

Μελέτη συνάρτησης στην Α΄ Τάξη Γενικού Λυκείου

Κώστας Μαλλιάρης, Εκπ/κος Δ.Ε., 2^ο ΓΕ.Λ.Ρόδου, e-mail:kmath@otenet.gr
Τάσος Σωτηράκης, Εκπ/κος Δ.Ε., 1^ο Γυμν. Ρόδου, asotirakis@aegean.gr

Περίληψη

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να τονίσει τις δυσκολίες που εμφανίζονται στην διδασκαλία της μελέτης συναρτήσεων στην Α΄ Λυκείου είτε στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών είτε στα προβλήματα που δημιουργούνται λόγω της κατανομής ύλης σύμφωνα με τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα και να προτείνει τρόπους επίλυσης αυτών των προβλημάτων με επίκεντρο την χρήση Μαθηματικών Λογισμικών.

Εισαγωγή

Η μελέτη συνάρτησης στην Α΄ Τάξη του Γενικού Λυκείου επικεντρώνεται στις έννοιες της συμμετρίας (άρτια-περιττή), της μονοτονίας, (γνησίως αύξουσα-φθίνουσα) των (ολικών) ακροτάτων, (μέγιστο-ελάχιστο) και την συμπεριφορά συναρτήσεων για απολύτως μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x ώστε να καταλήξει στην γραφική της παράσταση. Οι συναρτήσεις που μελετάμε είναι οι παραβολές $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+bx+c$, με $a \neq 0$ και οι υπερβολές $f(x)=a/x$, με $a \neq 0$.

Το Τεύχος 4 του Επιμορφωτικού υλικού για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών ΠΕ03 αναφέρει πως «Η Άλγεβρα παρουσιάζεται σαν μια γενίκευση της αριθμητικής και σ' αυτό το σημείο εμφανίζονται οι πρώτες δυσκολίες μιας και εκεί τα αντικείμενα είναι γενικευμένοι αριθμοί και οι σχέσεις είναι σχέσεις μεταξύ γενικευμένων αριθμών ή αλλιώς ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζουν οι τιμές που μπορεί να πάρει ένας γενικευμένος αριθμός σε σχέση με κάποιο άλλο».

Αυτό το σημείο δυσκολίας εμφανίζεται πιο έντονα στην έννοια της συνάρτησης καθώς και στις έννοιες που την προσεγγίζουν (ανεξάρτητη-εξαρτημένη μεταβλητή, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών). «Η συνάρτηση έχει πολλούς τρόπους ύπαρξης και πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις αφού μπορεί να εκφραστεί με ένα τύπο-εξίσωση, με πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση αλλά και με λεκτική έκφραση. Κάθε είδος αναπαράστασης περιέχει μόνο ορισμένες πτυχές της έννοιας και όλες οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης αλληλοσυμπληρώνονται. Οι δυσκολίες που

συναντούν οι μαθητές οφείλονται πολλές φορές στην μετάβαση από την μια αναπαράσταση στην άλλη και στην λογική διασύνδεση τους» (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης, Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, 2007, Βιβλίο Εκπαιδευτικού).

Μια άλλη δυσκολία είναι στα γράμματα που χρησιμοποιούνται άλλοτε για μια μεταβλητή, άλλοτε για μια παράμετρο και άλλοτε για ένα άγνωστο. Όλα αυτά εμφανίζονται στους μαθητές αυθαίρετα με συνέπεια την παρανόηση της χρήσης τους.

Επίσης ο ιδανικότερος τρόπος διδασκαλίας διαφέρει ανάλογα με το είδος αναπαράστασης που χρησιμοποιούμε κάθε φορά.

Εκτός τις δυσκολίες της έννοιας της συνάρτησης όμως δημιουργούμε και «εμείς» άλλες δυσκολίες στην διδασκαλία της έννοιας αυτής. Είναι γεγονός ότι το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών είναι υπερφορτωμένο με αποτέλεσμα τα «δύσκολα κεφάλαια» να μην γίνονται σωστά ή και καθόλου και κυρίως να αποφεύγονται από την εξεταστέα ύλη. Συνέπεια όλων αυτών είναι οι περισσότεροι μαθητές του Γυμνασίου να πηγαίνουν στο Λύκειο με ελάχιστες γνώσεις πάνω στις συναρτήσεις, να ξανασυναντούν στην Α΄ Λυκείου το ίδιο πρόβλημα αφού και εκεί τα κεφάλαια αυτά είναι προς το τέλος της σχολικής χρονιάς και ούτε διδάσκονται πάντα σωστά ούτε εξετάζονται στο τέλος. Το πρόβλημα αλυσιδωτά καταλήγει στην αποτυχία της πλειονότητας των μαθητών στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου που κυρίως εξετάζονται στην μελέτη συναρτήσεων και μάλιστα σε αρκετά προχωρημένο επίπεδο.

Προτάσεις για την διδασκαλία της Μελέτης Συναρτήσεων

Όσον αφορά το τελευταίο πρόβλημα που αναφέραμε αυτό που θα βοηθούσε πραγματικά τους μαθητές αλλά και τους καθηγητές των Μαθηματικών είναι η αύξηση των ωρών διδασκαλίας της Άλγεβρας στο Λύκειο από 2 σε 3 τουλάχιστον ώρες την εβδομάδα.

Επίσης θεωρούμε λογική λόγω των παραπάνω πραγματικών καταστάσεων την μεταφορά της Μελέτης συνάρτησης και της Τριγωνομετρίας από την Α΄ Λυκείου στην Β΄ με ταυτόχρονη μεταφορά από την ύλη της Β΄ Λυκείου στην ύλη της Α΄ των Πολυωνυμικών εξισώσεων ή και των Προόδων, θέση που έχει προταθεί εμπεριστατωμένα εδώ και πολλά χρόνια από την Ε.Μ.Ε. για τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα.

Μέχρι και «αν» θα γίνουν όμως όλα αυτά και με δεδομένη την απουσία ενός νέου σχολικού βιβλίου (το παρόν σχεδόν έχει καταργηθεί από τις οδηγίες του Π.Ι. με τις αλλαγές στην σειρά της ύλης, την αφαίρεση

αρκετών ασκήσεων και μεθόδων αποδείξεων και τις προτεινόμενες δραστηριότητες) όλοι οι συνάδελφοι μαθηματικοί αυτοσχεδιάζουν.

Ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας αυτής είναι η επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν από πραγματικές καταστάσεις αλλά φαίνεται ότι και αυτό δεν έχει αποδώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα.

Τι κάνουμε λοιπόν; Μια απάντηση που επιζητείται τελευταία εμπεριέχεται στα εργαλεία που δίνουν οι Νέες Τεχνολογίες στους Μαθηματικούς με διάφορα Λογισμικά όπως τα Sketchpad, Cabri, Geogebra, Function Probe και άλλα. Η πρότασή μας προσπαθεί να εκμεταλλευτεί τις μεγάλες δυνατότητες που μας παρέχουν αυτά τα Λογισμικά χωρίς όμως να παραβλέπει και στοιχεία της παραδοσιακής διδασκαλίας ώστε να μπορεί και ο μαθητής να κατανοήσει τις διάφορες έννοιες αλλά και να αποκτήσει δεξιότητες για την παραπέρα μαθηματική του πορεία προς τις εξετάσεις που αναγκαστικά πρέπει να λάβουμε υπόψη μας.

Ας δούμε αρχικά τους στόχους της διδασκαλίας αυτής της ενότητας σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα και τις Οδηγίες για την διδασκτέα ύλη και την διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007-2008 (ΥΠΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) και κατόπιν θα προτείνουμε τρόπους για να φτάσουμε στην επίτευξή τους.

Οι μαθητές πρέπει:

- Να αναγνωρίζουν αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και να διαπιστώνουν τις αντίστοιχες συμμετρίες στη γραφική παράσταση
- Να βρίσκουν τα διαστήματα μονοτονίας **απλών** συναρτήσεων
- Να βρίσκουν τα ακρότατα **απλών** συναρτήσεων
- Να μελετούν τις συναρτήσεις $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+bx+c$, και $f(x)=a/x$, με $a \neq 0$ και να σχεδιάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις
- Να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\varphi(x) \pm c$ και $f(x)=\varphi(x \pm c)$, (παράλληλες μετατοπίσεις γνωστών συναρτήσεων)
- Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού

Η συμβολή των νέων τεχνολογιών στην επίτευξη αυτών των στόχων μπορεί να είναι σε μεγάλο βαθμό αποτελεσματική αφού:

- Κατά την διδασκαλία πρέπει να κυριαρχεί η εποπτεία (οδηγίες Π.Ι.) και τα λογισμικά μπορούν εύκολα και γρήγορα να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις, να τις αλλάζουν δυναμικά και να βλέπουν συγχρόνως οι μαθητές από ποιες παραμέτρους επηρεάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών (Διάδραση)
- Θα ερμηνεύονται και γραφικά οι διάφοροι ορισμοί και οι λεπτομέρειες που περιέχουν ώστε να μην φαίνονται αυθαίρετοι ή ακόμη και περιττοί στους μαθητές
- Θα ξεκαθαριστεί η διαφορά των μεταβλητών x , y από τις παραμέτρους α , β , γ καθώς θα διασαφηνιστεί ο ρόλος τους στην γραφική παράσταση
- Θα γίνεται ευκολότερα και γρηγορότερα η διερεύνηση των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης
- Θα υπάρχει εμπιστοσύνη στο σχήμα το οποίο δύσκολα θα κατασκεύαζε μόνος του ο μαθητής αλλά και οι πολλές αναπαραστάσεις του στην οθόνη θα μείνουν εντονότερα χαραγμένες στο μυαλό του ώστε μετά ο ίδιος να είναι σε θέση να κατασκευάσει πιο σωστά αυτές τις γραφικές παραστάσεις
- Θα δει ο μαθητής μαζί τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης, θα μπορεί ευκολότερα να μεταβαίνει από την μια στην άλλη και να τις συνδέει λογικά και θα καταργηθεί η αυστηρή παραδοσιακή σειρά «χρήση τύπου-κατασκευή πίνακα τιμών-αναπαράσταση στους άξονες» με αποτέλεσμα την ενοποίηση όλων των αναπαραστάσεων με ταυτόχρονη δυνατότητα αλλαγής όλων των παραμέτρων και εμφάνισης των συνεπειών τους
- Θα δει ο μαθητής τις πολλές πτυχές μιας έννοιας
- Η παράλληλη χρήση του παραδοσιακού πίνακα θα ενισχύσει τις δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσει ο μαθητής αφού τώρα οι ενέργειες που θα γίνονται θα έχουν αιτιολογηθεί από τις προηγούμενες δραστηριότητες με τα λογισμικά και θα φαίνονται πιο λογικά τα αποτελέσματά τους
- Ο συνδυασμός παραδοσιακής διδασκαλίας και διδασκαλίας με λογισμικά θα κερδίσει και τους μαθητές που φοβούνται είτε τη μία είτε την άλλη μέθοδο διδασκαλίας αλλά και τους καθηγητές που δεν είναι αρκετά επιμορφωμένοι στις νέες τεχνολογίες

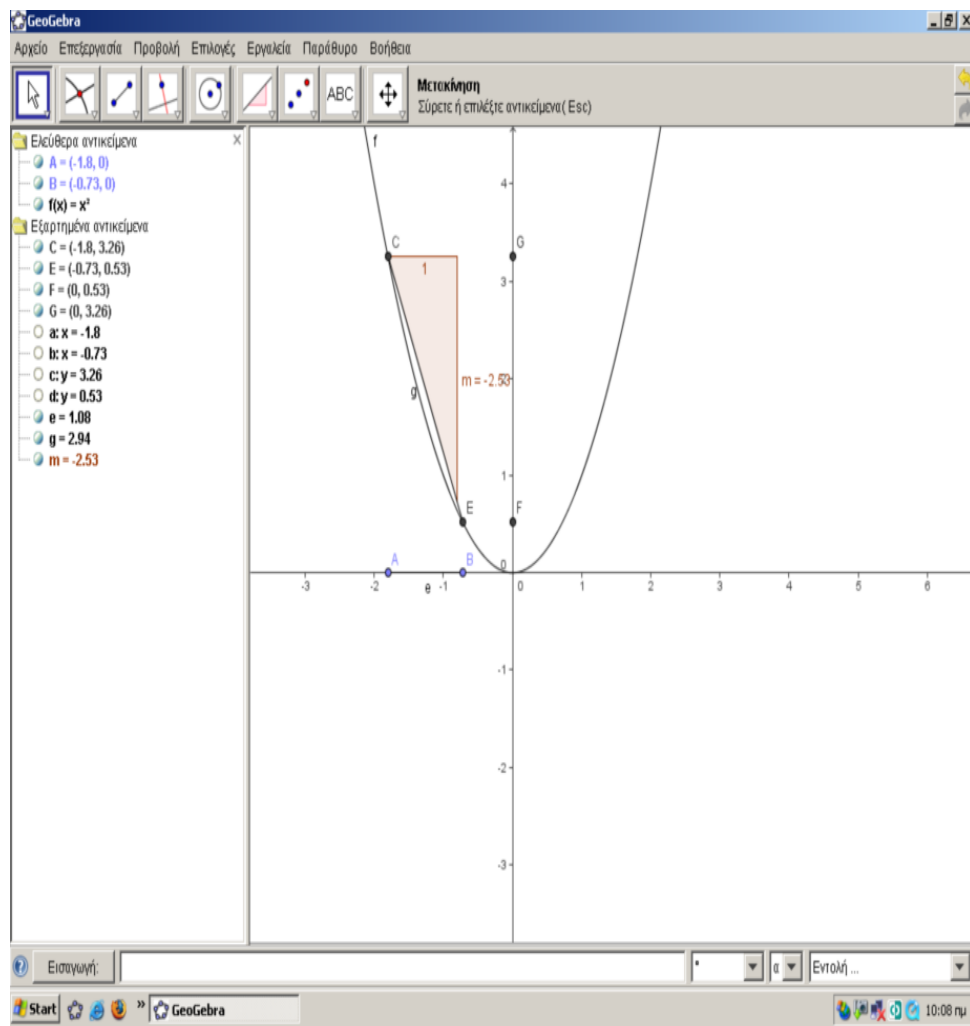
Πορεία διδασκαλίας

Σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι. αρχικά διδάσκεται η έννοια της μονοτονίας και των ακροτάτων. Προτείνουμε μια δραστηριότητα με το Λογισμικό Geogebra με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές αυτές τις έννοιες και τους αντίστοιχους ορισμούς. Παράλληλα να κατανοήσουν γιατί η μονοτονία ελέγχεται σε διαστήματα, πώς επηρεάζει το είδος μονοτονίας τα ακρότατα, να ξεκαθαρίσουν ποια είναι η θέση ακροτάτων και ποιες οι ακραίες τιμές και να δουν τον ρόλο του «για κάθε x_1, x_2 » στους ορισμούς.

Πριν την διδασκαλία με το λογισμικό μπορούμε να συζητήσουμε ετυμολογικά τις λέξεις μονότονη, αύξουσα, φθίνουσα, σταθερή, μέγιστο, ελάχιστο ώστε να συνειδητοποιήσει ο μαθητής ότι ακόμη και οι ορολογίες στα μαθηματικά δεν επιλέγονται τυχαία.

Ένα μέρος της οθόνης του Geogebra είναι το σύστημα αξόνων, ένα μέρος περιέχει τα αλγεβρικά αντικείμενα και υπάρχει και η γραμμή εντολών και κάποιες άλλες λειτουργίες. Ότι εμφανίζεται στην περιοχή της άλγεβρας εμφανίζεται και γραφικά στο σύστημα αξόνων οπότε ο μαθητής βλέπει και τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις και τις δυναμικές μεταβολές τους.

- Κατασκευάζω την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ και παίρνω δύο σημεία A, B πάνω στον άξονα $x'x$
- Φέρνω κάθετες στον $x'x$ στα σημεία A, B και παίρνω τα σημεία τομής τους C, E με την γραφική παράσταση και την κλίση του CE
- Από τα C, E φέρνω κάθετες στον $y'y$ που τον τέμνουν στα G, F και αποκρύπτω τις κάθετες ευθείες
- Έστω x_1, x_2 οι τετμημένες των A, B οπότε $f(x_1)$, $f(x_2)$ οι τεταγμένες των G, F οι οποίες φαίνονται στην περιοχή της άλγεβρας
- Μετακινούμε σε διάφορες θέσεις τα σημεία A, B έτσι ώστε το B να είναι πάντα δεξιότερα του A και βλέπουμε τι αλλαγές επιφέρουν στα σημεία C, E, G, F και συγχρόνως τι γίνεται με τις τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ τονίζοντας και ότι η γραφική παράσταση ανεβαίνει ή κατεβαίνει όσο πάμε δεξιά. Επίσης παρατηρούμε ότι αν το A είναι αριστερά του O και το B δεξιά δεν μπορούμε να βγάλουμε σίγουρο συμπέρασμα ενώ αν είναι και τα δύο αριστερά ή και τα δύο δεξιά του O μπορούμε.
- Στην οθόνη του υπολογιστή μας θα φαίνεται η παρακάτω εικόνα και μετά τις συνεχείς μετακινήσεις των σημείων A, B και μια μικρή συζήτηση για τις παρατηρήσεις μας έρχεται η ώρα να διδάξουμε τους ορισμούς της γνησίως αύξουσας-φθίνουσας συνάρτησης σε κατάλληλο διάστημα έχοντας έτοιμη και την γραφική τους ερμηνεία.



Σχήμα 1. Ορισμοί Μονοτονίας-Ακροτάτων με την βοήθεια της $f(x)=x^2$

- Δίνονται οι ορισμοί της γνησίως αύξουσας-φθίνουσας συνάρτησης όπου διαπιστώνεται η ανάγκη της συμφωνίας να λέμε ότι η γραφική παράσταση ανεβαίνει ή κατεβαίνει όσο πάμε δεξιότερα ώστε να έχουμε στον ορισμό « $x_1 < x_2$ », και αναλόγως αν $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ να έχουμε το κατάλληλο είδος μονοτονίας. Και με το «για κάθε $x_1 < x_2$ » που έχουμε στον ορισμό κατανοούμε γιατί η μονοτονία ελέγχεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Διαπιστώνουμε επίσης από την γραφική παράσταση την συμμετρία της $f(x)=x^2$ ως προς τον άξονα $y'y$ και συμπεραίνουμε ότι αν υπάρχει αυτή η συμμετρία το είδος της μονοτονίας σε διαστήματα συμμετρικά ως προς το 0 θα είναι διαφορετικό οπότε αρκεί να μελετάμε την μονοτονία τέτοιων συναρτήσεων μόνο μετά το 0.
- Διδάσκουμε με την συνθετική μέθοδο την εύρεση μονοτονίας της: Έστω $0 < x_1 < x_2$ οπότε $x_1^2 < x_2^2$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και λόγω συμμετρίας θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$. Τονίζουμε ότι η ύψωση στο τετράγωνο εδώ επιτρέπεται γιατί και τα δύο μέλη είναι θετικά.
- Μετά από αυτά εισάγουμε την έννοια του λόγου μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ και με το λογισμικό βρίσκοντας την κλίση του

τμήματος CE αλλά και με την παραδοσιακή διδασκαλία και συνδέουμε την έννοια αυτή με τους ορισμούς της μονοτονίας τονίζοντας ότι το πρόσημο του λ καθορίζει αν οι όροι του κλάσματος είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι και επομένως σύμφωνα με τον ορισμό αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα. Έτσι διαπιστώνουμε ότι έχουμε ένα ακόμη εργαλείο που μπορεί να μας βρίσκει την μονοτονία μιας συνάρτησης και το οποίο θα ερμηνεύσει και την εφαρμογή της παραγώγου στην μονοτονία αργότερα στην Γ' Λυκείου. Φυσικά θα εξασκήσουμε μετά τους μαθητές μας και σε άλλες τεχνικές όπως είναι η συνθετική μέθοδος όπου ξεκινώντας από την σχέση $x_1 < x_2$ καταλήγουμε στην σχέση $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$

Συγκεκριμένα έχουμε:

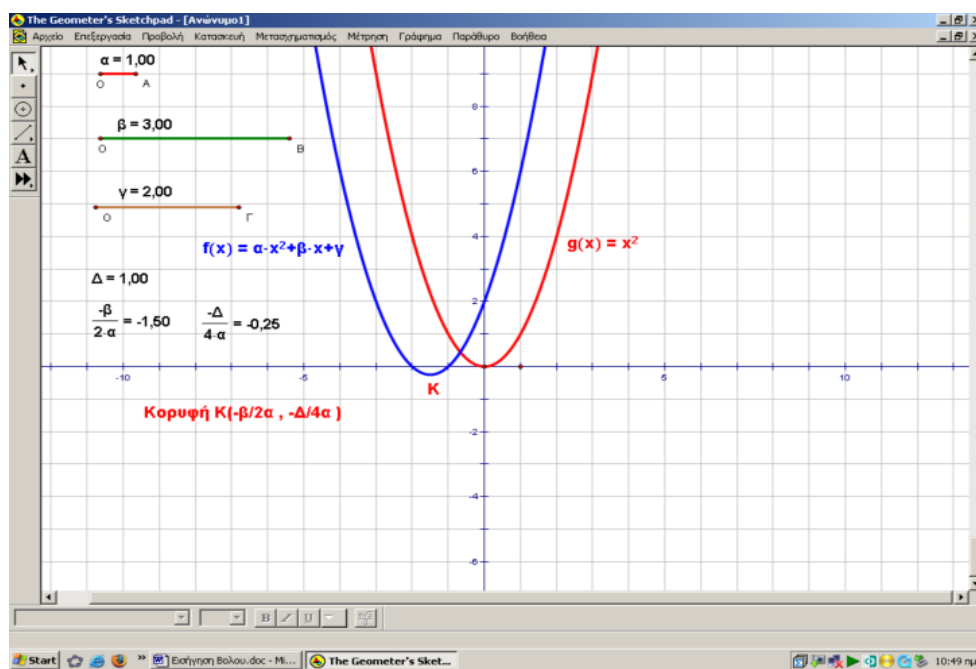
$$\bullet \quad \lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Επομένως για να είναι σίγουρα θετικός ο λ πρέπει οι αριθμοί x_1 και x_2 να είναι θετικοί δηλαδή να κινούνται στο $(0, +\infty)$ ενώ για να είναι σίγουρα αρνητικός ο λ πρέπει x_1 και x_2 να είναι αρνητικοί οπότε πάλι βρίσκουμε την μονοτονία της συνάρτησης αυτής. Τονίζουμε επίσης ότι αν οι x_1 και x_2 είναι ετερόσημοι δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το πρόσημο του λ οπότε και για την μονοτονία και βλέπουμε άλλη μια φορά την ανάγκη της μελέτης της μονοτονίας μιας συνάρτησης σε κατάλληλα διαστήματα.

- Επαναλαμβάνουμε αντίστοιχες ενέργειες και με τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2$, $f(x) = x^2 \pm 1$, $f(x) = (x \pm 1)^2$ ώστε να γενικεύσουμε τα συμπεράσματά μας και να μπούμε και στην έννοια των μετατοπίσεων όπου θα δούμε πώς γίνονται και από πού εξαρτώνται
- Κατόπιν με το λογισμικό εξηγούμε την έννοια των ακροτάτων, την σχέση τους με την αλλαγή της μονοτονίας και με διάφορες γραφικές παραστάσεις καταλήγουμε στην ερμηνεία των ορισμών και εξασκούμαστε σε τεχνικές εύρεσης ακροτάτων απλών συναρτήσεων. Τονίζουμε επίσης ότι δεν είναι υποχρεωτική η ύπαρξη τους και μόνο εποπτικά δείχνουμε και την διαφορά των ολικών από τα τοπικά ακρότατα που θα συναντήσουν αργότερα.
- Ανάλογα εξηγούμε και τα είδη συμμετρίας, τους ορισμούς της άρτιας και της περιττής συνάρτησης. Το λογισμικό θα μας βοηθήσει να διαπιστώσουμε αν τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, δηλαδή είναι συμμετρικά ως προς το O αλλά και τον $y'y$ τότε και τα C, E είναι συμμετρικά ως προς $y'y$ δηλαδή έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες
- Ενισχύουμε την διδασκαλία μας χρησιμοποιώντας πάλι και το λογισμικό αλλά και παραδοσιακές τεχνικές και σε άλλες συναρτήσεις όπως για παράδειγμα $f(x) = 2x^3$, $f(x) = 3 - \sqrt{4x - 8}$ φροντίζοντας να «δουλεύει» η συνθετική μέθοδος. Επίσης μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις γραφικές παραστάσεις στις συναρτήσεις που έχει το σχολικό βιβλίο και να μελετήσουμε ακόμη και προφορικά όλες τις ιδιότητες τους.

Μια άλλη δραστηριότητα που μπορεί να διεξαχθεί με το λογισμικό Sketchpad αλλά και με το Geogebra αφορά την μελέτη της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$, με $a \neq 0$ όπου εκμεταλλευόμαστε την δυνατότητα των λογισμικών να αλλάζουν συνεχώς τις τιμές των παραμέτρων a , b , c και να βλέπει ο μαθητής τις συνέπειες αυτών των αλλαγών και να τις συνδέει με κάποια μεγέθη όπως είναι η Διακρίνουσα, να βρίσκει το πρόσημο της για κάθε x , την κορυφή της παραβολής, τον άξονα συμμετρίας της αλλά και να λύνει γραφικά εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

Στο παρακάτω σχήμα 2 φαίνεται ένα στιγμιότυπο της δραστηριότητας στην οποία η μετακίνηση των σημείων A, B, Γ προκαλεί αλλαγή των παραμέτρων a , b , c και ταυτόχρονη μετακίνηση της γραφικής παράστασης. Εδώ θα διαπιστώσει ο μαθητής ότι η αλλαγή μόνο του a αλλάζει το άνοιγμα της παραβολής, η αλλαγή μόνο του c ανεβοκατεβάζει την γραφική παράσταση και πολλά άλλα.



Σχήμα 2. Μελέτη ιδιοτήτων της $f(x)=ax^2+bx+c$, με $a \neq 0$

Οι διδασκαλίες αυτές έχουν ήδη πραγματοποιηθεί αρκετές φορές σε διάφορα τμήματα και τα αποτελέσματα ήταν εντυπωσιακά. Οι δραστηριότητες μπορούν να αλλάζουν εύκολα αλλά να κινούνται προς την ίδια φιλοσοφία. Τα λογισμικά δίνουν ιδέες για διδασκαλίες αλλά και βοηθούν τον διδάσκοντα να ανακαλύψει ποια σημεία κατανόησης δυσκολεύουν τους μαθητές ώστε να προσαρμόσει την διδασκαλία του με βάση αυτές τις δυσκολίες. Η μεταμόρφωση πολλών αδύνατων μαθητών σε καλούς μαθητές και η αλλαγή στάσης τους για τα μαθηματικά ήταν το μεγάλο κέρδος και το ερέθισμα για την εργασία μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αργυράκης, Δ. Βουργάνας, Π. ,Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ., Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού, ΟΕΔΒ, 2007, σελ.64-65.

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης, Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03,σελ.36-42, ΥΠΕΠΘ, 2008
Οδηγίες για την διδακτέα ύλη και την διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007-2008, ΥΠΕΠΘ 2007