

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

Κώστας Μαλλιάρης, Εκπ/κος Δ.Ε., 2^ο ΓΕ.Λ. Ρόδου, kmath@otenet.gr
Τάσος Σωτηράκης, Εκπ/κος Δ.Ε., 1^ο Γυμν. Ρόδου, asotirakis@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της εργασίας αυτής είναι να ορίσει τις έννοιες του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, να δείξει τα κοινά τους στοιχεία αλλά και τις σημαντικές διαφορές τους, να σημειώσει τα σημεία που δημιουργούν σύγχυση στους μαθητές και να προτείνει τρόπους κατανόησης των εννοιών αυτών χρησιμοποιώντας εκτός τις παραδοσιακές μεθόδους και εικονικά εργαλεία. Επίσης θα παρουσιαστούν κάποια είδη προβλημάτων που λύνονται αν γνωρίζει κανείς το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΝΝΟΙΩΝ

Τα πάντα κρύβονται στους ορισμούς. Άλλα, στους ορισμούς που έχουν επικρατήσει λόγω απλότητας ή λόγω ακρίβειας, άλλα σε άλλους ορισμούς που δεν είναι συνηθισμένοι, άλλα σε παραλλαγές ή μεταφράσεις ή γεωμετρικές ερμηνείες των ορισμών. Αυτό όμως είναι ίσως τελικά και η πηγή του προβλήματος κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης και των εννοιών που συνδέονται με αυτή όπως είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. Η συνάρτηση είναι από τη φύση της μια πολύπλοκη έννοια που έχει πολλαπλές αναπαραστάσεις και πολλαπλές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών που την περιβάλλουν. Επιλέγοντας ένα ορισμό ή μια ιδιότητα της είναι σαν να βλέπουμε ένα μικρό κομμάτι από ένα παζλ από το οποίο δεν μπορούμε να αντιληφθούμε τι κρύβει στο σύνολο του. Με κατάλληλη όμως επιλογή κομματιών και τα λογικά εργαλεία διασύνδεσης τους μπορούμε σιγά-σιγά να δούμε την εικόνα που κρύβεται.

Ας δούμε τώρα κάποιους ορισμούς της συνάρτησης και πώς περιέχονται οι έννοιες του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών της σε αυτούς.

Αρχικά γίνεται μια πρώτη επαφή με την έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο όπου προσπαθούμε πολύ απλά να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι μια αντιστοίχιση ενός αριθμού x σε ένα αριθμό y . Ο πρώτος ουσιαστικά

ορισμός της συνάρτησης που συναντά ο μαθητής βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, Άλγεβρα Α΄ Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1990), όπου αναφέρει:

«**Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β** λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία **κάθε στοιχείο** του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε **ένα ακριβώς στοιχείο** του συνόλου Β. Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της συνάρτησης.» Επίσης ορίζονται και οι άλλες εμπλεκόμενες έννοιες με την συνάρτηση και οι συμβολισμοί-συντομογραφίες που απλοποιούν τις καταστάσεις για κάποιους ενώ τις περιπλέκουν για άλλους. Έτσι, η συνάρτηση συνήθως συμβολίζεται με **f** από την λέξη **function** που σημαίνει λειτουργία-συνάρτηση, η ανεξάρτητη μεταβλητή **x**, με $x \in A$, η εξαρτημένη μεταβλητή $y=f(x)$, με $y \in B$. Το **x** αλλού αναφέρεται και σαν αρχέτυπο ή όρισμα, ενώ το $y=f(x)$, λέγεται τιμή της **f** στο **x**, ή εικόνα του **x**. Το σύνολο που έχει σαν στοιχεία του τις τιμές της **f** για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της **f** και συμβολίζεται με **f(A)**. Επίσης γράφουμε $f: A \rightarrow B$ και $x \rightarrow f(x)$.

Στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος, 2006), παρουσιάζεται ο ορισμός: **Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x).** Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή γράφουμε:

$f: A \rightarrow R$

$x \rightarrow f(x)$

Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης **f** συμβολίζεται με **D_f** (Domain of definition). Μπορούμε να συμπληρώσουμε : $D_f = \{x \in R / f(x) \in R\}$ αν δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί για την συνάρτηση, που δικαιολογεί φορμαλιστικά την ορολογία «πραγματική συνάρτηση, πραγματικής μεταβλητής».

Για το σύνολο τιμών (Range) **f(A)** δίνεται ο ορισμός:

$f(A) = \{y / y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$ ή εναλλακτικά,

$f(A) = \{y \in R / \text{υπάρχει } x \in D_f \text{ με } y=f(x)\}$.

Παρουσιάζεται επίσης ανάλογα και η έννοια του συνόλου των τιμών ενός υποσυνόλου του πεδίου ορισμού.

Ένας διαφορετικός ορισμός της συνάρτησης (Spivac, 1991) είναι ο παρακάτω :

Συνάρτηση είναι μια **συλλογή από ζεύγη αριθμών** με την εξής ιδιότητα: αν (a,b) και (a,c) είναι και τα δύο στη συλλογή, τότε $b=c$, δηλαδή η συλλογή δεν πρέπει να περιέχει δύο διαφορετικά ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο. Και συνεχίζει παρακάτω με ένα ακόμη ορισμό:

Αν f είναι μια συνάρτηση, το **πεδίο ορισμού** της f είναι το σύνολο όλων των a για τα οποία υπάρχει κάποιο b τέτοιο ώστε το (a,b) να ανήκει στην f . Αν το a είναι στο πεδίο ορισμού της f , έπεται από τον ορισμό της συνάρτησης ότι υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός b τέτοιος ώστε το (a,b) να ανήκει στην f . Αυτό το μοναδικό b συμβολίζεται με $f(a)$.

Στη **Θεωρία συνόλων** η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ θεωρείται ως σχέση μεταξύ των A και B , δηλαδή ως ένα σύνολο $f \in A \times B$ που ικανοποιεί το αξίωμα της μονοτιμίας δηλαδή εδώ: αν $(a,b) \in f$ και $(a,c) \in f$ τότε $a=c$.

Παραπλήσιοι ορισμοί υπάρχουν προσαρμοσμένοι στα πλαίσια της θεωρίας της **Μαθηματικής Λογικής** και της θεωρίας του **Λαμβδα-Λογισμού**.

Για πληρέστερη κατανόηση θα χρειαστούμε και τους παρακάτω ορισμούς: Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται «**ένα προς ένα**» **(1-1)**, ή **αμφιμονοσήμαντη**, όταν αντιστοιχίζει κάθε όρισμα σε αποκλειστικά δική του τιμή, δηλαδή όταν διαφορετικά όριαματα αντιστοιχίζονται σε διαφορετικές τιμές, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται «**επί**» όταν δεν υπάρχει στοιχείο στο B που να μην είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου του A , δηλαδή για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $b=f(a)$.

Να συμπληρώσουμε ακόμη και τους γραφικούς ορισμούς όπου ορίζεται το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης από την γραφική της παράσταση σαν το **σύνολο των προβολών των σημείων της** στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα

Τέλος, χρήσιμο είναι να αναφερθεί εδώ και ότι η συνάρτηση είναι και μια εξίσωση με δύο αγνώστους συνήθως x, y και η γραφική της παράσταση αποτελείται από όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη-σημεία (x, y) .

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι σε όλους τους παραπάνω ορισμούς συνυπάρχουν οι έννοιες του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης και γι' αυτό πρέπει να αντιμετωπιστούν σαν μια ολότητα.

Σύμφωνα με τον Skemp (1996) υπάρχουν δύο είδη κατανόησης στα Μαθηματικά. Η Εννοιολογική (σχεσιακή) κατανόηση (Relational Understanding) όπου ο μαθητής καταλαβαίνει τι κάνει και γιατί το κάνει και η Εργαλειακή Κατανόηση (Instrumental Understanding), όπου ο μαθητής

εφαρμόζει μηχανικά μια αλγοριθμική διαδικασία. Για τον μαθητή (και για τον καθηγητή) είναι πιο εύκολη η Εργαλειακή κατανόηση και με άλλοθι την μεγάλη ύλη και το Εξεταστικό τελικά παραμελείται η Εννοιολογική Κατανόηση με συνέπεια σε δύσκολες έννοιες όπως αυτή της συνάρτησης να εμφανίζονται προβλήματα. Για παράδειγμα στο συμβολισμό $f: A \rightarrow B$ δημιουργείται ένα πρώτο σημείο παραπλάνησης και σύγχυσης. Επειδή οι τιμές της συνάρτησης περιέχονται στο B οι μαθητές πιστεύουν ότι το σύνολο τιμών είναι το B του παραπάνω συμβολισμού και παραβλέπουν το πραγματικό σύμβολο του συνόλου τιμών που είναι το $f(A)$. Πώς λέγεται όμως το B ; Είναι το **σύνολο αφίξεως** που δεν ορίζεται πια στα σχολικά μας βιβλία και πιστεύουμε ότι είναι αναγκαία η εισαγωγή και της έννοιας αυτής. Η συνάρτηση πολλές φορές δίνεται και μόνο μέσω του τύπου της, $f(x)$. Το πεδίο ορισμού της τότε, συμφωνούμε να είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του R στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα. Τι σημαίνει όμως αυτό; Πρακτικά (Εργαλειακά) λοιπόν, αναγκαζόμαστε να λέμε στους μαθητές μας ότι αν βλέπουν παρονομαστές πρέπει να είναι διαφορετικοί από το μηδέν, αν βλέπουν ριζικά πρέπει τα υπόρριζα να είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν, δηλαδή μη αρνητικά και αργότερα αν βλέπουν λογάριθμους πρέπει οι παραστάσεις μέσα στους λογάριθμους να είναι θετικές και αν έχουμε εκθετικές συναρτήσεις η βάση να είναι θετική. Έτσι αρχίζει ο μαθητής να λύνει εξισώσεις, ανισώσεις και ανάλογα με την μορφή της συνάρτησης ενδέχεται να χρειαστεί να βρει και τις κοινές λύσεις, ελπίζοντας και αισιοδοξώντας ότι στο τέλος θα θυμηθεί να γράψει το πεδίο ορισμού σαν σύνολο. Αν υποθέσουμε ότι ξεπερνάμε το αλγεβρικό πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων, τότε συναντάμε ένα μεγάλο πρόβλημα που είναι η ορθή γραφή του πεδίου ορισμού σαν σύνολο. Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών δεν τα καταφέρνει, ίσως γιατί είναι πολύ φορμαλιστικό, ίσως γιατί το ξεχνάει μιας και αρχικά δεν του έδωσε την απαιτούμενη προσοχή, ίσως γιατί δεν ξέρει τελικά γιατί τα κάνει όλα αυτά. Πιστεύουμε ότι το πρόβλημα δημιουργείται και εδραιώνεται στο μυαλό των μαθητών είτε γιατί δεν έχουν διδαχθεί σωστά προηγουμένως βασικά στοιχεία της θεωρίας συνόλων, είτε γιατί ο μαθητής φοβάται τα σύμβολα και τελικά ίσως και γιατί δεν επιμένουμε τόσο πολύ και εμείς οι διδάσκοντες και αρκούμαστε στις πρόχειρες απαντήσεις.

Είναι χρήσιμο βέβαια να συνδέουμε την έννοια του πεδίου ορισμού με τους γενικούς μαθηματικούς περιορισμούς που εμφανίστηκαν στις πράξεις με αριθμούς αλλά είναι το μόνο που πρέπει να τονιστεί; Όχι φυσικά. Τι γίνεται με την περίπτωση των συναρτήσεων που ορίζονται για να λύσουν κάποια προβλήματα; Εδώ εμφανίζονται και οι λεγόμενοι φυσικοί περιορισμοί που

πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για τη φύση της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Επίσης πρέπει να προσεχθεί και η περίπτωση που εμείς οι ίδιοι περιορίζουμε για κάποιους λόγους το πεδίο ορισμού.

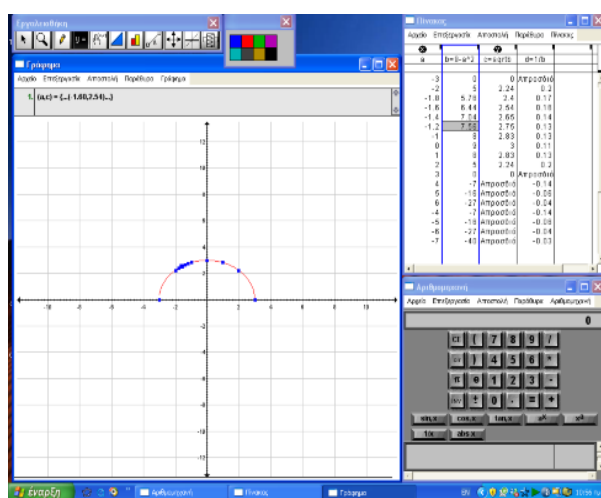
Η έννοια της ακολουθίας επίσης περιέχει κάποιο περιορισμό του πεδίου ορισμού αφού είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N^* και εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή έχει και την σημασία της διάταξης αφού δείχνει την σειρά –τάξη του όρου της ακολουθίας. Εδώ υπάρχει και το πρόβλημα αλλαγής συμβόλων, όπου το x γίνεται n , το $f(x)$ γίνεται a_n και η γραφική παράσταση αποτελείται από μεμονωμένα σημεία με τετμημένες μόνο θετικούς ακεραίους αντί για την συνεχή γραμμή που συνήθισε να βλέπει ο μαθητής.

Με ποιους τρόπους και σε ποιες περιοχές όμως μπορούμε να ενισχύσουμε την διδασκαλία των εννοιών αυτών;

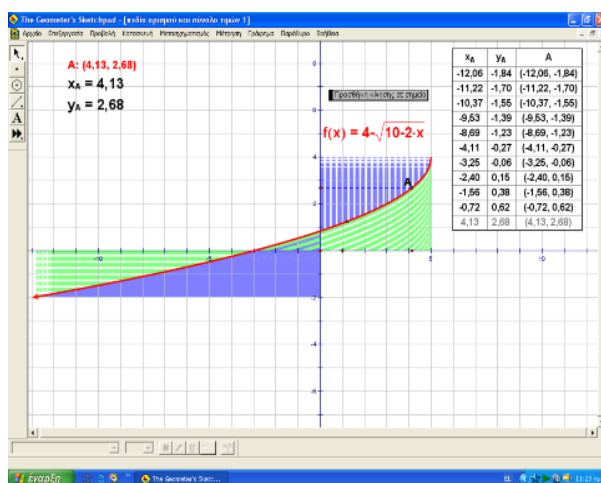
- Μια πρώτη περιοχή είναι η περιοχή της θεωρίας συνόλων που είναι αρκετά υποβαθμισμένη μιας και το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι «σύνολα» και πρέπει να αντιμετωπίζονται μέσα στα σωστά πλαίσια. Οι μαθητές πρέπει να εμβαθύνουν στον τρόπο γραφής συνόλων (αναγραφή, περιγραφή, διαστήματα), στις βασικές πράξεις των συνόλων (ένωση, τομή, διαφορά), και στις έννοιες του υποσυνόλου και της ισότητας συνόλων. Επίσης να εξοικειωθούν με τα σύμβολα $\in$, $\notin$, $\subseteq$ και τους ποσοδείκτες «για κάθε» και «υπάρχει» έστω και χωρίς σύμβολα.
- Μια άλλη περιοχή είναι η περιοχή των ορισμών και των ορολογιών. Μπορούμε να αναφέρουμε όλους τους παραπάνω ορισμούς και τα σημεία στα οποία εμφανίζονται, να χρησιμοποιούμε και περιφραστικά την ορολογία τονίζοντας όπου είναι δυνατόν και την ετυμολογία των λέξεων (π.χ. όρισμα-πεδίο ή σύνολο ορισμού).
- Να διευκρινιστεί η διαφορά του συνόλου αφίξεως από το σύνολο τιμών που καλό είναι εναλλακτικά να το ονομάζουμε και «σύνολο όλων των δυνατών τιμών της συνάρτησης».
- Να συνδεθεί αμέσως το x με το πεδίο ορισμού και το y με το σύνολο τιμών, το ζεύγος (x, y) με τις προβολές στους άξονες οπότε θα φανούν διαισθητικά αυτά τα δύο σύνολα.
- Η γραφική ερμηνεία του ορισμού της συνάρτησης δείχνει ότι μια κατακόρυφη γραμμή επιτρέπεται να τέμνει την γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Σε αυτό το σημείο επεμβαίνουμε για να δείξουμε ξανά τα δύο αυτά σύνολα και να εισάγουμε εποπτικά ακόμη και την έννοια της συνάρτησης 1-1.

- Να αναφερθούν και ορολογίες από άλλες επιστημονικές περιοχές που είναι σχετικές όπως π.χ. από την πληροφορική, input-output που αντιστοιχεί στο $x \rightarrow y$ (διαθεματική προσέγγιση).
- Να χρησιμοποιηθούν νέες τεχνολογίες και λογισμικά για την δυναμική παρουσίαση των εννοιών αυτών και την δημιουργία έντονων παραστάσεων και συνειρμών στο μαθητή.

Βλέπουμε παρακάτω κάποια στιγμιότυπα από διδασκαλία με τα λογισμικά Functionprobe και Sketchpad για τις έννοιες του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών.



Εικόνα 1. Δραστηριότητα με το λογισμικό Functionprobe με την βοήθεια του οποίου ο μαθητής βλέπει συγχρόνως ένα πίνακα τιμών όπου φαίνονται με την ένδειξη απροσδιόριστη οι τιμές που αποκλείονται από το πεδίο ορισμού και συγχρόνως τα σημεία της γραφικής παράστασης μεμονωμένα αλλά και όλη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



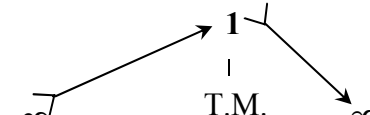
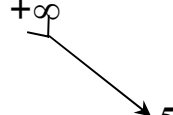
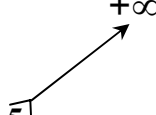
Εικόνα 2. Δραστηριότητα με G.Sketchpad. Ο μαθητής βλέπει την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τις προβολές των σημείων της στους άξονες και συγχρόνως ένα πίνακα τιμών της. Εδώ η κίνηση και η αποτύπωση του ίχνους των σημείων βοηθάει τον μαθητή να δημιουργήσει μέσα του παραστάσεις για την μετέπειτα αναγνώριση των

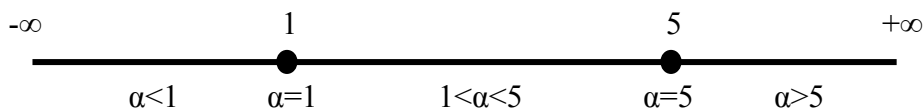
ιδιοτήτων του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών.

- Για την Γ' Λυκείου εκτός από την διαισθητική προσέγγιση και τις τεχνικές εύρεσης πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών να τονιστεί η σχέση τους με βασικά θεωρήματα της Ανάλυσης.
- Να τονιστεί η σημασία τους στην ύπαρξη αλλά και στην εύρεση της αντίστροφης μιας συνάρτησης
- Να τονιστεί η χρησιμότητα τους στην διερεύνηση και επίλυση εξισώσεων της μορφής $f(x) = a$, όπου θα φανεί η σύνδεση της λύσης με το πεδίο ορισμού και της παραμέτρου a με το σύνολο τιμών της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Αφού βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κατασκευάζουμε τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα και κατόπιν διερευνούμε το πλήθος λύσεων.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ Π.Ο.	$(-\infty, 0]$	$[0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$	
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$		1 T.M.			
ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ	$(-\infty, 1]$	$(-\infty, 1]$	$(5, +\infty)$	$(5, +\infty)$	



Συμπληρωματικά με την βοήθεια λογισμικού θα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και η οριζόντια ευθεία $y=a$ η οποία θα μετακινείται κατακόρυφα και θα επαληθεύει τα παραπάνω.

- Να επιλυθούν προβλήματα εύρεσης πεδίου ορισμού με συναρτήσεις που προκύπτουν από προβλήματα φυσικής, χημείας, οικονομικών και άλλα όπου υπεισέρχονται και φυσικοί περιορισμοί και έτσι αναπτύσσεται η κριτική ικανότητα του μαθητή αλλά και εμφανίζονται διαθεματικές δραστηριότητες.
- Να διαπιστωθεί η χρησιμότητα τους στην ισότητα, πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων. Ειδικά στην σύνθεση το σημείο δυσκολίας είναι η εναλλαγή των εννοιών του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών και η ταυτόχρονη επιλογή στοιχείων από αυτά τα σύνολα. Εδώ πρέπει να δοθεί έμφαση και στα πεδία ορισμού των $g \circ f$ και $f \circ g$, δηλαδή των συνόλων $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\}$ και $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$.
- Να διαπιστωθεί η ανάγκη γνώσης της μονοτονίας της συνάρτησης για την εύρεση του συνόλου τιμών, η ανάγκη γνώσης του πεδίου ορισμού για την εύρεση ασύμπτωτων και έτσι για άλλη μια φορά να συνδεθούν πολλές έννοιες μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Τι γίνεται αν περιορίσουμε μια συνάρτηση, δηλαδή αν επιλέξουμε σαν πεδίο ορισμού της ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού που προκύπτει από τον τύπο της; Ποιες ιδιότητες αλλάζουν και ποιες παραμένουν αναλλοίωτες; Όλα αυτά θα τα κατανοήσουμε καλύτερα αν έχουμε στο μυαλό μας ότι θα κόψουμε την γραφική της παράσταση και θα πάρουμε ορισμένα κομμάτια της. Ανάλογα με τα κομμάτια που θα επιλέξουμε αλλάζουν ή παραμένουν ίδιες κάποιες ιδιότητες.

Για παράδειγμα η τετραγωνική συνάρτηση $f(x)=x^2$ που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αν περιοριστεί στα $x \geq 0$ δηλαδή στο $[0, +\infty)$, θα έχει πάλι σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$, ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$, θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, αλλά θα είναι μόνο γνησίως αύξουσα και 1-1, οπότε και αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Τα πράγματα όμως θα είναι διαφορετικά αν την περιορίσουμε στο $[-2,3]$ ή $[1,8]$ ή $(-4,1)$ ή $(5,7]$ και αλλού όπου δεν έχουμε πάντα σταθερή συμπεριφορά.

Επομένως και στα προβλήματα που υπεισέρχονται φυσικοί περιορισμοί αν δεν είμαστε προσεκτικοί μπορεί να βγάλουμε λανθασμένα συμπεράσματα. Βλέπουμε λοιπόν πόσο σημαντικό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που θέλουμε να μελετήσουμε και πως μπορούμε με ανοικτές δραστηριότητες αυτού του είδους να βοηθήσουμε τα παιδιά να κατανοήσουν σε βάθος διάφορες έννοιες που εμφανίζονται στη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-2)+x^3$, πρώτα στο πεδίο ορισμού της και μετά στο διάστημα $[4,7)$. Τι παρατηρείτε;
2. Να περιορίσετε την συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$ σε κατάλληλο διάστημα ώστε να είναι αντιστρέψιμη και να έχει σύνολο τιμών το $(2,10]$.

Ανάλογα μπορούμε σε αυτή την λογική να κατασκευάσουμε κατάλληλες δραστηριότητες αλλάζοντας τον τύπο της, το επιθυμητό σύνολο τιμών της ή οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα της όπως η μονοτονία ή τα ακρότατα. Ουσιαστικά όμως αλλάζοντας το πεδίο ορισμού της παρεμβαίνουμε στο σύνολο τιμών της και ανάλογα τι μεταβολές θα του προξενήσουμε θα έχουμε και τις κατάλληλες ιδιότητες στην συνάρτηση μας.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Σε κάθε περίπτωση πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δηλαδή όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή x . Μετά πρέπει να κατανοήσουμε ότι το σύνολο τιμών είναι όλες οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η εξαρτημένη μεταβλητή y (ή $f(x)$). Επίσης να προσέξουμε την διαφορά του συνόλου τιμών από το σύνολο αφίξεως και τις παγίδες που μπορεί να κρύβονται στον τύπο της.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, βλέπουμε ότι παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές αφού $\sqrt{x^2 + 1} \geq 0$ πάντα. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, αφού δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, ούτε την τιμή 0,1 κτλ. Τελικά το σύνολο τιμών της θα είναι το $[1, +\infty)$ αν φυσικά το πεδίο ορισμού της επιθυμούμε να είναι το $\mathbb{R}$.

- Μια πρώτη μέθοδος είναι η γραφική. Αν είναι γνωστή η γραφική παράσταση της συνάρτησης το σύνολο τιμών της θα βρίσκεται από το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον άξονα $y'y$ και θα είναι ουσιαστικά όλες οι τεταγμένες y των σημείων αυτών.
- Μια άλλη μέθοδος είναι η συνθετική, όπου ξεκινώντας με τις δυνατές τιμές του x , καταλήγουμε στις δυνατές τιμές του $y=f(x)$. Όμως εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι ουσιαστικά βρίσκουμε το σύνολο αφίξεως και όχι σίγουρα το «σύνολο όλων των δυνατών τιμών». Μετά πρέπει να εξασφαλίζουμε και ότι θα μπορεί να πάρει και όλες αυτές τις τιμές. Για παράδειγμα, έστω $f(x) = 1 - \sqrt{3x - 6}$.

Είναι $D_f = [2, +\infty)$, οπότε έχουμε:

$$x \geq 2 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow 3x - 6 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3x - 6} \geq 0 \Rightarrow$$

$$-\sqrt{3x - 6} \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{3x - 6} \leq 1$$

δηλαδή $f(x) \leq 1$. Δείξαμε λοιπόν ποιες τιμές μπορεί να πάρει το y . Άρα το σύνολο αφίξεως είναι το $(-\infty, 1]$. Αυτό θα είναι και σύνολο τιμών αν εξασφαλίσουμε ότι η συνάρτηση μπορεί να πάρει όλες αυτές τις τιμές δηλαδή αν η εξίσωση $y = 1 - \sqrt{3x - 6}$, έχει λύση $x \geq 2$ για κάθε $y \leq 1$. Πράγματι αν λύσουμε ως προς x , έχουμε ότι για $y \leq 1$ θα είναι τελικά $x = \frac{(1-y)^2}{3} + 2 \geq 2$, το οποίο δείχνει ότι το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$. Για παράδειγμα η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή $y = -2$ αν $x = 5$ (παρατηρούμε ότι όντως $f(5) = -2$).

- Η ισχυρότερη όμως μέθοδος είναι αυτή που εκμεταλλεύεται την μονοτονία, και τα θεωρήματα συνέχειας. Βρίσκουμε την μονοτονία χωρίζοντας έτσι σε διάφορα διαστήματα $A_1, A_2, A_3, \dots$ το πεδίο ορισμού της και τα επιμέρους σύνολα τιμών $f(A_1), f(A_2), f(A_3), \dots$ οπότε το σύνολο τιμών θα είναι η ένωση τους.

Μετά από όλα αυτά φαίνεται πόσο μεγάλη σημασία στην κατανόηση και την καλύτερη μελέτη των συναρτήσεων παίζουν αυτές οι πρωταρχικές έννοιες στις συναρτήσεις που είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών οι οποίες εμφανίζονται από τον ορισμό μέχρι την πλήρη μελέτη των συναρτήσεων. Είναι η αρχή και το τέλος της διαδικασίας της συνάρτησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Spivak, M. (1991), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Ηράκλειο, ΠΕΚ.
- Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Σβέρκος, *Άλγεβρα Α' Ενιαίου Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1990
- Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' Ενιαίου Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2006.
- Skemp R. (1996). Εννοιολογική Κατανόηση και Εργαλειακή Κατανόηση, *Ευκλείδης Γ'*, Τόμος 13, Τεύχος 46, 20-35.