οπότε } a^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$(B\Gamma\Delta E) = (BAKE) + (\Lambda\Gamma\Delta K) = (AB\Gamma\Theta) + (\Lambda\Gamma ZH) \longrightarrow$$

εσωτερικής διχοτόμου, το 2^ο Θεώρημα Πτολεμαίου, τα Θεωρήματα Μενελάου και Ceva, ο Γνώμονας του Αναξίμανδρου, η εγγραφή τριγώνου ή τετραγώνου σε τρίγωνο με σημεία που διαιρούν τις πλευρές εσωτερικά εξωτερικά σε δοσμένο λόγο καθώς και ο υπολογισμός του εμβαδού του και άλλες ανάλογες με αυτές.

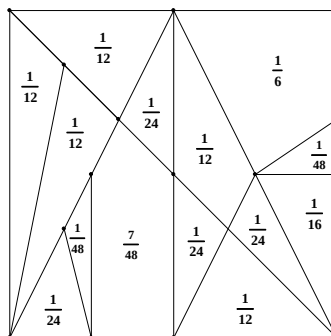
Ενδιαφέρουσες δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να πραγματοποιηθούν και υπό μορφή παιγνίου αποτελούν επίσης το «τάνγκραμ»¹, το οποίο σημαίνει «επτά ευμετάβλητα σχήματα»

και το «στομάχιον»². Το «Τάνγκραμ» είναι ένα Κινέζικο παιγνίδι που παίζεται ως εξής: Παίρνουμε ένα τετράγωνο και το χωρίζουμε όπως στο



¹ Βλ. J. Needham, Science and Civilization in China Vol.3 Cambridge University Press 1959 σ. 111

Το παιχνίδι «στομάχιον»³ ήταν επινόηση του Αρχιμήδη. Αποτελείται από 14 διαφορετικού σχήματος κομμάτια και στόχευε στην άσκηση της παρατηρητικότητας, της μνήμης και της αντίληψης των μαθητών του Αρχιμήδη. Η διαδικασία ήταν: αφού πρώτα ο ίδιος έφτιαχνε κάποια σχέδια με όλα τα κομμάτια του «στομαχίου», έβαζε τους μαθητές του να τα ανασυνθέσουν βλέποντας όμως μόνο το περίγραμμά τους. Ένας δεύτερος τρόπος παιχνιδιού είναι και το γνωστό πρόβλημα του Αρχιμήδη, δηλαδή πόσες φορές μπορεί κάποιος να σχηματίσει το συγκεκριμένο τετράγωνο τοποθετώντας τα κομμάτια του με διαφορετική διάταξη. Ενδιαφέρουσα δραστηριότητα αποτελεί και η περιγραφή και η κατασκευή του «στομαχίου», καθώς και ο υπολογισμός του μέρους του τετραγώνου με το οποίο ισούται καθένα από τα κομμάτια του. (Κατσιγιάννης Κ., 2010).



Πιστεύουμε ότι η Ιστορία των Μαθηματικών και η κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων, βασιζόμενες σε αρχαία Ελληνικά κείμενα, μπορούν να βοηθήσουν τον διδάσκοντα να δημιουργήσει ένα ευχάριστο κλίμα στην τάξη. Θα ωθήσει τους μαθητές σε μια πιο δομημένη αντιμετώπιση του μαθήματος της Γεωμετρίας, όπως της αξίζει, αναπτύσσοντας παράλληλα και το ενδιαφέρον τους για τη έρευνα.

Αναγνώστου Κ., (1990). Ανισότητες και Γεωμετρία. Ευκλείδης Γ, Τόμος 7, Τεύχος 27, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κατσιγιάννης Κ., (2010). *Από το «στομάχιο» του Αρχιμήδη μέχρι το Θεώρημα του Pick. Μια ιστορική διαδρομή και διδακτικές προεκτάσεις*. Διπλωματική εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα

³ Φυσικά σήμερα μετά από την ,μελέτη του παλίμψηστου θεωρείται πως το στομάχιον αποτελεί πρόβλημα συνδυαστικής

Μεταπτυχιακών Σπουδών, «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Επιβλέπων: Λάμπας Δ., Αθήνα.

Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.), (2001). Ευκλείδη «Στοιχεία». Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος 1, Βιβλία I, II, III, IV, V, VI, Αθήνα.

Κηπουρός Χ., (1995). Ήρωνος Αλεξανδρέως, Ονόματα Γεωμετρικών όρων – Γεωμετρικά, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κηπουρός Χ., (2000). Ήρωνος Αλεξανδρέως, Μετρικά - Διόπτρα, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κολέζα Ε., Σούρλας Κ., (1990). Ασκήσεις και προβλήματα. Μια λειτουργική ταξινόμηση. Ευκλείδης Γ, Τόμος 7, Τεύχος 27, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Λάμπας Δ., (2009). Θεμελιώδεις Γεωμετρικές Έννοιες (Μια γενετική προσέγγιση). Επιστημονική Ένωση για την Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Τζανάκης Κ., (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών μια Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Επιστημονική Ένωση για την Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Στράντζαλος Χ., (1987). Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Μέρος πρώτο). Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα.