

## ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Οι μαθητές μπορούν να δώσουν τιμές στο  $n$  και να παρατηρήσουν ότι ισχύει  $s_n \leq R_n \leq S_n$

Δίνοντας την πληροφορία ότι αυτό που διαισθητικά καταλαβαίνουμε αποδεικνύεται, αλλά δεν είναι η απόδειξη αντικείμενο μελέτης στο Λύκειο, δηλαδή ότι το  $s_n$  και το  $S_n$  έχουν το ίδιο όριο, από το  $\Theta$ . Παρεμβολής προκύπτει ότι το ίδιο όριο έχει και το άθροισμα Riemann και έτσι ορίζουμε ως ορισμένο

ολοκλήρωμα το 
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$$

και το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής των  $\xi_i$ , γεγονός που μας επιτρέπει να κάνουμε την παρακάτω απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος ολοκληρωτικού λογισμού.

## Κατασκευή ορισμένου ολοκληρώματος

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα γράφουμε την εντολή: **Ολοκλήρωμα[f, α, β]**

## Κατασκευή του κάτω αθροίσματος

Για να κατασκευάσουμε τα ορθογώνια του κάτω αθροίσματος και ταυτόχρονα για τον υπολογισμό του κατωτέρου αθροίσματος γράφουμε: **s=ΚάτωΑθροισμα[f,α,β,n]**

## Κατασκευή του πάνω αθροίσματος

Για να κατασκευάσουμε τα ορθογώνια του πάνω αθροίσματος και ταυτόχρονα για τον υπολογισμό του ανωτέρου αθροίσματος γράφουμε: **S= ΠάνωΑθροισμα [f,α,β,n]**

## Κατασκευή της διαμέρισης

Για να βρείτε τις τετμημένες  $x$  των σημείων της διαμέρισης που δίνονται από τον τύπο:  $x_k = a + \frac{\beta - \alpha}{n}$

γράψτε στο πεδίο εισαγωγής του geogebra **χ= Ακολουθία[α + κ \*(β - α) / n, κ, 0, n]**

Τα σημεία στο σχήμα θα τα κατασκευάσετε γράφοντας:

**Σ=Ακολουθία[(Στοιχείολίστας[χ,κ],0),κ,1,n+1]**

## Κατασκευή του αθροίσματος Riemann

Για την κατασκευή λίστας τυχαίων σημείων στο κάθε υποδιάστημα χρησιμοποιούμε τον τύπο

$\xi_i = x_{i-1} + \text{random}() \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}$  αφού η συνάρτηση random παράγει τυχαίο αριθμό στο διάστημα  $[a, \beta]$ .

Για τη δημιουργία τους στο Geogebra γράφουμε:

**ξ=Ακολουθία[ΣτοιχείοΛίστας[χ,κ]+random()\*(β-α)/n,κ,1,n]**

Για να δούμε τα σημεία αυτά πάνω στον άξονα γράφουμε:

**Ξ=Ακολουθία[(ΣτοιχείοΛίστας[ξ,κ],0),κ,1,n]**

Για την ακολουθία των τιμών: **F=Ακολουθία[f(ΣτοιχείοΛίστας[ξ,κ]),κ,1,n]**

Για την δημιουργία των ορθογωνίων:

**Πολ=Ακολουθία[Πολύγωνο[(ΣτοιχείοΛίστας[χ, κ], 0), (ΣτοιχείοΛίστας[χ, κ], ΣτοιχείοΛίστας[F, κ]), (ΣτοιχείοΛίστας[χ, κ + 1], ΣτοιχείοΛίστας[F, κ]), (ΣτοιχείοΛίστας[χ, κ + 1], 0)], κ, 1, n]**

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος γράφουμε: **R=ΑθροισμαΣτοιχείωνΛίστας[Πολ]**