

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

Τάσος Σωτηράκης, Εκπ/κος Δ.Ε., 1^ο Γυμν. Ρόδου, asotirakis@aegean.gr
Κώστας Μαλλιάκας, Εκπ/κος Δ.Ε., 2^ο Γ.Ε.Λ. Ρόδου, kmath@otenet.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή στόχος μας είναι αφού δούμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ερμηνεύει κάποιος μια αναπαράσταση και ειδικότερα την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, βασιζόμενοι σε μια έρευνα που έγινε σε κάποιες τάξεις του Γυμνασίου να δείξουμε πώς μπορούν τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας να βοηθήσουν στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών που εμπλέκονται στις συναρτήσεις.

Εισαγωγή

Η διδασκαλία με τον παραδοσιακό τρόπο, συνήθως στοχεύει στην ενεργοποίηση της φαντασίας του μαθητή και μέσω αυτής στη κατανόηση των διαφόρων εννοιών. Οι αναπαραστάσεις που δημιουργεί ο μαθητής με αυτό τον τρόπο δεν είναι εύκολο να ελεγχθούν ως προς την ορθότητά τους στο σύνολο τους επειδή είναι νοητικές.

Η χρήση των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, οπτικοποιεί αυτές τις νοητικές αναπαραστάσεις και φέρνει στο προσκήνιο προβλήματα που προκύπτουν από τη προσπάθεια κατανόησης διαφόρων εννοιών που σε άλλη περίπτωση θα έμεναν κρυφά.

Το κυρίαρχο ερώτημα που προκύπτει είναι πώς ερμηνεύει κάποιος μια οπτική αναπαράσταση. Υπάρχουν πολλές μελέτες που εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο κάποιος μαθαίνει να ερμηνεύει οπτικές αναπαραστάσεις, με τρόπο σύμφωνο με τη πειθαρχία που απαιτούν οι μαθηματικοί.

Όταν κάποιος έρχεται αντιμέτωπος με ένα σύνολο γραμμών, σχεδιασμένων πάνω σ' ένα κομμάτι χαρτί ή στην οθόνη του υπολογιστή, πώς θα μπορέσει να ερμηνεύσει αυτή την εικόνα;

Σύμφωνα με τον Wittgenstein (1953/1997) η ερμηνεία που θα δοθεί, στηρίζεται στο υπόβαθρο των εμπειριών του κάθε ατόμου καθώς και στο βαθμό ανάπτυξης της τεχνικής από τον κάθε ένα, προκειμένου να μάθει να βλέπει και να αναγνωρίζει αντικείμενα στις διάφορες οπτικές επιδείξεις.

Ο Wittgenstein εστιάζει την ανάλυσή του σε αμφισβητούμενες εικόνες όπως η περίφημη εικόνα Πάπια/Λαγός που στηρίζεται στο πρωτότυπο του Jastrow (1900). Το απλό γραμμικό σχέδιο του Wittgenstein παρουσιάζεται στην παρακάτω Εικόνα 1 (παράθεμα στο άρθρο της Tracy Noble: Learning to see: Making sense of the mathematics of change in middle school)

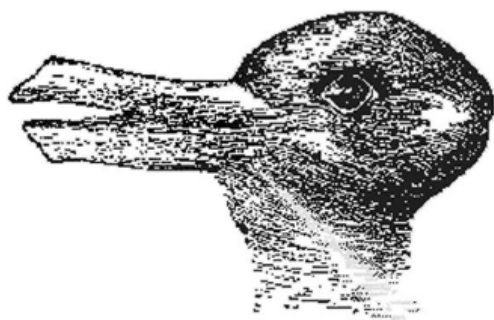


Figure 1. Duck/Rabbit drawing from (Jastrow, 1900, p. 295).

Εικόνα 1. Πάπια-Λαγός

Σ' αυτή την εικόνα μπορεί κάποιος να δει αυθόρμητα ή μετά από μια υπόδειξη, μια πάπια ή ένα λαγό ή και τα δυο ταυτόχρονα.

Θωρώ ένα πρόσωπο και ξαφνικά παρατηρώ ότι μοιάζει με κάποιο άλλο. Βλέπω ότι δεν έχει αλλάξει και εγώ το βλέπω διαφορετικό. Ονομάζω αυτή την εμπειρία «παρατήρηση μια περίπτωσης» (Wittgenstein).

Ο Wittgenstein υποστηρίζει ότι η δυνατότητα του να δει κάποιος την ολότητα μιας εικόνας ή μιας οπτικής αναπαράστασης, συνδέεται βασικά με τις εμπειρίες που έχει αποκτήσει από προηγούμενες παρόμοιες καταστάσεις.

Πάρε σαν παράδειγμα την περίπτωση του τριγώνου. Το τρίγωνο μπορεί να ειδωθεί σαν τριγωνική τρύπα, σαν στερεό, σαν γεωμετρικό σχέδιο, σαν να στέκεται στη βάση του, σαν να κρέμεται από τη κορυφή του, σαν βουνό, σαν σφήνα, σαν βέλος ή δείκτης, σαν ένα αναποδογυρισμένο αντικείμενο το οποίο έπρεπε να στέκεται στη μικρότερη πλευρά της ορθής γωνίας, σαν μισό παραλληλόγραμμο και σαν πολλά άλλα πράγματα. (Wittgenstein)

Κάθε μια από αυτές τις ερμηνείες προϋποθέτει ότι έχουμε προηγουμένως αντιμετωπίσει αυτό το οπτικό αντικείμενο ή κάποιο παρόμοιό του. Ένας θα αντιληφθεί το τρίγωνο αν προηγουμένως έχει μάθει τι είναι τρίγωνο ή το βέλος αν ξέρει από πριν τι είναι το βέλος κλπ. Ένα άτομο θα δει την πάπια ή το λαγό εάν ήδη ξέρει από πριν πώς μοιάζει μια πάπια ή ένας λαγός.

Ο Wittgenstein εξηγεί περαιτέρω ότι: *«Τώρα αυτός το βλέπει έτσι, τώρα αλλιώς, θα μπορούσε να το πει κάποιος ικανός να κάνει αυτές τις βέβαιες εφαρμογές στις εικόνες τελείως ελεύθερα».*

Προφανώς στην ανάλυση του Wittgenstein υπάρχουν δυο άκρα. Στο ένα άκρο κάποιος έχει τη δυνατότητα όχι απλώς να δει το λαγό ή τη πάπια, αλλά και να αντιληφθεί και να κατανοήσει αυτά τα δυο αντικείμενα στην εικόνα (Seeing-As). Στο άλλο άκρο, κάποιος μπορεί να διακρίνει τα δυο αυτά αντικείμενα χωρίς όμως να είναι σε θέση να τα αντιληφθεί, απλούστατα γιατί δεν ξέρει πώς μοιάζει μια πάπια ή ένας λαγός. Δεν είχε προηγούμενη εμπειρία με αυτά τα δυο αντικείμενα και επομένως δεν μπορεί να τα αντιληφθεί όταν τα δει για πρώτη φορά. Είναι λοιπόν δυνατόν να υπάρξει περίπτωση κάποιος να είναι σε θέση να διακρίνει ιδιαίτερα στοιχεία μιας εικόνας, χωρίς όμως να είναι σε θέση να ερμηνεύσει αυτά τα στοιχεία ή ακόμα και να κατανοήσει την εικόνα στο σύνολό της.

Οι δυο αυτές καταστάσεις αναφέρονται στο άρθρο της Tracy Noble με τους όρους «Seeing-As» και «Not-Seeing a Whole».

Ανάμεσα σ' αυτές τις δυο περιπτώσεις, αναγνώρισης και κατανόησης μιας εικόνας, υπάρχει μια τρίτη περίπτωση που προτάθηκε από τον Casey (1987) (παράθεμα στο άρθρο της Tracy Noble) και η οποία επιχειρεί να γεφυρώσει το κενό ανάμεσα στο Seeing-As και στο Not-Seeing a Whole.

Ο Casey δίνει το ακόλουθο παράδειγμα:

Κάθε φορά που βλέπω τη φωτογραφία του μεγάλου μου θείου Emmett, βλέπω το πρόσωπο της μητέρας μου σ' αυτόν – ιδιαίτερα, στα μαύρα μάτια του, στα εντυπωσιακά φρύδια του και στα ψηλά ζυγωματικά του. Άλλοι στην οικογένεια ισχυρίζονται ότι βλέπουν εμένα στο πρόσωπό του – καθώς επίσης και στα πνευματικά του ενδιαφέροντα και στις δραστηριότητες.

Αυτό το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι η αναγνώριση και η ερμηνεία μιας εικόνας ή μιας οπτικής αναπαράστασης μπορεί να προκύψει και από χαρακτηριστικά τα οποία δεν είναι αμιγώς οπτικά, όπως στο παραπάνω παράδειγμα τα ενδιαφέροντα και οι δραστηριότητες του ατόμου. Ο όρος που χρησιμοποιήθηκε στο άρθρο της Noble για το είδος αυτό της αναγνώρισης είναι «Recognizing-In».

Αυτή η εσωτερική αναγνώριση (Recognizing-In), όπως υποστηρίζεται και στο άρθρο της Tracy Noble, παρέχει ένα σημείο εισόδου από το οποίο μπορούμε να αρχίσουμε να ερμηνεύουμε κάτι το οποίο κατά τα άλλα μας είναι τελείως άγνωστο. Ένας μαθητής θα αρχίσει να αντιλαμβάνεται και να ερμηνεύει ένα άγνωστο σ' αυτόν σχέδιο ή μια άγνωστη οπτική αναπαράσταση όπως είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης,

ξεκινώντας από τα σημεία τα οποία του παρέχουν μια οικειότητα όπως παραδείγματος χάριν αν του θυμίζει ένα γνωστό γεωμετρικό σχήμα ή ένα προηγούμενο γνωστό γράφημα ή μια προηγούμενη εμπειρία ή

Στο σημείο αυτό ανακύπτει έντονα το πρόβλημα της έκφρασης λόγου. Μια οπτική παράσταση όταν αρχίσει να γίνεται οικεία απαιτεί και μια δυνατότητα του λόγου για την περιγραφή της. Ιδιαίτερα οι μαθηματικές αναπαραστάσεις απαιτούν την ανάπτυξη κατάλληλου λεξιλογίου που θα βοηθήσουν το μαθητή να διατυπώσει λεκτικά την οπτική αναπαράσταση με τρόπο που να είναι σύμφωνος με τη πειθαρχία που απαιτούν τα μαθηματικά. Δημιουργείται λοιπόν το ερώτημα πώς μπορεί ένας μαθητής να αναπτύξει αυτό το απαραίτητο γλωσσικό υπόβαθρο για να μπορέσει να εκφράσει τις διάφορες έννοιες που απαιτούν τα Μαθηματικά;

Σύμφωνα με τον Wittgenstein (Φιλοσοφικές έρευνες, μετ. Χριστοδουλίδης, 1977) «...κάθε λέξη έχει μια σημασία. Αυτή η σημασία είναι συνταιριασμένη με τη λέξη. Αυτή είναι το αντικείμενο για το οποίο στέκει η λέξη...»

Είναι όμως δυνατόν να ξέρουμε τη σημασία κάθε λέξης για να είμαστε σε θέση να τη χρησιμοποιήσουμε; Κατ' αρχήν πρέπει να αποσυνδέσουμε αυτά τα δυο πράγματα. Δεν είναι απαραίτητη η γνώση της σημασίας μιας λέξης, ώστε να μπορεί κάποιος να τη χρησιμοποιεί. Χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή ενός παραδείγματος από το Wittgenstein μπορώ να πω το εξής: όταν ζητάμε από το μπακάλη της γειτονιάς μας να μας πουλήσει πέντε αυγά, αυτός σίγουρα θα αντιδράσει σωστά χρησιμοποιώντας τη λέξη πέντε, χωρίς βέβαια να γνωρίζει την έννοια της λέξης πέντε. Άρα λοιπόν αυτό το οποίο πρωτίστως μαθαίνουμε σε μια γλώσσα, είναι η χρήση των λέξεων και όχι βέβαια η σημασία τους.

Σύμφωνα με το Wittgenstein :

«... Αλλά πώς ξέρει πού και πώς πρέπει να ψάξε τη λέξη «κόκκινο» και τι πρέπει να κάνει με τη λέξη «πέντε»; ... Αλλά ποια είναι η σημασία της λέξης «πέντε»; - Εδώ ούτε καν γινόταν λόγος για κάτι τέτοιο· μονάχα για το πώς χρησιμοποιείται η λέξη «πέντε»...»

Και συνεχίζει

«... Τα παιδιά μαθαίνουν να εκτελούν αυτές τις πράξεις και συνάμα να χρησιμοποιούν αυτές τις λέξεις, και να αντιδρούν με αυτό τον τρόπο στις λέξεις των άλλων....»

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Επιχειρήσαμε μια διδακτική προσέγγιση του θέματος σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου στο 1^ο Γυμνάσιο Ρόδου το σχολικό έτος 2004-2005. Η ίδια διδασκαλία πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά σε τρία διαφορετικά τμήματα του σχολείου. Η στάση των μαθητών και στα τρία τμήματα, απέναντι στην έννοια της μονοτονίας ήταν παρόμοια. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού Sketchpad στα πρώτα στάδια και μετά συνεχίστηκε με τον παραδοσιακό τρόπο. Η έννοια της μονοτονίας μιας συνάρτησης προσεγγίστηκε αποκλειστικά και μόνο με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Αυτό γιατί στόχος μας ήταν να δώσουμε τέτοια ερεθίσματα στους μαθητές που θα τους καθιστούσαν ικανούς να αποκτήσουν αυτό που προηγουμένως ονομάσαμε Seeing-As ή Recognizing-In ώστε να μπορούν σε μια οποιαδήποτε σχετική εικόνα να διακρίνουν αλλά και να κατανοήσουν την έννοια

Η έννοια της μονοτονίας είναι πολύ βασική, τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Πρέπει λοιπόν να διδάσκεται σωστά από το Γυμνάσιο ώστε ο μαθητής από μικρός να αποκτήσει εμπειρίες που θα τον βοηθήσουν στη καλύτερη αντιμετώπιση της έννοιας αυτής σε μεγαλύτερες τάξεις όπου αναπόφευκτα θα ασχοληθεί με αυτή.

Πρώτη μας φροντίδα ήταν να συνδέσουμε αρμονικά την έννοια της μονοτονίας με τον τρόπο που σχεδιάζεται η γραμμή της γραφικής παράστασης. Πιστεύουμε ότι όταν ένας μαθητής καλείται να αποφασίσει αν μια γραμμή «ανεβαίνει» ή «κατεβαίνει» ενεργοποιεί διαδικασίες, σύμφωνα με τον Wittgenstein και τον Casey, που στηρίζονται σε προηγούμενα βιώματά του ή σε ομοιότητες με κάποια βιώματα όπως για παράδειγμα

- Πόσο όμορφη ήταν η θέα που κοιτούσα από ψηλά καθώς ο δασωμένος λόφος «κατέβαινε» μέχρι τη θάλασσα.
- Πόσο κουράστηκα όταν «ανέβηκα» την ανηφόρα φορτωμένος με τη τσάντα του σχολείου.
- Τι μεγάλη ταχύτητα μπορεί να αναπτύξει ένας πεζός όταν «κατεβαίνει» ένα κατηφορικό δρόμο.

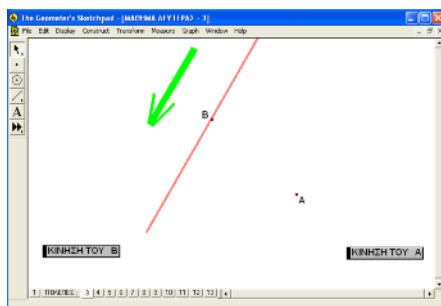
Όλες οι προηγούμενες εμπειρίες συνδέονται άμεσα ή έμμεσα με μια κίνηση που καθορίζει το «ανέβασμα» ή το «κατέβασμα» ακολουθώντας μια συγκεκριμένη τροχιά. Ακόμη και αν δεν υπάρχει κάποιο υλικό κινητό, έμμεσα δημιουργείται η αίσθηση της κίνησης καθώς το βλέμμα μας απομακρύνεται προς το βάθος του ορίζοντα. Είναι γνωστό σε όλους μας, ότι αν βρισκόμαστε στο χαμηλότερο ή στο ψηλότερο σημείο ενός επικλινούς

δρόμου, ακόμη και αν δεν έχουμε την πρόθεση να κινηθούμε σ' αυτόν, απλώς με τη κίνηση που θα έκανε το βλέμμα μας κοιτάζοντας τον θα τον χαρακτηρίζαμε σαν ανηφορικό ή σαν κατηφορικό αντίστοιχα.

Στους μαθητές αρχικά παρουσιάστηκε ένα σημείο A το οποίο κινούμενο

στην οθόνη του υπολογιστή (σύμφωνα με τη φορά του βέλους στη διπλανή εικόνα), με το ίχνος του σχημάτιζε μια τροχιά που ήταν ευθεία.

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα αν μπορούσαν να δώσουν ένα από τους επόμενους χαρακτηρισμούς στη μορφή της γραμμής που σχημάτιζε το A.

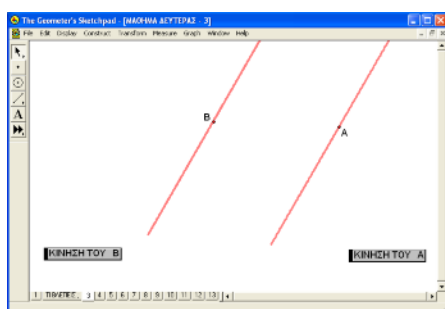


Οι επιλογές ήταν

- Η γραμμή ανεβαίνει
- Η γραμμή κατεβαίνει
- Η γραμμή μένει σταθερή
- Δεν έχω αρκετά στοιχεία για να αποφασίσω

Η απάντηση των μαθητών ήταν ομόφωνη ότι η γραμμή ανεβαίνει.

Αφού σταμάτησε η κίνηση του σημείου A και διαγράφηκε το ίχνος της γραμμής που δημιούργησε, μπήκε σε κίνηση το σημείο B το οποίο κινήθηκε σύμφωνα με τη φορά που δείχνει το βέλος στη διπλανή εικόνα.



Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ίδιο ερώτημα σχετικά με το χαρακτηρισμό της γραμμής. Σχεδόν στο σύνολο τους απάντησαν ότι η γραμμή κατεβαίνει. Ελάχιστοι μαθητές είχαν αμφιβολία και δεν έδωσαν απάντηση.

Στη συνέχεια και τα δυο σημεία μπήκαν μαζί σε κίνηση φανερώνοντας ταυτόχρονα και τις δυο γραμμές που ήταν παράλληλες.

Ζητήσαμε από τους μαθητές να μας εξηγήσουν πώς μπορεί από δυο παράλληλες γραμμές να ισχυρίζονται ότι η μια ανεβαίνει και η άλλη κατεβαίνει. Η αμηχανία των μαθητών ήταν γενική γιατί διαπίστωσαν ότι δεν μπορούσαν να δώσουν πειστική απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Πιστεύουμε ότι αυτή τη στιγμή οι μαθητές είχαν περιέλθει σε μια κατάσταση που θα την παρομοιάζαμε με αυτό που στην εισαγωγή του άρθρου χαρακτηρίσαμε σαν κατάσταση Not-Seeing a Whole. Πράγματι ήταν σε θέση να διακρίνουν τα ξεχωριστά συστατικά της εικόνας (δυο ευθείες, δυο σημεία) αλλά δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσουν το ερώτημα που τους τέθηκε με τη βοήθεια αυτού που έβλεπαν, γιατί δεν ήξεραν αυτό ακριβώς που τους ζητούσε ο καθηγητής τους. Δηλαδή πώς φαίνεται μια γραμμή που ανεβαίνει ή μια γραμμή που κατεβαίνει. (Με άλλα λόγια έβλεπαν τη πάπια αλλά δεν ήξεραν ότι ήταν πάπια)

Συμφώνησαν όμως όλοι οι μαθητές ότι η κίνηση των σημείων Α και Β δεν μπορούσε από μόνη της να χρησιμοποιηθεί για να δώσει απάντηση στο ερώτημα αν μια γραμμή ανεβαίνει, κατεβαίνει ή μένει σταθερή.

Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε τους δόθηκε το παρακάτω σχήμα με το ερώτημα αν βλέπουν κάποια ομοιότητα στον τρόπο κίνησης των σημείων Γ και Δ όταν αυτά κινούνται το καθένα πάνω στην ευθεία που ανήκει, με φορά τη φορά που δείχνουν τα βέλη α και β.

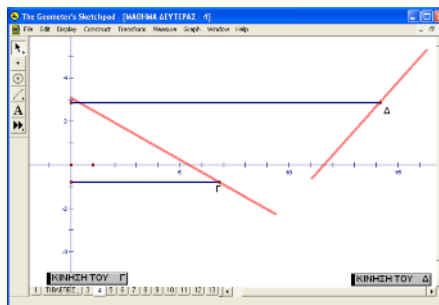
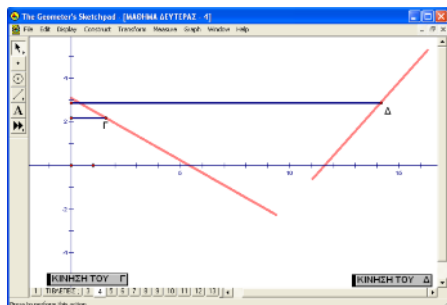


Το ερώτημα αυτό και στα τρία τμήματα που έγινε η διδασκαλία έμοιαζε άλυτο. Κανείς από τους μαθητές δεν μπορούσε να διακρίνει ότι η κίνηση τόσο του Γ όσο και του Δ γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το χ πάντα να μεγαλώνει.

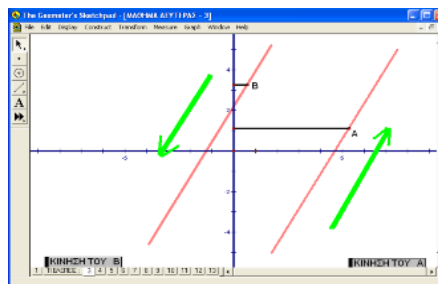
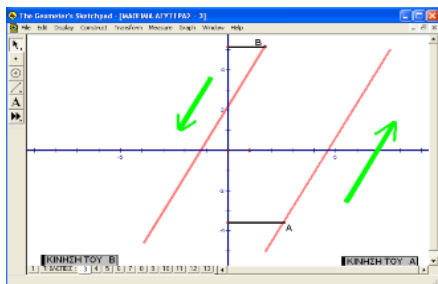
Για να γίνει αυτό κατανοητό στους μαθητές σχηματίσαμε τις κάθετες από

τα σημεία Γ και Δ προς τον άξονα $\psi\psi$ ώστε να οπτικοποιήσουμε την τετμημένη των σημείων Γ και Δ. Μετά θέσαμε σε κίνηση τα σημεία Γ και Δ οπότε ήταν πλέον εύκολη η διαπίστωση ότι η τετμημένη και των δυο σημείων μεγάλωνε.

Στις δυο παρακάτω εικόνες μπορείτε να δείτε δυο στιγμιότυπα για το σημείο Γ στα οποία φαίνεται καθαρά η αύξηση της τετμημένης του, όταν αυτό βρίσκεται σε δυο διαφορετικές θέσεις της τροχιάς του.



Μετά από αυτή τη σημαντική παρατήρηση ήμασταν σε θέση να αντιμετωπίσουμε ξανά το αρχικό πρόβλημα με τις δυο παράλληλες ευθείες που σχηματιστήκαν από την κίνηση των σημείων A και B την αρχή του μαθήματος. Θα προσπαθούσαν τώρα οι μαθητές να δουν ποιο ήταν το λάθος στη σκέψη τους και χαρακτήριζαν τις δυο παράλληλες ευθείες κάθε φορά με διαφορετικό τρόπο, όταν συνέδεαν τον χαρακτηρισμό με την κίνηση ενός σημείου πάνω σ' αυτές. Εφοδιάσαμε το αρχικό σχέδιο με ένα σύστημα συντεταγμένων και σχηματίσαμε τις τετμημένες των σημείων A και B. Θέσαμε τα σημεία A και B σε κίνηση και εύκολα τώρα οι μαθητές παρατήρησαν ότι δεν υπήρχε ομοιομορφία στη κίνηση των δυο σημείων. Πράγματι το B κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε η τετμημένη του συνεχώς να ελαττώνεται, ενώ το A κινείται με τρόπο που η τετμημένη του συνεχώς αυξάνεται. Στις παρακάτω εικόνες μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί αυτό.

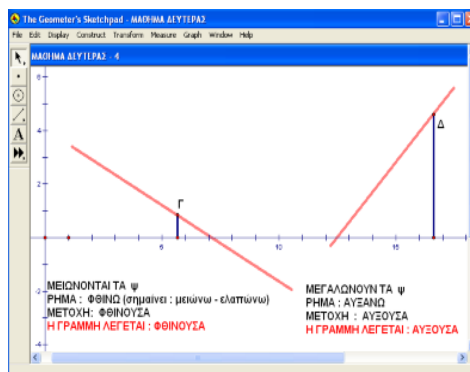
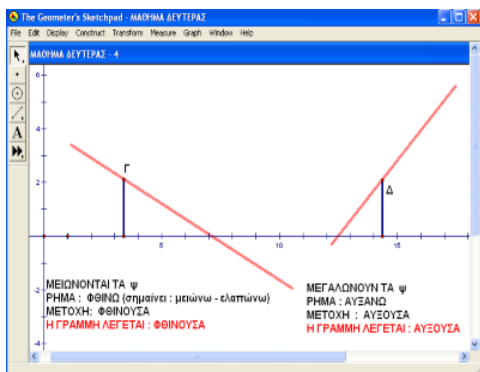


Τι ήταν λοιπόν λάθος στην αρχική παρατήρηση;

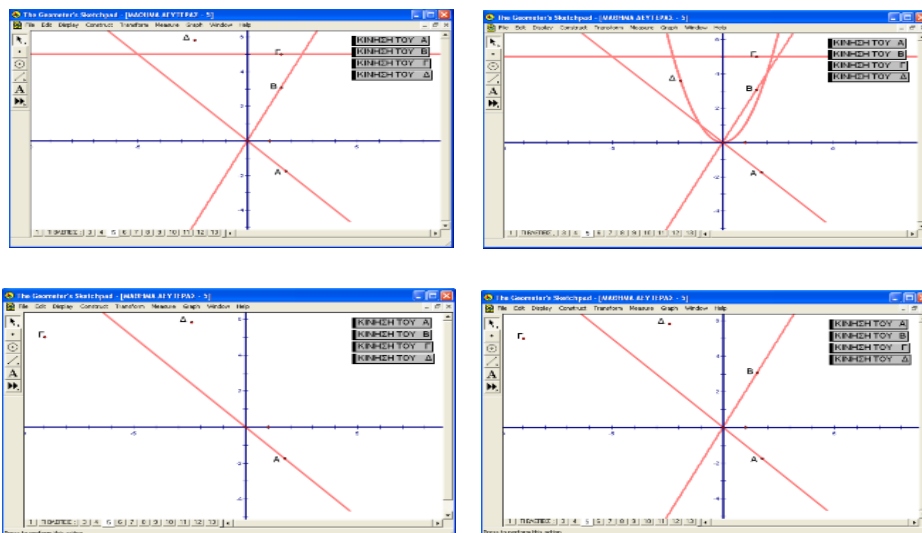
Τώρα αρκετοί μαθητές ήταν σε θέση να δώσουν την απάντηση. Δεν διαβάζαμε τις δυο εικόνες με τον ίδιο τρόπο. Την μια τη διαβάζαμε καθώς το x ελαττωνόταν, δηλαδή από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ την άλλη την διαβάζαμε καθώς το x αυξανόταν, δηλαδή από αριστερά προς τα δεξιά. Μετά από συζήτηση καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως οι εικόνες πρέπει να διαβάζονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο όπως και τα κείμενα του γραπτού

λόγου. Η διαπίστωση αυτή προκάλεσε μεγάλη έκπληξη στους μαθητές. Στο σημείο αυτό ενημερώθηκαν από τον διδάσκοντα ότι στο κόσμο των μαθηματικών ήδη από πολύ καιρό έχει αποφασιστεί οι εικόνες που αφορούν τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων να διαβάζονται πάντα από τα αριστερά προς τα δεξιά. Φτάσαμε λοιπόν στο σημείο να αναρωτηθούμε: «ωραία, θα τη διαβάζουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τι είναι όμως αυτό που θα διαβάζουμε;»

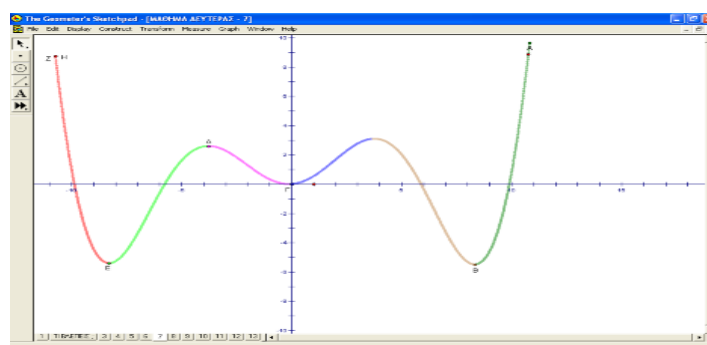
Στο σημείο αυτό δεν ήταν δύσκολο να οδηγηθεί η σκέψη τους προς το ψ . Επιστρέψαμε στην οθόνη που περιείχε τα σημεία Γ και Δ . Εφοδιάστηκε το σχήμα με τις κατάλληλες αποστάσεις από τον άξονα $\chi'\chi$ ώστε να οπτικοποιήσουμε την τεταγμένη των σημείων Γ και Δ και θέσαμε σε κίνηση τα δυο σημεία. Εύκολα διαπιστώθηκε από τους μαθητές ότι καθώς διαβάζουμε την εικόνα από τα αριστερά προς τα δεξιά στην περίπτωση του Γ το ψ συνεχώς ελαττώνεται, ενώ στη περίπτωση του Δ το ψ συνεχώς αυξάνεται. Στο σημείο αυτό δόθηκαν οι ονομασίες των γραμμών ως προς τη μονοτονία τους. Στις δυο παρακάτω εικόνες βλέπουμε δυο στιγμιότυπα που επιβεβαιώνουν αυτή τη παρατήρηση και τις ορολογίες της μονοτονίας.



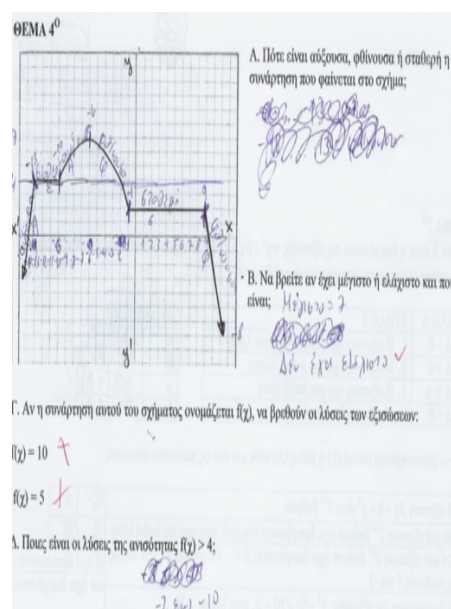
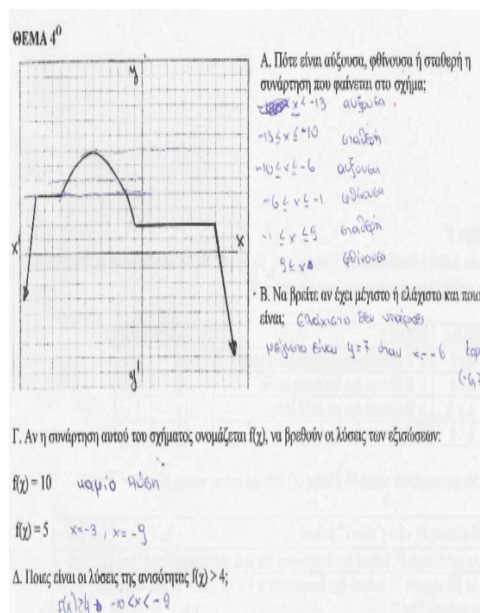
Πρέπει να διευκρινισθεί ότι η λέξη μονοτονία δεν δόθηκε στους μαθητές από την αρχή αλλά μετά τη τρίτη ώρα διδασκαλίας του θέματος. Στους μαθητές δεν δόθηκε επίσης σκόπιμα η έννοια της σταθερής συνάρτησης γιατί ακολούθησε η επίδειξη μιας άσκησης με τη βοήθεια του υπολογιστή. Παρουσιάστηκαν διαδοχικά στους μαθητές τα παρακάτω σχήματα και ζητήθηκε από αυτούς να χαρακτηρίσουν τη μονοτονία της κάθε γραμμής.



Ο χαρακτηρισμός για τις γραμμές των A και B ήταν επιτυχής από όλους. Για το σημείο Γ δια βοής οι μαθητές είπαν ότι η κίνησή του είναι σταθερή. Στο σημείο Δ υπήρξε έντονος προβληματισμός και πρέπει να περιήλθαν σε μια κατάσταση Not-Seeing a Whole. Έβλεπαν ότι η παραβολή ήταν τμηματικά μονότονη αλλά δεν μπορούσαν να το εκφράσουν λεκτικά. Πιστεύουμε λοιπόν ότι σε μια κατάσταση Not-Seeing a Whole μπορεί να οδηγηθεί κάποιος όχι μόνο στη περίπτωση που ενώ βλέπει τα ξεχωριστά στοιχεία της οπτικής επίδειξης δεν μπορεί να αντιληφθεί το όλο, αλλά ακόμα και στη περίπτωση που δεν έχει τη δυνατότητα να εκφράσει προφορικά αυτό που αντιλαμβάνεται οπτικά. Το μάθημα της πρώτης ώρας ολοκληρώθηκε με την επίδειξη της παρακάτω γραφικής παράστασης στην οθόνη του υπολογιστή και του χαρακτηρισμού της μονοτονίας της.



Στη δεύτερη ώρα διδασκαλίας το ενδιαφέρον μας επικεντρώθηκε στον τρόπο έκφρασης τόσο γραπτής όσο και προφορικής της μονοτονίας που παρουσιάζει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Το θέμα αυτό δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές, σε σημείο μάλιστα που κάποιοι δεν το ξεπέρασαν ούτε μέχρι το διαγώνισμα που έγινε περίπου μιάμιση εβδομάδα μετά από την πρώτη διδασκαλία στο αντικείμενο αυτό. Η δυσκολία που κυρίως εμφάνισαν οι μαθητές ήταν αδυναμία να συνδυάσουν ένα συγκεκριμένο τμήμα μονοτονίας με το διάστημα στο οποίο συμβαίνει. Δηλαδή συγκεκριμένα τμήματα της γραφικής παράστασης να τα αντιστοιχίσουν με το διάστημα που τους αντιστοιχεί. Αυτό το πρόβλημα φάνηκε ακόμη πιο έντονο όταν αρχίσαμε να λύνουμε γραφικά εξισώσεις και ανισώσεις. Στις ασκήσεις αυτού του είδους τα λάθη των μαθητών αυξήθηκαν αισθητά. Οι μαθητές που χαρακτηρίζονται επιμελείς ξεπέρασαν τις δυσκολίες αυτές πολύ γρήγορα, ενώ οι μαθητές που δεν είναι επιμελείς δεν κατόρθωσαν στο διάστημα της μιάμισης εβδομάδας να αφομοιώσουν τις νέες έννοιες σε τέτοιο βαθμό ώστε να μπορούν να τις εκφράζουν προφορικά ή γραπτά. Αρκετοί από αυτούς όμως έφτασαν στο σημείο να τις αντιλαμβάνονται. Στα παρακάτω σχήματα μπορείτε να δείτε τις απαντήσεις ενός «καλού» μαθητή στο πρώτο και ενός «όχι καλού» στο δεύτερο. Στη πρώτη περίπτωση είναι φανερό ότι ο μαθητής αντιλαμβάνεται την έννοια χωρίς όμως να μπορεί να την εκφράσει με μαθηματική πειθαρχία.



Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα

Απάντησαν σωστά αναφέροντας και τα διαστήματα μονοτονίας	36	53,73 %
Απάντησαν χωρίς να αναφέρουν τα διαστήματα μονοτονίας	15	22,39 %
Δεν απάντησαν	16	23,88 %
Σύνολο μαθητών	67	100%

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η έννοια της μονοτονίας είναι δύσκολη για μαθητές του Γυμνασίου αλλά αξίζει να γίνεται εκεί το πρώτο βήμα για την κατανόηση της και η χρήση περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στον τομέα αυτό.

Βιβλιογραφία

- 1.Wittgenstein, L. (1977) Φιλοσοφικές έρευνες. (Π. Χριστοδουλίδης, μετ.). Εκδόσεις Παπαζήση
- 2.Wittgenstein, L. Παρατηρήσεις για τη θεμελίωση των Μαθηματικών (Κ. Κωβαίος, μετ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- 3.Wittgenstein, L. Φιλοσοφική γραμματική (Κ. Κωβαίος, μετάφ.). Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας
- 4.Polya, G. Πώς να το λύσω (Λ. Σιαδήμας, μετάφ.).Εκδόσεις Σπηλιώτη
- 5.Goldin,G. & Janvier, C. “Representations and the Psychology of Mathematics Education” Journal of Mathematics behavior (the)
- 6.Greer,B.& Harel,G. “The role of isomorphisms in Mathematics cognition” Journal of Mathematics behavior (the)
- 7.Noble,T., Nemirovsky, R. Dimatra, C. & Wright, T. “Learning to see: Making sense of the Mathematics of change in middle school.” International Journal of computers for Mathematical learning
- 8.Casey, E.S. (1987) Remembering. A phenomenological study. Bloomington and Indianapolis, I.N. Indiana University Press.
- 9.Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Οδηγίες Παιδαγωγικού Ινστιτούτου 2002-2003, τεύχος Β΄, Αθήνα,ΟΕΔΒ.