Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών-Ειδικό μέρος

Ειδικότητα ΠΕ03

Συγγραφική ομάδα
Στυλιανός Ιωάννου
Αθανάσιος Σκούρας
Νικολέτα Ξένου
Κων/νος Γαβρίλης
Ελισάβετ Δαλιεράκη
Στέφανος Κεϊσογλου,
Εμμανουήλ Νικολουδάκης,
Γεώργιος Πολύζος
Βασίλειος Σακελλάρης
Χαράλαμπος Τουμάσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3.8 ΧΡΗΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η χρήση του λογισμικού Power Point στην διδασκαλία των μαθηματικών

Βασικές αρχές αξιοποίησης παρουσιάσεων p.p.t.

Το λογισμικό παρουσίασης power point παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον διδάσκοντα, αλλά και τους μαθητές, με πολλαπλούς τρόπους.

Αν θα έπρεπε να αναφέρουμε τις δυνατότητες που το καθιστούν αξιοποιήσιμο τότε θα εστιάζαμε αφενός στην δυνατότητα κίνησης (animation) και αφετέρου στην δυνατότητα δημιουργίας συνδέσμων (links) με άλλες παρουσιάσεις, αρχεία λογισμικών, αρχεία video κ.τ.λ.

Οι βασικές αρχές για την αξιοποίηση του λογισμικού αυτού στην διδακτική πράξη στηρίζονται σε αυτές που αναφέρονται στην χρήση οποιουδήποτε λογισμικού γενικής χρήσης και επιπλέον:

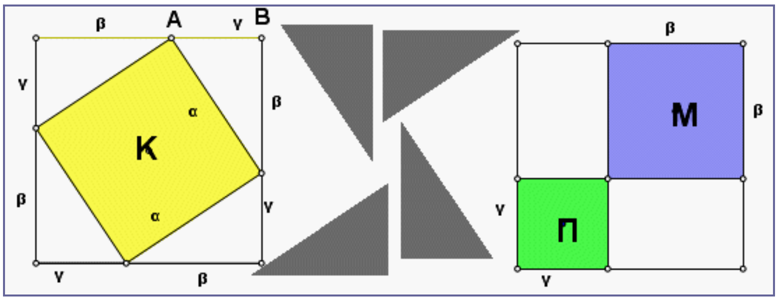
- ✓ Θα πρέπει να αποφεύγονται τα μεγάλα κείμενα, οι μακροσκελείς περιγραφές και η πληθώρα των πράξεων και των συμβολικών παραστάσεων.
- ✓ Τα αναγραφόμενα στην διαφάνεια θα πρέπει να αποτελούν σύνοψη των όσων παρουσιάζει ο διδάσκων.
- ✓ Η υπερβολική χρήση χρώματος, κίνησης, σκίτσων που δεν έχουν σχέση με το αντικείμενο, ήχων μουσικής κ.τ.λ. μπορεί να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές και δεν συμβάλλουν στην δημιουργία μιας ουσιαστικής παρουσίασης.
- ✓ Η δομή και η ροή των διαφανειών θα πρέπει να προέρχεται από έναν προσεκτικό σχεδιασμό που θα έχει στόχο την ανάλυση και την οπτικοποίηση του γνωστικού αντικειμένου, την κινητοποίηση των μαθητών και την διαπραγμάτευση.
- ✓ Ο ρόλος του διδάσκοντα σε μία παρουσίαση p.p.t είναι αυτή του ενορχηστρωτή της διαπραγμάτευσης την οποία προκαλεί το περιεχόμενο της παρουσίασης.

Στην συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα υποστήριξης της διδασκαλίας με το λογισμικό power point.

Παράδειγμα: Διδασκαλία της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος

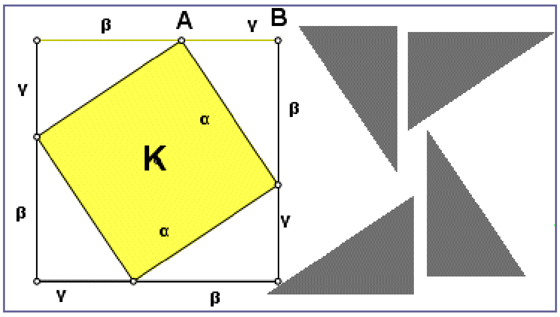
Η κατασκευή

- Ο διδάσκων ετοιμάζει με ένα γεωμετρικό λογισμικό τα παρακάτω γεωμετρικά αντικείμενα



Εικόνα 1

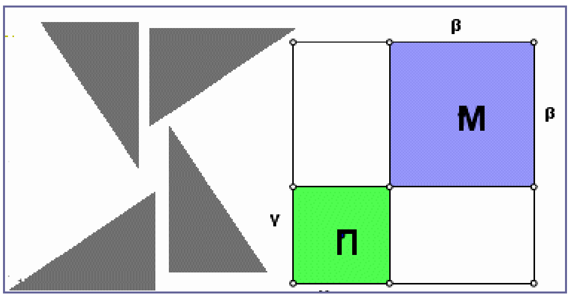
- Στην συνέχεια μεταφέρει ένα προς ένα με copy-paste το πρώτο μεγάλο τετράγωνο και τα σκούρα τρίγωνα που βρίσκονται έξω από αυτό σε μία διαφάνεια της παρουσίασης.



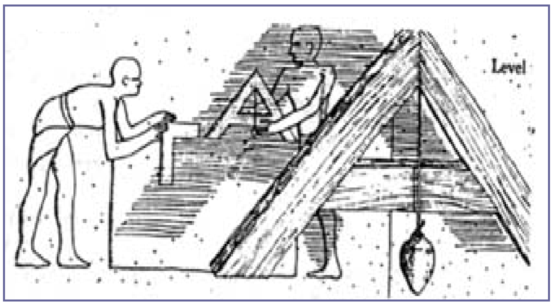
Εικόνα 2

- Σε κάθε ένα από τα σκούρα τρίγωνα της διαφάνειες δίνει κίνηση για να επικαλύψουν τα λευκά τρίγωνα του μεγάλου τετραγώνου.

- Κατασκευάζει δεύτερη διαφάνεια με copy-paste του δεύτερου μεγάλου τετραγώνου και των σκούρων τριγώνων.



- ✓ Σε κάθε ένα από τα σκούρα τρίγωνα της διαφάνειες δίνει κίνηση για να επικαλύψουν τα λευκά ορθογώνια του μεγάλου τετραγώνου.
- ✓ Κατασκευάζει επιπλέον διαφάνειες στις οποίες υπάρχει και από μία ή περισσότερες ερωτήσεις που έχουν σχέση με το σχήμα. Ακόμη κατασκευάζει διαφάνειες με ιστορικές πληροφορίες και εικόνες για το Πυθαγόρειο θεώρημα.



Εικόνα 3

- ✓ Προσθέτει σε επιλεγμένες διαφάνειες έναν σύνδεσμο ο οποίος ανακαλεί την κατάλληλη διαφάνεια με τα σχήματα Εδώ θα είχε ενδιαφέρον να δημιουργήσει ο διδάσκων σύνδεσμο με το ίδιο το αρχείο του λογισμικού, το οποίο θα το ανακαλέσει και θα το χειριστεί δυναμικά.

Η υλοποίηση

- ✓ Ο διδάσκων αρχίζει την παρουσίαση με μία ιστορική αναδρομή η οποία αναλύεται σε δύο ή τρεις διαφάνειες, στις οποίες παρουσιάζει εικόνες του τρόπου με τον οποίο οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν το θεώρημα για μετρήσεις (αρπεδονάπτες).
- ✓ Μέσα από τις διαφάνειες αυτές αναφέρεται και στις αποδείξεις του Πυθαγορείου και σημειώνει ότι η απόδειξη που θα ακολουθήσει αποδίδεται στους Κινέζους.
- ✓ Στην πρώτη διαφάνεια με τα σχήματα ζητά κατ αρχήν από τους μαθητές να εκφράσουν το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου χρησιμοποιώντας το κατάλληλο γράμμα.
- ✓ Ενεργοποιώντας την κίνηση μεταφέρονται τα σκούρα ορθογώνια τρίγωνα στα λευκά. Ο διδάσκων ζητά σχολιασμό από τους μαθητές για την σχέση των εμβαδών των γεωμετρικών αντικειμένων που προβάλλονται.
- ✓ Η διαφάνεια αλλάζει και προβάλλεται η επόμενη με τα σχήματα και ένα ερώτημα προς τους μαθητές για την σχέση του τετραγώνου της διαφάνειας προς το τετράγωνο της προηγούμενης διαφάνειας.

- ✓ Ενεργοποιώντας την κίνηση μεταφέρονται τα σκούρα ορθογώνια τρίγωνα στα λευκά ορθογώνια. Ο διδάσκων ζητά σχολιασμό από τους μαθητές για την σχέση των εμβαδών των γεωμετρικών αντικειμένων που προβάλλονται.
- ✓ Τέλος προβάλλεται η ερώτηση για την σχέση του κίτρινου τετραγώνου Κ και των Μ, Π.

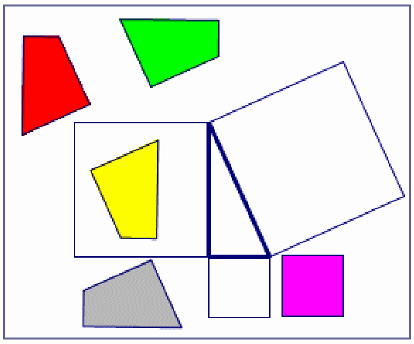
Η επανακατασκευή

Ο διδάσκων δίνει σε μαθητές, οι οποίοι γνωρίζουν την χρήση του λογισμικού power point, το αρχείο με τις διαφάνειες και τους ζητά να κάνουν κατάλληλες επεμβάσεις ώστε η παρουσίαση να αφορά σε μία άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου, δικής τους επιλογής.

Προφανώς έχει ενημερώσει τους μαθητές για το πλήθος και τις μορφές των αποδείξεων και τους παρέχει τεχνική ή οποιασδήποτε άλλης μορφής υποστήριξη για την υλοποίηση.

Μία πρόταση ανακατασκευής είναι και αυτή που αφορά στην απόδειξη που αποδίδεται στους Ινδούς.

Εδώ οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το έτοιμο αρχείο του γεωμετρικού λογισμικού και μετά την δημιουργία της κατάλληλης διαφάνειας θα δώσουν κίνηση στα έγχρωμα τετράπλευρα.



Εικόνα 4

Τέλος θα ακολουθήσει κατάλληλη τροποποίηση των ερωτήσεων στις διαφάνειες.

Η χρήση του λογισμικού Excel στη διδασκαλία των μαθηματικών

Προγράμματα λογιστικού φύλλου (spreadsheets) όπως το Excel μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαίδευση των μαθητικών με ποικίλους τρόπους. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην μοντελοποίηση μαθηματικών σχέσεων, στην αναζήτηση μαθηματικών σχέσεων μεταξύ αριθμητικών δεδομένων, στη στατιστική επεξεργασία δεδομένων κ.ά.

Το βασισμένο σε λογιστικό φύλλο (spreadsheet) μαθησιακό περιβάλλον, μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για τη μάθηση των μαθηματικών καθώς επιτρέπει στον χρήστη να χρησιμοποιεί εικονικά, αριθμητικά και γραφικά εργαλεία με τα οποία ιδέες των μαθηματικών μπορούν να παρουσιαστούν με σημαντικούς τρόπους.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αναφέρονται σ’ αυτό το θέμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:Κατασκευή μοντέλων

Με τον όρο αυτό εννοούμε την αναπαράσταση μιας αφηρημένης μαθηματικής δομής μέσω των στοιχείων ενός εργαλείου βασισμένου στο λογιστικό φύλλο (spreadsheet).

ΘΕΜΑ: Μπορείτε να βρείτε και να αναπαραστήσετε τριάδες αριθμών που επαληθεύουν το Πυθαγόρειο θεώρημα (Πυθαγορικές τριάδες).

Με τη βοήθεια του λογιστικού φύλου η αναζήτηση και αναπαράσταση τριάδων αριθμών που ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να γίνει με ενδιαφέροντες τρόπους.

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

Η διαπραγμάτευση του θέματος αυτού εξυπηρετεί τους εξής γνωστικούς στόχους:

- ✓ Την διερεύνηση της ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ

- ✓ Η χρήση των δυνατοτήτων του λογιστικού φύλλου στην μοντελοποίηση μαθηματικών σχέσεων

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Φάση 1:

Οι μαθητές μπορούν να πληκτρολογήσουν σε δυο κελιά του λογιστικού φύλλου δυο αριθμούς και σε ένα τρίτο κελί να ορίσουν τη σχέση του πυθαγορείου θεωρήματος. Για παράδειγμα αν έχουν πληκτρολογήσει δυο αριθμούς στα κελιά Α2 και Β3 μπορούν στο κελί Γ4 να ορίσουν τη σχέση sqrt(A2^2+B3^2). Στο κελί Γ4 θα πάρουν το αποτέλεσμα της πράξης $\sqrt{\mathrm{A2}^2+\mathrm{B3}^2}$ που έχουν ορίσει. Στη συνέχεια μπορούν να μεταβάλλουν τους αριθμούς που έχουν πληκτρολογήσει στα κελιά Α2 και Β3 και να παρατηρούν το αποτέλεσμα στο κελί Γ4.

Στην εικόνα που ακολουθεί έχουμε ορίσει έναν πίνακα 10Χ10 στα κελιά του οποίου έχουμε ορίσει την παραπάνω σχέση. Πληκτρολογώντας στα κελιά εισαγωγής τους δέκα ακέραιους αριθμούς μπορούμε να παρατηρούμε σε ποια κελιά το αποτέλεσμα είναι ακέραιος αριθμός. Ελέγχοντας τα αποτελέσματα ως προς την διαγώνιο του τετραγώνου μπορούμε να παρατηρήσουμε

1. ότι τα συμμετρικά ως προς την διαγώνιο κελιά έχουν το ίδιο αποτέλεσμα και

2. Στα για τους συνδυασμούς των 10Χ10 πρώτων φυσικών αριθμών μόνο δυο ζεύγη μπορούν να δώσουν αποτέλεσμα ακέραιο αριθμό. Τα ζεύγη (3,4) και (6,8).

		Το μήκος της μιας κάθετης πλευράς									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς	1	1,41	2,24	3,16	4,12	5,10	6,08	7,07	8,06	9,06	10,05
	2	2,24	2,83	3,61	4,47	5,39	6,32	7,28	8,25	9,22	10,20
	3	3,16	3,61	4,24	5,00	5,83	6,71	7,62	8,54	9,49	10,44
	4	4,12	4,47	5,00	5,66	6,40	7,21	8,06	8,94	9,85	10,77
	5	5,10	5,39	5,83	6,40	7,07	7,81	8,60	8,94	10,30	11,18
	6	6,08	6,32	6,71	7,21	7,81	8,49	9,22	10,00	10,82	11,66
	7	7,07	7,28	7,62	8,06	8,60	9,22	9,90	10,63	11,40	12,21
	8	8,06	8,25	8,54	8,94	9,43	10,00	10,63	15,03	12,04	12,81
	9	9,06	9,22	9,49	9,85	10,30	10,82	11,40	12,04	12,73	13,45
	10	10,05	10,20	10,44	10,77	11,18	11,66	12,21	12,81	13,45	14,14

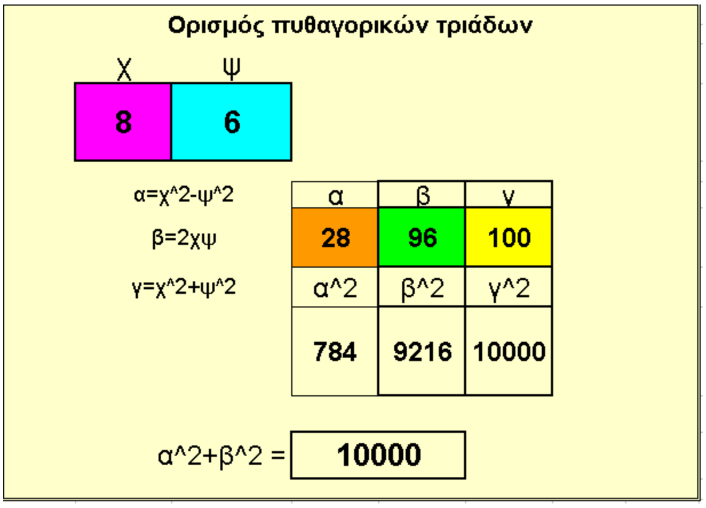
Πίνακας 1

Φάση2:

Οι μαθητές διερευνούν αν οι σχέσεις $α=χ^2-ψ^2$, $β=2χψ$, $γ=χ^2+ψ^2$ ορίζουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου για κάθε τιμή των χ και ψ.

Ορίσουν δυο κελιά για τις τιμές των χ και ψ. Ορίζουν τα κελιά α, β και γ για τις τιμές των τριών σχέσεων.

Ορίζουν, στα επόμενα κελιά τα τετράγωνα των α, β και γ και τέλος ορίζουν σε ένα κελί τη τιμή $α^2+β^2$.



Εικόνα 1

Οι μαθητές μπορούν να πληκτρολογούν διάφορες τιμές στα κελιά των χ και ψ και να παρατηρούν τη σχέση των αποτελεσμάτων των $α^2+β^2$ με το $γ^2$.

Φάση 3:

Οι μαθητές ορίζουν μια διαδικασία γραφικής αναπαράστασης των ορθογωνίων τριγώνων που ορίζονται από τους αριθμούς α, β και γ όταν αυτοί επαληθεύουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

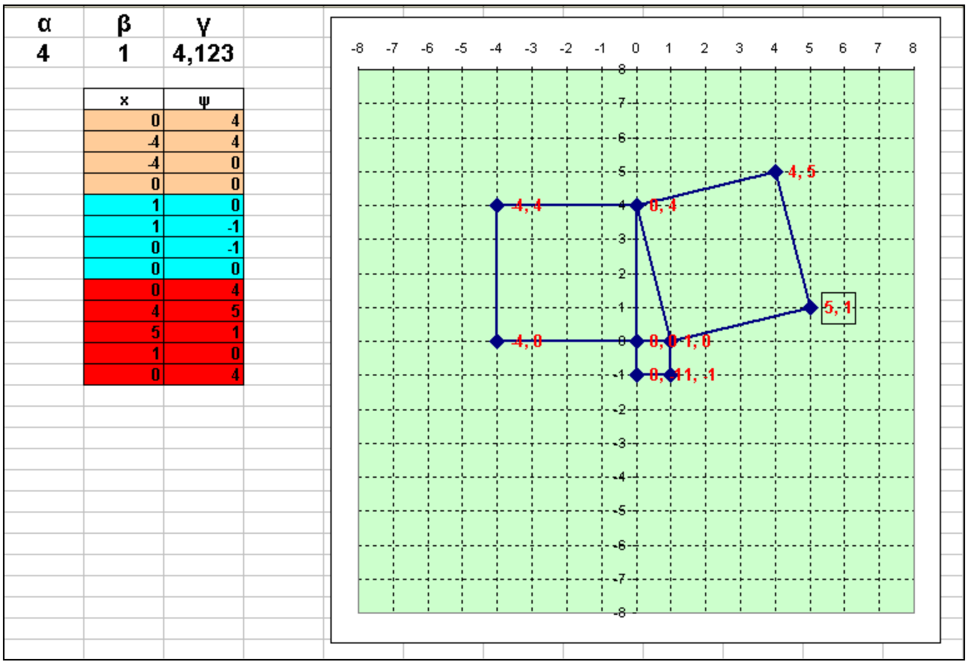
Κατ' αρχήν ορίζουν δυο κελιά με τους αριθμούς α και β και ένα τρίτο με το αποτέλεσμα $\sqrt{α^2+β^2}$. Στη συνέχεια ορίζουν διαδοχικά κελιά σε δυο στήλες τα οποία ανά δυο κάθε γραμμής περιέχουν τις εξής εγγραφές:

(0,α), (α,α), (-α,0), (0,0), (β,0), (β, -β), (0, -β), (0,0), (0,α), (α, α+β), (α+β,β), (β,0) και (0,α).

Στη συνέχεια επιλέγονται οι δυο στήλες και η γραφική αναπαράσταση τύπου ΧΨ (Scatter).

Ο χρήστης μπορεί να επεξεργαστεί τη γραφική παράσταση ώστε να μπορεί να εμφανιστούν καθαρά το ορθογώνιο τρίγωνο και τα τετράγωνα που έχουν πλευρές τις α, β και γ.

Ακόμα μπορεί να μεταβάλλει τις τιμές στα κελιά των α και β και να παρατηρεί το ορθογώνιο και τα τετράγωνα που προκύπτουν καθώς και τα εμβαδά τους.



Εικόνα 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Λύση προβλήματος

Το λογιστικό φύλλο είναι κατάλληλο για να ορίσει ο χρήστης τις απαιτούμενες σχέσεις (αλγόριθμοι) και να χρησιμοποιεί τους κατάλληλους αριθμούς ώστε να διερευνά το αποτέλεσμα της εφαρμογής της σχέσης στους συγκεκριμένους αριθμούς. Το περιβάλλον του λογιστικού φύλλου ενισχύει τους μαθητές στο πέρασμα από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική καθώς κάνει περισσότερο προσιτή την χρήση γραμμάτων (όνομα κελιών) αντί των αριθμών στις εκφραζόμενες αριθμητικές σχέσεις οι οποίες έτσι καθίστανται αλγεβρικές ενώ οι αριθμοί στα κελιά (τιμές στα αντίστοιχα γράμματα) εμφανίζονται ως τιμές μιας μεταβλητής.

ΘΕΜΑ : Η εύρεση κατάλληλης αριθμητικής σχέσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μπορείτε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;

Ν	Σχέση
1	7
2	9
3	11
1000	;

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Εύρεση και αλγεβρική έκφραση της ζητούμενης σχέσης

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ

- Διαδικασίες αξιοποίησης του λογιστικού φύλλου στην λύση προβλήματος

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Φάση 1:

Οι μαθητές ορίζουν στην πρώτη στήλη τους αριθμούς 1,2,3,100 και στη δεύτερη στήλη μια σχέση με τους αριθμούς της πρώτης στήλης.

Μπορούν να ορίζουν μια σχέση στην οποία ο αριθμός στο κελί της στήλης «Ν» να αντιστοιχεί στο αντίστοιχο κελί της στήλης με το όνομα «Σχέση». Έτσι ο μαθητής μπορεί να πειραματίζεται με τη εύρεση της σχέσης και να εξετάζει τις εικασίες του

Στην εικόνα που ακολουθεί δείχνεται το αποτέλεσμα της εικασίας Σχέση = Ν+6

N	Σχέση
1	7
2	8
3	9
1000	1006

N	Σχέση
1	7
2	9
3	11
1000	2005

Πίνακας 1

Φυσικά η σωστή σχέση είναι η Σχέση = 2*Ν+5 όπως δείχνει η δεύτερη εικόνα.

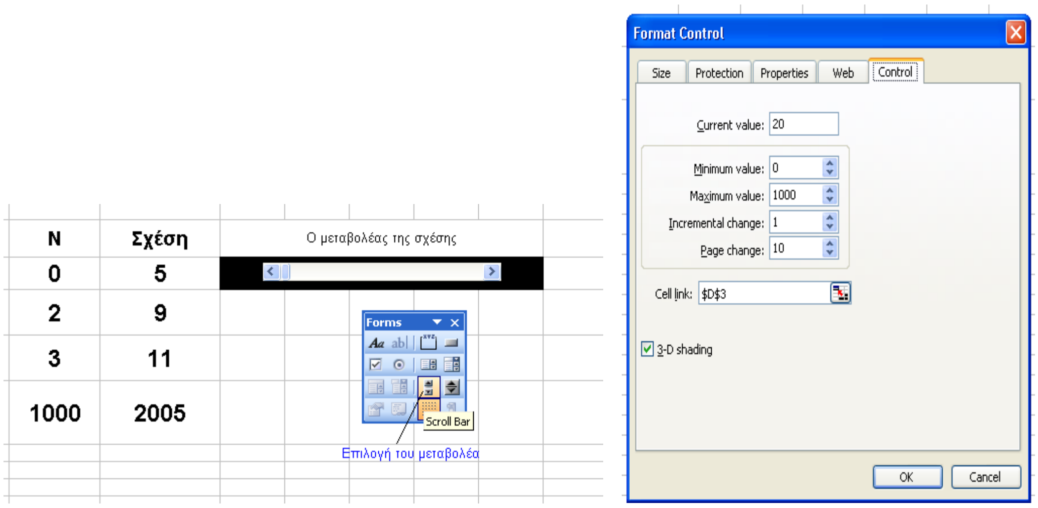
Φάση 2:

Οι μαθητές ορίζουν ένα μεταβολέα με τον οποίο μπορούν να μεταβάλλουν την τιμή στο πρώτο κελί της στήλης και να έχουν το αποτέλεσμα στο διπλανό κελί της σχέσης.

Για το σκοπό αυτό στο Excel καλούν τον κατάλογο των εντολών «View» και από εκεί τον κατάλογο «Forms». Στον νέο κατάλογο επιλέγουν το εικονίδιο «Scroll Bar».

Στη συνέχεια επιλέγουν ένα ελεύθερο κελί και σύρουν τον δείκτη του ποντικιού έως ότου ορίσουν το μέγεθος του μεταβολέα.

Στη συνέχεια κάνουν δεξί κλικ πάνω στον μεταβολέα και στο παράθυρο που θα ανοίξει ορίζουν το πεδίο ορισμού των αριθμών που θα μπορούν να μεταβάλλουν, το βήμα μεταβολής καθώς και το κελί στο οποίο θα τοποθετούνται οι αριθμοί του μεταβολέα.



Εικόνα 1

Έτσι μπορούν να κινούν τον μεταβολέα και να παρατηρούν τις τιμές στο πρώτο κελί της στήλης «Σχέση».

Η χρήση του μεταβολέα βοηθά τους μαθητές να αισθητοποιούν την σχέση ως συναρτησιακή. Με άλλα λόγια η διαδικασία αυτή είναι κατάλληλη για μια εισαγωγή στην έννοια της αντιστοιχίας αριθμών και της συνάρτησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Επαναληπτικές διαδικασίες

Το λογιστικό φύλλο είναι κατάλληλο για να ορίσει ο χρήστης επαναληπτικές διαδικασίες μεταξύ αριθμών. Το περιβάλλον του λογιστικού φύλλου ενισχύει τους μαθητές στο πέρασμα από την αριθμητική σκέψη και την αλγεβρική σκέψη στην έννοια της επαναληπτικές διαδικασίες και μέσω αυτών στις έννοιες της ακολουθίας κα των προόδων στα fractals και στη διερεύνηση χαοτικών καταστάσεων.

ΘΕΜΑ: Η περιγραφή της μεταβολής των αριθμών που ορίζει μια επαναληπτική διαδικασία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι αριθμοί που ορίζονται από την επαναληπτική διαδικασία

$$\mathbf{X_{\nu+1} = \beta X_\nu\left(1 - X_\nu\right)}$$

όπου X_1=0,1 και β=3,4;

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- ✓ Εύρεση και έκφραση του τρόπου μεταβολής των αριθμών που προκύπτουν από μια επαναληπτική διαδικασία.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ

- ✓ Διαδικασίες αξιοποίησης του λογιστικού φύλλου στην κατανόηση και τη διδασκαλία των επαναληπτικών διαδικασιών στα μαθηματικά.

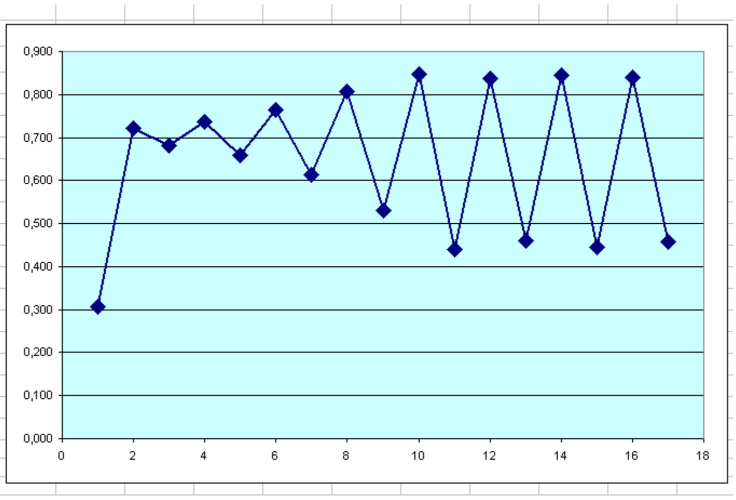
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΦΑΣΗ 1

Οι μαθητές ορίζουν στα κελιά Α1 και Β1 τα ονόματα Χ1 και β. Επίσης ορίζουν στα κελιά Α2 και Β2 τις αντίστοιχες τιμές αυτών, Χ1=0,1 και β=3,4.

Στα επόμενα κελιά της στήλης Α ορίζουν τη σχέση της επανάληψης ως εξής:

X1	β
0,1	3,4
0,306	
0,722	
0,682	
0,737	
0,659	
0,764	
0,613	
0,806	
0,531	
0,847	
0,441	
0,838	
0,461	
0,845	
0,446	
0,840	
0,457	



Εικόνα 1

Κελί A3 : =B1*A2*(1-A2)

Κελί A4: = B1*A3*(1-A3)

Κελί A5: = B1*A4*(1-A4) κ.ο.κ.

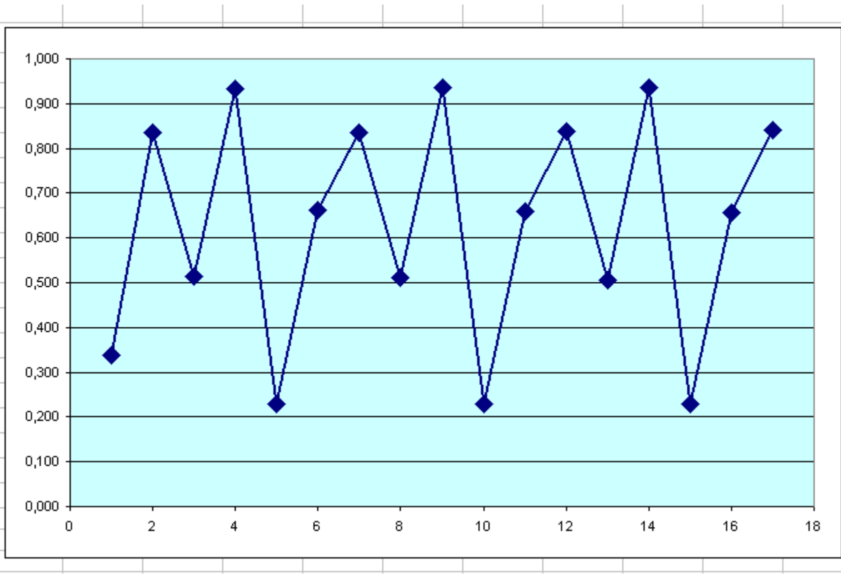
Στη συνέχεια επιλέγουν το γράφημα και από εκεί «ΧΨ (Scatter)». Γι ατο γράφημα επιλέγουν τον τύπο που συνδέει τα σημεία με γραμμές.

ΦΑΣΗ 2

Οι μαθητές μεταβάλουν τις τιμές των X1 και β και περιγράφουν πώς μεταβάλλονται οι διαδοχικές τιμές της διαδικασίας.

Π.χ. για X1=0,1 και β=3,74 θα προκύψει η εξής μεταβολή.

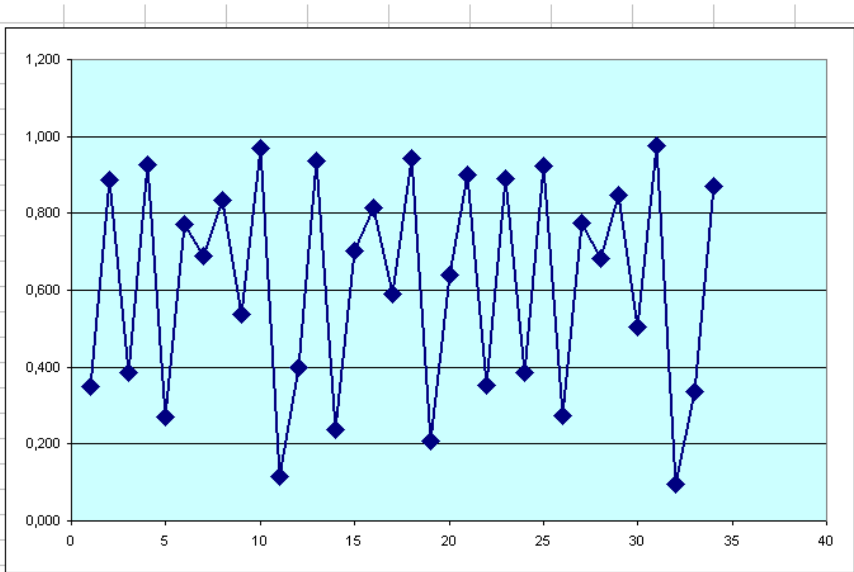
X1	β
0,1	3,74
0,337	
0,835	
0,515	
0,934	
0,230	
0,662	
0,836	
0,512	
0,934	
0,229	
0,660	
0,839	
0,505	
0,935	
0,228	
0,658	
0,842	



Εικόνα 2

Για X1=0,1 και β=3,9

X1	β
0,1	3,9
0,351	
0,888	
0,387	
0,925	
0,271	
0,771	
0,690	
0,835	
0,538	
0,969	
0,116	
0,399	
0,935	
0,236	
0,703	
0,815	
0,589	
0,944	
0,206	
0,639	
0,900	
0,351	
0,889	



Εικόνα 3

Είναι φανερό ότι οι μαθητές μπορούν να ορίσουν διάφορες επαναληπτικές διαδικασίες και να «παίξουν» με τον τρόπο μεταβολής των αριθμών που ορίζουν.

4.5 ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γενικά

Εκμάθηση της χρήσης των προτεινόμενων εκπαιδευτικών λογισμικών, για την αξιοποίησή τους στη δημιουργία αρχείων που υποστηρίζουν δραστηριότητες με πλήρη ανεπτυγμένα σενάρια για τη Διδασκαλία και τη Μάθηση των Μαθηματικών. Βασικό κριτήριο επιλογής των προτεινόμενων λογισμικών, αποτελεί το γεγονός ότι κάθε ένα από αυτά υποστηρίζει τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών και εξυπηρετούν τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών, έτσι όπως αυτές περιγράφονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Δευτεροβάθμιας και Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτή η θεματική ενότητα, αναλύεται σε επί μέρους ενότητες για κάθε λογισμικό με αναφορά σε δραστηριότητες για την υλοποίηση των στόχων που τίθενται. Οι δραστηριότητες υλοποιούνται με παραδείγματα αξιοποίησης των δυνατοτήτων των λογισμικών, που προτείνονται από τους διδάσκοντες. Μέσα από τα παραδείγματα αναμένεται να κατανοήσουν τη λειτουργία του περιβάλλοντος κάθε λογισμικού και τον τρόπο της παιδαγωγικής τους αξιοποίησης.

Δραστηριότητα 1. Περιβάλλοντα δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων:

Cabri Geometry II *

The Geometer's Sketchpad *

1. Παρουσίαση του περιβάλλοντος εργασίας με έμφαση στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (διπλή εκδοχή ως επίπεδο ευκλείδειας γεωμετρίας – τα αντικείμενα προσδιορίζονται με τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας – και επίπεδο αναλυτικής γεωμετρίας). Ο όρος «παρουσίαση» αντιστοιχεί στη καθοδήγηση του επιμορφούμενου να έλθει σε επαφή με το προς μελέτη αντικείμενο. Αυτή μπορεί να γίνει με απλή παρουσίαση μέσω προβολής είτε μέσω καθοδήγησης στον υπολογιστή.
2. Παρουσίαση των εντολών/ εργαλείων του προγράμματος. Έμφαση στα εργαλεία / εντολές που έχουν μαθηματικό νόημα.

3. Παρουσίαση των εντολών προσαρμογής του λογισμικού στις ανάγκες του χρήστη (Μενού εντολών «Επιλογές»)
4. Παρουσίαση και ανάλυση έτοιμων αντιπροσωπευτικών γεωμετρικών κατασκευών (για παράδειγμα το ορθόκεντρο τριγώνου)
5. Κατασκευή βασικών γεωμετρικών σχημάτων με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού. Έμφαση στους τρεις βαθμούς ελευθερίας των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας του λογισμικού (ελεύθερα αντικείμενα, αντικείμενα που ορίζονται με τη βοήθεια ενός αντικειμένου – π.χ. σημείο σε ευθεία και αντικείμενα που ορίζονται με δυο ιδιότητες – π.χ. σημείο ως τομή δυο αντικειμένων). (Για παράδειγμα κατασκευή τριγώνου με τα κύρια στοιχεία του, παραλληλογράμμου που μετασχηματίζεται στα διάφορα είδη κ.α.). Ο όρος «κατασκευή» αντιστοιχεί στην καθοδηγούμενη άμεση εμπλοκή του επιμορφούμενου στο προς μελέτη αντικείμενο. Ο επιμορφούμενος εργάζεται ο ίδιος στον υπολογιστή καθοδηγούμενος από τον επιμορφωτή.
6. Σύνδεση του τρόπου κατασκευής με τη μαθηματική θεωρία και τη διδακτική του αντικειμένου (για παράδειγμα η διαδικασία κατασκευής της απόστασης σημείου από ευθεία ακολουθεί τον ορισμό της αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας). Ο όρος «σύνδεση» αναφέρεται στη συζήτηση/ διαπραγμάτευση που πρέπει να γίνει μεταξύ επιμορφωτή και επιμορφούμενων για την δημιουργία της μεταγνώσης σχετικής με τη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών αντικειμένων
7. Διαχείριση των αρχείων που δημιουργούνται με τα λογισμικά (αποθήκευση, μεταφορά, διανομή, άνοιγμα, τροποποίηση) Κατασκευή απλών γεωμετρικών σχημάτων και μελέτη των συντεταγμένων τους και των εξισώσεών τους.
8. Μελέτη της κλίσης ευθείας κατά τους μετασχηματισμούς της. Ο όρος «μελέτη» αναφέρεται στην κατάσταση που δημιουργείται, ατομικά σε κάθε επιμορφούμενο αλλά και στη ομάδα των επιμορφούμενων με τον επιμορφωτή, για την εξαγωγή συμπερασμάτων από τα δεδομένα που προκύπτουν με τον δυναμικό χειρισμό στο περιβάλλον του λογισμικού.
9. Μελέτη των μεταβολών των συντεταγμένων σημείων και των εξισώσεων ευθειών κατά την μεταβολή του συστήματος συντεταγμένων.
10. Μελέτη των συντεταγμένων σημείων ως προς δυο συστήματα συντεταγμένων.
11. Παρουσίαση απλών γεωμετρικών τόπων (ο γ.τ. του μέσου ευθ. τμήματος με ένα άκρο σταθερό όταν το άλλο κινείται ελεύθερα σε κύκλο)
12. Επίλυση προβλημάτων απλών γεωμετρικών τόπων.

13. Επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του ίχνους του μεταβαλλόμενου μέρους σχήματος (για παράδειγμα μεγιστοποίηση εμβαδού ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο κτλ.).
14. Χρησιμοποίηση του εργαλείου «μεταφορά μέτρησης» για την γραφική αναπαράσταση συμμεταβολών. (Ο όρος «χρησιμοποίηση» αναφέρεται στη χρήση των εργαλείων του λογισμικού από τους επιμορφούμενους σε θέματα που έχουν νόημα για τους ίδιους).
15. Χρησιμοποίηση του εργαλείου «Πινακοποίηση» για την πινακοποίηση μετρήσεων .
16. Σύνδεση των δεδομένων (γεωμετρική, αριθμητική και γραφική αναπαράσταση).
17. Κατασκευή «μακροεντολών» για τη δημιουργία νέων εργαλείων (π.χ. εργαλείο για τη κατασκευή τετραγώνου ή ορθογωνίου ή ισοσκελούς τραπεζίου).
18. Χρησιμοποίηση των νέων εργαλείων-μακροεντολών στην κατασκευή σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων (για παράδειγμα να χρησιμοποιούν το εργαλείο-μακροεντολή, ορθογώνιο στην κατασκευή ραβδογραμμάτων για στατιστική επεξεργασία δεδομένων)
19. Κατασκευή μοντέλων για τη μελέτη φαινομένων (για παράδειγμα μελέτη της κίνησης ενός σώματος που κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο ή τη μετατροπή της κυκλικής κίνησης σε ευθύγραμμη (παλινδρομική κίνηση)

Οι δραστηριότητες για το **The Geometer's Sketchpad** είναι παρόμοιες με εκείνες που αναφέρονται στους αντίστοιχους στόχους για την εκμάθηση του λογισμικού Cabri Geometry. Για τις δραστηριότητες μπορεί να αφιερωθεί μικρότερος διδακτικός χρόνος με την προϋπόθεση ότι έχει προηγηθεί η εκμάθηση του Cabri (ή αντίστροφα

Δραστηριότητα 2: Λογισμικό Πολλαπλών Αναπαραστάσεων

Function Probe *

- ✓ Παρουσίαση του περιβάλλοντος εργασίας
- ✓ Ανάλυση των στόχων του λογισμικού
- ✓ Στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών που εξυπηρετεί

Τα παραπάνω θα πρέπει να υλοποιηθούν μέσα από απλές δραστηριότητες (ασκήσεις-προβλήματα, μαθηματικού περιεχομένου). Πέρα από τις βασικές λειτουργίες των τριών διαφορετικών παραθύρων του λογισμικού (γράφημα, πίνακας, αριθμομηχανή) θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη διδακτική αξιοποίηση των παραθύρων αυτών.

Με τη διαπραγμάτευση απλών προβλημάτων να αναδειχτούν οι δυνατότητες που παρέχει η χρήση του FP για :

- ✓ τη χρήση και σύνδεση όλων των δυνατών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών) και για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ τους.
- ✓ Το μετασχηματισμό του τύπου και της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και τη διάκριση των επιπτώσεών τους στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.
- ✓ Τον πειραματισμό, (αλλαγή των δεδομένων σε μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης και την παρατήρηση των επιπτώσεων των αλλαγών αυτών στην άλλη).
- ✓ Τη δημιουργία συναρτήσεων είτε με τη μορφή ενός κουμπιού στο παράθυρο «αριθμομηχανή» είτε με τη μορφή δύο εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο «Πίνακας»

Δραστηριότητα 3: Λογισμικό με γλώσσα προγραμματισμού Logo

'Χελωνόκοσμος' *

- ✓ Παρουσίαση του περιβάλλοντος των ψηφίδων.
- ✓ Περιγραφή του τρόπου κίνησης της χελώνας πάνω στον καμβά κα της σημασίας της κίνησης αυτής ως φυσική κίνηση (μπρος-πίσω και δεξιά-αριστερά).
- ✓ Παρουσίαση της ψηφίδας Logo,των βασικών εντολών κίνησης της χελώνας και εκτέλεση ενός απλού προγράμματος (π.χ ενός ισοπλεύρου τριγώνου)
- ✓ Ανάλυση της ψηφίδας 'Καμβάς' και των σελίδων χελώνας και ζωγραφικής. Εδώ θα παρουσιαστεί η ψηφίδα ως ένα καρτεσιανό επίπεδο κίνησης.
- ✓ Κατασκευή ενός σχήματος με όμοιες εντολές(π.χ ένα τετράγωνο)
- ✓ Οι επιμορφούμενοι δημιουργούν ένα πρόγραμμα. το οποίο το χρησιμοποιούν με ένα όνομα (για παράδειγμα 'Σχήμα') για κατασκευές (για παράδειγμα να κατασκευάζει ένα τετράγωνο)
- ✓ Κατασκευή ενός σχήματος με όμοιες εντολές(π.χ ένα τετράγωνο)
- ✓ Οι επιμορφούμενοι δημιουργούν ένα πρόγραμμα. το οποίο το χρησιμοποιούν με ένα όνομα (για παράδειγμα 'Σχήμα') για κατασκευές (για παράδειγμα να κατασκευάζει ένα τετράγωνο)
- ✓ Οι επιμορφούμενοι αναγνωρίζουν την επανάληψη των εντολών και χρησιμοποιούν την εντολή 'επανάλαβε' για να συρρικνώσουν το πρόγραμμα.

- ✓ Οι επιμορφούμενοι δημιουργούν επαναληπτικά μοτίβα δικής τους επινόησης(π.χ έναν μαίανδρο)
- ✓ Οι επιμορφούμενοι εισάγουν μία παράμετρο στα σχήματα που έχουν ήδη κατασκευάσει.(π.χ στην πλευρά του τετραγώνου).
- ✓ Οι επιμορφούμενοι ενεργοποιούν τον μεταβολέα και διαπραγματεύονται με τον επιμορφωτή:
    - o τον τρόπο με τον οποίο οι μεταβολές της τιμής της παραμέτρου μετασχηματίζουν το σχήμα.
    - o Την έννοια της δυναμικής διασύνδεσης των τριών ψηφίδων (Logo, Καμβάς, Μεταβολέας)
- ✓ Οι επιμορφούμενοι εισάγουν δύο τουλάχιστον παραμέτρους σε ένα σχήμα που έχουν κατασκευάσει.
- ✓ Ενεργοποιούν τον μεταβολέα και τον δισδιάστατο μεταβολέα και πειραματίζονται με τον δεύτερο.
- ✓ Διαπραγματεύονται την έννοια του γεωμετρικού τόπου των σημείων (στον δισδιάστατο μεταβολέα) των οποίων οι συντεταγμένες κατασκευάζουν ένα σχήμα στον καμβά.
- ✓ Οι επιμορφούμενοι επιχειρούν να κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα (για παράδειγμα ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο).
- ✓ Γίνεται διαπραγμάτευση για την διάκριση μεταξύ της τυχαίας κατασκευής και της κατασκευής με μαθηματικό τρόπο.
- ✓ Εισάγονται παράμετροι στην κατασκευή και αναζητούν τη γραμμή (στο δισδιάστατο μεταβολέα) η οποία κατασκευάζει το σχήμα.
- ✓ Γίνεται διαπραγμάτευση για την κατασκευή βασικών γεωμετρικών σχημάτων, όπως το παραλληλόγραμμο και ο κύκλος.

Γίνεται ανάλυση και αντιπαράθεση μεταξύ της έννοιας της απλής σχεδίασης στο χαρτί και της κατασκευής ενός σχήματος στο Χελωνόκοσμο.

Δραστηριότητα 4 :Πολυμεσικό Λογισμικό με γλώσσα προγραμματισμού Logo

‘Microworlds Pro’ *

Η εξοικείωση με το περιβάλλον του λογισμικού με τη βοήθεια παραδειγμάτων με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού χωρίς προγραμματισμό (ζωγραφική, έτοιμες εικόνες, εγγραφή και αναπαραγωγή ήχου, εισαγωγή και διαχείριση βίντεο, χελώνες, πλαίσια κειμένου, εισαγωγή νέων εικόνων, εργασία με πολλές σελίδες, δημιουργία κινουμένου σχεδίου κ.α.)

- ✓ Εισαγωγή στη γεωμετρία της χελώνας με προγραμματισμό των αντικειμένων του λογισμικού με τη χρήση απλών εντολών της Logo (χελώνα, Πλαίσιο Κειμένου, κουμπιά και μεταβολείς). Αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στο προγραμματισμό της γλώσσας Logo. (να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα παραδείγματα για τα στοιχεία και τις δυνατότητες της χελώνας όπως προσανατολισμός της χελώνας, δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων, υπολογισμοί και πράξεις, συγκρίσεις αριθμών, δημιουργία αριθμομηχανής κ.α.)
- ✓ Με κατάλληλα παραδείγματα να δημιουργηθούν προσομοιώσεις φαινομένων (για παράδειγμα της κίνησης ενός αυτοκινήτου
- ✓ Να δημιουργήσουν διαδικασίες που μπορούν να λειτουργούν ως λειτουργίες ή ως εντολές με τη βοήθεια παραδειγμάτων όπως η σχεδίαση ενός τετραγώνου ή κύκλου.
- ✓ Να χειρίζονται αυτές τις διαδικασίες με κουμπιά και μεταβολείς.
- ✓ Να δημιουργήσουν με το λογισμικό πολυμεσικές παρουσιάσεις και εξειδικευμένων αρχείων με προσομοιώσεις κινήσεων τα οποία να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη Μαθηματικών εννοιών και επίλυση προβλημάτων.

Δραστηριότητα 5 : Λογισμικό κατασκευής μαθηματικών μοντέλων

Modellus *

- ✓ Παρουσίαση του περιβάλλοντος εργασίας
- ✓ Ανάλυση των στόχων του λογισμικού
- ✓ Στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών που εξυπηρετεί

Τα παραπάνω θα πρέπει να υλοποιηθούν μέσα από απλές δραστηριότητες (ασκήσεις-προβλήματα, μαθηματικού περιεχομένου)

Μέσα από τη διαπραγμάτευση απλών καταστάσεων με τη χρήση του Modellus να αναδειχτούν οι δυνατότητες που παρέχει για :

- ✓ τη δημιουργία και διερεύνηση μαθηματικών μοντέλων
- ✓ την κατασκευή προσομοιώσεων των μοντέλων

- ✓ την κατανόηση του μαθηματικού υπόβαθρου και των πολλαπλών αναπαραστάσεων ενός μοντέλου
- ✓ τη χρήση και σύνδεση όλων των δυνατών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση,πίνακα τιμών) και για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ τους.
- ✓ την ανάλυση και ερμηνεία πειραματικών δεδομένων

6.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΤΠΕ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγή

Μπορούμε να χωρίσουμε τις υπολογιστικές μηχανές σε δύο μεγάλες κατηγορίες στους μηχανικούς υπολογιστές και στους ηλεκτρονικούς. Όλοι οι υπολογιστές που είχαν κατασκευαστεί μέχρι την εμφάνιση του ENIAC (1945) ήταν μηχανικοί. Αποτελούνταν από οδοντωτούς τροχούς, μοχλούς και άλλα μηχανικά εξαρτήματα, που παρουσιάζουν μεγάλη αδράνεια και επομένως και μεγάλη βραδύτητα. Αυτό συμβαίνει ακόμα και στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται ηλεκτρικοί κινητήρες. Στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, οι αργοκίνητες μηχανικές συσκευές αντικαταστάθηκαν με λυχνίες, ημιαγωγούς και, πρόσφατα, με ολοκληρωμένα κυκλώματα. Έτσι έχουν μεγάλη ταχύτητα στην εκτέλεση των πράξεων. Αυτό οφείλεται στη μηδενική σχεδόν αδράνεια των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων και στην ταχύτητα μετάδοσης των εντολών, που είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός. Ηλεκτρονικές υπολογιστικές μηχανές υπάρχουν σ' όλα τα μεγέθη, από τους πολύ μικρούς υπολογιστές χεριού ως τους τεράστιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές των κέντρων ερευνών, των κρατικών υπηρεσιών κ.λπ. Τέτοιος είναι ο ILLIAC IV της Εθνικής Υπηρεσίας Αεροναυτικής και Διαστήματος (NASA) των ΗΠΑ. Η μνήμη του χωράει έντεκα τρισεκατομμύρια ψηφία και ο χρόνος μιας πράξης είναι της τάξης των 1,6.10-9 sec. Αλλά στους νέους υπολογιστές εφαρμόζονται και νέες αρχές, όπως η αρχή της υπέρθεσης, της σωλήνωσης, του παραλληλισμού κ.ά.

Σύντομη ανασκόπηση της εξέλιξης των υπολογιστών

Σήμερα η τεχνολογία αναπτύσσεται ραγδαία, οι νέες μηχανές που εξυπηρετούν την επεξεργασία δεδομένων και την επικοινωνία εξελίσσονται με τόσο γρήγορους ρυθμούς που δημιουργούν μια νέα πραγματικότητα σε όλο το φάσμα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Όμως η ιστορία τέτοιων μηχανών αρχίζει από πολύ παλιά. Για παράδειγμα, ο άβακας πιθανόν υπήρχε στην Βαβυλωνία το 3000 π.Χ. Το 1901, ανακαλύφθηκε ένα αρχαίο Ελληνικό ναυάγιο ανοικτά της νήσου των Αντικυθήρων και μέσα σ' αυτό βρέθηκε διαβρωμένος από το αλάτι ο μηχανισμός των Αντικυθήρων που αποτελούσε ένα μηχανισμό για την πρόβλεψη των κινήσεων των αστέρων και των πλανητών. Ο John Napier (1550-1617), εφευρέτης των λογαρίθμων, ανακάλυψε τις ράβδους του Napier γύρω στο 1610 για να απλοποιήσει το έργο του πολλαπλασιασμού. Το 1641 ο Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Blaise Pascal (1623-1662) κατασκεύασε μια μηχανή πρόσθεσης. Παρόμοια δουλειά είχε γίνει από τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ώστε να μπορεί να εκτελεί πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Η προσπάθεια για ανάπτυξη στις μηχανές που κάνουν υπολογισμούς συνεχίσθηκε και μετά το 1900. Για παράδειγμα, το 1919, ο E.O. Carissan (1880-1925), αξιωματικός του Γαλλικού πεζικού, σχεδίασε και κατασκεύασε μια εξαιρετική μηχανική συσκευή για την παραγοντοποίηση ακεραίων και τον έλεγχο του αν είναι πρώτοι. Όμως τα χρόνια του πολέμου, στη δεκαετία του '40 φέρνουν την γένεση του ηλεκτρονικού ψηφιακού υπολογιστή. Η ανακάλυψη του τρανζίστορ το 1947 από τους John Bardeen (1908-1991), Walter Brattain (1902-1987) και William Shockley (1910-1989) μετασχημάτισε τον υπολογιστή και κατέστησε δυνατή την επανάσταση των μικρο-επεξεργαστών. Για την ανακάλυψή τους αυτή κέρδισαν το Βραβείο Nobel στην φυσική το 1956. Στην δεκαετία του 1960, η επιστήμη των υπολογιστών ή πληροφορική αναδείχθηκε σαν ένας ξεχωριστός κλάδος. Το πρώτο πανεπιστημιακό τμήμα της επιστήμης των υπολογιστών έγινε το 1962 στο Πανεπιστήμιο Purdue. Πολλές νέες γλώσσες προγραμματισμού ανακαλύφθηκαν, όπως η BASIC. Στην δεκαετία του 1950 ο Grace Murray Hopper ανακάλυψε την έννοια του μεταγλωττιστή (compiler) ενώ μια δεκαετία αργότερα ήρθε επίσης στο φως η θεωρία των αυτομάτων και των τυπικών γλωσσών. Η θεωρία των βάσεων δεδομένων είδε την κύρια πρόοδό της με την δουλειά του Edgar F. Codd σε συσχετικιστικές βάσεις δεδομένων στην δεκαετία του 1970, ενώ την ίδια δεκαετία είχαμε επίσης την εμφάνιση των υπερυπολογιστών (supercomputers). Ο Seymour Cray σχεδίασε τον CRAY-1, που βγήκε για πρώτη φορά το Μάρτιο του 1976 και μπορούσε να κάνει 160 εκατομμύρια πράξεις το δευτερόλεπτο. Το 1979, τρεις μεταπτυχιακοί φοιτητές στη North Carolina ανέπτυξαν έναν εξυπηρετητή (server) κατανεμημένων νέων που τελικά εξελίχθηκε στο Usenet. Ο προσωπικός υπολογιστής καθώς και οι πρώτοι ιοί υπολογιστών κάνουν την εμφάνισή τους στην δεκαετία του 1980. Από την επόμενη δεκαετία και έπειτα οι υπολογιστές γίνονται όλο και πιο μικροί και γεννάται η νανο-τεχνολογία.

Ηλεκτρονικοί υπολογιστές και εκπαίδευση

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές αποτελούν εργαλεία που διαθέτουν τη δυνατότητα δημιουργίας εξωτερικών αναπαραστάσεων. Έτσι δίνεται η δυνατότητα για τη δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων εννοιών σε μια ποικιλία από αναπαραστασιακά συστήματα. Επομένως μπορούν να χρησιμεύσουν στο δάσκαλο των μαθηματικών ως ψυχολογικά νοητικά εργαλεία, τα οποία μπορούν να τροποποιήσουν την ανθρώπινη συμπεριφορά, δηλ. μέσω αυτών να επιτευχθούν καλύτερα αποτελέσματα στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης. Η Τεχνοκεντρική προσέγγιση, απαντώμενη στη βιβλιογραφία και ως απομονωμένη τεχνική προσέγγιση ή κάθετη προσέγγιση, στη δεκαετία 1970-1980 αποτελεί πρότυπο που χαρακτηρίζεται από τεχνοκρατικό ντετερμινισμό. Η απόκτηση γνώσεων πάνω στη λειτουργία των υπολογιστών είναι η κύρια επιδίωξη. Η πληροφορική στα πλαίσια αυτά θεωρείται ως αυτοτελές γνωστικό αντικείμενο. Τα προγράμματα που αναπτύσσονται είναι προγράμματα εξάσκησης και πρακτικής εφαρμογής (drill & practice). Ακολουθεί το Ολοκληρωμένο - Ενσωματωμένο (integrated) Πρότυπο. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, τα θέματα που αφορούν στους υπολογιστές και στις ΤΠΕ γενικότερα, διδάσκονται μέσα από όλα τα γνωστικά αντικείμενα του σχολείου και δεν συνιστούν ιδιαίτερο γνωστικό αντικείμενο. Η Έκθεση Simon (1980) προτείνει την κατάρτιση για όλους στην πληροφορική και θεωρεί ότι τα πληροφορικά εργαλεία δεν μπορούν να θεωρηθούν σαν καθολικό παιδαγωγικό μέσο, εντούτοις παρουσιάζουν εξαιρετικό παιδαγωγικό ενδιαφέρον σε ποικίλες και ιδιαίτερες περιπτώσεις. Κάτω από το πρίσμα αυτό, προτείνονται δύο δρόμοι ερευνών: Η Διδασκαλία με τη Βοήθεια Υπολογιστή (Δι.Β.Υ.) και η γλώσσα LOGO. Ένα τυπικό πρόγραμμα Δι.Β.Υ. περιέχει:

- ✓ την παρουσίαση ενός διδακτικού αντικειμένου και την κατάλληλη ερώτηση,
- ✓ την απάντηση από τον μαθητή,
- ✓ την αντίδραση του προγράμματος που μπορεί να είναι γραμμική ή με διακλαδώσεις, ανάλογα με την απάντηση που έχει δοθεί και να περιέχει συμπληρωματικές πληροφορίες που καλύπτουν το μαθησιακό κενό.

Η Έκθεση Schwartz (1981) διακρίνει την πληροφορική ως αντικείμενο μάθησης και ως παιδαγωγικό και διδακτικό μέσο και προσδιορίζει τους στόχους της πληροφορικής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι στόχοι αυτοί προσανατολίζονται προς δύο κύριες κατευθύνσεις: ο υπολογιστής ως εργαλείο μάθησης και ως στοιχείο της γενικής κουλτούρας και προτείνει αρχίζοντας από την τρίτη τάξη του δημοτικού σχολείου, οι μαθητές να χρησιμοποιούν σε ομάδες των δύο ατόμων τον υπολογιστή.

Μάθηση από υπολογιστές: Εκπαίδευση στηριζόμενη σε υπολογιστή

Στη θεωρία αυτή του Skinner βασίζονταν έως τώρα ένα μεγάλο μέρος των διαφόρων εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Με βάση αυτή τη θεωρία δημιουργήθηκαν κάποια είδη υπολογιστικών εκπαιδευτικών προγραμμάτων, τα οποία χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- ✓ CAI (Computer Assisted Instruction) Διδασκαλία με τη βοήθεια υπολογιστή
- ✓ CAL (Computer Assisted Learning) Μάθηση με τη βοήθεια υπολογιστή
- ✓ ITS (Inteligent Tutoring Systems) Έξυπνα συστήματα διδασκαλίας.

Τα **CAI** είναι εκπαιδευτικά προγράμματα τα οποία προσπαθούν να διδάξουν το μαθητή προσφέροντας μια καθοδήγηση με τη μορφή κάποιων ερωτήσεων - απαντήσεων. Ο υπολογιστής δηλαδή χρησιμοποιείται σαν δάσκαλος που μεταφέρει τη γνώση στα παιδιά και προσπαθεί να τα διδάξει με κάποιες ερωτήσεις - απαντήσεις.

Τα **CAL** δουλεύουν με τον ίδιο τρόπο όπως και τα CAI, αλλά είναι πιο φιλικά προς το χρήστη. Ενώ τα CAI απλά παρέχουν ένα σύνολο από οδηγίες, τα CAL προσπαθούν να διδάξουν το μαθητή δίνοντάς του τις πληροφορίες με πιο οργανωμένο τρόπο.

Τα **ITS** είναι τα πιο προχωρημένα από τα τρία είδη εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Σ' αυτά ένα τμήμα του προγράμματος που ονομάζεται "μοντέλο του μαθητή" ελέγχει τις προσπάθειες του μαθητή και προσπαθεί να καθορίσει τι είναι αυτό που ο μαθητής καταλαβαίνει ή όχι και την πρόοδο που έχει κάνει.

Πρακτική και εξάσκηση (drill and practice)

Κατά την δεκαετία του 70 και κυρίως του 80, η πιο χαρακτηριστική μορφή εκπαίδευσης στηριζόμενη σε υπολογιστή ήταν τα drill and practice προγράμματα. Παρουσίαζαν ηλεκτρονικά φύλλα στους μαθητές με προβλήματα, κυρίως μαθηματικά, προκειμένου να επιλυθούν από αυτούς. Οι μαθητές εισήγαγαν απαντήσεις και εισέπρατταν ανατροφοδότηση σχετικά με την ορθότητα των αποκρίσεών τους, ενώ συχνά εισέπρατταν και γραφικές ανταμοιβές όπως χαμογελαστά πρόσωπα, εκρήξεις, κλπ σε ανταπόκριση στις σωστές απαντήσεις. Οι ασκήσεις βασίζονται σε συμπεριφοριστικές αρχές σχετικά με την ενίσχυση της σχέσης ερεθίσματος – αντίδρασης. Οι συμπεριφοριστικές αρχές όμως υπογραμμίζοντας την πρακτική και εξάσκηση (drill and practice) αδυνατεί να εξηγήσει, την πολύπλοκη σκέψη. Η ειρωνεία της ύπαρξης και χρήσης αυτών των προγραμμάτων ήταν ότι αντικατέστησαν την μηχανιστική μάθηση. Ενώ λοιπόν τα drill προγράμματα αν και φαίνεται να βοήθησαν κάποιους μαθητές που χρειάζονταν εξάσκηση, ίσως δεν είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος χρήσης της πανίσχυρης τεχνολογίας των υπολογιστών.

Τα Περιβάλλοντα καθοδήγησης (tutorials)

Στη συνέχεια παρόλο που τα tutorials αντιπροσωπεύουν μία σημαντική διανοητική πρόοδο σε σχέση με τα drill and practice προγράμματα, παρουσίασαν προβλήματα δεδομένου ότι είναι αδύνατο να προβλεφθεί πώς κάθε μαθητής θα ερμηνεύσει τα εκάστοτε δεδομένα ενός προβλήματος. Το άλλο αδύνατο σημείο των tutorials είναι ότι οι μαθητές δεν ενθαρρύνονται ούτε τους δίνεται η δυνατότητα να σχηματίσουν το δικό τους νόημα ή ακόμα δεν καθίστανται ικανοί να καθορίσουν τι είναι σημαντικό, να εκφράσουν και να αξιολογήσουν τι γνωρίζουν, ή να σχηματίσουν σαφές προσωπικό νόημα για το τι μελέτησαν. Αυτό που πολύ συχνά οι μαθητές αποκομίζουν από τα tutorials είναι αδρανής γνώση επειδή δεν την εφαρμόζουν.

Έξυπνα περιβάλλοντα καθοδήγησης (Intelligent Tutoring Systems)

Σύμφωνα με τον Jonassen «τα έξυπνα περιβάλλοντα καθοδήγησης αναπτύχθηκαν κατά τις δεκαετίες του 80 και 90 από ερευνητές σε θέματα τεχνητής νοημοσύνης. Επεδίωκαν τοιουτοτρόπως να διδάξουν αφ' ενός επίλυση προβλημάτων και αφ' ετέρου την διαδικαστική γνώση σε μια ποικιλία θεματικών πεδίων. Αυτό που τα έξυπνα περιβάλλοντα καθοδήγησης προσθέτουν στα tutorials είναι η νοημοσύνη στην μορφή του μοντέλου του μαθητή, του ειδικού μοντέλου και του μοντέλου του tutorial. Τα ειδικά μοντέλα περιγράφουν τις σκέψεις ή στρατηγικές τις οποίες θα χρησιμοποιούσε ένας ειδικός προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα. Ο τρόπος που ο μαθητής προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα στο σύστημα συγκρίνεται με το μοντέλο του ειδικού. Όταν εντοπιστούν ασυμφωνίες, το μοντέλο του μαθητή θεωρείται ελαττωματικό και το μοντέλο του tutorial κάνει διάγνωση του προβλήματος παρέχοντας στην συνέχεια την κατάλληλη διορθωτική οδηγία. Τα έξυπνα περιβάλλοντα καθοδήγησης είναι πιο επιδέξια από τα παραδοσιακά tutorials και έτσι μπορούν να ανταποκριθούν με περισσότερη ευαισθησία στις ανάγκες του μαθητή. Παρόλο που τα έξυπνα περιβάλλοντα καθοδήγησης είναι πιο ισχυρά από τα παραδοσιακά tutorials, υπάρχουν πολλά προβλήματα με την διαδικασία του μοντέλου ειδικού/μαθητή που χρησιμοποιούνται σε αυτά.»

Τα Αλληλεπιδραστικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα (Interactive learning environments ILE)

Σύμφωνα με τον Soloway τα Αλληλεπιδραστικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα είναι εξειδικευμένα περιβάλλοντα, που παρέχουν πολλαπλές δυνατότητες αναπαράστασης των εννοιών μέσα από τις ενέργειες του μαθητή. Ο Papert και ο diSessa τα ονομάζουν "περιβάλλοντα προγραμματισμού".

Βασικά χαρακτηριστικά Αλληλεπιδραστικών Μαθησιακών Περιβαλλόντων

Κάνουμε μία σύντομη αναφορά σε μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά των Αλληλεπιδραστικών Μαθησιακών Περιβαλλόντων.

Ανοιχτό περιβάλλον Τα περιβάλλοντα αυτά δεν έχουν μέσα τους κάποιο μηχανισμό ο οποίος να κατευθύνει ή να κάνει ερωτήσεις στο χρήστη. Επιτρέπουν να κάνει ότι θέλει ο χρήστης.

Μικρόκοσμος Υπάρχουν τα οποία είναι πιο γενικευμένα και έχουν ορισμένους πολύ βασικούς κανόνες οι οποίοι αφήνουν ελεύθερο το χρήστη να χτίσει προς όποια κατεύθυνση θέλει. Έτσι για παράδειγμα έχεις τέσσερις κανόνες σε μια οντότητα πάνω στον υπολογιστή: πήγαινε μπρος – πίσω, στρίψε δεξιά ή αριστερά και έτσι σε αφήνει ελεύθερο να χτίσεις ότι θέλεις. Τα τελευταία χρόνια έχουν κατασκευαστεί αρκετοί μικρόκοσμοι που υποστηρίζουν μαθηματικές έννοιες. Ειδικότερα για τη γεωμετρία έχουν κατασκευαστεί μικρόκοσμοι από τους οποίους οι σημαντικότεροι αναφέρονται παρακάτω: α)Το περιβάλλον Cabri-geometry β)το περιβάλλον Geometric Supposer (Schwartz &

Yerushalmy, 1985) καθώς και γ) το περιβάλλον Geometer's Scketch-pad (Klotz & Jackiw, 1988)

Περιβάλλοντα CAD και περιβάλλοντα προγραμματισμού Τα Αλληλεπιδραστικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα έχουν χαρακτηριστεί κυρίως σαν περιβάλλοντα σχεδιασμού και προγραμματισμού. Μπορεί κάποιο περιβάλλον να έχει και τα δύο στοιχεία ή μόνο ένα από αυτά. Λέγοντας περιβάλλον προγραμματισμού, εννοείται ότι αναφερόμαστε στο μέσο χρήστη και όχι στον προγραμματιστή.

Προγραμματισμός για τον χρήστη Οι γλώσσες προγραμματισμού χαρακτηριστικά αυτά είναι ότι είναι πολύ υψηλού επιπέδου και ότι δίνεται μεγάλη σημασία στο σημασιολογικό τομέα, επειδή δεν μας νοιάζει να μπορούμε να έχουμε πρόσβαση σε πράγματα που κάνει η μηχανή.

Πολλαπλή αναπαράσταση ιδεών Μια έννοια αναπαρίσταται μέσω πολλών συμβολικών μέσων. Για παράδειγμα μπορεί ο μαθητής να βλέπει συγχρόνως τον τύπο τη γραφική παράσταση και τις τιμές μιας συνάρτησης. Έτσι μέσα από ένα πείραμα, με μία ενέργεια χρησιμοποιούμε πολλές συμβολικές μεθόδους για μια έννοια.

Ακόμη άλλα χαρακτηριστικά που δεν θα αναπτύξουμε εδώ αναφέρονται ως η συνεργασία η ανοικοδομησιμότητα και η διαφάνεια.

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

Bruner, J., (1966) *Toward a theory of instruction*, Harvard University Press, .

Jonassen, D. H., Carr, C., & Yueh, H.-P. (1998).*Computers as Mindtools for Engaging Learners in Critical Thinking*.

Jonassen D. & Reeves T., (1995) *Learning with Technology: Using computers as cognitive tools, Hand Book of Research for Educational Communications and Technology*, Macmillan Library

Papert S. Computer Criticism vs Technocentic Thinking M.I.T. Cambridge Massachusetts

Papert Seumour (1991) *Νοητικές Θύελλες* Εκδόσεις Οδυσσέας Αθήνα

diSessa A. & Abelson H. Boxer: A Reconstructible Computational Medium Communications of the ACM / Semtember 1986 / Vol 29, No 9

Tall David (1993j) *Computer environments for the learning of mathematic*.

Τουμάσης Μπάμπης Αρβανίτης Τάσος (2003) Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ Εκδόσεις Σαββάλας Αθήνα

Καλαβάσης Φραγκίσκος (1997) *Η Επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος στους Στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Θέματα διδακτικής μαθηματικών – III, διδακτική μαθηματικών και νέες τεχνολογίες. Επιμέλεια Καλαβάσης Φρ. - Μεϊμάρης Μ. σελ. 21-38 Πανεπιστήμιο Αιγαίου Gutenberg. Αθήνα.

Κόμης Βασίλης (2004) Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των τεχνολογιών της πληροφορίας και των επικοινωνιών Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών Αθήνα

Μακράκης, Β. (2000), *Υπερμέσα στην Εκπαίδευση*, Αθήνα: Μεταίχμιο

Μικρόπουλος, Τ. (2001), *Εκπαιδευτικό Λογισμικό*. Αθήνα: Κλειδάριθμος

Ράπτης Αρ. & Ράπτη Αθ. (2001), Διδασκαλία και Μάθηση στην Εποχή της Πληροφορίας. Συνολική προσέγγιση, Αθήνα

Ράπτης, Αρ., Ράπτη, Αθ. (1997), Πληροφορική και Εκπαίδευση, Συνολική προσέγγιση, Αθήνα

Φράγκου Χ. ΨΥΧΟΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ: θέματα παιδαγωγικής ψυχολογίας παιδείας διδακτικής και μάθησης Εκδόσεις Παπαζήση. Αθήνα 1977

6.2 ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγή

Σ' αυτό το κείμενο παρουσιάζονται απόψεις και εκτιμήσεις που περιστρέφονται γύρω από τις δυνατότητες και το πλαίσιο αξιοποίησης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών.

Αφετηρία και κοινός τόπος των απόψεων και των εκτιμήσεων για τις δυνατότητες και το πλαίσιο αξιοποίησης των ΤΠΕ στην διδακτική πράξη είναι ότι εισάγουν νέες δυνατότητες, στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών, οι οποίες όμως απαιτούν αναδιάρθρωση των διδακτικών μας πρακτικών και αντιλήψεων. Η απόκτηση ικανοτήτων από τους εκπαιδευτικούς για την αποτελεσματική αξιοποίηση των ΤΠΕ είναι ένας από τους κρίσιμους παράγοντες που διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό το πλαίσιο αξιοποίησής τους.

Οι δυνατότητες που προσφέρουν οι ΤΠΕ απετέλεσαν τα σημεία εστίασης όσων επιχειρούν να προτείνουν, να σχεδιάσουν και να εφαρμόσουν καινοτόμες παιδαγωγικές παρεμβάσεις στη διδασκαλία και τη μάθηση. Αν και υπάρχουν φωνές που εξακολουθούν να βλέπουν με δισταγμό τέτοιες παρεμβάσεις, δεν μπορούμε παρά να ισχυριζόμαστε ότι ο εκσυγχρονισμός ενός εκπαιδευτικού συστήματος πρέπει να περιλαμβάνει τις σύγχρονες τεχνολογίες και τις επικοινωνίες και να ενσωματώνει τον λεγόμενο ψηφιακό πολιτισμό. Αν σήμερα συζητούμε τον τρόπο αξιοποίησης των υπολογιστικών συστημάτων είναι γιατί προσπαθούμε να εντάξουμε στο σημερινό σχολείο ένα νέο πολιτισμό. Ένα πολιτισμό που απαιτεί από τα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας διαφορετικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση, ικανότητες στην αξιοποίηση των εργαλείων στο σχεδιασμό περιβαλλόντων μάθησης και νέους ρόλους στη διδακτική διαχείριση ανθρώπων, εργαλείων και καταστάσεων μάθησης.

Τα Μαθηματικά και οι ΤΠΕ

Το αρχικό ερώτημα που θα πρέπει να μας απασχολήσει είναι το κατά πόσο και με ποιο τρόπο τα Μαθηματικά, ως γνωστικό αντικείμενο, επηρεάζονται από την εισαγωγή των ΤΠΕ τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην επιστήμη εν γένει.

Η εμπλοκή σε διερεύνηση επιστημολογικών ερωτημάτων για την φύση των μαθηματικών οντοτήτων δεν θα πρέπει να αποτελέσει για την εκπαιδευτική κοινότητα άμεση προτεραιότητα. Αυτό προς το οποίο όμως θα πρέπει να εστιάσουμε είναι ο μετασχηματισμός του τρόπου με τον οποίο κάνουμε Μαθηματικά. Ο τρόπος με τον οποίο τα εργαλεία των ΤΠΕ διαμεσολαβούν στη δημιουργία των μαθηματικών αναπαραστάσεων επαναπροσδιορίζει όχι την φύση των μαθηματικών οντοτήτων καθαυτών αλλά το νόημά τους. Το νόημα των μαθηματικών δράσεων και αναπαραστάσεων είναι συνδεδεμένο άρρηκτα με τα αναπαραστασιακά μέσα που διαθέτουμε και επομένως μετασχηματίζεται κάθε φορά που τα συμβατικά, στατικά μέσα (πίνακας, χαρτί, διαφάνειες) αντικαθίστανται από δυναμικά μέσα που αλληλεπιδρούν με τον χρήστη.

Η ποικιλία των καταστάσεων όπου οι μαθηματικές ιδέες δρουν σε αντικείμενα και λειτουργίες της καθημερινής μας ζωής αιτιολογούν τον ισχυρισμό ότι εισερχόμαστε σε μια νέα εποχή για τα Μαθηματικά και την σχέση τους με την κοινωνία. Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις γι αυτό, εκ των οποίων άλλες είναι συνδεδεμένες με τα Μαθηματικά αυτά καθαυτά και άλλες με την ανάπτυξη των ΤΠΕ. Αν επιχειρούσαμε να εντοπίσουμε συσχετίσεις μεταξύ των δύο αυτών τομέων της ανθρώπινης δραστηριότητας θα μπορούσαμε επισημάνουμε:

- ✓ Η θεαματική αύξηση της ισχύος των ΤΠΕ κάνει τώρα πολύ περισσότερα ερωτήματα επιδεκτικά υπολογισμών μέσω μοντέλων.
- ✓ Ζούμε σε μια κοινωνία όπου οι επικοινωνίες παίζουν μεγάλο ρόλο (αν όχι κυρίαρχο) και η διαχείριση μεγάλης μάζας δεδομένων απαιτούν να σκεφτούμε γι αυτά με μαθηματικούς όρους. Τα Μαθηματικά που απαιτούνται, για το σκοπό αυτό, παρουσιάζουν νέες προκλήσεις.
- ✓ Όλο και περισσότερο οι εικόνες γίνονται κύριο αντικείμενο μελέτης, και χρειάζεται να αποθηκευτούν, να συμπιεστούν, και να μεταφερθούν με ασφάλεια. Αυτό είναι ένας νέος τύπος αντικειμένων που απαιτείται από τους μαθηματικούς να το χειριστούν συστηματικά.
- ✓ Στοχαστικές όψεις κάποιων φαινομένων πρέπει σήμερα να μελετηθούν και να αναλυθούν σωστά με τη βοήθεια της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής.

Οι ΤΠΕ επεφύλασσαν για τα Μαθηματικά νέους ορίζοντες εφαρμογών και διάχυσης μέσα στο σώμα της επιστήμης και επομένως και της κοινωνίας. Αυτή η νέα κατάσταση μας επιτρέπει να αναφερόμαστε πλέον σε μαθηματικά προϊόντα όπως υπάρχουν και χημικά προϊόντα.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι ΤΠΕ επηρεάζουν το μαθηματικό corpus με δύο τρόπους. Από την μία αλλάζουν τη μορφή των αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών ενώ από την άλλη τα μετατρέπουν σε μοχλό ανάπτυξης διαχέοντάς τα μέσα σε εφαρμογές ευρείας χρήσης.

Η μάθηση των Μαθηματικών και οι ΤΠΕ

Ένα από τα θέματα τα οποία αναδύονται καθώς συνδέουμε τα Μαθηματικά με τις ΤΠΕ είναι και ο τρόπος με τον οποίο αυτές διαμεσολαβούν στη διαδικασία της μάθησης. Πολλοί θεωρούν ότι η εισαγωγή των ΤΠΕ στην μαθησιακή διαδικασία απετέλεσε γεγονός ισοδύναμο με αυτό της χρήσης της τυπογραφίας, την εποχή δηλαδή που πραγματοποιήθηκε η μετάβαση από τον πάπυρο στο βιβλίο. Η παραπάνω εκτίμηση δεν αποτελεί υπερβολή αν αναλογιστούμε τις δυνατότητες που παρέχουν τα εργαλεία αυτά στην εκπαιδευτική κοινότητα.

Μία από τις πλέον σημαντικές δυνατότητες των ΤΠΕ που θα πρέπει να αξιοποιηθούν είναι και αυτή που αφορά στη δημιουργία πλούσιων, πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθηματικών οντοτήτων. Οι αναπαραστάσεις στην οθόνη του υπολογιστή επιτρέπουν στον χρήστη να οδηγηθεί σε νέους, περισσότερο δυναμικούς τρόπους ανάπτυξης της σκέψης. Ένα δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό, κατά την Mariotti, όπως το Cabri εισάγει ένα ιδιαίτερο είδος εικόνων που μπορούν να συρθούν και να αλλάξουν κάτω από την επίδραση του συρσίματος (Mariotti, 2003). Από την προοπτική του Vygotsky, με το dragging δημιουργείται ένα «εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης». Ο N.Balacheff ισχυρίζεται ότι αυτή η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα Μαθηματικά είναι μια διαδικασία μοντελοποίησης. Θεωρείται ότι το υπολογιστικό περιβάλλον συμβάλλει με την "αλλαγή" γλώσσας - δεδομένου ότι το λογισμικό χρησιμοποιεί τη δική του γλώσσα επικοινωνίας κι αλληλεπίδρασης- στην αλλαγή του τρόπου επικοινωνίας αποσκοπώντας και επιτυγχάνοντας καλύτερα αποτελέσματα στη διαδικασία διδασκαλίας μάθησης, σε σχέση με την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία. Πάντως σε κάθε περίπτωση οι αναπαραστάσεις συνεπικουρούν στη μάθηση με πρωτεύουσες τις οπτικές, αλλά και τις όποιες άλλες που τα multimedia και hypermedia στη σύγχρονη τεχνολογία υποστηρίζουν.

Επιπλέον οι ΤΠΕ αποτελούν εργαλεία που δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή για: έκφραση, διερεύνηση, πειραματισμό, συνεργασία, επικοινωνία, και κοινωνικοποίηση, αμφισβήτηση, αναζήτηση, διαπραγμάτευση, ανακάλυψη, εξ αποστάσεως συνεργασία, και ασύγχρονη συλλογικότητα. Επίσης, ο David Tall(1993j) σημειώνει ότι «τόσο η κάθετη όσο και η οριζόντια ανάπτυξη - κατά τον Piaget και τους συγγραφείς που ακολούθησαν μετά από αυτόν - θέτουν δυσκολίες στο άτομο. Η κάθετη ανάπτυξη απαιτεί άφθονο χρόνο για την εξοικείωση με μια δοσμένη διαδικασία για να της επιτρέψει να εσωτερικευτεί και επίσης για την απαραίτητη γνωστική αναδιοργάνωση της διαδικασίας σε αντικείμενο. Η οριζόντια ανάπτυξη απαιτεί την ταυτόχρονη κατανόηση δύο ή περισσοτέρων διαφορετικών αναπαραστάσεων και τις συνδέσεις μεταξύ τους, το οποίο είναι πιθανόν να προσδώσει γνωστική αγωνία στις βραχυπρόθεσμες πηγές της μνήμης. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να περιοριστούν με ποικίλους τρόπους χρησιμοποιώντας ένα περιβάλλον υπολογιστή για να παρέχει υποστήριξη.

Η κινητοποίηση διδασκόντων και διδασκομένων, όταν χρησιμοποιούν τις ΤΠΕ, είναι δεδομένη και συμβάλει στην ενεργοποίηση της σκέψης και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επικοινωνίας και συνεργασίας. Θεωρείται ότι η δυναμική των ΤΠΕ μπορεί να λειτουργήσει ως καταλύτης για αλλαγές της εκπαιδευτικής πρακτικής αλλά χωρίς, σε καμιά περίπτωση, την αντικατάσταση του διδάσκοντα. Διαμορφώνεται έτσι ένα περιβάλλον το οποίο έρχεται να εμπλουτίσει τη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία και εισάγεται ως παιδαγωγική καινοτομία στη σχολική πρακτική

Εκτιμούμε ότι το κλειδί των αλλαγών στη μαθηματική εκπαίδευση βρίσκεται στη μετατόπιση από την παραδοσιακή εστίαση στην αλγοριθμική ευχέρεια, στην αναπαράσταση καταστάσεων προβλήματος και στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συντονίζονται μεταξύ αναπαραστάσεων καθώς επίσης να δημιουργούν και να επεξηγούν νέες.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι οι εν λόγω τεχνολογίες θα πρέπει να ειδωθούν σαν ένα εργαλείο το οποίο παρέχει δυνατότητες για βελτίωσης της μαθησιακής διαδικασίας και όχι ως πανάκεια που θα επιλύσει τα προβλήματα του υπάρχοντος διδακτικού συστήματος. Δεν είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς ότι το εκπαιδευτικό λογισμικό είναι σε θέση να εξασφαλίσει τη μάθηση των Μαθηματικών, εξαλείφοντας τις δυσκολίες που παρατηρούνται στα παραδοσιακά περιβάλλοντα. Όπως κάθε εργαλείο που επινοείται και κατασκευάζεται από τα ανθρώπινα όντα, η χρήση των ΤΠΕ μπορεί να επιλύσει κάποια προβλήματα αλλά και να δημιουργήσει κάποια άλλα. Η οποιαδήποτε αξιολόγηση σχετικά με την υπεροχή της ή όχι στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θα επιτευχθεί μέσα στην διδακτική πρακτική.

Επομένως, οι ΤΠΕ δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν στο μάθημα των Μαθηματικών απλώς επειδή υπάρχουν αλλά γιατί σε κάποιες περιπτώσεις προσφέρουν τη δυνατότητα για μια πλουσιότερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την ενεργοποίηση περισσότερων αισθήσεων, αυξάνοντας συνάμα και τα κίνητρα μάθησης χωρίς να αντικαθιστούν τίποτα στο υπάρχον εκπαιδευτικό περιβάλλον: ούτε το σχολικό βιβλίο, ούτε το δάσκαλο, ούτε το μαυροπίνακα ούτε την κιμωλία.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών και οι ΤΠΕ

Ένα από τα κυρίαρχα ερωτήματα που απασχολούν πολλούς παιδαγωγούς αλλά και αυτή την ενότητα είναι το εξής: *Πώς οι μαθητές κατανοούν τις συσκευές μάθησης και πώς η χρήση τους ενθαρρύνει τη μάθηση των Μαθηματικών;*

Από την διατύπωση της ερώτησης είναι φανερό ότι οι «συσκευές» που εμπλέκονται στη διδασκαλία και στη μάθηση θεωρούνται ως εργαλεία που μεσολαβούν στην απόκτηση πρόσβασης στις δραστηριότητες και στις δομές της γνώσης. Η έννοια *της μεσολάβησης των εργαλείων* που είναι κεντρική στις Vygotskian αναλύσεις της γνωστικής ανάπτυξης, θεωρεί ότι οι μαθητές έρχονται σε επαφή με δυο τύπους εργαλείων: τα σημεία (σημειωτικά συστήματα) όπως η γλώσσα ή τα μαθηματικά σύμβολα και τα τεχνικά-χειροποίητα εργαλεία, όπως τα υλικά αντικείμενα ή ο υπολογιστής. Στο σχολείο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια ευρεία ποικιλία τέτοιων εργαλείων όπως σημειωτικά συστήματα (γραφικές αναπαραστάσεις, αριθμητικά μοτίβα, αλγεβρικές σχέσεις κτλ.) και χειροποίητα αντικείμενα όπως ο κανόνας και ο διαβήτης ή ο υπολογιστής. Όλα αυτά όταν χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της διδασκαλίας έχουν σκοπό να εμπλέξουν τους μαθητές σε αλυσίδες ενεργειών (πρακτικές και διανοητικές) οι οποίες αποκτούν νόημα μέσα στο μαθησιακό περιβάλλον και στο κοινωνικοπολιτιστικό πλαίσιο της σχολικής τάξης. Επομένως, η ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησης των ΤΠΕ στη μάθηση των Μαθηματικών είναι, *πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν και ερμηνεύουν τις υλικές επιδείξεις των εργαλείων που είναι μέρος μιας πολιτιστικής πρακτικής της τάξη των Μαθηματικών*. Και η απάντηση μπορεί να προέλθει μόνο στο πλαίσιο της σχεδίασης κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων και της διδακτικής αξιοποίησης των εργαλείων στο περιβάλλον αυτό.

Αν και οι αντιλήψεις των παιδαγωγών για τη χρήση του υπολογιστή στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχουν τις ρίζες τους στη δεκαετία του 50, η δημιουργία του περιβάλλοντος της logo από τον Papert, έδωσε τον πρώτο υπολογιστικό περιβάλλον μάθησης που παρείχε τη δυνατότητα στους μαθητές να μελετήσουν τις κινήσεις ενός αντικειμένου (χελώνα) στην οθόνη του υπολογιστή. Ήταν η αρχή για την επινόηση περιβαλλόντων διδασκαλίας και μάθησης που έδιναν στον μαθητή τη δυνατότητα να πειραματίζεται και να δοκιμάζει τις ιδέες του. Αυτά τα περιβάλλοντα περιγράφηκαν από την αρχή ως μικρόκοσμοι, ως "μικρά πεδία Πιαζετιανών Μαθηματικών", στα οποία είναι δυνατός ο αναστοχασμός, η γενίκευση και η αφαίρεση που με τη σειρά τους οδηγούν στην ανάπτυξη νέων λογικομαθηματικών δομών. Ο όρος Πιαζετιανά Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να δώσει έμφαση στον ενεργητικό και κατασκευαστικό χαρακτήρα των Μαθηματικών, σε αντιπαράθεση με τα παραδοσιακά σχολικά Μαθηματικά.

Η ανάγκη βαθύτερης και ουσιαστικότερης αξιοποίησης των ΤΠΕ στη διδασκαλία και στη μάθηση των Μαθηματικών έδωσε στην έννοια του **μικρόκοσμου** περισσότερο εστιασμένα παιδαγωγικά χαρακτηριστικά (Hoyles & Noss, 1992) καθώς και αρχές σχεδίασης αυτών (Eisenberg, 1995). Συνεπώς ένα από τα κρίσιμα ζητήματα που αφορούν στη διδακτική αξιοποίηση των ΤΠΕ αφορά στη σχεδίαση τέτοιων μικρόκοσμων από τους εκπαιδευτικούς.

Ακολουθώντας τις αρχές σχεδιασμού που προτείνονται από τον M. Eisenberg [1995] και σε συνδυασμό με την επιθυμία να μπορεί αυτό να χρησιμοποιηθεί αποδοτικά και από άπειρους και από έμπειρους μαθητές, θεωρούμε ότι πρέπει να δίνεται έμφαση στην δημιουργία μιας διεπαφής άμεσου χειρισμού που να βρίσκεται σε μια ισορροπία με τον προγραμματισμό και να ευνοεί:

- ✓ Ως προς τον άπειρο μαθητή, τις οπτικά κατευθυνόμενες αλληλεπιδράσεις με τα αντικείμενα που χειρίζεται και διαπραγματεύεται,
- ✓ Ως προς τον άπειρο εκπαιδευτικό, την δυνατότητα να μπορεί να επέμβει σε μικρό μέρος του προγράμματος, ώστε ν' αλλάζει μερικά αντικείμενα (μερεμέτι),
- ✓ Ως προς τους έμπειρους - μαθητή και εκπαιδευτικό - τη δυνατότητα να μπορεί να επεμβαίνει στον κώδικα του προγράμματος και να διαμορφώνει ένα νέο περιβάλλον.

Αυτό συνεπάγεται τη δημιουργία ανοικτών υπολογιστικών περιβαλλόντων, πλούσιων σε έννοιες και διαδικασίες που αποτελούνται από κατανοητά και άμεσα χειριζόμενα εργαλεία. Έτσι, ο σχεδιασμός ενός τέτοιου μικρόκοσμου απαιτεί από τον εκπαιδευτικό-σχεδιαστή να σχεδιάσει και να ενσωματώσει σ' αυτόν:

- ✓ Μια επιστημολογία του γνωστικού τομέα που θα περιλάβει στον μικρόκοσμο.
- ✓ Μια σύλληψη της παιδαγωγικής ιδέας που θα υπηρετήσει.
- ✓ Ένα ανοικτό διερευνητικό και περιβάλλον.
- ✓ Μια ομάδα δραστηριοτήτων μέσω των οποίων θα επιτευχθούν οι στόχοι της μάθησης
- ✓ Μια πρόταση για την οργανική ένταξη του λογισμικού στη καθημερινή διδακτική πράξη.

Ένα εξίσου σημαντικό θέμα του πλαισίου αξιοποίησης των ΤΠΕ στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σημερινό σχολικό περιβάλλον αφορά το περιεχόμενο των μαθημάτων που διδάσκονται και το αν μπορεί να υποστηριχτεί η διδασκαλία τους με τον σχεδιασμό κατάλληλων μικρόκοσμων.

Καθώς το περιεχόμενο των Μαθηματικών επιλέχτηκε και σχεδιάστηκε για διδασκαλία στο παραδοσιακό σχολικό περιβάλλον του πίνακα και της κιμωλίας, είναι φανερό ότι δεν μπορεί να γίνει μια άμεση εισαγωγή των ΤΠΕ στη καθημερινή διδακτική πρακτική. Απαιτούνται κατάλληλες προσαρμογές και του περιεχομένου και της διδακτικής πρακτικής. Αυτές οι προσαρμογές εξασφαλίζουν ένα πλαίσιο αξιοποίησης των ΤΠΕ στη σημερινή κατάσταση.

Ως προς το περιεχόμενο, οι προσαρμογές έχουν δυο χαρακτηριστικά. Το πρώτο έχει να κάνει με τις επιλογές των θεμάτων της τρέχουσας ύλης. Το δεύτερο αφορά τον επανασχεδιασμό του προγράμματος σπουδών ώστε να αξιοποιούνται καλύτερα οι ΤΠΕ ως εργαλεία μεσολάβησης στη γνώση και στις πρακτικές της σχολικής ζωής.

Ως προς το πρώτο χαρακτηριστικό: Η επιλογή των θεμάτων της τρέχουσας ύλης αφορά σημαντικά τμήματα του γνωστικού αντικειμένου τα οποία δεν υποστηρίζονται καλά από άλλα μέσα και οι μαθητές συναντούν μεγάλες δυσκολίες. Η επιλογή τους ακόμα μπορεί να κατευθύνεται από κριτήρια όπως η ανάγκη για ανάδειξη των εννοιολογικών δομών ή η ανάγκη για προσομοιώσεις ή μοντελοποιήσεις που μπορούν να γίνουν στο υπολογιστικό περιβάλλον. Ένα ακόμα κριτήριο είναι η δυνατότητα διδακτικής αξιοποίησης των ειδικών χαρακτηριστικών των υπολογιστών για τη δημιουργία μαθησιακών εμπειριών που είναι αδύνατον ή τουλάχιστον πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθούν με διαφορετικό τρόπο στο περιβάλλον της παραδοσιακής διδασκαλίας και μάθησης. Για μερικά θέματα η χρήση των ΤΠΕ μοιάζει αυτονόητη καθώς είναι κατάλληλα από τη φύση τους για να διδαχθούν με τη βοήθεια του υπολογιστή. Είναι θέματα να επιτρέπουν στο μαθητή να περιγράφει, να προβλέπει, να εξηγεί και να διερευνά προβλήματα τα οποία αναφέρονται σε θέματα μεταβολών, συναλλαγών, μετρήσεων ή/και μελέτης γεωμετρικών αναπαραστάσεων με τη βοήθεια δυναμικών αλλαγών.

Ως προς το δεύτερο χαρακτηριστικό: Στο ερώτημα, *πώς αξιοποιούνται οι ΤΠΕ ώστε η μάθηση να είναι ουσιαστικότερη*, η απάντηση και δεν είναι εύκολο να δοθεί αλλά και δεν πρέπει, όσο οι αντιλήψεις γι’ αυτή παραμένουν αγκιστρωμένες στο παραδοσιακό σχολικό περιβάλλον μάθησης. Για παράδειγμα, όπως έχει πολλάκις παρατηρηθεί, η ένταξη των ΤΠΕ στη διδακτική διαδικασία συμβάλει στον μετασχηματισμό του ρόλου του εκπαιδευτικού, συνεισφέρει στην αλλαγή του τρόπου που μαθαίνει ο μαθητής και ταυτόχρονα μεταφέρει ένα μεγάλο μέρος της ευθύνης της μάθησης στον εκπαιδευτικό και στο μαθητή. Αν δεν συνυπολογιστεί αυτή η μεταφορά της ευθύνης από τους σχεδιαστές της εκπαιδευτικής πολιτικής και τους συντάκτες των αναλυτικών προγραμμάτων μάθησης στον εκπαιδευτικό και της ευθύνης της μάθησης από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή δεν μπορεί να δοθεί μια αξιόπιστη απάντηση. Έτσι, ένα πλαίσιο αξιοποίησης των ΤΠΕ που αφορά το δεύτερο χαρακτηριστικό που αναφέρθηκε παραπάνω, πρέπει να υποστηρίζει μια τέτοια διαδικασία.

Ένα χαρακτηριστικό στοιχείο που αφορά την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η συμβολή τους στο ξεπέρασμα των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Έτσι, στο πέρασμα των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο οι δυσκολίες αυτές διαμορφώνουν σημαντικά διδακτικά και μαθησιακά εμπόδια με παιδαγωγικές και κοινωνικές διαστάσεις. Οι πειραματικές δραστηριότητες που προσδιορίζονται με τη βοήθεια του υπολογιστή και εμπλέκουν τους μαθητές, δείχνουν να έχουν θετική επίδραση τόσο στην αντιμετώπιση αυτών των εμποδίων όσο και στην αναβάθμιση της σχέσης σχολείο – καθηγητής – μαθητής – γνωστικό αντικείμενο – κατάκτηση της γνώσης καθώς φαίνεται να εμπλουτίζει το μαθησιακό περιβάλλον και να βοηθάει προς αυτή την κατεύθυνση. Αλλά, ένα τέτοιο πλαίσιο αξιοποίησης των ΤΠΕ στη μάθηση είναι δύσκολο να υλοποιηθεί, εάν δεν είναι σαφώς προσδιορισμένες οι αρχές του ιδιαίτερα εκείνες που το διακρίνουν από το συμβατικό-παραδοσιακό πλαίσιο. Για παράδειγμα, οι μαθητές, ενώ έχουν την δυνατότητα να αξιοποιούν τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας για τη μάθησή της, εξακολουθούν να χρησιμοποιούν τα παραδοσιακά εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης όπως το βιβλίο, το χαρτί και το μολύβι ή τον κιμωλιοπίνακα και να σχεδιάζουν τα γεωμετρικά σχήματα με τον κανόνα και το διαβήτη σε ένα παραδοσιακό περιβάλλον στο οποίο ο εκπαιδευτικός αρκείται απλώς να «μεταφέρει» τις εντολές του προγράμματος σπουδών (μέσω της διδασκαλίας) στον μαθητή, ο οποίος περιμένει να αξιολογηθεί για αυτές τις εντολές.

Φαίνεται λοιπόν ότι μία σημαντική προϋπόθεση αξιοποίησης των ΤΠΕ στη μάθηση αφορά τον πολιτισμό που επικρατεί στο σχολικό σύστημα, ο οποίος θα πρέπει να επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να γίνει συνδιαμορφωτής του περιεχομένου της μάθησης και στον μαθητή συνδιαμορφωτή της δικής του μάθησης.

Για την αξιοποίηση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση είναι ανάγκη να ληφθούν υπόψη πτυχές που αφορούν την παιδαγωγική τους αξία και τις μαθησιακές δυνατότητες που οι ίδιες προσφέρουν, όπως:

- ✓ Η καλλιέργεια των μαθητών με επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
- ✓ Το ξεπέρασμα των γνωστικών εμποδίων των μαθητών.
- ✓ Οι πλούσιες αναπαραστάσεις οι οποίες ανοίγουν δρόμους για την παιδαγωγική αξιοποίηση του υπολογιστή μέσα από καταστάσεις που δεν είναι δυνατόν να γίνουν στην παραδοσιακή τάξη όπως προσομοιώσεις και μοντελοποιήσεις, στις οποίες κυριαρχούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και ο άμεσος χειρισμός αντικειμένων.
- ✓ Η ενίσχυση της θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στη μάθηση. Η δημιουργία δραστηριοτήτων στο υπολογιστικό περιβάλλον μπορεί να βοηθήσει στην ενοποίηση διαφορετικών διδακτικών συμπεριφορών αλλά και να ενισχύσει τη θετική στάση των μαθητών απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο. Πρέπει να επισημανθεί επίσης ότι καθώς οι περισσότεροι μαθητές έχουν θετική στάση απέναντι στον υπολογιστή, μπορούν να δημιουργηθούν καταστάσεις μάθησης που παρέχουν κίνητρα για ενεργητική συμμετοχή των μαθητών σε καταστάσεις μάθησης.
- ✓ Η ποιοτική βελτίωση της μάθησης. Με την παιδαγωγική αξιοποίηση του υπολογιστή μπορεί να καλλιεργηθούν στον μαθητή ικανότητες όπως να αυτενεργεί, να

συνεργάζεται, να εξερευνά, να διερευνά, να αναζητάει και να αξιολογεί πληροφορίες κ.άλ.

Επιμόρφωση στην παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ

Ένα πλαίσιο επιμόρφωσης που σκοπεύει στην εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση πρέπει να σχεδιάσει δράσεις που καθιστούν τον επιμορφούμενο εκπαιδευτικό ικανό να χειρίζεται τα εκπαιδευτικά λογισμικά, να σχεδιάζει με αυτά κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης και να γνωρίζει τις διδακτικές παραμέτρους που πρέπει να προδιαγράψει. Ένα τέτοιο πλαίσιο μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στην αλλαγή της αντίληψης των επιμορφούμενων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών και γενικότερα των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων.

Το πρόβλημα της αλλαγής της αντίληψης των εκπαιδευτικών είναι το δυσκολότερο στην εν λόγω επιμόρφωση. Η ένταξη των εργαλείων των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική πρακτική δεν φέρνει από μόνη της καμία αλλαγή. Μπορεί όμως να αποτελέσει μοχλό (αν γίνει σωστά) για την αναθεώρηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για το ρόλο τους στο σύνολο της εκπαιδευτικής πρακτικής. Γι’ αυτό θα πρέπει το πρόγραμμα σπουδών να αντιμετωπίσει τον επιμορφωτή/εκπαιδευτικό σαν ένα άτομο:

- ✓ που αναμένεται να ‛οικοδομήσει’ την πρακτική του πάνω στη διορατικότητά του για το τι σημαίνει ‛διδάσκω με στόχο την κατανόηση’ σε συνεχή αλληλεπίδραση με τους μαθητές του, τους συναδέλφους του, το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και
- ✓ με ενεργό και παραγωγική συμμετοχή σε ‛κοινότητες μάθησης’.

Σε σχέση με τους επιμορφωτές/εκπαιδευτικούς, οι οποίοι καλούνται να υλοποιήσουν ένα τέτοιο πρόγραμμα επιμόρφωσης χρειάζεται να αποκτήσουν κατάλληλα χαρακτηριστικά και αντιλήψεις που ευνοούν την επιτυχία των στόχων του προγράμματος. Μερικές από τις κατευθύνσεις που αφορούν στο ρόλο των επιμορφωτών/εκπαιδευτικών είναι οι ακόλουθες:

- ✓ Στην τάξη οι επιμορφωτές/εκπαιδευτικοί είναι περισσότερο οργανωτές του μαθησιακού περιβάλλοντος και διευκολυντές της μαθησιακής διαδικασίας παρά μεταφορείς της γνώσης.
- ✓ Έχουν μεταξύ των άλλων πρόσβαση σε τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας.
- ✓ Στην τάξη εργάζονται περισσότερο σαν μέλη μιας ομάδας επιμορφωτών/εκπαιδευτικών και είναι συνυπεύθυνοι με τους άλλους, αντιπαραθέτοντας τη γνώμη τους σε αυτή των συναδέλφων τους.

- ✓ Η τάξη δεν είναι ο μόνος τόπος στον οποίο δρουν γιατί, στο επίπεδο προγράμματος και οργάνωσης του επιμορφωτικού/σχολικού κέντρου, αναλαμβάνουν περισσότερες υπευθυνότητες μαζί με τους συναδέλφους τους.
- ✓ Καθώς το επιμορφωτικό/σχολικό κέντρο λειτουργεί όλο και περισσότερο σαν ένα ανοικτό μαθησιακό περιβάλλον δεν εργάζονται πλέον μόνο με τους συναδέλφους τους στο ίδιο κέντρο αλλά και με μέλη της κοινότητας, πρώτα από όλα με τους γονείς, καθώς επίσης και με συναδέλφους από άλλα επιμορφωτικά/σχολεία κέντρα από την ίδια χώρα ή από το εξωτερικό

Θα πρέπει να τονιστεί ότι όλες αυτές οι ιδιότητες ενδυναμώνουν και αυξάνουν την πολυπλοκότητα της διαπροσωπικής συνιστώσας της δραστηριότητας των επιμορφωτών/εκπαιδευτικών αφού θα πρέπει να είναι ικανοί να συνεργαστούν και να επικοινωνήσουν με μεγαλύτερη ποικιλία ανθρώπων σε διαφορετικά πλαίσια.

Στην πράξη η δραστηριότητα των επιμορφωτών/εκπαιδευτικών απαιτεί προσεκτική ανάλυση της κάθε μαθησιακής κατάστασης, της ανάπτυξης και χειρισμού των κατάλληλων μαθησιακών ευκαιριών, την αξιολόγηση των επιδράσεών τους στην απόδοση των επιμορφούμενων/μαθητών, και μία προσωπική και συλλογική ανατροφοδότηση στην όλη διαδικασία, με στόχο να οικοδομηθεί επαγγελματική γνώση και στάση. Επιπλέον, η κοινωνική ειδοποιός διαφορά αυτών των καθηκόντων των επιμορφωτών/εκπαιδευτικών είναι η δημιουργία σε μία κατάσταση συνεχούς εξέλιξης που απαιτεί δια βίου εκσυγχρονισμό των επαγγελματικών τους ικανοτήτων.

Ειδικότερα τώρα στα Μαθηματικά, για τον προσδιορισμό ενός πλαισίου εφαρμογής των ΤΠΕ στην σημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα, πρέπει να ληφθούν υπόψη προβληματικές που αναδεικνύουν την ωφελιμότητά του πλαισίου, το που στοχεύει, το τι επιδιώκει και κυρίως τι περιμένουμε να αλλάξει στη διδακτική διαχείριση της μάθησης και των στάσεων των μαθητών απέναντι στη μάθηση των Μαθηματικών. Και περιμένουμε αυτό να γίνει μέσω των αλλαγών που θα έχει ο ίδιος ο επιμορφωτής/ εκπαιδευτικός για μια σειρά ζητημάτων όπως:

- ✓ Αλλαγή στις επιστημολογικές του αντιλήψεις για τη φύση των Μαθηματικών
- ✓ Αλλαγή στην αντίληψή του για τον τρόπο μάθησης των Μαθηματικών
- ✓ Αλλαγή στη στάση του απέναντι στη μάθηση των Μαθηματικών από τους μαθητές.
- ✓ Αλλαγή στη διαχείριση των λαθών που κάνουν οι μαθητές αφού:
    - o ο υπολογιστής γίνεται ένας καθρέπτης του νου του χρήστη, εύκολα ο εκπαιδευτικός μπορεί να δει τι παρεμβαίνει για να δημιουργηθεί το λάθος και μπορεί να επέμβει καταλυτικά

  - ο υπολογιστής ενθαρρύνει τη διαδικασία των πολλαπλών δοκιμών με αποτέλεσμα την αποποινικοποίηση των λαθών.

- ✓ Αλλαγή στην ενορχήστρωση και διδακτική διαχείριση της τάξης.

Προτεινόμενα λογισμικά για την εκπαίδευση των επιμορφωτών και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Μαθηματικά

Βασικό κριτήριο επιλογής των προτεινόμενων λογισμικών αποτελεί το γεγονός ότι κάθε ένα από αυτά, αλλά και ο συνδυασμός τους, υποστηρίζει και καλύπτει τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών και επιπλέον εξυπηρετούν τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών, έτσι όπως αυτές περιγράφονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Δευτεροβάθμιας και Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Έτσι, βασικό χαρακτηριστικό των προτεινόμενων λογισμικών είναι ο ‘διερευνητικός τους χαρακτήρας’ και η υποστήριξη που παρέχουν στο σχεδιασμό και στην εκτέλεση συμμετοχικών σεναρίων δράσης, που περιλαμβάνουν πειραματισμό, παρατήρηση, εξαγωγή συμπερασμάτων, επανεξέταση.

Με τον όρο ‘διερευνητικός χαρακτήρας’ ενός λογισμικού εννοούμε ότι αυτό:

- ✓ Παρέχει τη δυνατότητα για εξερεύνηση, ερμηνεία και σχηματισμό ιδεών, έτσι ώστε οι μαθητές να οδηγούνται μέσα από τον προβληματισμό και το πείραμα, στην ανακάλυψη των υποκείμενων γεγονότων και συσχετισμών
- ✓ Δίνει έμφαση στην ανάπτυξη συλλογισμών υψηλότερου επιπέδου και δεξιοτήτων για την λύση προβλημάτων, παρά στην πρόσληψη μεγάλου όγκου μεμονωμένων δεδομένων
- ✓ Προσφέρει την ευκαιρία στους μαθητές να μαθαίνουν φτιάχνοντας, δομώντας χειροπιαστές κατασκευές, δίνοντας τη δυνατότητα για σύνθεση πειραματικών διατάξεων μέσω μηχανισμών συμβολικού ή οπτικού προγραμματισμού
- ✓ Βάζει τον μαθητή σε κεντρικό ρόλο ενεργού αρχιτέκτονα των ίδιων του των γνώσεων και δεξιοτήτων
- ✓ Παρέχει τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας ή φαινομένου και της ταυτόχρονης ή κατά βούληση χρήσης τους
- ✓ Ωθεί τους μαθητές στη γραπτή διατύπωση και συμβολική έκφραση των διαισθητικών τους αντιλήψεων
- ✓ Εμπνέει την πρόκληση προσφέροντας πρωτότυπες εμπειρίες και εμπλέκοντας τους μαθητές σε καταστάσεις για τις οποίες έχουν προσωπικό συμφέρον και κίνητρο για επένδυση

- ✓ Υποστηρίζει τη συνεργατική μάθηση μεταξύ ομάδων μαθητών
- ✓ Παρέχει εργαλεία μάθησης και όχι απλή παράθεση πολυμεσικού υλικού
- ✓ Υποστηρίζει τη διαθεματική προσέγγιση των γνωστικών αντικειμένων

Επίσης τα προτεινόμενα λογισμικά συνοδεύονται από οδηγίες χρήσης, βιβλίο καθηγητή και βιβλίο μαθητή και έχουν ήδη διανεμηθεί σε πολλά σχολεία της χώρας.

Με βάση τα προαναφερθέντα κριτήρια προτείνουμε τα εξής λογισμικά:

The Geometer's Sketchpad (GSP): Λογισμικό για διερευνητική μάθηση και πειραματισμό στα Μαθηματικά του Γυμνασίου και Λυκείου, με τη χρήση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

Microworlds Pro : Λογισμικό διερευνητικού χαρακτήρα. Αποτελεί ένα ολοκληρωμένο πολυμεσικό περιβάλλον προγραμματισμού και ανάπτυξης συνθετικών αλληλεπιδραστικών εργασιών. Προσφέρει δυνατότητες πολλαπλής αναπαράστασης της πληροφορίας. Υποστηρίζει τη δημιουργία εφαρμογών με τη γλώσσα προγραμματισμού Logo.

Cabri Geometry II : Λογισμικό για διερευνητική μάθηση και πειραματισμό στα μαθηματικά δημοτικού –γυμνασίου - λυκείου.

Function Probe: Διερευνητικό λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων, το οποίο υποστηρίζει και ενθαρρύνει τη δημιουργία και τη μελέτη συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ συμεταβαλλόμενων μεγεθών.

Modellus: Ανοικτό περιβάλλον για μοντελοποίηση, πειραματισμό και προσομοίωση μαθηματικών μοντέλων και την επεξεργασία τους μέσα από γραφικές παραστάσεις, πίνακες και κινούμενο σχέδιο.

Χελωνόκοσμος: περιβάλλον προγραμματισμού για συμβολική έκφραση μαθηματικών εννοιών, γεωμετρική αναπαράσταση διαδικασιών, δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων και την παρατήρηση των μεταβολών τους.

Παραδείγματα

Αριθμητικές Πρόοδοι-Γραμμικές Συναρτήσεις
Γεωμετρικές Πρόοδοι-Εκθετικές Συναρτήσεις

Με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών λογισμικών που έχουν δυνατότητες **πολλαπλών αναπαραστάσεων** μπορούμε να προσεγγίσουμε έννοιες με πολλούς τρόπους. Συγκεκριμένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας με αποτέλεσμα την βαθύτερη κατανόησή της. Το παράδειγμα που θα αναφέρουμε παρακάτω αξιοποιεί ακριβώς αυτήν τη δυνατότητα του Function Probe. Θεωρούμε επίσης ότι βοηθά στη **μαθηματική μοντελοποίηση** πραγματικών καταστάσεων.Τα Πρόγραμμα Σπουδών της Β/θμιας Εκπαίδευσης περιλαμβάνει τις έννοιες των γραμμικών και εκθετικών συναρτήσεων. Περιλαμβάνει επίσης τις έννοιες της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Οι έννοιες αυτές συνδέονται, αλλά οι μαθητές και οι μαθήτριες δύσκολα το συνειδητοποιούν. Συνειδητοποιούν δηλαδή δύσκολα ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των $a_{n+1} = a_1 + n\omega$ και της $y = ax + b$ ή των $a_{n+1} = a_1 \cdot \lambda^n$ και της $y = b \cdot a^x$. Το παράδειγμα που προτείνεται παρακάτω εντάσσεται στη διδασκαλία της Άλγεβρας Β' τάξης Λυκείου, και έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να διακρίνουν τη σύνδεση των εννοιών που αναφέραμε παραπάνω. Επίσης να συγκρίνουν τους ρυθμούς με τους οποίους μεταβάλλονται οι τιμές των γραμμικών και των εκθετικών συναρτήσεων και να κατανοήσουν ότι:

- η σταθερή διαφορά σε μια αριθμητική πρόοδο παραπέμπει ακριβώς στην κλίση της γραμμικής συνάρτησης και ότι ο πρώτος όρος της προόδου σχετίζεται, αν δεν είναι ο ίδιος, με την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η γραμμική συνάρτηση τέμνει τον άξονα των y.
- ο σταθερός λόγος σε μια γεωμετρική πρόοδο παραπέμπει άμεσα στην βάση της εκθετικής συνάρτησης και ότι ο πρώτος όρος της προόδου σχετίζεται αν δεν είναι ο ίδιος, με τη σταθερά b στη μορφή $y = ba^x$

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση

Δίνονται στους μαθητές/τριες τα ακόλουθα σχετικά με τις αριθμητικές προόδους ζητήματα τα οποία και ζητείται να περιγράψουν με μαθηματική γλώσσα:

1. Ένα δοχείο 50 λίτρων είναι κενό. Ανοίγετε τη βρύση, και το δοχείο γεμίζει με ένα ρυθμό 3,4 λίτρα ανά λεπτό.
2. Ας υποθέσουμε ότι έχετε αποταμιεύσει ένα ποσόν 80 € για να δίνετε κάθε εβδομάδα 6,5 € χαρτζιλίκι στο μικρό σας αδελφό.

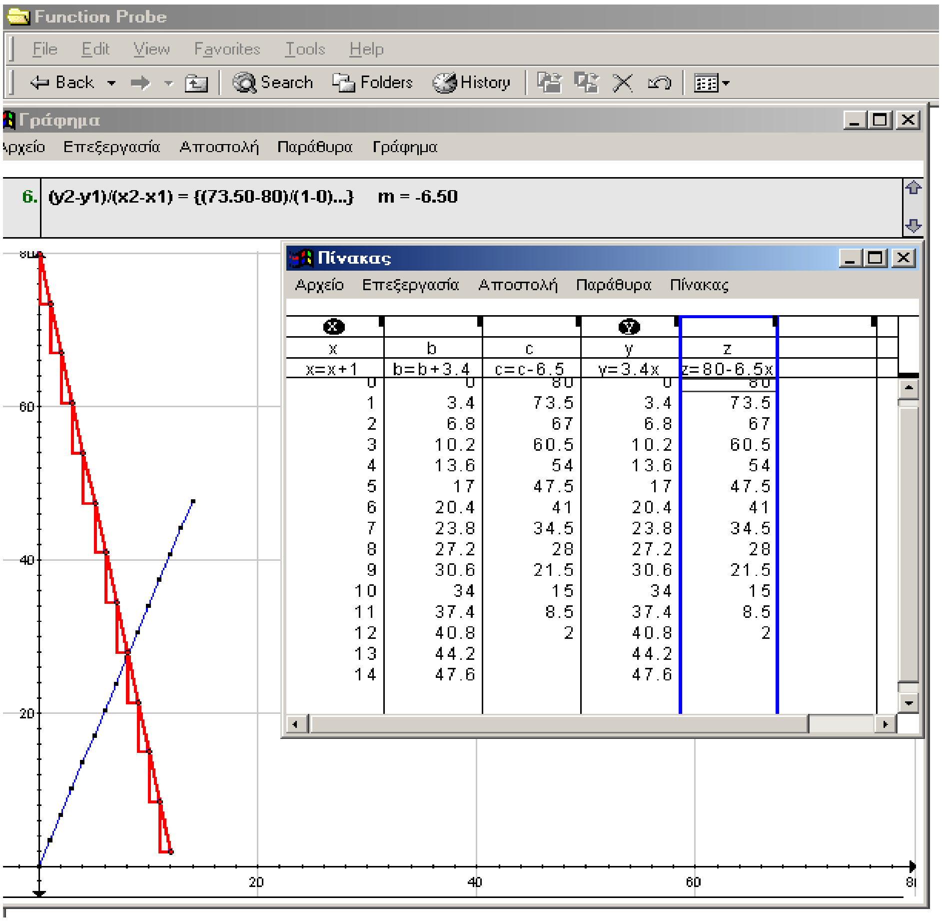
Θα δημιουργηθεί πίνακας τιμών για κάθε περίπτωση, με τη βοήθεια του Function Probe, θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στη στήλη Α και την εξαρτημένη στη στήλη Β. Θα χρησιμοποιηθεί ένας τύπος που δίνει, σε κάθε στήλη, τη νέα τιμή σε σχέση με την αμέσως προηγούμενή της. Ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν:

- Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Α;
- Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Β για κάθε περίπτωση;
- Τι είδους ακολουθίες έχουμε και γιατί;
- Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων;[1] Γιατί;
- Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό για να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων. Τι παρατηρείτε;

Για εργασία, οι μαθητές/τριες γράφουν μια παράγραφο στην οποία εξηγούν *γιατί* οι γραφικές παραστάσεις έχουν τα σχήματα που έχουν. Τονίζεται ότι οι συναρτήσεις είναι γραμμικές λόγω της σταθερής κλίσης: δηλαδή σε κάθε σταθερή αύξηση στο χρόνο (που είναι μια προσθετική μεταβολή) έχουμε μια σταθερή μεταβολή (ξανά προσθετική) στην εξαρτημένη μεταβλητή.

Κατόπιν ζητείται να χρησιμοποιήσουν σαφείς τύπους, δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη στήλη Α ως στήλη των προτύπων και τη Β ως στήλη των εικόνων τους και να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητικών προόδων και γραμμικών μοντέλων.

[1] Μπορεί να εξεταστεί η διαφορά που υπάρχει στα ζητήματα αυτά: το πρώτο αφορά μεταβλητή που παίρνει όλες τις τιμές ενός διαστήματος και το δεύτερο μεταβλητή με διακριτές τιμές.



Εικόνα 1

Με ανάλογο τρόπο θα πρέπει να εξεταστεί το θέμα που αφορά στις έννοιες γεωμετρική πρόοδος και εκθετική μεταβολή. Δίνονται στους μαθητές/τριες τα ακόλουθα σχετικά με τις γεωμετρικές προόδους ζητήματα τα οποία και ζητείται να περιγράψουν με μαθηματική γλώσσα:

1. Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε 1500€ στην Τράπεζα. Η επένδυση αυξάνει με έναν ρυθμό 7,6% το χρόνο.
2. Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε μια μπάλλα 2 μέτρα πάνω απο το έδαφος. Την αφήνουμε να πέσει και αυτή αναπηδά πολλές φορές. Σε κάθε αναπήδηση, επιστρέφει σε ένα ύψος που είναι τα 80% του προηγούμενου.

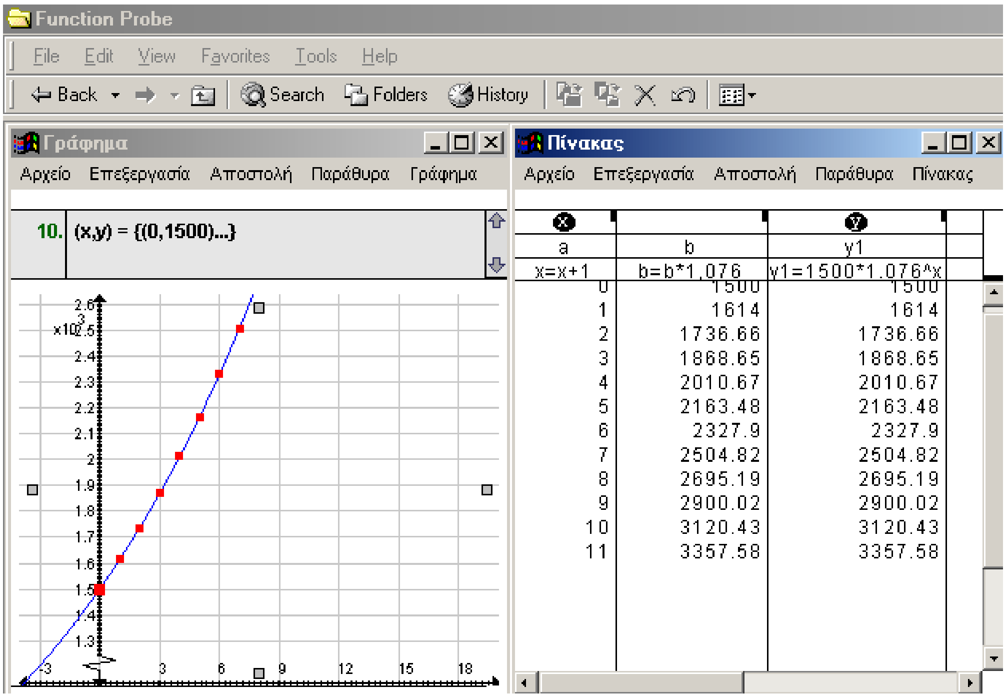
Θα δημιουργηθεί πίνακας τιμών για κάθε περίπτωση, με τη βοήθεια του Function Probe, θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στη στήλη Α και την εξαρτημένη στη στήλη Β. Θα χρησιμοποιηθεί ένας τύπος που δίνει, σε κάθε στήλη, τη νέα τιμή σε σχέση με την αμέσως προηγούμενή της. Ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν:

- Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Α;

- Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Β για τα δύο σενάρια αντίστοιχα;
- Τι είδους ακολουθίες έχουμε και γιατί;
- Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων; Γιατί;
- Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό για να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων. Τι παρατηρείτε;

Για εργασία, οι μαθητές γράφουν μια παράγραφο στην οποία εξηγούν *γιατί* οι γραφικές παραστάσεις έχουν τα σχήματα που έχουν. Τονίζεται ότι οι συναρτήσεις είναι εκθετικές επειδή για μια προσθετική αύξηση στην ανεξάρτητη μεταβλητή μια πολλαπλασιαστική μεταβολή δημιουργείται στην εξαρτημένη μεταβλητή.

Κατόπιν θέτουμε στους μαθητές τα ίδια προβλήματα αλλά τώρα αυτοί πρέπει να χρησιμοποιήσουν σαφείς τύπους, δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη στήλη Α ως στήλη των προτύπων και τη Β ως στήλη των εικόνων τους.



Εικόνα 2

Αυτοεπαναλαμβανόμενες δομές (Fractals)

ΤΟ ΘΕΜΑ ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ

Δυνατότητες των λογισμικών που θα αναδειχθούν.

Η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος που έχει την μορφή μιας επαναλαμβανόμενης δομής αποτελεί ένα σύγχρονο τομέα της γεωμετρίας στον οποίο ο υπολογιστής έχει τον πρώτο λόγο. Όταν η κατασκευή ενός σχήματος, αυτής της μορφής, υλοποιείται με λογισμικό που διαθέτει δυνατότητες **προγραμματισμού** τότε το σχήμα παρουσιάζεται μέσα από δύο **διαφορετικές αναπαραστάσεις** , την γεωμετρική και την συμβολική. Επιπλέον η εισαγωγή παραμέτρων στην κατασκευή και η μεταβολή των τιμών τους, με έναν μεταβολέα, μας δίνει την δυνατότητα **δυναμικού χειρισμού** και μελέτης του σχήματος.

Η βασική ιδέα

Με το παράδειγμα που ακολουθεί υπάρχει η δυνατότητα χρήσης του λογισμικού ‘Χελωνόκοσμος’ από την υπολογιστική πλατφόρμα ‘Αβάκιο’.

Οι επαναληπτικές διαδικασίες μας παρέχουν την δυνατότητα να συνοψίσουμε μία πολύπλοκη γεωμετρική κατασκευή σε ένα μικρό τμήμα συμβολικής έκφρασής του, δηλαδή σε ένα μικρό τμήμα ενός προγράμματος.

Όταν μέσα στον κώδικά κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος ενσωματωθεί το ίδιο το σχήμα τότε έχουμε μία αυτοεπεναλαμβανόμενη μορφή (fractal).

Τα μαθηματικά που είναι ενσωματωμένα σε αυτής της μορφής τα σχήματα μπορούν να αναδειχθούν μέσα από την μελέτη του κώδικα κατασκευής. Μία επιπλέον σημαντική δυνατότητα είναι η επέμβαση από τον χρήστη στον κώδικα κατασκευής, η αλλαγή του μαθηματικού πλαισίου και η διερεύνηση των μετασχηματισμών που υφίσταται το σχήμα.

Δραστηριότητες αυτής της μορφής δεν είναι δυνατόν να υλοποιηθούν μέσα σε μία συμβατική αίθουσα διδασκαλίας. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι το σχολικό βιβλίο της άλγεβρας στην Β΄ Λυκείου περιέχει μία άσκηση, στο κεφάλαιο των προόδων, η οποία αναφέρεται ακριβώς σε μία αυτοεπεναλαμβανόμενη μορφή και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για την υλοποίηση του παρόντος παραδείγματος.

Συνοπτική παράθεση των φάσεων και τρόπων υλοποίησης.

Στους μαθητές δίνονται δύο τμήματα ενός κώδικα που περιγράφουν δύο διαφορετικές αυτοεπαναλαμβανόμενες δομές (εικόνα 1).

```
για νιφάδα :χ
αν :χ < 25 [ μ :χ stop]
νιφάδα :χ/3
α 60
νιφάδα :χ/3
δ 120
νιφάδα :χ/3
α 60
νιφάδα :χ/3
τελος
```

```
για δενδρο :α
αν :α < 10 [stop]
μ :α
δ 30
δενδρο :α-10
α 60
δενδρο :α-10
δ 30
π :α
τελος
```

Εικόνα 1

Ο διδάσκων θέτει μία σειρά από ερωτήματα της μορφής:

-Ποια σχήματα μπορεί να κατασκευαστούν μέσω αυτών των διαδικασιών;

-Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι ενσωματωμένες στους κώδικες;

-Τι μετασχηματισμούς θα υποστεί το σχήμα αν ενσωματώσουμε ένα διαφορετικό μαθηματικό μοντέλο;

-Με ποιες επεμβάσεις στους κώδικες μπορούμε να εξασφαλίσουμε την επανάληψη της δομής 5 ή 6 ή 10 κ.λπ φορές;

Η ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Καταρχήν ο δημιουργός της δραστηριότητας έχει κατασκευάσει ένα αρχείο mwd με το λογισμικό 'Χελωνόκοσμος' στο οποίο έχουν συνδεθεί οι ψηφίδες Logo, Καμβάς, Μεταβολέας και η Χελώνα.

Πριν από την έναρξη της κύριας φάσης της δραστηριότητας καλό θα είναι να γίνουν πειράματα επαναληπτικών διαδικασιών στον κώδικα όπου μέσα σε μία διαδικασία να ενσωματώνεται αυθαίρετα η ίδια η διαδικασία. Π.χ

για σχήμα

μ 50

δ 100

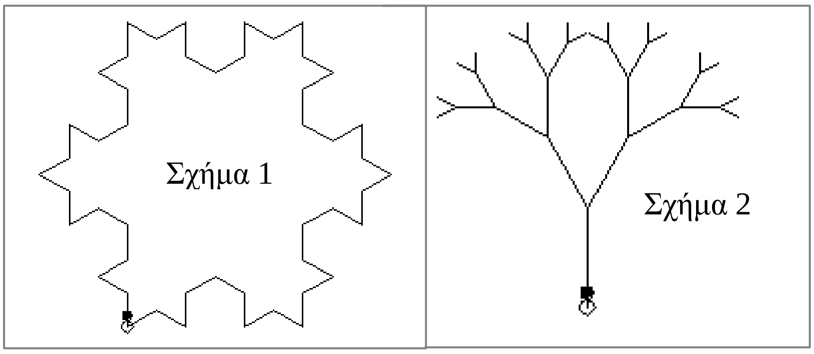
μ 40

σχήμα

τέλος

Εδώ θα διαπιστωθεί η επ άπειρο επανάληψη της διαδικασίας και η ανάγκη δημιουργίας εντολής για τον περιορισμό των επαναλήψεων.

Προηγείται διαπραγμάτευση για τα πιθανά σχήματα τα οποία θα μπορούσαν να προκύψουν όταν πραγματοποιηθεί η εκτέλεση του κώδικα της κύριας δραστηριότητας. Στην συνέχεια γίνεται εισαγωγή και εκτέλεση του κώδικα και η διαπραγμάτευση πλέον συμπληρώνεται με βάση τις εικόνες 1 και 2 στην οθόνη.



Εικόνα 2

Ακολουθεί η μαθηματική διερεύνηση των εντολών ώστε να αναδειχθούν τα μαθηματικά επαναληπτικά μοντέλα της φθίνουσας γεωμετρικής και αριθμητικής προόδου.

Σειρά τώρα έχει η αντικατάσταση των μοντέλων αυτών μέσα στους κώδικες και η μελέτη και ερμηνεία των μετασχηματισμών που υφίστανται τα γεωμετρικά σχήματα. Για παράδειγμα στην περίπτωση της 'νιφάδας' θα γίνει αντιληπτό ότι κάθε μεταβολή του παρονομαστή στην παράσταση :χ/3 μεταβάλλει το πλήθος των επαναλήψεων της δομής. Ακόμη θα γίνει διερεύνηση των μεταβολών που υφίσταται το σχήμα καθώς μεταβάλλονται οι τιμές της παραμέτρου χ μέσω του μεταβολέα.

Τέλος θα πραγματοποιηθεί αναζήτηση στο διαδίκτυο κωδίκων οι οποίοι δημιουργούν περισσότερο απαιτητικά σχήματα. Θα μελετηθεί η μαθηματική δομή των σχημάτων και θα δημιουργηθούν νέοι κώδικες οι οποίοι θα πλέον θα φέρουν το όνομα του κατασκευαστή τους.

Ενδεικτικοί δικτυακοί τόποι:

http://www.orillas.org/math/19971998/fract.html#Fractals%20in

http://www.logosurvey.co.uk/downloads/downloads/Fractal.logo

http://www.mathemagic.org/MOBM/fractals.html

Ελαχιστοποίηση Εμβαδού Χωρίου

Τάξη : Α΄ Λυκείου και Γ΄ Λυκείου

Λογισμικό: The Geometer's Sketchpad.

Δυνατότητες του Λογισμικού που θα αναδειχτούν:

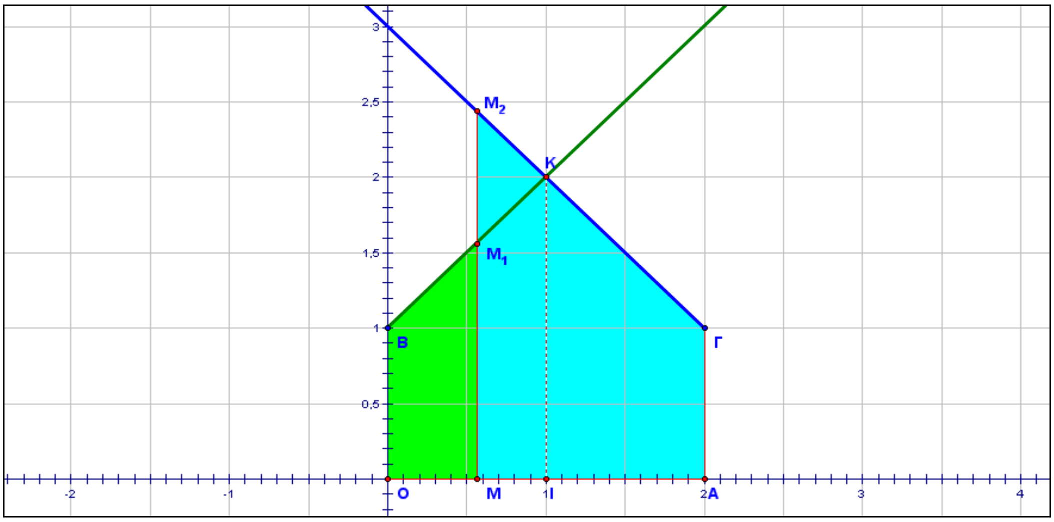
Με το παράδειγμα που προτείνεται αναδεικνύονται οι ακόλουθες δυνατότητες που προσφέρει το λογισμικό *«The Geometer's Sketchpad»*:

- Η δυνατότητα δημιουργίας πολλαπλών αναπαραστάσεων,
- Η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων και
- Η δυνατότητα διατύπωσης εικασιών.

Περιγραφή της Δραστηριότητας:

Στους μαθητές δίνεται προς επίλυση το παρακάτω πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^o : «Να βρείτε τη θέση του μεταβλητού σημείου Μ του τμήματος ΟΑ του παρακάτω σχήματος στην οποία το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων OMM_1B και $AMM_2Γ$ ελαχιστοποιείται».



Σχήμα 1.

Συνοπτική παράθεση των φάσεων υλοποίησης της δραστηριότητας:

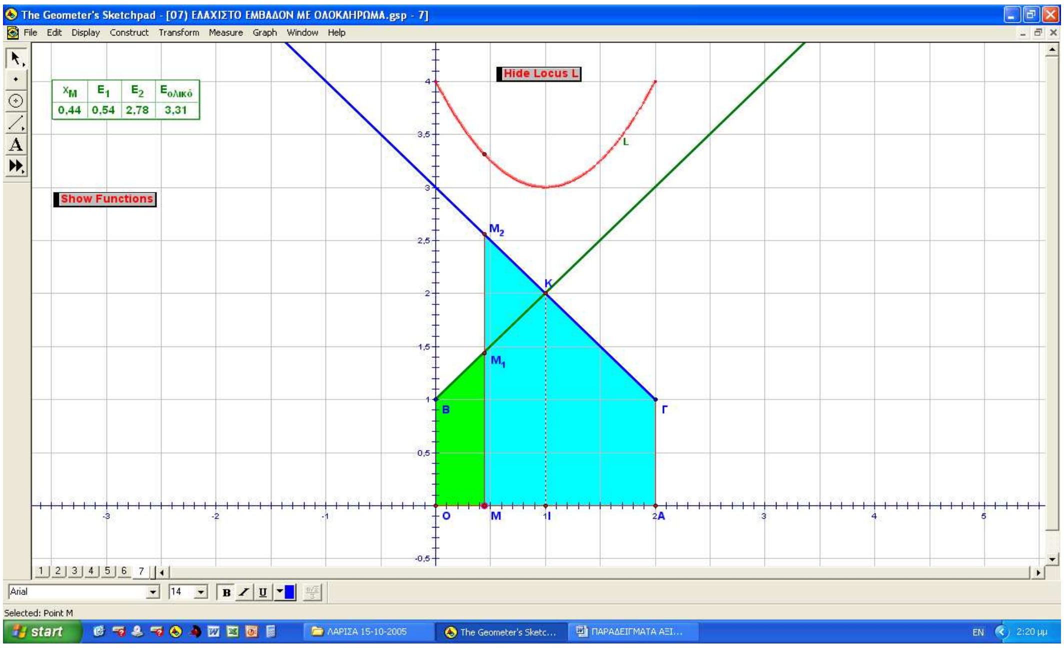
Στους μαθητές δίνεται ένα έτοιμο αρχείο Sketchpad το οποίο κατασκευάσαμε ακολουθώντας διαδοχικά τα παρακάτω βήματα:

Πρώτο Ορίσαμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και χαράξαμε την ημιευθεία ε_1 που έχει αρχή το σημείο Β(0,1) και διέρχεται από το σημείο Κ(1,2) και την ημιευθεία ε_2 που έχει αρχή το σημείο Γ(2,1) και διέρχεται από το σημείο Κ(1,2).

Δεύτερο Επιλέξαμε μεταβλητό σημείο Μ του τμήματος ΟΑ και φέραμε την κάθετο στο ΟΑ που τέμνει τις ημιευθείες ε1 και ε2 στα σημεία Μ1 και Μ2 αντιστοίχως. Στη συνέχεια υπολογίσαμε το άθροισμα $E = E_1 + E_2$ και των εμβαδών Ε1 και Ε2 των τραπεζίων ΑΜΜ2Γ και ΟΜΜ1Β.

Τρίτο Απεικονίσαμε το σημείο P(x, *E*), το οποίο εφοδιάσαμε με την εντολή *«χάραξη ίχνους»*.

Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα, δίνοντας στο σημείο Μ την εντολή να διαγράψει το τμήμα ΟΑ, να παρατηρήσουν τη μεταβολή του εμβαδού Ε συναρτήσει του μήκους x του τμήματος ΟΜ, μέσω *δύο αναπαραστάσεων* της συνάρτησης $E = E(x)$: α) ενός πίνακα τιμών και β) της γραφικής παράστασης αυτής (*Σχήμα 2*) και να διαπιστώσουν ότι το άθροισμα Ε των εμβαδών των τραπεζίων ελαχιστοποιείται, όταν το σημείο Μ πάρει τη θέση του μέσου του τμήματος ΟΑ.



Σχήμα 2.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούν να καταλήξουν οι μαθητές, αν παρατηρήσουν ότι κατά τη διάρκεια *της κίνησης του σημείου Μ* το άθροισμα Ε των εμβαδών των μεταβλητών τραπεζίων είναι ίσο με το εμβαδόν του πενταγώνου ΟΒΚΓΑ αυξημένο κατά το εμβαδόν του τριγώνου KM_1M_2. Επομένως το *E* ελαχιστοποιείται, όταν το εμβαδόν του τριγώνου KM_1M_2 μηδενιστεί, που συμβαίνει όταν το σημείο Μ πάρει τη θέση του μέσου του τμήματος ΟΑ.

Από τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E = E(x)$ οι μαθητές μπορεί να οδηγηθούν στη _διατύπωση της ακόλουθης εικασίας_ σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης $E = E(x)$, την οποία και καλούνται να αποδείξουν αλγεβρικά:

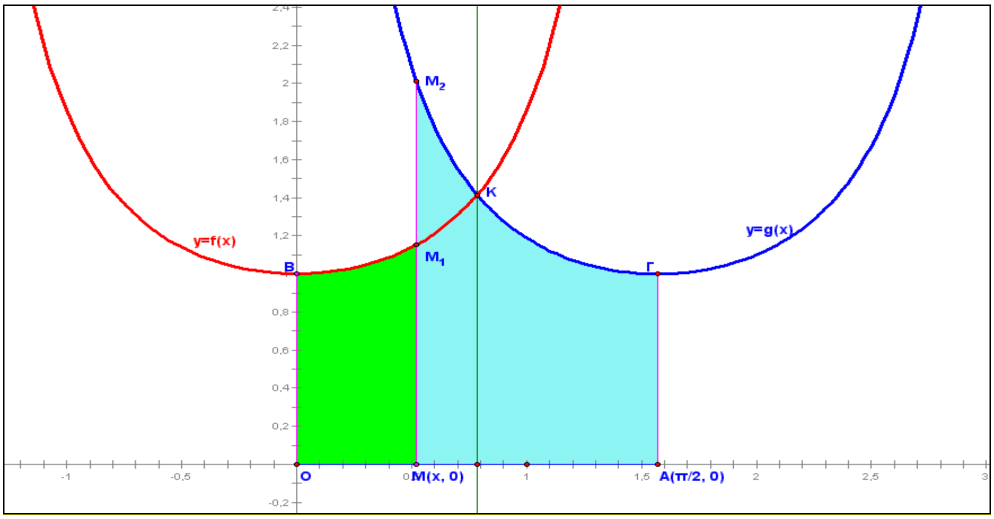
«Η συνάρτηση $E = E(x)$ είναι μια παραβολή με ελάχιστο το Ε(1)=2».

Ως _γενίκευση_ αυτού του προβλήματος μπορεί να δοθεί στους μαθητές της θετικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου το ακόλουθο πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ του τμήματος ΟΑ του παρακάτω σχήματος στην οποία το άθροισμα Ε των εμβαδών των χωρίων $ΟΜΜ_1Β$ και $ΑΜΜ_2Γ$ ελαχιστοποιείται, αν δίνεται ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν τύπους:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}.$$



Σχήμα 3.

Το πρόβλημα αυτό _έχει αυξημένο βαθμό δυσκολίας_, διότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι έχουν να υπολογίσουν την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$E(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{\pi/2} g(t)dt, \ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

και επιπλέον να μπορούν να υπολογίσουν το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx .$$

Η πρόσθεση κλασμάτων

Η πρόσθεση κλασμάτων αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία το συνηθισμένο λάθος που κάνουν οι μαθητές είναι να προσθέτουν αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Με την παρακάτω δραστηριότητα θα προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το λάθος, αναδεικνύοντας την ανάγκη μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα κατά την πρόσθεσή τους. Μια τέτοια προσέγγιση θα ξεκινήσει αντιμετωπίζοντας το παρακάτω πρόβλημα:

Πρόβλημα:

Μια βρύση σε 1 ώρα γεμίζει τα 2/5 μιας δεξαμενής. Μια άλλη βρύση σε 1 ώρα επίσης γεμίζει το 1/3 της ίδιας δεξαμενής. Αν και οι δύο βρύσες τρέχουν ταυτόχρονα μέσα στη δεξαμενή, τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσουν σε 1 ώρα;

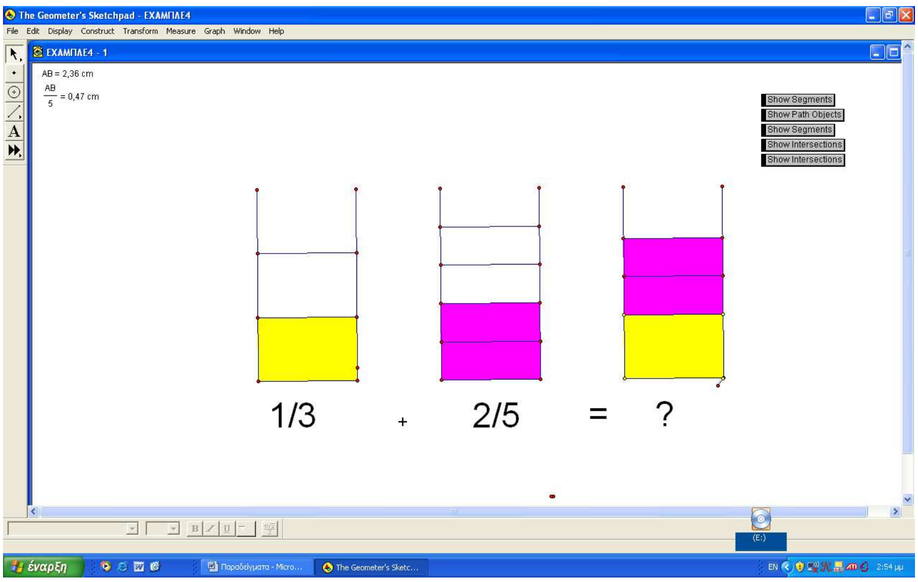
Τάξη:Η δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου.

Λογισμικό: .The Geometer's Sketchpad

Υλοποίηση:

Στους μαθητές δίδεται ένα έτοιμο αρχείο προγράμματος μέσα από το οποίο οπτικοποιούνται και υποστηρίζονται οι διάφορες φάσεις εκτέλεσης της δραστηριότητας. η οποία μπορεί να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα:

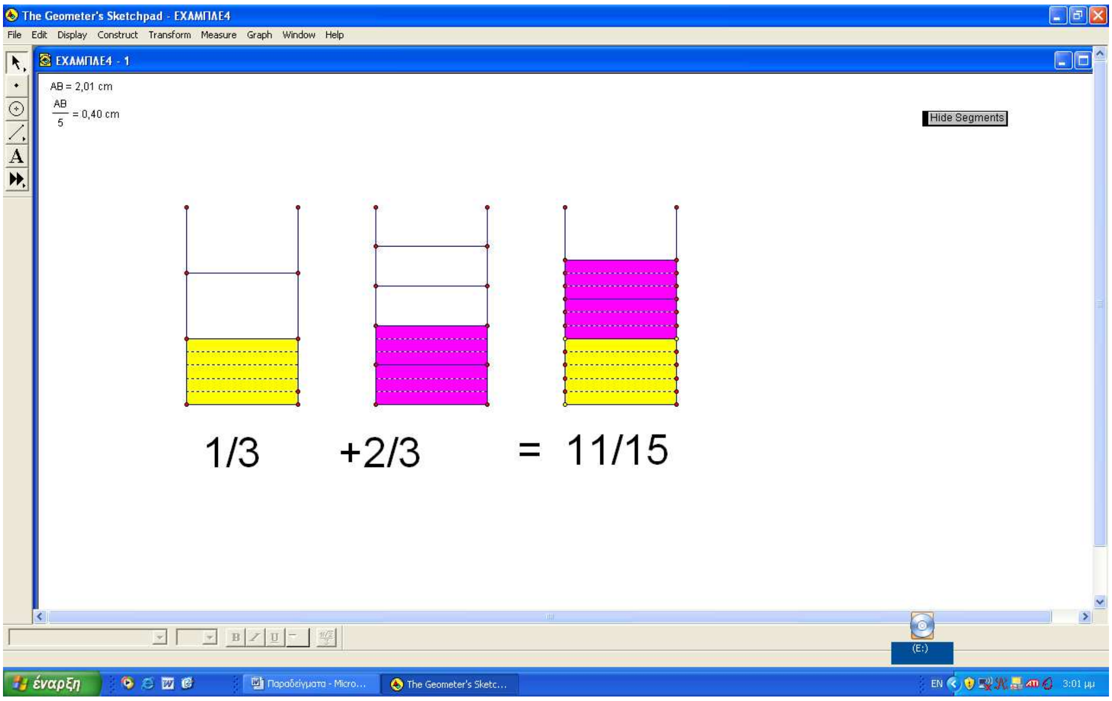
1.Επιχειρούμε μια πρώτη αναπαράσταση του προβλήματος μέσα από την παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1

Η προσπάθεια των μαθητών εστιάζεται τώρα στο να εκφράσουν ποιό μέρος του τρίτου δοχείου καταλαμβάνουν οι ποσότητες που προέρχονται από τα άλλα δύο δοχεία, αφού αυτή η έκφραση αποτελεί και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Η προβληματική αυτή θα αναδείξει την ανάγκη αναζήτησης σχέσης των τμημάτων -ποσοτήτων (που είναι στο τρίτο δοχείο), τόσο μεταξύ τους, όσο και με τη συνολική χωρητικότητα της δεξαμενής.

2.Η παραπάνω προβληματική μας οδηγεί στην ιδέα της αναζήτησης μιας κοινής μονάδας η οποία και θα γίνει πιο συγκεκριμένη με την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2

Οι μαθητές θα κληθούν τώρα να ερμηνεύσουν το σκεπτικό της επιλογής της συγκεκριμένης μονάδας και να γράψουν την ισότητα της πρόσθεσης τροποποιημένη αυτή τη φορά ως προς το πρώτο μέλος της και να διατυπώσουν τον κανόνα πρόσθεσης κλασμάτων.

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

Η ενότητα αυτή περιέχεται στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου» και αποτελεί το υπόβαθρο για τη μελέτη του θεωρήματος του Θαλή. Η επιλογή έγινε με στόχο να δείξουμε ότι όταν οι μαθητές εξοικειωθούν από προηγούμενες τάξεις με τη χρήση ενός γεωμετρικού λογισμικού, μπορούν άνετα να το χρησιμοποιούν και κατά τη διδασκαλία εννοιών που μέχρι τώρα διδάσκονται με παραδοσιακούς τρόπους.

Η ευκολία σχεδίασης, οι υπολογιστικές δυνατότητες, και η αξιοποίηση των εργαλείων μετασχηματισμών, ενθαρρύνει την εξερεύνηση και τον πειραματισμό με στόχο την επανανακάλυψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ένας από τους βασικούς σκοπούς της σύγχρονης διδακτικής, να μυηθούν, δηλαδή οι μαθητές στον πλήρη κύκλο της μαθηματικής δημιουργίας με στόχο τη βελτιστοποίηση και κατοχύρωση της μαθησιακής διαδικασίας.

Στη διδακτική προσέγγιση που ακολουθεί χρησιμοποιούμε το λογισμικό ‘The Geometer’s Sketchpad”.

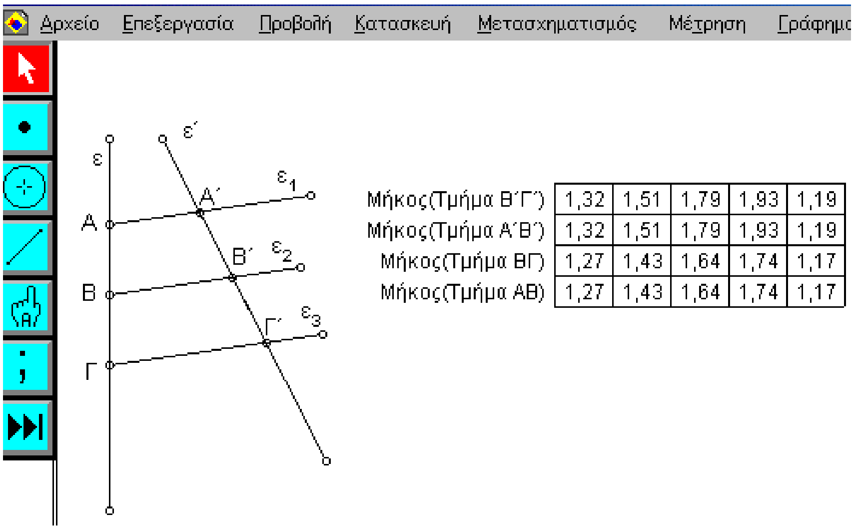
Διδακτική προσέγγιση :

Δίνεται στους μαθητές Φύλλο εργασίας στο οποίο περιέχεται σχέδιο με τις τρεις παράλληλες και μια τέμνουσα. Ζητείται να μετρήσουν τα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων και να τα συγκρίνουν. Το αρχείο του Sketchpad είναι ανοιχτό. Γράφουν τα αποτελέσματα.

Ζητείται να σχεδιάσουν άλλη μια τέμνουσα, και να ξανακάνουν το ίδιο για τα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων της νέας τέμνουσας. Γράφουν τα αποτελέσματα.

Ζητάμε να μας πουν τι παρατηρούν. Αν πιστεύουν ότι αυτό θα συμβεί κα με οποιαδήποτε άλλη τέμνουσα.

Χρησιμοποιούμε το αρχείο για να ενισχύσουμε αυτό που είναι τώρα πιθανόν μια εικασία. Εμφανίζουμε την τέμνουσα. Παρατηρούμε. Αλλάζουμε την θέση των ευθειών οι οποίες είναι έτσι φτιαγμένες ώστε αν τους αλλάξουμε την θέση με μετακίνηση ή περιστροφή να παραμένουν παράλληλες (αυτό είναι βασικό για να δουλέψει το αρχείο). Παρατηρούμε τις μετρήσεις κάθε φορά – συμπεραίνουμε.

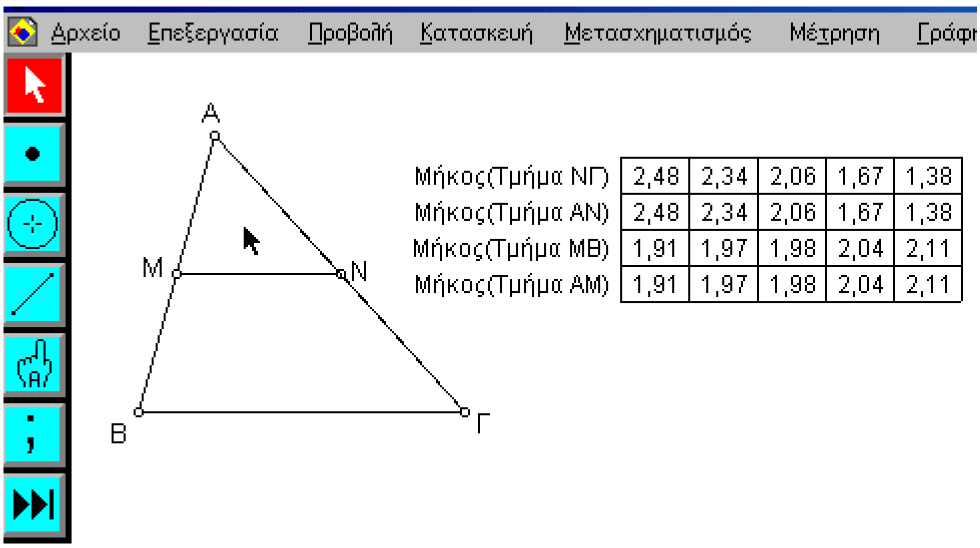


Απόδειξη

Ρωτάμε αν μπορούμε να το βεβαιώσουμε αυτό και με έναν μαθηματικό τρόπο; Να αποδείξουμε δηλαδή ότι Α΄Β΄= Β΄Γ΄;

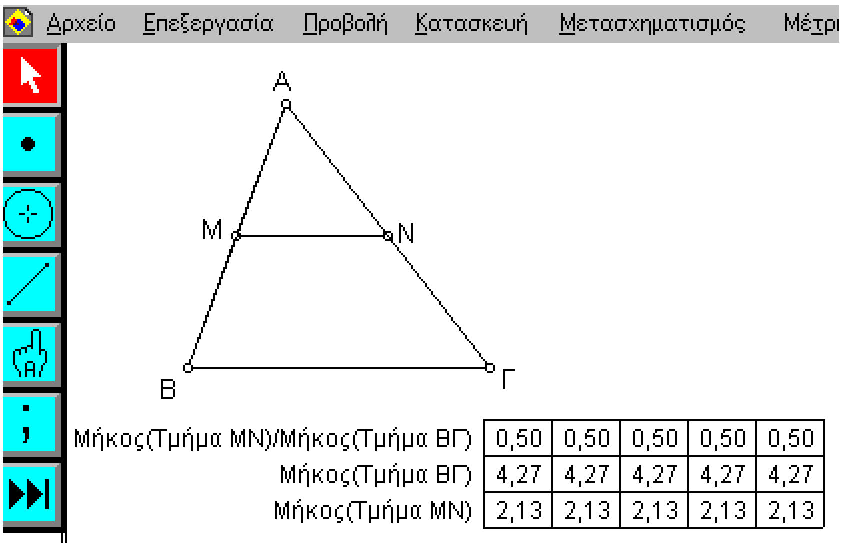
Προσπαθούμε να διατυπώσουμε έναν κανόνα για αυτό.

Στο τρίγωνο:Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΜΝ// ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ν. Ρωτάμε τους μαθητές τι μπορούν να πουν για το Ν. Ζητάμε να πειραματιστούν με το δεύτερο αρχείο και να διατυπώσουν έναν κανόνα γι' αυτό.



Στο φύλλο εργασίας τους λέμε να ενώσουν τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Ποια η θέση του τμήματος ως προς την τρίτη πλευρά(θυμίζουμε τι σημαίνει θέση μιας ευθείας ως προς μια άλλη). Διατυπώνουμε τον κανόνα.

Πειραματιζόμενοι στο τρίτο αρχείο προσπαθούμε να ανακαλύψουμε την σχέση μεταξύ του τμήματος που συνδέει τα μέσα των πλευρών και την τρίτη πλευρά. Διατυπώνουμε τον κανόνα. (δεν γίνεται απόδειξη).



Λύση μη συμβατικών εξισώσεων

ΤΟ ΘΕΜΑ ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ

Δυνατότητες των λογισμικών που θα αναδειχθούν.

Τα σύγχρονα εκπαιδευτικά λογισμικά μας δίνουν την δυνατότητα αφενός να λύνουμε περισσότερο απαιτητικά προβλήματα, από αυτά που μας επιτρέπουν τα συμβατικά εργαλεία, και αφετέρου να χρησιμοποιούμε διαφορετικές προσεγγίσεις για το ίδιο πρόβλημα. Το παράδειγμα που ακολουθεί στοχεύει στην ανάδειξη των δυνατοτήτων του λογισμικού function probe στην δημιουργία **πολλαπλών αναπαραστάσεων** και επομένως στην ευχέρεια του χρήστη να ακολουθήσει μία ποικιλία μεθόδων κατά την λύση εξισώσεων.**Η βασική ιδέα.**

Το αναλυτικό πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια προτείνουν την λύση εξισώσεων οι οποίες είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με απλό λογισμό και πολλές φορές με τυποποιημένη μεθοδολογία. Με την πρακτική αυτή παραμερίζονται εξισώσεις της μορφής f(x)=g(x) όπου οι f, g προέρχονται από διαφορετικά μαθηματικά πεδία π.χ η f να είναι λογαριθμική και η g πολυωνυμική. Παρέχοντας κατάλληλα εργαλεία στους μαθητές είναι δυνατόν να αντιμετωπίσουν αυτής της μορφής εξισώσεις με μία ποικιλία προσεγγίσεων ανάλογα το εργαλείο που χρησιμοποιούν.

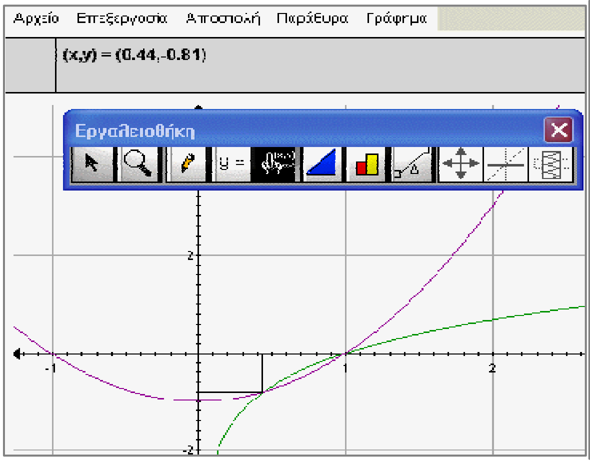
Η δραστηριότητα αρχίζει με την εξής ερώτηση:

Η εξίσωση $\ln x=x^2-1$ έχει μία προφανή ρίζα την x=1. Πως μπορούμε με την βοήθεια του λογισμικού να διαπιστώσουμε αν υπάρχει και άλλη ρίζα και πως μπορούμε να υπολογίσουμε την ρίζα αυτή;

Συνοπτική παράθεση των φάσεων και τρόπων υλοποίησης.

Προσέγγιση 1η "Τομή παραστάσεων"

- Γίνεται κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x^2-1$.
- Με το εργαλείο της εύρεσης συντεταγμένων μπορεί να γίνει μία πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας.
- Πραγματοποιείται αποκοπή σημείων, και στις δύο παραστάσεις, στην περιοχή γύρω από το σημείο τομής και αποστέλλονται στον πίνακα τιμών (εικόνα 1).



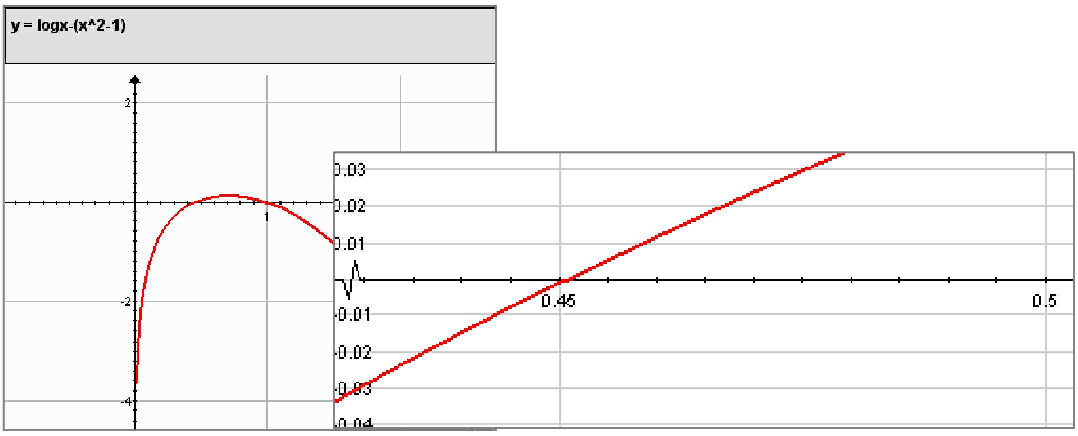
x	y	x	y
Οριζόντια	Κάθετα	Οριζόντια	Κάθετα
0.3	-1.20397	0.3	-0.91
0.31	-1.17118	0.31	-0.9039
0.32	-1.13943	0.32	-0.8976
0.33	-1.10866	0.33	-0.8911
0.34	-1.07881	0.34	-0.8844
0.35	-1.04982	0.35	-0.8775
0.36	-1.02165	0.36	-0.8704
0.37	-0.99425	0.37	-0.8631
0.38	-0.96758	0.38	-0.8556
0.39	-0.94161	0.39	-0.8479
0.4	-0.91629	0.4	-0.84
0.41	-0.8916	0.41	-0.8319
0.42	-0.8675	0.42	-0.8236
0.43	-0.84397	0.43	-0.8151
0.44	-0.82098	0.44	-0.8064
0.45	-0.79851	0.45	-0.7975
0.46	-0.77653	0.46	-0.7884
0.47	-0.75502	0.47	-0.7791
0.48	-0.73397	0.48	-0.7696
0.49	-0.71335	0.49	-0.7599
0.5	-0.69315	0.5	-0.75

Εικόνα 1

- Συγκρίνονται οι τιμές της πρώτης στήλης των τιμών y με την δεύτερη και εντοπίζεται η περιοχή στην οποία οι τιμές της πρώτης στήλης του y από μεγαλύτερες εξελίσσονται σε μικρότερες από αυτές της δεύτερης στήλης του y.

Προσέγγιση 2η ''Οι ρίζες της συνάρτησης f-g''

- Γίνεται κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\ln x-x^2+1$.
- Ακολουθεί αλλαγή κλίμακας με στόχο να γίνει εστίαση στο σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον x΄x (εικόνα 2).



Εικόνα 2

- Συνεχίζεται η αλλαγή κλίμακας με ακόμη μεγαλύτερη εστίαση σε μικρότερο διάστημα.
- ή συμπληρώνεται ο πίνακας τιμών με ζεύγη που αντιστοιχούν σε όλο και περισσότερο κοντινές περιοχές της ρίζας που προσεγγίζεται (εικόνα 3).

x	y=logx-(x^2)+1
0.45	-0.0010077
0.4501	-8.7551E-4
0.4502	-7.4339E-4
0.4503	-6.1134E-4
0.4504	-4.7936E-4
0.4505	-3.4745E-4
0.4506	-2.1561E-4
0.4507	-8.384E-5
0.4508	4.786E-5
0.4509	1.795E-4
0.451	3.1106E-4
0.452	0.0016229
0.453	0.00292785
0.454	0.00422592
0.455	0.00551714
0.456	0.00680153

Εικόνα 3

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΘΕΩΡΙΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ

Μπιχεβιοριστική προσέγγιση.

Στην αρχή ο διδάσκων επιλύει το πρόβλημα ο ίδιος παρουσιάζοντας τις φάσεις επίλυσης είτε μέσω προβολής P.P. στους μαθητές είτε μέσω της χρήσης του λογισμικού. Η παρουσίαση μπορεί να γίνει με έναν video projector ή ακόμη μέσα σε ένα κείμενο οδηγιών που διανέμει στις ομάδες των μαθητών.

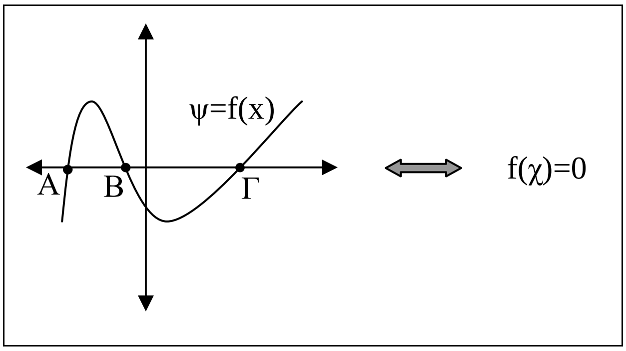
Στην συνέχεια καλεί τους μαθητές να περιγράψουν την διαδικασία συνοπτικά σαν αλγόριθμο. Η περιγραφή θα μπορούσε να είναι ως εξής:

«Για να λύσουμε μία εξίσωση με το F.P:

- Μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος όλα τα σύμβολα και ορίζουμε μία συνάρτηση.
- Κάνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Εκτιμούμε περίπου που κόβει το γράφημα τον χ΄χ και αλλάζουμε κλίμακα προσαρμόζοντάς της κοντά σε αυτή την τιμή.
- Συνεχίζουμε όμοια μέχρι να επιτύχουμε την επιθυμητή προσέγγιση.
- Ο διδάσκων δίνει έναν αριθμό παρόμοιων εξισώσεων και ζητά από τους μαθητές να τις λύσουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Γνωστική προσέγγιση.

- Στην αρχή οι μαθητές μελετούν ένα γράφημα που υπάρχει στην οθόνη, ή στο φύλλο εργασίας, και αναζητούν την σχέση που έχει η εικόνα του γραφήματος με τον συμβολισμό f(χ)=0 (εικόνα 4).



Εικόνα 4

- Γράφουν την απάντηση και την συγκρίνουν με αυτή που προβάλλεται μετά από λίγο στην οθόνη.
- Στην συνέχεια ανοίγουν ένα αρχείο του f.p στο οποίο υπάρχει η γραφική παράσταση της $y=\ln x-x^2+1$.
- Σε ένα επόμενο αρχείο παρουσιάζεται η ίδια γραφική παράσταση με αλλαγμένη κατάλληλα την κλίμακα κ.ο.κ.
- Ζητείται τώρα από τους μαθητές να λύσουν της εξίσωση $\ln x=x^2-1$.
- Συγκρίνουν την απάντηση που έχουν δώσει με αυτή που παρουσιάζεται στην οθόνη ή ανακοινώνεται από τον διδάσκοντα.

Κονστρουκτιβιστική προσέγγιση.

- Ο διδάσκων δημιουργεί μία κατάσταση προβλήματος ως εξής:

Ζητά από τους μαθητές να λύσουν τις παρακάτω εξισώσεις:

$\ln x=5$.

$x^2-1=3x-2$.

$\ln x=x^2+1$.

Οι μαθητές λύνουν σύντομα τις δύο πρώτες εξισώσεις στο τετράδιό τους και βρίσκονται μπροστά σε αδιέξοδο όσον αφορά στην τρίτη εξίσωση.

- Ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές το αδιέξοδο με στόχο να αναδειχτεί η ανάγκη χρήσης άλλων αναπαραστασιακών εργαλείων εκτός των συμβατικών. Η ικανοποιητική εξοικείωση των μαθητών με το F.P θα οδηγήσει στην ιδέα της χρήσης του.

- Οι μαθητές συζητούν ποιόν από τους πίνακες θα χρησιμοποιήσουν τον πίνακα γράφημα ή τον πίνακα τιμών. Ο διδάσκων τους υπενθυμίζει ότι χρησιμοποιώντας το γράφημα ίσως επιταχύνουν την διαδικασία. Οι μαθητές δημιουργούν μία ή περισσότερες γραφικές παραστάσεις.
- Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να ερμηνεύσουν την ισότητα $\ln x=x^2-1$ ή την $\ln x-x^2+1=0$ μέσα στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων που έχουν κατασκευάσει. Η ποικιλία των γραφικών παραστάσεων στις διάφορες ομάδες ενισχύει τον διάλογο και παράγει σημαντικά διδακτικά οφέλη.
- Οι μαθητές έχοντας ερμηνεύσει τις ισότητες (εξισώσεις) μέσα στο πλαίσιο των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων συζητούν τρόπους αλλαγής κλίμακας ώστε να επιτύχουν προσέγγιση εκατοστού ή χιλιοστού κ.λ.π..

Μερεμέτι Logo προγράμματος με ενσωμάτωση σχέσεων (Programming)

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν λογισμικά τα οποία δίνονται στον χρήστη για να τα επιδιορθώσει (μερεμετίσει) επεμβαίνοντας στον κώδικα του προγράμματος ώστε να αρθούν τα προβλήματα που έχει η εκτέλεσή τους ή να παρουσιάζει βελτιωμένα αποτελέσματα. Ο χρήστης μαθητής πρέπει εφενός να κατανοήσει πώς «δουλεύει» το πρόγραμμα και αφετέρου να βρει τι πρέπει να επιδιορθώσει στον κώδικα του προγράμματος. Ξεχωριστό ενδιαφέρον έχει η περίπτωση που η επιδιόρθωση απαιτεί να αντικατασταθεί μια από τις δυο μεταβλητές του προγράμματος με μια συναρτησιακή σχέση την οποία πρέπει να ανακαλύψει ο χρήστης και να την εκφράσει με συμβολικό τρόπο. Ιδιαίτερα όταν το λογισμικό, όπως ο Χελωνόκοσμος, συνδυάζει τον δυναμικό χειρισμό με τη συμβολική έκφραση παρέχονται στον μαθητή δυνατότητες που του επιτρέπουν να κάνει πειράματα με το πρόγραμμα, να κατανοήσει τις αναδυόμενες μαθηματικές (συναρτησιακές) σχέσεις και να τις χρησιμοποιήσει για να επιδιορθώσει το πρόγραμμα.

Ένα σχετικό με τα παραπάνω σενάριο/δραστηριότητα έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που μπορούν να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες για να αναπτύξουν και να χρησιμοποιήσουν ποικίλες στρατηγικές για να διεξάγουν τις έρευνες και τα πειράματα, να έχει προσωπικό ενδιαφέρον στους μαθητές τους ίδιους, να είναι εύκαμπτο και ανοικτό στις αλλαγές που επιλέγονται είτε από τους δασκάλους είτε τους μαθητές και να ενθαρρύνει τους μαθητές στην ανάληψη της κύριας ευθύνης για την επίτευξη των στόχων που περιλαμβάνονται στο σενάριο. Ακόμα, όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς να τους ενθαρρύνει, να αναπτύξουν τις δικές τους διδακτικές στρατηγικές ώστε να διευκολύνουν την ενεργό κατασκευή της γνώσης από τους μαθητές.

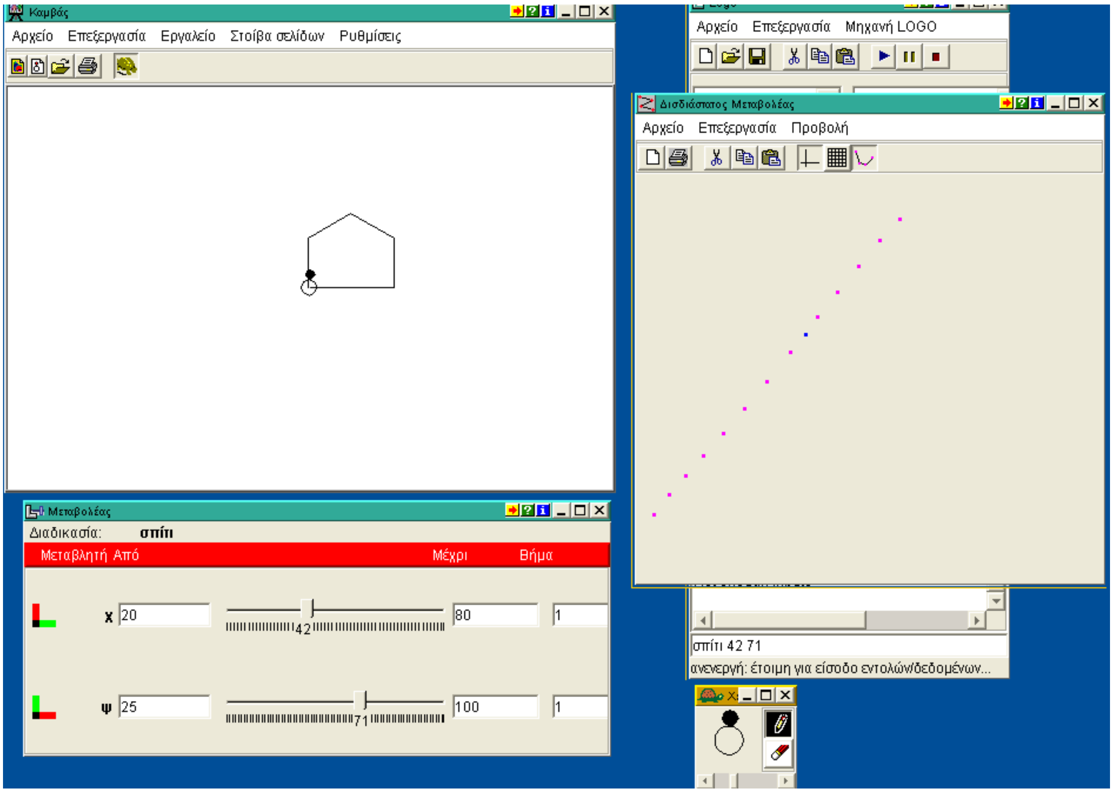
Θέμα: Οι μαθητές καλούνται να διορθώσουν ένα πρόγραμμα με το οποίο σχεδιάζεται ένα σπίτι στον καμβά.

Στο θέμα αυτό το Logo πρόγραμμα περιέχει μια σειρά εντολών και δυο μεταβλητές με το οποίο η χελώνα σχεδιάζει ένα σπίτι. Όταν οι τιμές των δυο μεταβλητών είναι «κατάλληλες» το σπίτι σχηματίζεται σωστά (σχηματίζεται ένα κλειστό πολύγωνο). Διαφορετικά, είτε περισσεύει ένα μέρος μιας πλευράς είτε υπολείπεται. Οι μαθητές καλούνται να επιδιορθώσουν το πρόγραμμα ώστε σε κάθε περίπτωση να σχηματίζεται σωστά.

Η διαδικασία αυτή απαιτεί (1) να σχεδιάσουν όλα τα σημεία που έχουν ως συντεταγμένες «κατάλληλες» τιμές των δυο μεταβλητών στον δυσδιάστατο μεταβολέα, (2) να κατανοήσουν ότι οι συντεταγμένες των σημείων υπόκεινται σε μια σχέση και (3) να ανακαλύψουν τη σχέση αυτή και να αντικαταστήσουν τη μία μεταβλητή με τη σχέση αυτή.

Στο προτεινόμενο θέμα οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου εμπλέκονται με (1) την ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, (2) την αναλογία των μεταβλητών μεγεθών, (3) την έννοια των γραμμικών συναρτήσεων ψ=αχ και (4) την σύνδεση της γραμμικής συνάρτησης με την ομοιότητα και την αναλογία.

✓ **Στιγμιότυπο:** Η παρακάτω εικόνα παρουσιάζει ένα στιγμιότυπο από την εύρεση των σημείων που ορίζουν «κατάλληλες» τιμές στις μεταβλητές του προγράμματος.



Εικόνα1: Στους μαθητές δίνεται έτοιμο ένα Logo πρόγραμμα με το οποίο η χελώνα σχεδιάζει στον καμβά ένα πολύγωνο σε σχήμα σπιτιού. Το σπίτι σχηματίζεται σωστά όταν οι μεταβλητές χ και ψ των πλευρών του έχουν κατάλληλες τιμές ώστε να σχηματίζεται ένα κλειστό πολύγωνο. Οι μαθητές μπορούν να επιλέγουν ένα σημείο στον δυσδιάστατο μεταβολέα και να εισάγουν τις συντεταγμένες του ως τιμές των δυο μεταβλητών. Έτσι μπορούν να το κινούν το σημείο σε θέση που το πολύγωνο να κλείνει. Επιλέγοντας και άλλα κατάλληλα σημεία μπορούν να κατασκευάσουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία σχηματίζεται το κλειστό πολύγωνο. Το ερώτημα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές αφορά την διόρθωση του κώδικα ώστε να σχηματίζεται πάντοτε ένα σπίτι (κλειστό πολύγωνο).

Υλοποίηση

Οι μαθητές:

1. Σχηματίζουν τον γεωμετρικό τόπο των κλειστών πολυγώνων – σπιτιών στον δυσδιάστατο μεταβολέα.

2. Συγκρίνουν τις τιμές των μεταβλητών χ και ψ σε κάθε περίπτωση και διαπιστώνουν την ισότητα των λόγων τους (86/50 = ψ/χ).
3. Μελετούν τον κώδικα του προγράμματος αναλύοντας κάθε γραμμή του και αντικαθιστούν την μεταβλητή ψ με τη σχέση 86/50·χ. Έτσι μετατρέπουν τον κώδικα δυο μεταβλητών σε κώδικα με μια μεταβλητή.
4. Δίνουν τιμές μέσω του μεταβολέα στη μεταβλητή χ και επιβεβαιώνουν ότι σχηματίζονται σμικρύνσεις ή μεγεθύνσεις του αρχικού σχήματος καθώς και την ισχύ της σχέσης ψ= 86/50·χ.
5. Διαπιστώνουν ότι ο γεωμετρικός τόπος που κατασκεύασαν και η σχέση των πλευρών των διαφόρων όμοιων πολυγώνων – σπιτιών περιγράφεται από τη σχέση ψ= 86/50·χ.

Μοντελοποίηση πραγματικής κατάστασης και μελέτη αυτής

Μια από τις δυνατότητες που προσφέρουν εκπαιδευτικά λογισμικά όπως το Cabri Geometry II, είναι το γεγονός που επιτρέπουν στους χρήστες να μοντελοποιήσουν πραγματικές καταστάσεις και να τις μελετήσουν με τρόπους που είναι αδύνατοι στο πλαίσιο του χαρτιού και του μολυβιού ή στο ίδιο το περιβάλλον στο οποίο διαδραματίζονται.

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές αποκτούν προσωπικό ενδιαφέρον για τη δραστηριότητα, αναπτύσσουν ποικίλες στρατηγικές για να λύσουν προβλήματα, να διεξάγουν έρευνες και πειράματα και ενθαρρύνει τους μαθητές να αναλάβουν την κύρια ευθύνη για την επίτευξη των στόχων του σεναρίου. Καθώς μια τέτοια δραστηριότητα μπορεί να διατρέχει ένα μεγάλο σχετικά μέρος του προγράμματος σπουδών ή να συνδυάζει διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν τη δική τους διδακτική ατζέντα και να κατευθύνουν τους μαθητές τους στην διερεύνηση εννοιών και θεμάτων από διαφορετικές περιοχές.

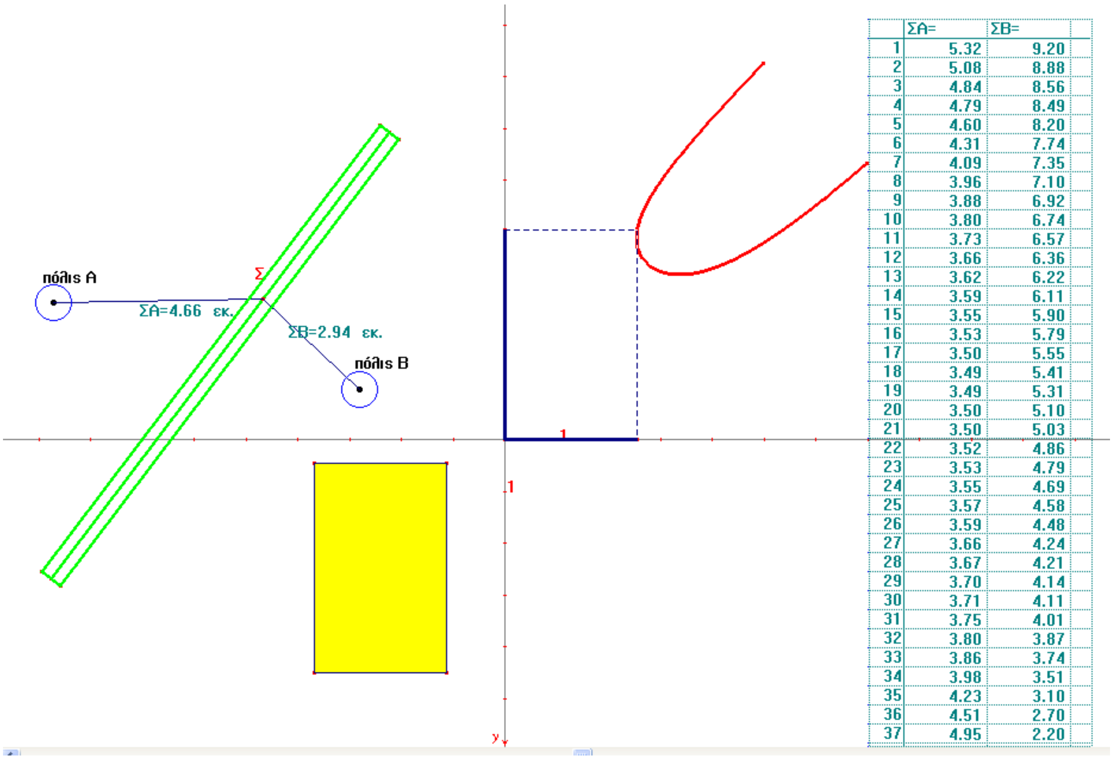
Το παράδειγμα που ακολουθεί αναδεικνύει τα παραπάνω και μάλιστα τα συνδέει βαθιά με τα μαθηματικά των μεταβολών, τα οποία διαπερνούν ένα πολύ μεγάλο μέρος του προγράμματος σπουδών. Με αυτό το παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να προσεγγίζουν διαισθητικά τις μαθηματικές έννοιες των μεταβολών και αποκτούν χρήσιμες εμπειρίες που συμβάλλουν στο να αναπτύξουν νέους τρόπους μάθησης.

Θέμα: Μελέτη της μεταβολής της απόστασης κινούμενου αυτοκινήτου από δυο σταθερά σημεία.

Πρόβλημα: *Ένας αυτοκινητόδρομος βρίσκεται κοντά σε δυο σταθμούς εκπομπής σήματος κινητού τηλεφώνου Α και Β. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις ενός αυτοκίνητο του από τους σταθμούς Α και Β καθώς κινείται στον αυτοκινητόδρομο;*

Το θέμα αφορά τη μελέτη και περιγραφή του τρόπου μεταβολής των αποστάσεων του κινητού από τους δυο σταθμούς καθώς και τον τρόπο συμμεταβολής τους. Η μελέτη δεν μπορεί να δοθεί με τη χρήση του χαρτιού και του μολυβιού αφού αφενός δεν μπορούν να αισθητοποιηθούν διαδικασίες συμμεταβολών ακόμα και να υπάρχουν στη διάθεση των μαθητών μερικές μετρήσεις. Επίσης είναι αυτονόητο ότι δεν μπορεί να γίνει επιτόπου διερεύνηση λόγων των τεχνικών δυσκολιών (οι δυσκολίες είναι ανάλογες με αυτές της δημιουργίας και μελέτης μοντέλου για το ηλιακό σύστημα). Το γεγονός ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί ένας τρόπος περιγραφής της συμμεταβολής με τα συμβατικά μέσα ή με τη βοήθεια στατικών μοντέλων καθιστά αναγκαία τη συμβολή του εκπαιδευτικού λογισμικού καθώς αυτό επιτρέπει στον μαθητή (1) να κατασκευάσει το μοντέλο ο ίδιος, επιλέγοντας τις πληροφορίες που του είναι αναγκαίες για τη μελέτη και (2) να χρησιμοποιεί τις δυνατότητες του μέσου για να αναπαριστά την κίνηση και να κάνει πειράματα με τη θέση του κινητού και τις αποστάσεις του από τους σταθμούς Α και Β.

Στιγμιότυπο: Η παρακάτω εικόνα παρουσιάζει ένα μοντέλο κατασκευασμένο στο Cabri II καθώς και τα δεδομένα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη.



	ΣA=	ΣB=
1	5.32	9.20
2	5.08	8.88
3	4.84	8.56
4	4.79	8.49
5	4.60	8.20
6	4.31	7.74
7	4.09	7.35
8	3.96	7.10
9	3.88	6.92
10	3.80	6.74
11	3.73	6.57
12	3.66	6.36
13	3.62	6.22
14	3.59	6.11
15	3.55	5.90
16	3.53	5.79
17	3.50	5.55
18	3.49	5.41
19	3.49	5.31
20	3.50	5.10
21	3.50	5.03
22	3.52	4.86
23	3.53	4.79
24	3.55	4.69
25	3.57	4.58
26	3.59	4.48
27	3.66	4.24
28	3.67	4.21
29	3.70	4.14
30	3.71	4.11
31	3.75	4.01
32	3.80	3.87
33	3.86	3.74
34	3.98	3.51
35	4.23	3.10
36	4.51	2.70
37	4.95	2.20

Εικόνα 1: Οι αποστάσεις ΣΑ και ΣΒ του κινητού Σ από τους δυο σταθμούς (1) καταγράφονται σε ένα πίνακα τιμών, (2) χρησιμοποιούνται ως πλευρές ενός ορθογωνίου και ακόμα (3) γίνονται συντεταγμένες ενός σημείου. Καθώς οι αποστάσεις μεταβάλλονται μπορούμε να κάνουμε εγγραφές των αποστάσεων στον πίνακα τιμών με το πλήκτρο Tab, να παρατηρούμε τον τρόπο μεταβολής των πλευρών του ορθογωνίου και τον γεωμετρικό τόπο που γράφει το σημείο που ορίζουν οι συντεταγμένες - αποστάσεις.

Υλοποίηση:

1. Οι μαθητές αρχικά εστιάζουν την προσοχή τους στην μεταβολή της απόστασης ΣΑ και περιγράφουν τον τρόπο μεταβολής της καθώς κινούν με το ποντίκι τους το κινητό Σ.
2. Μετά εστιάζουν την προσοχή τους στην μεταβολή της απόστασης ΣΒ και περιγράφουν τον τρόπο μεταβολής της.
3. Οι μαθητές εστιάζουν την προσοχή τους ταυτόχρονα στην μεταβολή της απόστασης ΣΑ και της απόστασης ΣΒ και περιγράφουν τον τρόπο συμμεταβολής τους (η συνεχής

επανάληψη της κίνησης βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν δυνατότητες νοητικού συντονισμού στην μεταβολή των αποστάσεων, δηλαδή στη «θέαση» της συμμεταβολής των δυο αποστάσεων).

4. Περιγράφουν την συμμεταβολή με τη βοήθεια του γραφήματος ή του παραλληλογράμμου ή του πίνακα τιμών.
5. Μεταβάλλουν τη θέση των πόλεων ή του δρόμου και επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία. Εξετάζουν ειδικές περιπτώσεις οι δυο πόλεις να είναι στην ίδια πλευρά του δρόμου ή και στις δυο πλευρές του αλλά κοντά στα δυο άκρα του ή πάνω στο δρόμο και οι δυο ή η μια. Έτσι αποκτούν πληρέστερη εικόνα για τη συμμεταβολή.
6. Αναζητούν την θέση που το άθροισμα των δυο αποστάσεων είναι ελάχιστο.
7. Εκφράζουν τον τρόπο μεταβολής των δυο αποστάσεων με πολλαπλούς τρόπους

Δυνατότητες αξιοποίησης λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων

Κατηγορία

Το παράδειγμα αυτό προσπαθεί να αναδείξει τη δυνατότητα που παρέχει ένα λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη μοντελοποίηση πραγματικών δεδομένων μέσα από το μετασχηματισμό της βασικής συνάρτησης y=x.

Θέμα

Παρότι οι μαθητές ασχολούνται με συναρτησιακές σχέσεις από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού μέχρι το τέλος του Λυκείου και οι περισσότεροι από αυτούς μπορούν να δώσουν ένα τυπικό ορισμό του τι είναι συνάρτηση, παρατηρείται μεγάλη δυσκολία στο να χρησιμοποιήσουν τις συναρτήσεις για να αναπαραστήσουν πραγματικές καταστάσεις. Ένας σοβαρός λόγος που ευνοεί αυτή την κατάσταση, είναι το γεγονός ότι ο ‛χειρισμός’ και η μελέτη των συναρτήσεων είναι δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας. Στο σημείο αυτό η διδασκαλία για το πεδίο εφαρμογών των συναρτήσεων μπορεί να υποστηριχθεί σημαντικά από τη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων, όπως αυτό του Function Probe.

Ένα πολύ σημαντικό πεδίο εφαρμογής του εν λόγω λογισμικού είναι αυτό της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων. Με τον όρο μοντελοποίηση εδώ εννοούμε την εύρεση μιας συναρτησιακής σχέσης, που συνδέει τα δεδομένα μιας παρατήρησης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί δίνεται η σύντομη περιγραφή μιας δραστηριότητας, μέσα από την οποία παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές να βρουν (κατασκευάσουν) μία συναρτησιακή σχέση, μετασχηματίζοντας τη γραφική παράσταση της βασικής συνάρτησης y=x.

Παράδειγμα

Στο εργαστήριο της Φυσικής οι μαθητές μελέτησαν πώς αλλάζει το μήκος ενός ελατηρίου όταν στην μία άκρη του τοποθετούν διαδοχικά σώματα με διαφορετικές μάζες. Αρχικά παρατήρησαν ότι όσο μεγαλώνει η μάζα του σώματος τόσο αυξάνει το μήκος του ελατηρίου. Το επόμενο βήμα τους ήταν να κάνουν μετρήσεις και να καταγράψουν (με προσέγγιση εκατοστού) αυτές τις μεταβολές όπως φαίνεται στον πίνακα 1.

Μάζα (gr)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Μήκος (cm)	10	16	25	31	37	45	51	58	66	72	79

Πίνακας 1

Τα ερωτήματα που μπορούν να τεθούν στη συνέχεια είναι:

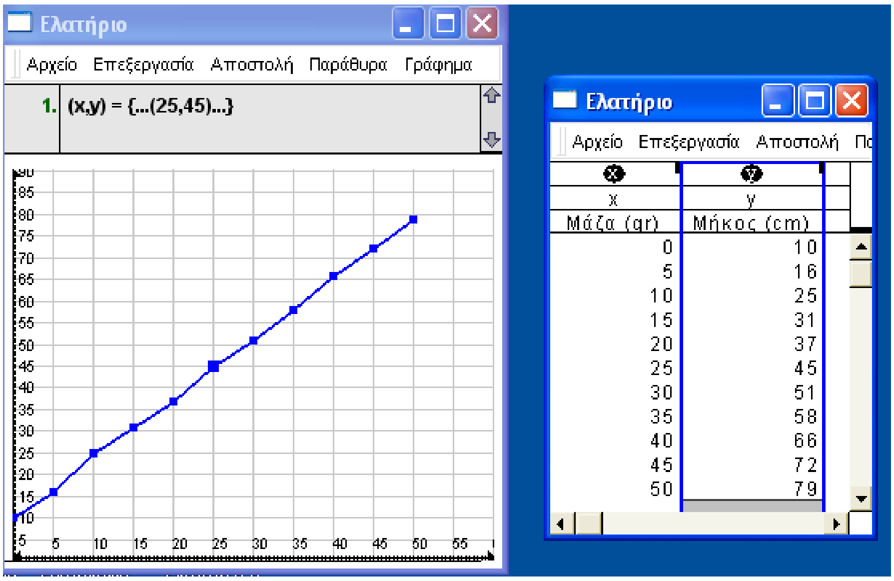
1. Μπορεί να βρεθεί (κατασκευαστεί) ένα μαθηματικό μοντέλο (συναρτησιακή σχέση) που να συνδέει το μήκος του ελατηρίου με τη μάζα του σώματος που εξαρτούμε στην άκρη του;
2. Αν ναι, ποια είναι αυτή η σχέση που περιγράφει καλύτερα το φαινόμενο;

Υλοποίηση

Οι μαθητές δουλεύουν στο εργαστήριο των υπολογιστών σε ομάδες των 2-3 ατόμων σε κάθε υπολογιστή, υλοποιώντας τα βήματα ενός κατάλληλα σχεδιασμένου φύλλου εργασίας.

Συνοπτική περιγραφή βημάτων υλοποίησης της δραστηριότητας:

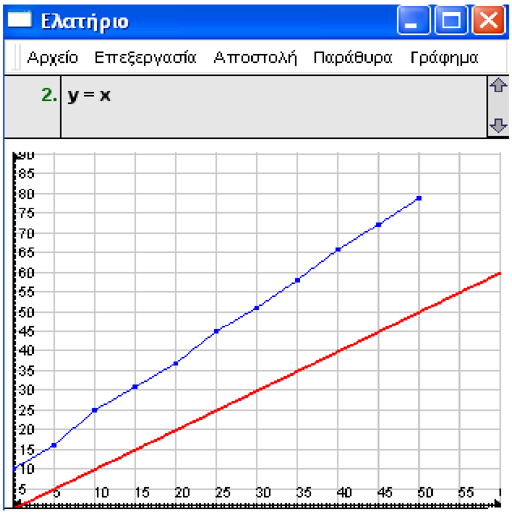
1. Οι μαθητές μπορούν να περάσουν τα δεδομένα του πίνακα 1 στον πίνακα του Function Probe (εικόνα 1) και κατόπιν να 'στείλουν' τα σημεία αυτά στο γράφημα ή να αναπαραστήσουν γραφικά τα δεδομένα τους κατευθείαν στο γράφημα.



Εικόνα 1

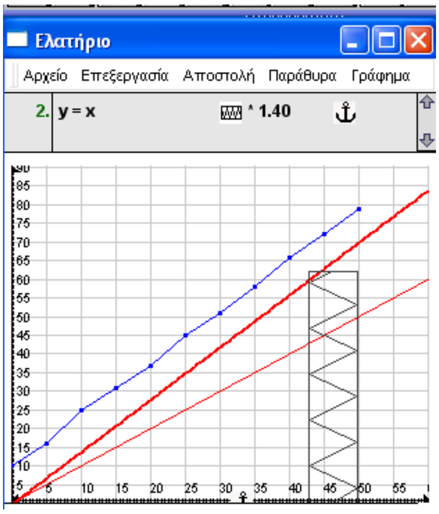
2. Από τη γραφική αναπαράσταση των σημείων (και αφού τα συνδέσουν) μπορούν να παρατηρήσουν ότι αυτά βρίσκονται κατά προσέγγιση πάνω σε μία ευθεία.
3. Το επόμενο βήμα είναι να σκεφτούν για λίγο τη μορφή της συνάρτησης - πρότυπο που θα επιλέξουν για να ξεκινήσουν.

4. Γνωρίζοντας ότι ο βασικός τύπος συνάρτησης που περιγράφει μία ευθεία είναι y=x, μπορούν να τον πληκτρολογήσουν στο πλαίσιο των συναρτήσεων του γραφήματος και να εμφανιστεί η γραφική της αναπαράσταση (εικόνα 2).

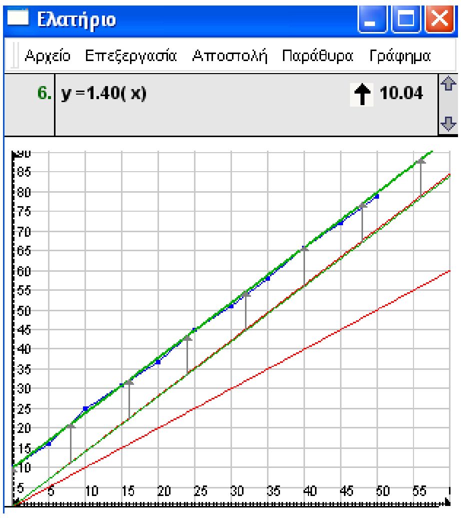


Εικόνα 2

5. Και τώρα μένει να προσεγγίσουν τα σημεία με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς (αυξομείωση, μετατόπιση) της συνάρτησης-πρότυπο και να δουν τον τύπο της συνάρτησης που 'ταιριάζει' καλύτερα στα σημεία τους (εικόνα 3 και 4).



Εικόνα 3

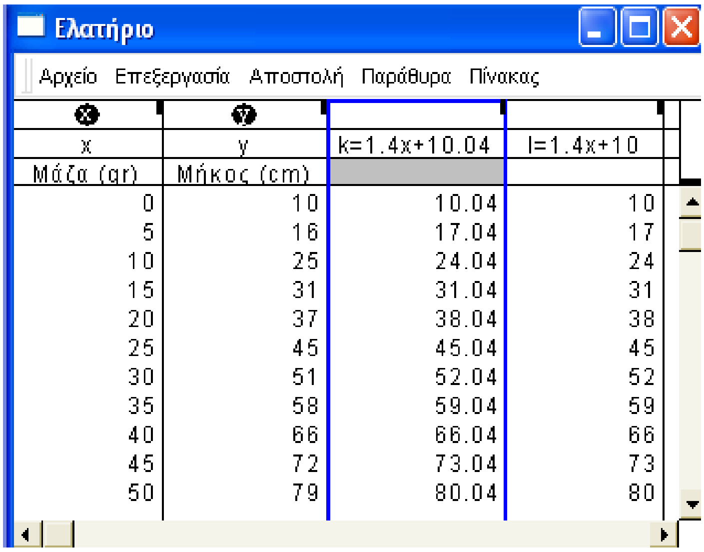


Εικόνα 4

<u>Σημείωση</u>: Από τη συγκεκριμένη προσέγγιση προκύπτει η σχέση y=1.4x+10.04

6. Οι μαθητές στη συνέχεια μπορούν να συμπληρώσουν στον πίνακα τον τύπο της συνάρτησης που βρήκαν ώστε να:

- διαπιστώσουν και με πίνακα τιμών την ορθότητα της προσέγγισης που έκαναν συγκρίνοντας τη δεύτερη και τρίτη στήλη του πίνακα (εικόνα 5)
- ‘βελτιώσουν’ ακόμη περισσότερο τον τύπο της συνάρτησης (εικόνα 5,$4^{η}$ στήλη του πίνακα)



x	y	k=1.4x+10.04	l=1.4x+10
Μάζα (gr)	Μήκος (cm)		
0	10	10.04	10
5	16	17.04	17
10	25	24.04	24
15	31	31.04	31
20	37	38.04	38
25	45	45.04	45
30	51	52.04	52
35	58	59.04	59
40	66	66.04	66
45	72	73.04	73
50	79	80.04	80

Εικόνα 5

Σχέσεις Συμμεταβαλλόμενων Ποσών

ΤΟ ΘΕΜΑ ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ.

Με το παράδειγμα που ακολουθεί υπάρχει η δυνατότητα χρήσης του λογισμικού sketchpad για διερεύνηση σχέσης δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών.

Η χρήση συμβατικών μέσων αναπαράστασης (μολύβι, χαρτί, πίνακας) επιτρέπει μόνο την *περιγραφή ενός φαινομένου* με κείμενα της μορφής « Δύο ποσά χ και ψ μεταβάλλονται ώστε……..». Με βάση τις δυνατότητες του λογισμικού μπορούμε να *μελετήσουμε το ίδιο το φαινόμενο*.

Η μελέτη όμως αυτή απαιτεί την χρήση των αναπαραστασιακών δυνατοτήτων του καρτεσιανού συστήματος και εδώ βρίσκεται το δεύτερο κομβικό σημείο του παραδείγματος. Το καρτεσιανό σύστημα μπορεί να αποκτήσει ένα περισσότερο δυναμικό χαρακτήρα αν εκλάβουμε τις συντεταγμένες (χ, ψ) ενός σημείου Α ως την αριθμητική παράσταση του τρόπου με τον οποίο θα πρέπει να κινηθεί η αρχή των αξόνων ώστε να συναντήσει το Α.

Δυνατότητες των λογισμικών που θα αναδειχθούν.

Οι δυνατότητες ενός σύγχρονου δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού επιτρέπουν την μελέτη ενός φαινομένου μέσα από **πολλαπλές αναπαραστάσεις** του (αριθμητική, γραφική, συμβολική). Συγχρόνως μας παρέχεται η δυνατότητα να εκτελούμε **δυναμικό χειρισμό** των αναπαραστάσεων και σύνδεση.

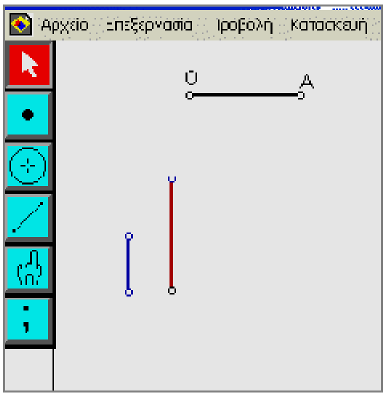
Μελετώντας ένα φαινόμενο που εξελίσσεται στην οθόνη του υπολογιστή ο μαθητής προσεγγίζει τα μαθηματικά ως μοντέλα περιγραφής και ερμηνείας φαινομένων από τα οποία φαινόμενα αντλούν το νόημά τους.

Η βασική ιδέα

Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ μεταβάλλεται ελεύθερα από τον χρήστη και έχει ως αποτέλεσμα να μεταβάλλονται συγχρόνως και άλλα ευθύγραμμα τμήματα. Ζητείται από τον χρήστη να εντοπίσει την σχέση που συνδέει την μεταβολή του μέτρου του ΟΑ και την μεταβολή των μέτρων των άλλων τμημάτων.

Συνοπτική παράθεση των φάσεων και τρόπων υλοποίησης.

Καταρχήν ο δημιουργός της δραστηριότητας έχει κατασκευάσει ένα αρχείο sketchpad στο οποίο ο μαθητής κινώντας ένα σημείο Α μεταβάλλει το μήκος δύο άλλων τμημάτων με τρόπο που παραμένει αδιευκρίνιστος. Η κατασκευή αυτή δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη αφού είναι αρκετή η λειτουργία της *μεταφοράς* με γωνία 90^0 δύο σημείων κατά μήκος ίσο με μία συνάρτηση του αρχικού μήκους ΟΑ διαφορετική για το κάθε σημείο.



Εικόνα 1

Στην συγκεκριμένη περίπτωση το κόκκινο τμήμα θα μπορούσε να μετακινείται κατά 2.ΟΑ-2 ενώ το μπλε τμήμα να μετακινείται κατά $\frac{2}{\mathrm{OA}}$ cm (εικόνα 1).

Τέλος καλό θα είναι να γίνει κατά τέτοιο τρόπο η κατασκευή του τμήματος ΟΑ ώστε όταν το σημείο Α περάσει αριστερά από το Ο να εμφανίζεται αρνητική μέτρηση.

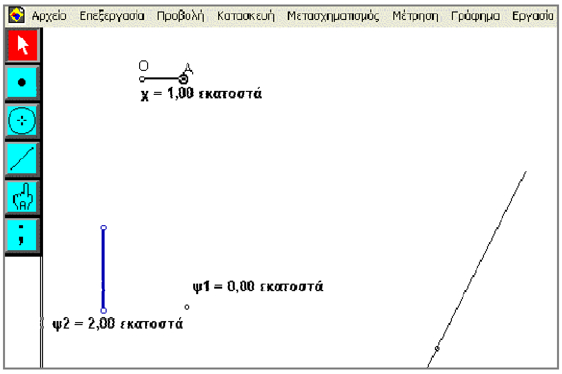
Η δραστηριότητα αρχίζει με την εξής ερώτηση:

Πως μπορούμε να εντοπίσουμε την σχέση που συνδέει την μετακίνηση του σημείου Α με την μεταβολή του καθενός από τα ευθύγραμμα τμήματα στην οθόνη;

Η ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Προσέγγιση 1η "Η λειτουργία αποτύπωση σε (χ,ψ)"

1. Οι μαθητές καταρχήν μετρούν μέσω του λογισμικού τα μήκη των δύο τμημάτων που μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλουν το ΟΑ. Εδώ καλό θα είναι με κάποιο κουμπί εμφάνισης να εμφανιστεί μία προκατασκευασμένη μέτρηση του ΟΑ ώστε να υπάρχει η δυνατότητα προβολής και αρνητικών τιμών στις μετρήσεις.



Εικόνα 2

2. Γίνεται μία σύντομη διαπραγμάτευση για την ονομασία των μηκών και καλό θα είναι να χρησιμοποιηθούν γράμματα χ, ψ1 και ψ2 ώστε να παραπέμπουν σε συναρτησιακή εξάρτηση

   Εδώ οι μαθητές θα μπορούσαν, τουλάχιστον για το ψ1, μετά από αλλεπάλληλες δοκιμές και μεταβολές του ΟΑ να προσεγγίσουν την σχέση που τα συνδέει χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικές τιμές όπως χ=1 και χ=0.

   Η διαδικασία όμως αυτή είναι πολύ δύσκολη στην περίπτωση του ψ2.

3. Επιλέγοντας τις δύο μετρήσεις οι μαθητές αποτυπώνουν με (χ,ψ) τις αριθμητικές τους τιμές και έτσι εμφανίζεται ένα σημείο το οποίο φέρει τις συντεταγμένες αυτές ως προς ένα σύστημα όμως το οποίο δεν έχει σαφώς αποτυπωμένους τους άξονες και την αρχή.

   Αυτό το σημείο θα πρέπει να εφοδιαστεί με την ιδιότητα σχεδίασης ίχνους

4. Η μετακίνηση του σημείου Α σε διάφορες θέσεις έχει σαν αποτέλεσμα την κατασκευή μιας ευθείας η οποια υποδεικνύει συναρτησιακή σχέση της μορφής ψ1=αχ+β.

   Αυτό που παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον είναι ο εντοπισμός των παραμέτρων α και β οι οποίες είναι δυνατόν να υπολογιστούν μέσα από δύο ζεύγη (χ, ψ1).

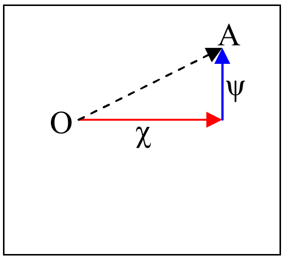
   Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι προσδιορισμού της σχέσης τους οποίους θα μπορούσαν να επινοήσουν οι μαθητές μέσα από διαπραγμάτευση.

5. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για τα ζεύγη (χ, ψ2) εμφανίζεται στην οθόνη μία παράσταση η οποία παραπέμπει σε υπερβολή.

   Η διαπραγμάτευση και η διερεύνηση για τον τύπο της σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών θα γίνει όπως και στην περίπτωση της ευθείας.

Προσέγγιση 2η ''Η Καρτεσιανή κίνηση''

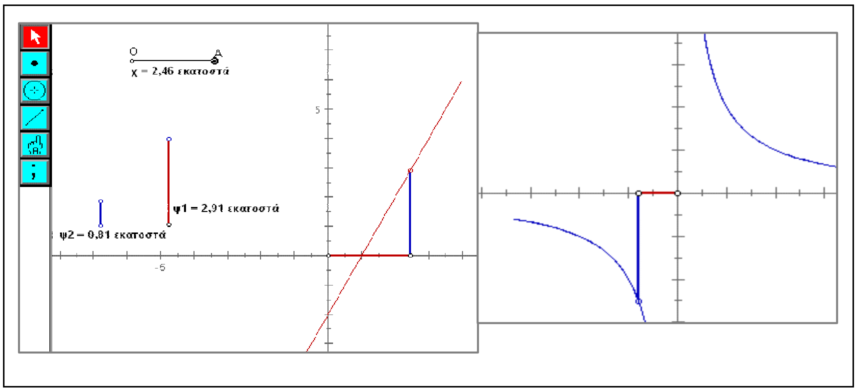
Εδώ καταρχήν θα πρέπει να προηγηθούν και πάλι τα βήματα 1) και 2) της προηγούμενης προσέγγισης. Ακόμη θα ήταν χρήσιμο να συζητηθεί με τους μαθητές μία δυναμική αντίληψη για την κίνηση πάνω σε ένα Καρτεσιανό επίπεδο. Συγκεκριμένα η μετάβαση από ένα σημείο Ο σε οποιοδήποτε σημείο Α του επιπέδου μπορεί να γίνει με δύο διαδοχικές κινήσεις: Μία δεξιά (ή αριστερά) και μία πάνω(ή κάτω). Οι κινήσεις αυτές καθορίζονται αλλά και καθορίζουν τις συντεταγμένες του σημείου (εικόνα 3).



Εικόνα 3

Οι μαθητές εμφανίζουν ένα σύστημα αξόνων στην οθόνη και εκτελούν δύο μεταφορές στην αρχή των αξόνων.

Η μία μεταφορά γίνεται με γωνία 00 κατά χ και η άλλη στο σημείο που προκύπτει με γωνία 900 κατά ψ1. Στο τελικό σημείο προστίθεται η δυνατότητα σχεδίασης ίχνους. Τότε εμφανίζεται στους άξονες μία γραφική παράσταση ευθείας της οποίας η εξίσωση μπορεί να προκύψει σχεδόν άμεσα από τα σημεία τομής με τους άξονες.



Εικόνα 4

Οι μαθητές επαναλαμβάνουν την διαδικασία για το ψ2 οπότε διαγράφεται μία καμπύλη η οποία παραπέμπει σε υπερβολή η εξίσωση της οποίας θα προκύψει μετά από διαπραγμάτευση του διδάσκοντα με τους μαθητές. (εικόνα 4)

6.3 ΡΟΛΟΙ, ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΠΕ

Η κατάσταση των μαθηματικών της παραδοσιακού τύπου διδασκαλίας

Τα Μαθηματικά και σήμερα εξακολουθούν να παραμένουν εστία φόβου και απέχθειας για τους μαθητές. Θυμίζουμε την περίπτωση της ερευνητικής ομάδας, που με εντολή της επιτροπής Cockcroft[2] δοκίμασε να πάρει συνεντεύξεις από ένα δείγμα ενηλίκων για τα Μαθηματικά, που χρησιμοποιούσαν στην καθημερινή τους ζωή, και ανακάλυψε, ότι οι μισοί από αυτούς που πλησίασε αρνήθηκαν να δώσουν συνέντευξη, απλά και μόνο επειδή το θέμα ήταν τα Μαθηματικά! Η Pamela M.Cemen επισημαίνει ότι η δυσκολία στα Μαθηματικά δεν οφείλεται μόνο στη συσσωρευτική και αλυσιδωτή φύση της γνώσης αλλά και στον τρόπο διδασκαλίας τους. Τα μοντέλα διδασκαλίας που έχουν υιοθετηθεί και ακολουθούνται από τη διεθνή εκπαιδευτική κοινότητα μέχρι και σήμερα διαιρούνται σε δύο βασικές κατηγορίες: τη μία κατηγορία αποτελεί το δασκαλοκεντρικό ή παραδοσιακό μοντέλο με πρωταγωνιστή της τάξης το δάσκαλο που ακολουθεί την ex kathedra διδασκαλία και τη δεύτερη κατηγορία αποτελεί το μαθητοκεντρικό μοντέλο που τον πρωταγωνιστικό ρόλο κατέχει ο μαθητής. Σήμερα καταβάλλεται προσπάθεια στροφής από το δασκαλοκεντρικό προς το μαθητοκεντρικό μοντέλο. Στα πλαίσια αυτού του αναπροσανατολισμού του διδακτικού μοντέλου η σύγχρονη τεχνολογία και μάλιστα αυτή των υπολογιστών να παίζει καθοριστικό ρόλο.

Μαθηματικά και τεχνολογία. Στάσεις. Αντιλήψεις. Παραδοχές

Η τεχνολογία είναι ένας τομέας της γνώσης που ασχολείται με την εφαρμοσμένη επιστήμη και την αξιοποίηση των επιστημονικών γνώσεων και μεθόδων. Υπό αυτήν την έννοια η τεχνολογία αποτελεί την εφαρμογή στην πράξη της θεωρητικής γνώσης. Από την μια πλευρά η μαθηματική επιστήμη είναι η βάση στην οποία στηρίχθηκε η αλματώδης τεχνολογική ανάπτυξη της εποχής μας. Η εφαρμογή των μαθηματικών στην πρόοδο της τεχνολογίας είναι τόσο μεγάλη ώστε μαθηματικά και τεχνολογία να θεωρούνται πια έννοιες αλληλένδετες. Από την άλλη πλευρά, η χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και άλλων σύγχρονων τεχνολογικών επιτευγμάτων άνοιξε νέους δρόμους στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης

Οι στάσεις και οι απόψεις των διδασκόντων για τις ΤΠΕ και τις εκπαιδευτικές εφαρμογές τους δεν είναι επαρκώς καταγεγραμμένες. Οι Ράπτης & Ράπτη (1999β) αναφέρουν για

[2] Επιτροπή Διερεύνησης της Διδασκαλίας των Μαθηματικών στα Σχολεία της Βρετανίας υπό την προεδρία του Dr W.H.Cockcroft

εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ότι «…δεν γνωρίζουν ότι ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό εργαλείο σε όλα τα σχολικά μαθήματα…». Οι εκπαιδευτικοί επικεντρώνονται, κυρίως, στην Πληροφορική ως γνωστικό αντικείμενο ενώ αγνοούν σε μεγάλο βαθμό τα μέσα, τους τρόπους και τις μεθοδολογίες αξιοποίησης των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη. Σήμερα δεν διακρίνεται πλέον εκ μέρους των δασκάλων των μαθηματικών ο φόβος «αντικατάστασής» τους στην τάξη από τον υπολογιστή, όμως οι παλαιότεροι καθηγητές αισθάνονται ανασφάλεια απέναντι στη χρήση του υπολογιστή γιατί δεν την κατέχουν.

Ένα σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζεται από τη μεριά των μαθητών, όσο και μια γνωστική-αναπτυξιακή ωριμότητα για την αξιοποίηση των υπολογιστών τόσο για μάθηση και επικοινωνία όσο και για θέματα ψυχαγωγίας. Η κατοχή προσωπικού υπολογιστή από κάποιους μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης δεν φαίνεται να έχει σχέση με τις γνώσεις και τις αναπαραστάσεις που έχουν γύρω από αυτούς. Για μαθητές της Δευτεροβάθμιας τα πράγματα, για όσους έχουν υπολογιστή, δεν διαφέρουν ιδιαίτερα από τους προηγούμενους. Ενδεχομένως αυτό φανερώνει ότι γενικά κάνουν περιορισμένη χρήση του υπολογιστή που έχουν στο σπίτι, π.χ. τον χρησιμοποιούν για να παίζουν ηλεκτρονικά παιχνίδια. Το τελευταίο ίσως να οφείλεται στο ότι οι ίδιοι οι γονείς δεν δίνουν μεγάλη έμφαση στην εκπαιδευτική αξιοποίηση του υπολογιστή στο σπίτι. Το φύλο των μαθητών, επίσης δεν φαίνεται να έχει σχέση με τις αναπαραστάσεις των μαθητών για τους υπολογιστές, πέρα από τα υλικά (hardware), όπου τα αγόρια τείνουν να αναφέρουν περισσότερα. Ίσως αυτό να αντανακλά μια στάση των αγοριών να θεωρούν πιο ενδιαφέρον και χρήσιμο γι’ αυτούς να ασχοληθούν με την τεχνολογική πλευρά των υπολογιστών.

Είναι γενικά αποδεκτή η άποψη ότι με τη βοήθεια των υπολογιστών δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατανοούν τις διδασκόμενες έννοιες σε αντίθεση με την μετωπική παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία επικρατεί. Επίσης οι υπολογιστές διευκολύνουν τον πειραματισμό και την εξερεύνηση. Δημιουργούν θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά. Δίνουν την ευκαιρία διαθεματικών προσεγγίσεων των μαθηματικών. Η δημιουργία περιβαλλόντων, τα οποία υποστηρίζονται από τις ΤΠΕ, προϋποθέτουν αλλαγές στους ρόλους τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών.

Ρόλοι των συμμετεχόντων στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης με τις ΤΠΕ

Στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης με τις ΤΠΕ απαιτείται αναβάθμιση του ρόλου του εκπαιδευτικού. Ο εκπαιδευτικός παύει να αποτελεί τη μοναδική πηγή γνώσεων, την αυθεντία, το απομακρυσμένο από το μαθητή φωτοδότη και φωστήρα της γνώσης και της πληροφόρησης, όπως δηλ. εμφανιζόταν στην παραδοσιακή διδασκαλία. Αποβάλλει από πάνω του το δασκαλοκεντρικό σχήμα και παύει να αποτελεί μια «κινητή» βιβλιοθήκη. Ο εκπαιδευτικός γίνεται συνεργάτης και φίλος με το μαθητή. Διατηρεί το διδακτικό του ρόλο, αλλά δεν περιορίζεται σ' αυτόν. Αναλαμβάνει, σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι τον έχουμε συνηθίσει, τους ρόλους του εμψυχωτή, του συντονιστή, του καθοδηγητή - διαχειριστή της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Καθίσταται διευκολυντής στη διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης. Ο ρόλος του είναι συμβουλευτικός, καθοδηγητικός και διευκολυντικός. Συμμετέχει σε όλες τις φάσεις ως έμπειρος σύμβουλος, υποδεικνύει πηγές, βοηθά την ομάδα να εντοπίσει τα προβλήματα και να οργανώσει την έρευνα. Συντονίζει διακριτικά την προσπάθεια, παρέχει πληροφορίες, ενθαρρύνει τα μέλη της ομάδας και εκφράζει την άποψή του. Γίνεται συνερευνητής μαζί με τους μαθητές. Η διακριτική παρακολούθηση της εργασίας από τον εκπαιδευτικό και η σωστή καθοδήγηση οδηγούν σε θετικά αποτελέσματα ακόμα και τους αδύνατους και αδιάφορους μαθητές. Αυτό που απαιτεί προσπάθεια εκ μέρους του εκπαιδευτικού είναι ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων σε συνδυασμό με τις ΤΠΕ. Καθοριστικό ρόλο στο σχεδιασμό διαδραματίζει το πλαίσιο εντός του οποίου διενεργείται η μαθησιακή δραστηριότητα καθώς και η κατά τον Vygotsky διαμεσολάβηση εργαλείων, στο βαθμό που παρέχουν ευκαιρίες για ενεργητική, ανακαλυπτική-διερευνητική και σύμφωνα με τον Bruner προσωπικό νόημα για το άτομο μάθηση. Αποτελεί δε τον «έμπειρο» της Ζώνης της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky. Γι' αυτό ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι γνώστης διδακτικών διαδικασιών π.χ. ευρετικών κλπ., για να τις μεταφέρει στον μαθητή σε αντιπαράθεση με το μέχρι τώρα μοντέλο στο οποίο ο καθηγητής απλά μεταφέρει γνώσεις-πληροφορίες.

Ο μαθητής δεν συμμετέχει στη μαθησιακή διαδικασία ως κενό "δοχείο", το οποίο γεμίζει με γνώσεις και εμπειρίες του διδάσκοντα. Η μάθηση λαμβάνει χώρα σε περιβάλλον έντονης κοινωνικής αλληλεπίδρασης και σχετίζεται άμεσα με τις κλίσεις και τα ενδιαφέροντα των συμμετεχόντων. Η μάθηση δεν είναι μια διαδικασία που συμβαίνει παρεμπιπτόντως, αλλά αντίθετα λαμβάνει χώρα ως συνέπεια προσχεδιασμένων δράσεων και κινήσεων. Οι ανάγκες λοιπόν διευκόλυνσης, καθοδήγησης και εμψύχωσης των μαθητών είναι ιδιαίτερα αυξημένες στη διδασκαλία με τις ΤΠΕ.

Η διδασκαλία στο πλαίσιο των ΤΠΕ δίνει ιδιαίτερη έμφαση :

- στην δημιουργία, τη διερεύνηση, την ανακάλυψη
- στην ανάπτυξη συνθετικής και δημιουργικής ικανότητας,
- στην ανάπτυξη της αναλυτικής και της συνθετικής σκέψης,
- στην καλλιέργεια πνεύματος αναζήτησης και έρευνας,
- στην προώθηση ειδικών κλίσεων και ενδιαφερόντων,

- στον εθισμό στη συστηματική και υπεύθυνη εργασία,
- στην ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να μαθαίνει μόνος του
- στην ανάπτυξη γνωστικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων.

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

Hughes Martin ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (1996), Επιμέλεια Στέλλα Βοσνιάδου Αθήνα Εκδόσεις Gutenberg

Cemen Byrd Pamala. (1989) ΤΟ ΑΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Αθήνα Εκδόσεις Παρουσία

Χρυσαφίδης Κ., (1996), Βιωματική – επικοινωνιακή διδασκαλία, Η εισαγωγή της μεθόδου project στο σχολείο, Αθήνα, Gutenberg

Εξαρχάκος Θ. (1998), ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Αθήνα Ελληνικά Γράμματα

Αθανάσιος Ε. Παπάς (1998) ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ τόμος Α΄ Αθήνα Εκδόσεις Δελφοί

Bruner J. (1966). Toward a theory of instruction, Harvard University Press

Κόμης Β., Φείδας Χ. (2000). Παιδαγωγικές και τεχνολογικές αρχές σχεδίασης ενός λογισμικού συνεργατικής εννοιολογικής χαρτογράφησης βασισμένο στο Διαδίκτυο, Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή (Πάτρα, Οκτώβριος 2000), με θέμα: Οι νέες Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, σελ. 297-308.

Κυνηγός Χ.(1995). Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: Η Υπολογιστική Τεχνολογία ως Εργαλείο Έκφρασης και Διερεύνησης στη Γενική Παιδεία, στο συλλογικό έργο,(επιμ. Εκδ.) Α.Μ.

Makrakis, V. και Sawada, T. (1996). *Gender, Computers and other School Subjects among Japanese and Swedish Students.* Computers and Education, τόμ.26, τεύχ.4, σσ.225-231.

Papert, S. (1991). Νοητικές θύελλες,(μτφ. Α. Σταματίου), Οδυσσέας, Αθήνα

Vykotsky, L.S.(1981). The Genesis of Higher Mental Functions, in V. Wertsch (ed), The conceptof activity in Soviet Psychology, Armong, Sharpe, New York

Φλουρής, Γ.(1983). Αναλυτικά Προγράμματα για μια νέα εποχή στην εκπαίδευση, Γρηγόρης, Αθήνα

6.4 ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΙΣ ΤΠΕ

Γνώση και Εμπόδια

Είναι σε όλους γνωστό και γενικά παραδεκτό, ότι πολλές φορές οι μαθητές κάνουν συστηματικά κάποια λάθη κατά την εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων που διδάχτηκαν ή δυσκολεύονται να κατανοήσουν νέες έννοιες κατά τη διδασκαλία.

Τι είναι όμως αυτό που οδηγεί τους μαθητές στο να κάνουν λάθη ή τους εμποδίζει στο να κατανοήσουν νέες έννοιες;

Σύμφωνα με την κατασκευαστική αντίληψη, το λάθος παίζει ένα ρόλο θεμελιακό στη μάθηση. Ο Alain Bouvier, στο ομώνυμο άρθρο του, θεωρεί ότι οι μαθητές έχουν «δικαίωμα στο λάθος». Τα λάθη των μαθητών μας ενδιαφέρουν, γιατί μας βοηθούν να κατανοήσουμε τη σκέψη τους και να παρέμβουμε θετικά για τη δημιουργία νοήματος κατά τη διδασκαλία. Ο Herbert Ginsburg στο «Children's Arithmetic», (1977) σημειώνει: *«Σε τελευταία ανάλυση, δε βοηθάει σε τίποτα να εξηγηθούν τα λάθη με όρους έλλειψης εξυπνάδας ή επιδεξιότητας στα μαθηματικά. Τέτοιες αντιλήψεις συσκοτίζουν το γεγονός ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα συστηματικών στρατηγικών λογικής προέλευσης».*

Ο Guy Brousseau παραπέμπει σε μια διδακτική θεωρία των λαθών και γράφει*:«ένα εμπόδιο εκδηλώνεται λοιπόν από τα λάθη, αλλά αυτά τα λάθη δενείναι τυχαία. Παροδικά και άτακτα, αναπαράγονται επίμονα. Επιπλέον αυτά τα λάθη, στο αυτό υποκείμενο, συνδέονται μεταξύ τους σε μια κοινή αιτία: μια μέθοδο του γνωρίζειν, μια χαρακτηριστική αντίληψη, συνεκτική αν όχι σωστή, μια παλιά «γνώση» και η οποία κατάφερε να κυριαρχεί μέσα σε κάθε περιοχή δράσης».*

Έτσι το «λάθος» θα ήταν η έκφραση ή η σαφής εκδήλωση από ένα σύνολο αυθορμήτων ή προκατασκευασμένων αντιλήψεων, ενταγμένων σ᾽ ένα λογικά συνεπές δίκτυο γνωστικών αναπαραστάσεων, που ορθώνονται ως εμπόδια στην απόκτηση και στην κατοχή νέων γνώσεων. Η υπέρβαση αυτών των εμποδίων γίνεται στο στάδιο της διδακτικής πράξης και το λάθος είναι η υποχρεωτική της διαδρομή.

Ο G. Bachelard πρότεινε πρώτος την έννοια του **επιστημολογικού εμποδίου** (obstacle epistemologique), ως εσωτερική δομή που εμποδίζει την αντικειμενική σκέψη, μια σκέψη δηλαδή που δεν επαφίεται εύκολα στα θέλγητρα της συναισθηματικότητας (affectivite), διότι οι αισθήσεις μας συχνά μας απατούν και μόνο η σκέψη, ο συλλογισμός μπορεί να μας βοηθήσει να ξεπεράσουμε το επίπεδο των «πρωταρχικών» γνώσεων. Ο Bachelard καλεί «πρωταρχικές γνώσεις» (connaissances premieres) ή «κοινές γνώσεις» (connaissances communes) παλαιότερες γνώσεις που άλλοι τις αποκαλούν «πρακτικές» ή «εμπειρικές» γνώσεις. Αναπτύσσοντας την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου, ο Bachelard προτείνει να σκεφτούμε την επιστήμη περισσότερο με όρους ρήξης (rupture) παρά με όρους συνέχειας (continuite). Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα σύνολο τέτοιων «ρήξεων», παρά το ότι με μια επιφανειακή θεώρηση θα μπορούσε κάποιος να πιστέψει το αντίθετο. Κι όμως, πίσω από αυτή τη φαινομενική συνέχεια κρύβονται πολυάριθμες «στιγμές» σύγκρουσης μεταξύ παλαιών πεποιθήσεων και νέων ιδεών, κρύβονται πολυάριθμες «ρήξεις».

Στα πλαίσια αυτά, θέτοντας ως στόχο να περιγράψει το σχηματισμό του επιστημονικού πνεύματος (σε μια κλασσική πλέον μελέτη με τον ίδιο τίτλο) υπογράμμισε τον πρωταρχικό ρόλο των *αναπαραστάσεων*. Έτσι, το γεγονός της γεωμετρικής απόδοσης της αναπαράστασης, η σκιαγράφηση δηλαδή των φαινομένων και η διάταξη εν σειρά των σημαντικών γεγονότων μιας εμπειρίας, συνιστά για αυτήν, την πρώτη εργασία όπου συναντάται η επιστημονική σκέψη. Μέσα απ’ αυτή την προοπτική, η επιστημονική γνώση τίθεται με όρους εμποδίων. Και “*δεν πρόκειται να θεωρηθούν τα εξωτερικά εμπόδια, όπως η πολυπλοκότητα ή η ολιγάρκεια των φαινομένων, ούτε να ενοχοποιηθεί η αδυναμία των ανθρώπινων αισθήσεων και πνεύματος: είναι στην ίδια τη δραστηριότητα της γνώσης, ενδόμυχα, όπου εμφανίζονται, από ένα είδος λειτουργικής αναγκαιότητας, βραδύτητες και διαταραχές. Εκεί θα δείξουμε τις αιτίες της στασιμότητας ή ακόμα* και της οπισθοδρόμησης, εκεί θα αποκαλύψουμε τις αιτίες της αδράνειας που θα αποκαλούμε επιστημολογικά εμπόδια.” (G. Bachelard, 1989, σελ. 13-14).

Ένα σοβαρό για το δάσκαλο ερώτημα που αφορά τη διδασκαλία είναι το εξής: *Πώς μπορούμε να εντοπίσουμε ένα επιστημολογικό εμπόδιο;*

Ο Alain Duroux (1982, 1983) θεωρεί ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο χαρακτηρίζεται από τα πιο κάτω τέσσερα χαρακτηριστικά :

1. Είναι μια γνώση με ένα αρκετά ευρύ πεδίο εφαρμογής.
2. Αυτή η γνώση προσπαθώντας να εφαρμοσθεί και σε άλλες καταστάσεις, προκαλεί λάθη που εντοπίζονται και αναλύονται μόνο σε σχέση με το εμπόδιο.
3. Το εμπόδιο αντιστέκεται στην προσπάθεια εξειδικευμένης εφαρμογής του
4. Η απόρριψη της γνώσης (που συνιστούσε επιστημολογικό εμπόδιο) δημιουργεί τη νέα γνώση ή όπως γράφει ο Bachelard, «Μαθαίνουμε ενάντια μιας παλιότερης γνώσης».

Η παρουσία, λοιπόν των εμποδίων γίνεται αντιληπτή από τα λάθη των μαθητών και συνήθως προκαλούνται από τη χρήση της προηγούμενης γνώσης σε νέες καταστάσεις στις οποίες αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί (Κλαουδάτος, 1996). Διακρίνουμε τους ακόλουθους τύπους εμποδίων: Επιστημολογικά, Γνωστικά και Διδακτικά εμπόδια.

Τα Επιστημολογικά εμπόδια

Έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών. Σύμφωνα με τον Bachelard, είναι εμπόδια που έχουν σχέση με την διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης. Αυτά τα εμπόδια είναι έμφυτα στην ίδια τη γνώση. Τα επιστημολογικά εμπόδια μπορούν να εντοπιστούν από τις δυσκολίες που συναντώνται ιστορικά από τους ίδιους τους μαθηματικούς και τις προσπάθειες να τις υπερνικήσουν. Η κατανόηση αυτών των εμποδίων εμπλουτίζεται από τις έρευνες στην επιστημολογία και την ιστορία των μαθηματικών.

Στην πράξη τα μεγάλα ερωτήματα στα μαθηματικά, που υπήρξαν αιτία σπουδαίας προόδου, είναι επιστημολογικά εμπόδια για τους μαθητές.

Όταν για πρώτη φορά παρατηρήθηκαν τέτοια φαινόμενα, χαρακτηρίστηκαν ως «παράδοξα» και δεν εντάχθηκαν στην καθαρά μαθηματική έρευνα. Μόνο γύρω στα μέσα του 19^{ου} αιώνα άρχισε να δημιουργείται μια κίνηση ανάλυσης και διερεύνησης αυτών των «παθολογικών φαινομένων», γεγονός που παρακίνησε τον Dedekind (1831-1916) και τον Cauchy (1789-1857) να προτείνουν μια θεμελίωση του σώματος των πραγματικών αριθμών. Αυτό παρότρυνε και άλλους στη μελέτη των συνόλων των σημείων, όπου κάτι το «παθολογικό» δημιουργείται. Έτσι, η μελέτη των τριγωνομετρικών σειρών οδήγησε τον Cantor (1845-1918) να θεμελιώσει γύρω στα 1870 τη θεωρία των συνόλων. Έκπληκτος και ο ίδιος είδε να προκύπτει ότι: $cardR > cardN$, αλλά και ότι $cardR = cardR^2$. Σε ένα από τα γράμματα που έστειλε στον Dedekind, με τον οποίο αντήλλασσε απόψεις, γράφει: «Το βλέπω, αλλά δε το πιστεύω».

Άλλα τέτοια παραδείγματα επιστημολογικών εμποδίων αποτελούν:

- Η υπόσταση των αριθμών:«Ο Θεός δημιούργησε τους ακέραιους αριθμούς, οι άλλοι είναι έργο των ανθρώπων» δήλωνε ο Kronecker στο τέλος του 19^{ου} αιώνα. Ο λόγος δύο ομοειδών μεγεθών δεν είναι εύκολα αντιληπτή όπως ένας αριθμός. Ο ίδιος ο Euler στον 17^{ο} αιώνα εξέφρασε τις ίδιες αριθμητικές ιδιότητες δύο φορές: μια φορά για τους αριθμούς, άλλη μια φορά για τα κλάσματα.
- Η άρνηση των Πυθαγορείων να δεχτούν την ύπαρξη άρρητων.
- Η πρόδηλη αμφιβολία των Carnot και Stendhal ακόμα και στην αρχή του 19^{ου} αιώνα να δεχτούν την ύπαρξη αρνητικών αριθμών.

- Οι μιγαδικοί αριθμοί (οι «φανταστικοί») χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία αλγεβρικών υπολογισμών περισσότερο από 300 χρόνια, προτού ο Cauchy και ο Gauss τους δώσουν την υπόσταση του αριθμού.
- Το μηδέν: Αν και εμφανίζεται στους Ινδούς για να γεμίζει τα κενά σε ένα θεσιακό σύστημα αρίθμησης, έπρεπε να περιμένουμε τον 9ο αιώνα για να το ανακαλύψουμε στις αραβικές πραγματείες και τον 12ο αιώνα για να δούμε να επεξεργάζονται τις αλγεβρικές του ιδιότητες. Η εξομοίωση του μηδενός με το «τίποτα» μετατοπίζει το επιστημολογικό εμπόδιο προς μια ψυχολογική εκδοχή και γίνεται αιτία πολυάριθμων σφαλμάτων.
- το άπειρο: Η ιστορία του απείρου, ως πηγή πολύ μεγάλων δυσκολιών των θεμελιώσεων, είναι πλούσια σε προσπάθειες ορισμού, από τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι αυτά του Cantor και Russel.
- Η έννοια της συνάρτησης: Χρειάστηκαν 2000 χρόνια για να εδραιωθεί στη σημερινή της πραγματικότητα.

Σύμφωνα με την Sierpinska διακρίνουμε επιστημολογικά εμπόδια ανάλογα με:

- τις στάσεις, "πιστεύω", πεποιθήσεις
- τα (Ασυνείδητα) σχήματα σκέψης, τρόποι προσέγγισης προβλημάτων, γνώσεις που κατακτήθηκαν από τη μίμηση και την πρακτική κατά τη διάρκεια της κοινωνικοποίησης της εκπαίδευσης.
- την "τεχνική" γνώση, δηλαδή η γνώση που θεωρείται ως επιστημονική.

Τα Γνωστικά Εμπόδια

Τα γνωστικά εμπόδια είναι το αντίστοιχο των επιστημολογικών εμποδίων στο ατομικό επίπεδο και κατά συνέπεια, ότι έχουμε πει για τα επιστημολογικά εμπόδια μεταφέρονται στα γνωστικά. Όταν λοιπόν γίνεται αναφορά στους μαθητές χρησιμοποιούμε τον όρο γνωστικά εμπόδια.

Διδακτικά εμπόδια

Τα Διδακτικά εμπόδια προκύπτουν από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

1. Από τη φορμαλιστική διδασκαλία. Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής δεν μπορεί να συνδέσει τις έννοιες με την υπάρχουσα γνώση και αυτή η ασυνέχεια αποτελεί πηγή πολλών εμποδίων. Η ύπαρξη αυτής της ασυνέχειας δεν είναι πάντα φανερή γιατί οι μαθητές μαθαίνουν να επαναλαμβάνουν ορισμούς και να χειρίζονται τα σύμβολα έστω κι αν δεν καταλαβαίνουν το νόημά τους.

2. Από τη διδακτική μεταφορά. Αυτό σημαίνει, ότι προκειμένου να παρουσιαστεί ένα σύνθετο θέμα, συνήθως εκλογικεύεται με βάση αρχές όπως από το απλό στο σύνθετο ή από το μερικό στο γενικό κ.λ.π., με αποτέλεσμα να προκαλούνται πρόσθετα εμπόδια διδακτικού τύπου.
3. Από την αντίληψη, ότι "ο καλός ο δάσκαλος ξεπερνά τα γνωστικά εμπόδια".

Τα Επιστημολογικά εμπόδια δεν είναι απαραίτητο να αποτελούν και Γνωστικά εμπόδια για τη διδασκαλία. Τα Επιστημολογικά εμπόδια αναγνωρίστηκαν ως τέτοια στην ιστορία των Μαθηματικών, αλλά το μαθησιακό περιβάλλον είναι σήμερα τελείως διαφορετικό από αυτό στο οποίο δημιουργήθηκαν στο παρελθόν.

Κατά τον Tall(1989), η παρουσία των υπολογιστών μπορεί να μεταβάλλει τη φύση μερικών γνωστικών εμποδίων και να παρουσιάσει άλλα. Η κατασκευή επιστημονικής γνώσης απαιτεί ρήξη με τις προηγούμενες γνώσεις. Αυτό σημαίνει, ότι ο ρόλος του γνωστικού εμποδίου είναι ταυτόχρονα θετικός και αρνητικός.

Από τα προηγούμενα προκύπτει, ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι να δημιουργεί, καταστάσεις που ευνοούν μια «σύγκρουση γνώσεων». Αυτό είναι αρκετά δύσκολο καθόσον ο δάσκαλος πρέπει να γνωρίζει τα μοντέλα που διαθέτουν οι μαθητές για τη συγκεκριμένη κατάσταση. Και επιπλέον, εάν η σύγκρουση δεν είναι τέτοια, ώστε να οδηγεί με καλό τρόπο στη νέα γνώση το λανθασμένο μοντέλο που έχει δημιουργήσει μέσα του το παιδί κινδυνεύει να παραμείνει ακλόνητο, ενώ στην καλύτερη περίπτωση το καινούργιο μοντέλο έρχεται να συνυπάρξει με το παλιό.

Στη διδακτική, διακρίνουμε κυρίως τα ακόλουθα χαρακτηριστικά για ένα εμπόδιο:

4. Το εμπόδιο αποτελεί γνώση και όχι έλλειψη γνώσης.
5. Επιτρέπει να παραχθούν απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα ή κατηγορίες προβλημάτων.
6. Οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις για άλλους τύπους προβλημάτων.
7. Παρουσιάζει αντίσταση στην όποια τροποποίηση ή μεταμόρφωση μιας γνώσης και εκδηλώνεται με παλινδρομικό τρόπο, δηλ. επανεμφανίζεται να κυριαρχεί σε ορισμένες καταστάσεις, ακόμα και αν έχει αντικατασταθεί προφανώς από μια καινούρια γνώση.Η απόρριψη αυτής της γνώσης θα οδηγήσει σε μια νέα. Έτσι, μια κατάσταση ρήξης, βιωμένη από το μαθητή, μέσα στην οποία μια παλιά γνώση θα παράγει λάθη, θα έχει ως αποτέλεσμα να φανερωθούν ένα ή περισσότερα εμπόδια καθώς και να εκφραστούν λανθασμένες αντιλήψεις ή αλγόριθμοι, που για να ξεπεραστούν, θα πρέπει να οδηγήσουν στην εγκατάσταση μιας καινούριας γνώσης.

Ένα άλλο σημαντικό ερώτημα που προκύπτει από την εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση αφορά στους τρόπους με τους οποίους θα πρέπει να εισαχθούν και να χρησιμοποιηθούν τα εργαλεία αυτά ώστε να βελτιώσουν τα παιδαγωγικά και διδακτικά αποτελέσματα. Ο βασικός κίνδυνος τον οποίο διατρέχει ο σχεδιαστής ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που υποστηρίζεται από τις ΤΠΕ είναι η έμφαση στην ανάλυση της δομής και των λειτουργιών των ίδιων των εργαλείων η τεχνοκεντρική δηλαδή αντίληψη. Κατά τους ερευνητές δεν είναι το εργαλείο που θα οδηγήσει τον χρήστη στην δημιουργία των προσωπικών του γνωστικών σχημάτων αλλά η φιλοσοφία και ο σχεδιασμός του μαθησιακού περιβάλλοντος, δηλαδή οι δραστηριότητες με τις οποίες θα εμπλακεί. Κωδικοποιώντας μερικές από τις βασικές συνιστώσες κατά τον σχεδιασμό ενός περιβάλλοντος που υποστηρίζεται από τις ΤΠΕ μπορούμε να αναφέρουμε προϋποθέσεις για την εισαγωγή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Το μαθησιακό περιβάλλον θα πρέπει να υποστηρίζει:

Ανοικτές διδακτικές καταστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι δίνει στους μαθητές δυνατότητες πολλαπλών προσεγγίσεων και δεν τους οδηγεί υποχρεωτικά στην μία και μοναδική αλήθεια. Τα εργαλεία τώρα που είναι κατάλληλα για ένα τέτοιο περιβάλλον θα πρέπει να χαρακτηρίζονται από δυνατότητες διερεύνησης και πολλαπλών προσεγγίσεων. Ένα διερευνητικό λογισμικό για παράδειγμα είναι περισσότερο κατάλληλο από ένα άλλο το οποίο καθοδηγεί τον χρήστη μέσα από έναν δαίδαλο με μενού.

Ενεργό μάθηση. Το περιβάλλον δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να κατασκευάσει την προσωπική του γνώση μέσα από καταστάσεις λύσης προβλήματος. Τα μέσα που διαθέτει το περιβάλλον θα πρέπει να χαρακτηρίζονται από δυνατότητες ανατροφοδότησης και αλληλεπίδρασης με τον χρήστη.

Συνεργατική μάθηση. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές εκτός από το προσωπικό νόημα το οποίο δημιουργούν συνδιαμορφώνουν μία κοινή αντίληψη για τις καινούργιες έννοιες και την σημασία τους επικοινωνώντας με τους συμμαθητές τους. Τα εργαλεία που διαθέτουν θα πρέπει να επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών, αλλά και του διδάσκοντα με τους μαθητές, μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις οι οποίες θα αποτελέσουν τον βασικό πυρήνα διαπραγμάτευσης.

Μεταγνωστικές δραστηριότητες και αναστοχασμό. Εργαλεία που επιτρέπουν την γρήγορη πρόσβαση προς την πληροφορία, την επιλογή της κατάλληλης, την οργάνωσή της και την δημιουργική χρήση της συμβάλουν στην απόκτηση μεταγνωστικών δεξιοτήτων. Ακόμη ένα λογισμικό που καταγράφει τις ενέργειες του χρήστη και του επιτρέπει να έχει πρόσβαση σε αυτή την καταγραφή δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να επανεκτιμήσει τις ενέργειές του δηλαδή να αναστοχαστεί.

Εστιάζουμε σε δύο κύριες συνιστώσες:

- Στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές και μαθήτριες στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών
- Στην τεχνολογική εξέλιξη και την επίδραση που ασκεί στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουμε θέματα των μαθηματικών

Είναι φανερό ότι η τεχνολογία δημιουργεί προσβάσεις σε τεράστιας δυναμικότητας εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παρουσιάσουν πολλά μαθηματικά ζητήματα τα οποία στο παρελθόν θεωρούσαμε ως ολοκληρωμένα μέρη του Αναλυτικού Προγράμματος. Ωστόσο, ενώ οι πρώτες προσπάθειες στη χρήση των τεχνολογιών είχαν κατευθυνθεί προς μια χρήση αυτών των εργαλείων για διευκόλυνση απο το βάρος των υπολογισμών σχετικών με τις απαντήσεις που έπρεπε να δώσουμε, οι δάσκαλοι των Μαθηματικών πιστεύουν ότι η χρήση και αξιοποίηση των ΤΠΕ θα έχει πολύ μεγαλύτερη επίδραση

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Γαβρίλης Κ., (2002). 'Μάθηση και διδασκαλία της γεωμετρίας σε υπολογιστικά περιβάλλοντα', στο 'Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για την Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής', επιμέλεια Κυνηγός Χ., Δημαράκη Ε., Εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα.

Γαβρίλης Κ., Γαβρίλης Δ,., (2002). 'Μαθαίνοντας μαθηματικά στο Internet', Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα.

Γαβρίλης Κ., Λάππας Δ., (2000). «Νέο περιβάλλον στη διδασκαλία της Γεωμετρίας», στο «Ερευνητικές προσεγγίσεις στη Διδακτική της Γεωμετρίας» Πρακτικά 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας.

Θωμαΐδης Ι., (1995). «Διδακτική Μετατόπιση Μαθηματικών Εννοιών και Εμπόδια Μάθησης», Διδακτορική Διατριβή, ΑΠΘ

Goldenberg, E.P. (1988). "Mathematics, Metaphors and Human Factors: mathematical, technical and pedagogical challenges in the graphical representation of functions." *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-174

Harvey, W. J., Schwartz & M. Yerushalmy (1988). *Visualizing Algebra*, Sunburst, Pleasantville, N.Y.

Kynigos, C., (1995). Programming as a means of expressing and exploring ideas in a directive educational system: three case studies. In A. DiSessa, C. Hoyles, & R. Noss

(Eds.), *Computers and Exploratory Learning* (NATO ASI Series, 399-420), Berlin: Springer Verlag.

Κυνηγός Χ., (2002). 'Ανάπτυξη Μαθηματικών Μικρόκοσμων ως Διαδικασία Κατάρτισης Επιμορφωτών', στο 'Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για την Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής', επιμέλεια Κυνηγός Χ., Δημαράκη Ε., Εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα.

Laborde, C., (1995). Η μάθηση της Γεωμετρίας με τη βοήθεια του υπολογιστή – Επαγωγικές και κονστρουβιστικές πλευρές, *Διδακτική των Μαθηματικών, Θεωρία – Έρευνα, Επιμέλεια Α. Γαγάτσης*, Θεσσαλονίκη, Greece, Art of Text.

Laborte, C., (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry, In C.Keitel and k. Ruthven (Eds.) Learning from Computers: *Mathematics Education and Technology* (pp. 48-67), Berlin: Springer.

Webs of Cabri Géomètre & Geometer's Sketchpad: http://forum.swarthmore.edu/dynamic.html

Web of Cabri Géomètre: http://www-cabri.imag.fr/sites/sites-e.html

6.5 ΑΝΑΠΤΥΞΗ, ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕΝΑΡΙΩΝ ΚΑΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Ο όρος «σχεδιασμός σεναρίου» χρησιμοποιείται για να περιγράψει την προκαταρτική και σε βάθος μελέτη που πρέπει να κάνει ο διδάσκων προκειμένου να εμπλέξει τους μαθητές του σε μια μαθησιακή διαδικασία με την οποία θα έχουν τα μέγιστα δυνατά οφέλη. Η μελέτη και περιγραφή ενός σεναρίου στην πραγματικότητα είναι η από κάθε πλευρά μελέτη του θέματος που πρόκειται να διδαχθεί και αφορά το ίδιο το θέμα και την επιστημολογία του, την διδακτική διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει ο διδάσκων, τα μέσα και τα εργαλεία που πρέπει να χρησιμοποιήσει, τις δραστηριότητες στις οποίες πρέπει να εμπλέξει τους μαθητές του, τις ενδεχόμενες μαθησιακές συγκρούσεις που πρέπει να προκαλέσει στους μαθητές του με αυτές κ.ά. Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών πρέπει να αφορά αυτές τις πτυχές και να έχει σκοπό να καταστήσει τους επιμορφούμενους ικανούς να σχεδιάζουν σενάρια για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για το σκοπό αυτό πρέπει:

1. Να παρουσιαστούν στους επιμορφούμενους επιλεγμένα σενάρια και να αναλυθούν οι πτυχές τους.
2. Να παρουσιάστουν ημιτελή σενάρια και να ζητηθεί από τους επιμορφούμενους να τα ολοκληρώσουν.
3. Να δοθεί στους επιμορφούμενους ένα θέμα και να τους ζητηθεί να σχεδιάσουν ένα σενάριο για τη διδασκαλία του.
4. Να αναπτύξουν οι επιμορφούμενοι ένα το σενάριο που επιθυμούν σύμφωνα με τις εμπειρίες τους.

Τα θέματα που θα προταθούν μπορούν να αντλούνται από την περιοχή του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, από ευρύτερες γνωστικές περιοχές ή από την καθημερινότητα και άρα μπορούν να αγγίζουν ευρύτερους κοινωνικούς προβληματισμούς και έτσι να αποκτούν μεγαλύτερη αυθεντικότητα.

Πρέπει να γίνει κατανοητό σε επιμορφωτές και επιμορφούμενους ότι το σενάριο είναι μια προκαταρτική μελέτη της διδασκαλίας ενός θέματος και το οποίο όταν εφαρμοστεί φανερώνει τις αδυναμίες και τις αστοχίες. Είναι σημαντικό επομένως (1) κατά τον σχεδιασμό του να επιχειρείται η όσο το δυνατό καλύτερη τεκμηρίωση των απόψεων του συντάκτη που ενσωματώνονται σ' αυτό και (2) να επιχειρείται μια όσο το δυνατόν αντικειμενική αξιολόγηση κατά την εφαρμογή του στους μαθητές αλλά και στο τέλος αυτής. Έτσι, ο συντάκτης θα έχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να διορθώσει το σενάριο και να το κάνει ακόμα καλύτερο για την επόμενη εφαρμογή του.

Ορίζοντας το σενάριο

Ως σενάριο θα μπορούσε να οριστεί μία δομημένη, πλήρης και εφαρμόσιμη διδακτική πρόταση. Συνήθως το σενάριο έχει την μορφή ενός κειμένου. Ο προσδιορισμός 'δομημένη' αναφέρεται στην μορφή του σεναρίου η οποία είναι σαφής, διακρίνεται σε θεματικές ενότητες (παραγράφους) και στηρίζεται σε ένα μοντέλο που αποτελεί βάση συγγραφής και άλλων σεναρίων. Ο προσδιορισμός 'πλήρης' αναφέρεται στο σύνολο των πτυχών της μαθησιακής διαδικασίας που θα πρέπει να αναδείξει το σενάριο, οι οποίες πτυχές θα πρέπει να καλύπτουν τόσο τα παιδαγωγικά όσο και τα γνωστικά και τα καθαρά μαθηματικά θέματα με τα οποία εμπλέκεται το συγκεκριμένο σενάριο. Τέλος ο όρος εφαρμόσιμο προσδιορίζει το πλαίσιο λειτουργίας και εφαρμογής του σεναρίου σε πραγματικές συνθήκες. Ένα σενάριο, για παράδειγμα, το οποίο προβλέπει μία διδακτική ώρα για την διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης μέσα από λύση προβλήματος θα οδηγήσει ίσως σε έλλειμμα παιδαγωγικών ή γνωστικών αποτελεσμάτων υποχρεώνοντας τον διδάσκοντα να καταλάβει τον κυρίαρχο ρόλο μέσα στην αίθουσα.

Προτεινόμενη δομή των σεναρίων

1. Ένα σενάριο έχει σαν αρχή μία σύντομη περιγραφή της **βασικής ιδέας** που το διαπερνά. Ο δημιουργός του σεναρίου δίνει μία σύνοψη όλης της δραστηριότητας με έμφαση σε εκείνα τα σημεία τα οποία εισάγουν τον αναγνώστη στο πνεύμα και το κλίμα της. Αν, για παράδειγμα, πρόκειται να διδαχτεί η έννοια της ομοιότητας στο Γυμνάσιο με τη βοήθεια ενός δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού τότε στην βασική ιδέα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι αυτή εκλαμβάνεται ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Επιπλέον οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που είναι απαραίτητοι υποστηρίζονται από τις δυνατότητες του λογισμικού με το οποίο θα δημιουργήσουμε 'φαινόμενα' μεγέθυνσης τα οποία θα μελετήσουν οι μαθητές.

2. Οι **στόχοι του σεναρίου** θα μπορούσαν να διακριθούν:

    - Σε αυτούς που αφορούν στο γνωστικό αντικείμενο, δηλαδή στην κατανόηση του συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου και την απόκτηση δεξιοτήτων που σχετίζονται με αυτό.

    - Σε στόχους που αφορούν σε παιδαγωγικές-κοινωνικές αξίες, όπως για παράδειγμα η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών, η κινητοποίηση, η σημασία των μαθηματικών μοντέλων στην κατανόηση των φαινομένων κ.τ.λ

- ο Σε στόχους που αφορούν σε γνωστικές δράσεις που σχετίζονται με τα μαθηματικά, όπως η διαδικασία απόδειξης, η αφαίρεση, η γενίκευση, η σύνδεση, η ερμηνεία, η αντιστροφή μιας διαδικασίας.

3. **Προαπαιτούμενα** για την υλοποίηση της δραστηριότητας. Αυτά θα μπορούσαν να διακριθούν:
    - ο Σε βασικές μαθηματικές δεξιότητες και γνώσεις των μαθητών.
    - ο Σε βασικές δεξιότητες που σχετίζονται με τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν.
    - ο Στα εργαλεία που είναι απαραίτητα για την υλοποίηση καθώς και στον χώρο.
4. **Αναφορά στα καινοτομικά στοιχεία** που εισάγονται με την δραστηριότητα τα οποία θα πρέπει να συσχετιστούν-αντιπαρατεθούν με την παραδοσιακή πρακτική.
5. Στις **φάσεις υλοποίησης** της δραστηριότητας αναλύεται η προσδοκώμενη διδακτική πορεία, η στρατηγική των παρεμβάσεων ίσως και οι πιθανές-αναμενόμενες δυσκολίες των μαθητών και οι προτεινόμενοι τρόποι υπέρβασης. Κατά την ανάλυση θα πρέπει να αναδεικνύονται:
    - ο Η θέση και η στάση του διδάσκοντα μέσα στην τάξη, ο τρόπος με τον οποίο επικοινωνεί με τους μαθητές πιθανές ερωτήσεις και παρεμβάσεις του.
    - ο Η θέση και ο ρόλος των μαθητών, ο τρόπος με τον οποίο αναμένεται να αλληλεπιδρούν με τα εργαλεία και τους άλλους μαθητές στην τάξη.
6. Στα **φύλλα εργασίας** για τους μαθητές θα πρέπει να καταγράφονται το πρόβλημα, τα ερωτήματα και οι εργασίες των μαθητών που σχετίζονται με την δραστηριότητα που περιγράφει το σενάριο. Είναι χρήσιμο στο φύλλο εργασίας το κείμενο να είναι απλό, σαφές και να δημιουργεί κινητοποίηση. Το πλήθος των ερωτήσεων σε ένα φύλλο εργασίας δεν θα πρέπει να είναι μεγάλο αλλά ούτε και οι ερωτήσεις να είναι μακροσκελείς.
7. Ο τρόπος **αξιολόγησης** της μαθησιακής διαδικασίας και του αποτελέσματος.
8. Πιθανές δυνατότητες **επέκτασης** της δραστηριότητας.

Μεθοδολογία επιμόρφωσης σχετικά με τα σενάρια

Η επιμόρφωση που σχετίζεται με τα εκπαιδευτικά σενάρια προτείνεται να εξελιχτεί σύμφωνα με την παρακάτω πορεία:

- ο Ορισμός της έννοιας 'εκπαιδευτικό σενάριο'. Οι επιμορφούμενοι ενημερώνονται για την έννοια και τους στόχους δημιουργίας ενός εκπαιδευτικού σεναρίου, τον ρόλο και την αξία μιας δομημένης διδασκαλίας απέναντι σε μία πρόχειρη και εν πολλοίς αυθόρμητης διδασκαλίας.

- Μία παρουσίαση της δομής που θα πρέπει να έχει ένα σενάριο. Εδώ περιγράφονται σε αδρές γραμμές οι θεματικές ενότητες πάνω στις οποίες αρθρώνεται ένα σενάριο (Σύντομη περιγραφή - Μαθησιακή και Παιδαγωγική διάσταση-Απαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες- Διδακτική διαχείριση της τάξης – Υλοποίηση – Φύλλο εργασίας – Αξιολόγηση – Ανατροφοδότηση).
- Ανάλυση των επιμέρους θεμάτων από τα οποία συντίθεται μία ενότητα Οι στόχοι για παράδειγμα θα μπορούσαν να διακριθούν σε γνωστικούς, σε παιδαγωγικούς, σε στόχους που αφορούν στην τεχνολογία κ.λ.π
- Παρουσίαση ενός ενδεικτικού σεναρίου και ανάλυση της δομής του. Μέσα στα ήδη υπάρχοντα σενάρια οι επιμορφούμενοι αναγνωρίζουν την ανάλυση των θεματικών ενοτήτων και των επιμέρους θεμάτων.
- Υλοποίηση του σεναρίου μέσα στην ομάδα των υποψηφίων επιμορφωτών. Οι επιμορφούμενοι επιχειρούν να υλοποιήσουν το σενάριο καταγράφοντας την εμπειρία τους.
- Σχολιασμός της υλοποίησης και παρατηρήσεις προς την κατεύθυνση της βελτίωσης ή της επέκτασής του. Διαπραγματεύονται την προσωπική τους αντίληψη για τις δυσκολίες και τα εμπόδια που συνάντησαν. Εκτιμούν την δυνατότητα επίτευξης των στόχων μέσα από την προτεινόμενη διδακτική πορεία του σεναρίου.
- Επιλογή μίας θεματικής ενότητας από το τρέχον ΑΠ των Μαθηματικών του σχολείου και εκπόνηση σεναρίων. Οι επιμορφούμενοι σε ομάδες πλέον αναλαμβάνουν να δημιουργήσουν σενάρια πάνω σε ένα θέμα της προσωπικής τους επιλογής ή όλες οι ομάδες αναλαμβάνουν να δημιουργήσουν ένα σενάριο πάνω στο ίδιο θέμα.
- Παρουσίαση και σχολιασμός των νέων σεναρίων στην ομάδα.

Η έννοια και η σημασία του εκπαιδευτικού σεναρίου και της δραστηριότητας

- Αναλύεται ο ρόλος της σχεδίασης και της περιγραφής των σεναρίων στη διδασκαλία και στη μάθηση.
- Ανάλυση της διαφοράς, σεναρίων και δραστηριοτήτων όσον αφορά στην περιγραφή, και εφαρμογή.
- Ανάλυση του ρόλου της αυτόνομης δραστηριότητας και της δραστηριότητας που είναι ενταγμένη στο πλαίσιο του σεναρίου.

- Παρουσίαση των αξόνων ανάπτυξης σεναρίων.

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

- Ανάλυση συγκεκριμένων σεναρίων.
- Ανάλυση της βασικής ιδέας ενός σεναρίου μέσα στα πλαίσια των στόχων που έχουν τεθεί..
- Διαπραγμάτευση της ευρύτερης συνεισφοράς του σεναρίου στη μαθησιακή και παιδαγωγική διαδικασία.
- Διαπραγμάτευση των κατάλληλων υπολογιστικών εργαλείων που αφορούν στο περιεχόμενο του σεναρίου.
- Διαπραγμάτευση του τρόπου εργασίας των ανθρώπων (μαθητών και εκπαιδευτικών) κατά την υλοποίηση του σεναρίου και αντιπαράθεση με την εργασία σε περιβάλλον που χρησιμοποιούνται συμβατικά εκφραστικά μέσα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες για την εφαρμογή του σεναρίου

- Οι επιμορφούμενοι εμπλέκονται με συγκεκριμένα σενάρια.
- Αναλύονται οι γνώσεις που απαιτείται να έχουν οι μαθητές ως προϋποθέσεις για να εμπλακούν με επιτυχία με τις δραστηριότητες του σεναρίου.
- Αναλύονται οι δεξιότητες που πρέπει να έχουν οι μαθητές στη χρήση των εργαλείων που προτείνονται στο σενάριο.
- Αναλύεται το επίπεδο δυσκολίας και απαιτούμενες δεξιότητες του διδάσκοντα (ως προς την τεχνολογία, την παιδαγωγική στάση κτλ)

Διδακτική διαχείριση της τάξης

- Αναλύεται ο ρόλος των μαθητών κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων του σεναρίου (π.χ. αναλύεται τι θα ζητείται από τους μαθητές και τι αναμένεται να κάνουν κατά την πορεία υλοποίησης του σεναρίου (να παρατηρούν, να εκφράζουν εικασίες συμπεράσματα και κανόνες, να κάνουν υπολογισμούς, να σχεδιάζουν στο χαρτί, να χρησιμοποιούν το προτεινόμενο λογισμικό με συγκεκριμένο τρόπο – να κάνουν πειράματα, κτλ.)
- Αναλύεται ο ρόλος των μαθητών στην ομάδα τους και στην τάξη (πώς θα αξιοποιηθεί στην υλοποίηση του σεναρίου ο μαθητής που αναλαμβάνει ηγετικό ρόλο στην ομάδα, ή πως και πότε θα εναλλάσσονται οι ρόλοι των μαθητών κτλ.)
- Αναλύεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην προσαρμογή και εφαρμογή των σεναρίων(π.χ. προσαρμογή του σεναρίου στην διδακτική ατζέντα του

εκπαιδευτικού, ενσωμάτωση εμπειριών και γνώσεων, προσωπικό στυλ, προσαρμογή του σεναρίου στη συγκεκριμένη τάξη εφαρμογής, ενορχήστρωση της τάξης κτλ.).

- Οι επιμορφούμενοι εμπλέκονται με συγκεκριμένα σενάρια

Υλοποίηση του σεναρίου

- Αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζονται οι επιμέρους δραστηριότητες που υποστηρίζουν το σενάριο καθώς και η αλληλουχία τους (π.χ. μια δραστηριότητα προηγείται μιας άλλης επειδή στην δεύτερη θα χρησιμοποιηθεί το συμπέρασμα της πρώτης, ή ότι στη δεύτερη θα χρησιμοποιηθεί η εμπειρία που αποκτήθηκε από την πρώτη ή ότι στη δεύτερη θα χρησιμοποιηθούν τα ερωτήματα που γεννήθηκαν στην πρώτη ή θα αξιοποιηθούν οι πληροφορίες που αποκτήθηκαν στη πρώτη κτλ.)
- Οι επιμορφούμενοι εμπλέκονται με συγκεκριμένα σενάρια

Το φύλλο εργασίας ως εργαλείο στη διδακτική/ μαθησιακή διαδικασία

1. Αναλύεται ο τρόπος αποτύπωσης της διδακτικής ατζέντας στο φύλλο εργασίας.
    - Συνεργατική ή ατομική μάθηση.
    - Ο ρόλος τω εργαλείων σε ένα συγκεκριμένο φύλλο εργασίας.
    - Ανοικτές / κλειστές ερωτήσεις.
    - Εστίαση στα σημαντικά μαθησιακά ζητήματα της δραστηριότητας.
    - Σύνδεση με τα άλλα φύλλα εργασίας της δραστηριότητας (αν υπάρχουν)
2. Σύνδεση του φύλλου εργασίας με τις αναμενόμενες δραστηριότητες των μαθητών.
3. Σύνδεση του φύλλου εργασίας με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.
4. Οι επιμορφούμενοι εμπλέκονται με συγκεκριμένα σενάρια

Αξιολόγηση του σεναρίου

1. Αναλύονται τρόποι προκαταρτικής αξιολόγησης (τεκμηρίωση) του σεναρίου. Αξιολόγηση ως προς την
    - δυνατότητα επίτευξης των επιδιώξεων του σεναρίου.
    - πληρότητα της περιγραφόμενης διαδικασία μάθησης.
    - περιγραφόμενη διαδικασία εφαρμογής στην τάξη/ομάδα.
    - περιγραφή των ρόλων ανθρώπων και εργαλείων.

2. Αναλύονται διαδικασίες αξιολόγησης του σεναρίου κατά την εφαρμογή του. Αξιολογούνται οι επιπτώσεις που έχει η εφαρμογή του
    - στην αποτελεσματικότητα των ρόλων που αναθέτει.
    - στην χρηστικότητα / χρησιμότητα των εργαλείων που προτείνει.
    - στη διαδικασία μάθησης των συγκεκριμένων αντικειμένων του σεναρίου που επιδιώκει.
3. Αναλύονται θέματα που αφορούν στην αξιολόγηση/τεκμηρίωση του σεναρίου ως προς την:
    - Συμβατότητα του προτεινόμενου σεναρίου με το Πρόγραμμα Σπουδών.
    - Η σχέση του σεναρίου και των προτάσεών του με δεδομένα που αφορούν στις δυσκολίες μάθησης των αντικειμένων που προτείνονται.
    - Οι δυσκολίες εφαρμογής του σεναρίου.
4. Αναλύονται θέματα που αφορούν στην αξιολόγηση του σεναρίου / δραστηριότητας κατά την εφαρμογή του όπως:
    - Οι παρατηρήσεις του εκπαιδευτικού κατά την εφαρμογή.
    - Η αξιολόγηση των γραπτών δεδομένων των μαθητών (φύλλα εργασίας κτλ).
    - Οι δυσλειτουργίες που παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή
5. Οι επιμορφούμενοι υλοποιούν συγκεκριμένα σενάρια.

Ειδικές περιπτώσεις σεναρίων

1. Να προσδιορίζουν τις ιδιαιτερότητες και τις διαφορές των
    - Δια-μαθηματικών
    - Δι-επιστημονικών
    - Δια-θεματικών σεναρίων
2. Παρουσιάζονται παραδείγματα σεναρίων των τριών τύπων.
    - Δια-μαθηματικών
    - Δι-επιστημονικών
    - Δια-θεματικών

3. Αναλύονται οι διαφορές των τριών τύπων σεναρίων στην ανάπτυξή τους και στην περιγραφή τους.

Πρακτική άσκηση στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων

1. Να συγγράφουν και να εφαρμόζουν:
    - σενάρια για τη Γεωμετρία, την Άλγεβρα, την Ανάλυση και τη Στατιστική επεξεργασία δεδομένων
    - διεπιστημονικά σενάρια
    - διαθεματικά σενάρια
2. Να συγγράφουν και εφαρμόζουν:
    - σενάρια για τη Γεωμετρία, την Άλγεβρα, την Ανάλυση και τη Στατιστική επεξεργασία δεδομένων.
    - διεπιστημονικά σενάρια.
    - διαθεματικά σενάρια.
3. Οι επιμορφούμενοι επιλέγουν ένα θέμα από κάθε περιοχή και αναπτύσσουν ένα σχετικό σενάριο. Στη συνέχεια παρουσιάζουν το αναπτυγμένο σενάριο στην ομάδα τους αναλύοντας και αιτιολογώντας τις επιλογές τους για κάθε παράμετρο του σεναρίου όπως και στις δραστηριότητες.

6.6 ΕΝΤΑΞΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΠΕ ΣΤΑ ΑΠΣ ΜΕΣΩ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕΝΑΡΙΩΝ

Διαδικασίες και Παραλληλόγραμμα

Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Α) Η βασική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές, θα ξεκινήσουν δουλεύοντας με ειδικά σχεδιασμένα απλά προγράμματα στη γλώσσα Logo, τα οποία όταν εκτελούνται έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία τεθλασμένων γραμμών. Θα χρησιμοποιήσουν τα προγράμματα αυτά για να κάνουν πειράματα για το πότε το αποτέλεσμα της εκτέλεσής τους είναι παραλληλόγραμμο. Για τον πειραματισμό αυτό, θα εκτελούν τα προγράμματα με διαφορετικές γραμμικές ή γωνιακές τιμές ή θα μεταβάλλουν δυναμικά τις τιμές αυτές. Θα οδηγηθούν έτσι στο να ανακαλύψουν βασικές γραμμικές και γωνιακές ιδιότητες των παραλληλογράμμων μέσα από την κατασκευή τους και θα 'διορθώσουν' τα προγράμματα ώστε να φτιάχνουν πάντα παραλληλόγραμμα με αυτά. Στο τέλος θα χρησιμοποιήσουν τα διορθωμένα προγράμματα για να φτιάξουν σχέδια δικής τους επιλογής βασισμένα στο παραλληλόγραμμο ως δομικό λίθο στα σχέδιά τους. Τα σχέδια αυτά μπορούν να τα 'ζωντανέψουν' δίνοντας τους κίνηση με το δυναμικό χειρισμό τους.

Β) Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο αυτό μπορεί να εφαρμοστεί στο μάθημα των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.

Γ) Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό «Χελωνόκοσμος».

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

Α) Μαθησιακοί στόχοι

Οι μαθητές που θα φέρουν με επιτυχία σε πέρας τις δραστηριότητες αυτού του σεναρίου, θα αποκτήσουν εμπειρίες διερεύνησης και γνώσεις σχετικές με τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Οι ιδιότητες παραλληλογράμμων με τις οποίες θα ασχοληθούν οι μαθητές, είναι α) οι απέναντι γωνίες και πλευρές είναι ίσες, β) το άθροισμα των γωνιών είναι 360 μοίρες, γ) οι προσκείμενες σε μια πλευρά γωνίες είναι παραπληρωματικές. Θα ασχοληθούν επίσης και με ιδιότητες ειδικών περιπτώσεων των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο). Απώτερος στόχος είναι να τους δοθεί η δυνατότητα να εμβαθύνουν στην έννοια της ιδιότητας γεωμετρικών σχημάτων γενικότερα και να μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις εν λόγω ιδιότητες για να φτιάξουν και να κινούν τα δικά τους σχέδια στο περιβάλλον του λογισμικού.

Β) Παιδαγωγικοί στόχοι

Με τις δραστηριότητες του προτεινόμενου σεναρίου, οι μαθητές θα εξασκηθούν στη διεξαγωγή πειραμάτων για την κατασκευή παραλληλογράμμων και θα εμπλακούν σε διαδικασίες εικασίας, κατασκευής υποθέσεων, εξαγωγής συμπερασμάτων και σταδιακής γενίκευσης και διατύπωσης κανόνων για τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Με το 'Χελωνόκοσμο', θα χρησιμοποιήσουν συνδυασμό αναπαραστάσεων των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, δηλαδή θα τις διατυπώσουν υπό τη μορφή εντολών σε συμβολική γλώσσα (Logo), θα παρατηρήσουν το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών στο μηχάνημα και θα χειριστούν δυναμικά τα γραφήματα, αλλάζοντας με συνεχή τρόπο τις τιμές των μεταβλητών μεγεθών τους. Με τους τρόπους αυτούς θα πειραματιστούν δημιουργώντας και διορθώνοντας προγράμματα και τα σχήματα που τους αντιστοιχούν.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

α) Από την πλευρά του μαθητή

Για να μπορούν οι μαθητές να εργαστούν απρόσκοπτα θα πρέπει

- ✓ να γνωρίζουν τις έννοιες:
    - o των κλειστών και ανοικτών πολυγώνων
    - o των παραλλήλων και των τεμνομένων ευθειών
    - o της ορθής γωνίας
- ✓ να γνωρίζουν στοιχειωδώς τις βασικές εντολές της γλώσσας προγραμματισμού Logo καθώς και τον τρόπο σύνταξης προγραμμάτων,

β) Από την πλευρά του καθηγητή

Ο εκπαιδευτικός που θα χρησιμοποιήσει το σενάριο αυτό θα πρέπει να γνωρίζει:

- ✓ τις βασικές εντολές και διαδικασίες (προγράμματα) της γλώσσας προγραμματισμού Logo καθώς και τον τρόπο σύνταξης αυτών,
- ✓ τον τρόπο χρήσης των εργαλείων του λογισμικού «Χελωνόκοσμος» και ιδιαίτερα την χρήση του μεταβολέα.

Διδακτική διαχείριση της τάξης

Ο εκπαιδευτικός, για να πετύχει τους στόχους του σεναρίου οργανώνει τους μαθητές κατάλληλα σε ολιγομελείς ομάδες (αποτελούμενες από δύο με τρία άτομα) και τους ενθαρρύνει να κάνουν πειράματα και να συζητούν μεταξύ τους για τα αποτελέσματα αυτών. Ακόμα προτρέπει τους μαθητές κάθε ομάδας, να αναλαμβάνουν εναλλασσόμενους ρόλους ώστε να συμμετέχουν ισότιμα και να έχουν την ευκαιρία να εκφράζουν τις ιδέες τους.

Κινείται μεταξύ των ομάδων, παρακολουθεί την πρόοδο των εργασιών των μαθητών και παρεμβαίνει όποτε χρειάζεται, θέτοντας κατάλληλα ερωτήματα που κατευθύνουν τους μαθητές στην εκτέλεση συγκεκριμένων πειραμάτων και στην εξέταση των ειδικών περιπτώσεων.

Υλοποίηση

Α) Προετοιμασία

Οι μαθητές που θα εμπλακούν με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, πρέπει να γνωρίζουν τις απαραίτητες λειτουργικότητες του λογισμικού Χελωνόκοσμος του προγράμματος Αβάκιο (E-slate), τις βασικές εντολές της γλώσσας προγραμματισμού Logo καθώς και τον ορισμό των εννοιών της παραλληλίας ευθειών, της γωνίας και του τετραπλεύρου. Η δραστηριότητα πρέπει να διεξαχθεί στο εργαστήριο των Η/Υ ώστε οι μαθητές να μοιράζονται τους υπολογιστές και να μπορούν να κατασκευάσουν και να πειραματίζονται οι ίδιοι. Ο εκπαιδευτικός προετοιμάζει το φύλλο εργασίας και μελετά τον τρόπο που θα αντιδρά στις πιθανές εκβάσεις της δραστηριότητας ή στις ερωτήσεις των μαθητών. Πριν την εφαρμογή του σεναρίου μπορεί να συζητήσει μέσω απλών δραστηριοτήτων με τους μαθητές τις βασικές εντολές της Logo. Το προτεινόμενο σενάριο μπορεί να ολοκληρωθεί σε τέσσερις φάσεις.

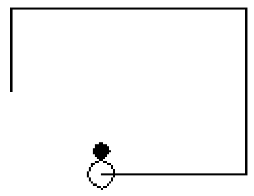
Φάσεις διεξαγωγής του σεναρίου

Α′ φάση – Κατασκευή ορθογωνίου

Στους μαθητές δίνεται η παραμετρική διαδικασία:

> *Για Αμυστήριο :α :β :γ :δ*
>
> *μ :α δ 90 μ :β δ 90 μ :γ δ 90 μ :δ δ 90*
>
> *τέλος*

και ζητείται να την εκτελέσουν δίνοντας τυχαίες τιμές στις μεταβλητές α, β, γ και δ. Μ′ αυτό τον τρόπο θα κατασκευάσουν μία τεθλασμένη γραμμή με ορθές γωνίες.



Εικόνα 1

Στη συνέχεια ζητείται από κάθε ομάδα μαθητών να κάνουν πειράματα με τις τιμές των μεταβλητών στον μεταβολέα, ώστε να προκύπτει ορθογώνιο. Καλούνται να παρατηρήσουν τη σχέση που έχουν οι τιμές των τεσσάρων μεταβλητών και να διατυπώσουν κανόνα.

Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόζουν διάφορες στρατηγικές πειραματισμού με τις αριθμητικές τιμές των μεταβλητών στον μεταβολέα, να παρατηρούν με ποιο τρόπο μεταβάλλεται το σχήμα καθώς αυξομειώνουν μια τιμή, να συζητούν και να καταγράφουν τα συμπεράσματα τους. Η εμπειρία που θα αποκτήσουν από τον πειραματισμό θα τροφοδοτήσει σχετική συζήτηση τόσο στα πλαίσια της κάθε ομάδας, όσο και στην τάξη συνολικά, με στόχο να διατυπώσουν συμπεράσματα όπως τα παρακάτω:

✓ *οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες*

✓ *όταν όλες οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες έχουμε τετράγωνο.*

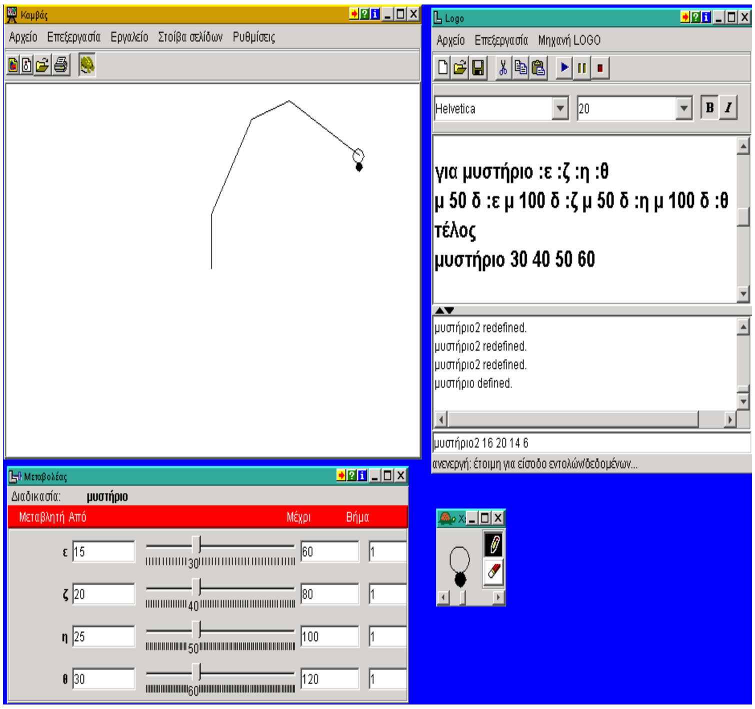
Στη συνέχεια, οι μαθητές χρησιμοποιούν τον κανόνα, που πρέπει να συνδέει τις μεταβλητές για να κατασκευάζεται ορθογώνιο, για να διορθώσουν την παραμετρική διαδικασία ώστε αυτή να περιέχει δύο μόνο μεταβλητές. Αναμένεται να προκύψουν διαδικασίες της μορφής:

για ορθογώνιο :χ :ψ

μ :χ δ 90 μ :ψ δ 90 μ :χ δ 90 μ :ψ δ 90

τέλος

Στιγμιότυπο:



Εικόνα 2

Πώς εκτελεί η χελώνα κάθε γραμμή του κώδικα;

Βρείτε μια τετράδα τιμών για τις μεταβλητές όπου η χελώνα δημιουργεί κλειστό τετράπλευρο και μάλιστα παραλληλόγραμμο. Υπάρχουν κι άλλες; Πόσες;

Υπάρχει κανόνας για τις τιμές αυτές ώστε να ξέρω από πριν ότι θα βγει παραλληλόγραμμο; Μπορείτε να τον γράψτε; Πώς αλλάζει ο κανόνας όταν θέλω τετράγωνο;

Β′ Φάση – Κατασκευή παραλληλογράμμου

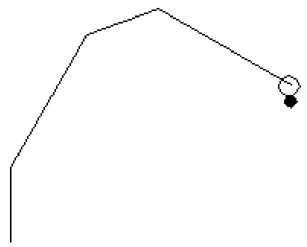
Στους μαθητές δίνεται η παραμετρική διαδικασία :

Για Βμυστήριο :ε :ζ :η :θ

μ 50 δ :ε μ 100 δ :ζ μ 50 δ :η μ 100 δ :θ

τέλος

και ζητείται να την εκτελέσουν δίνοντας τυχαίες τιμές στις μεταβλητές ε, ζ, η και θ. Με αυτόν τον τρόπο θα κατασκευάσουν για τυχαίες τιμές των μεταβλητών μία τεθλασμένη γραμμή. Στην διπλανή εικόνα η γραμμή έχει κατασκευαστεί για τις τιμές 30, 40, 50, και 60 αντιστοίχως.



Εικόνα 3

Στη συνέχεια, ζητείται από κάθε ομάδα μαθητών να κάνουν πειράματα με τις τιμές των τεσσάρων μεταβλητών, ώστε να προκύπτει παραλληλόγραμμο. Καλούνται να παρατηρήσουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των τεσσάρων τιμών των μεταβλητών, όταν το σχήμα είναι παραλληλόγραμμο[3] και να διατυπώσουν σχετικό κανόνα.

Όπως και στην προηγούμενη φάση, η εμπειρία που θα αποκτήσουν οι μαθητές από την διαδικασία πειραματισμού θα τροφοδοτήσει συζήτηση στην κάθε ομάδα και σε ολόκληρη την τάξη με στόχο να γίνει κατανοητό ότι,

- ✓ το άθροισμα των γωνιών του παραλληλογράμμου είναι 360 μοίρες
- ✓ οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες
- ✓ οι διαδοχικές γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές
- ✓ το ορθογώνιο και το τετράγωνο είναι ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμου.

Ακολούθως οι μαθητές χρησιμοποιούν τον κανόνα, που πρέπει να συνδέει τις μεταβλητές για να κατασκευάζεται παραλληλόγραμμο, για να διορθώσουν τη διαδικασία ώστε να περιέχει τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές. Αναμένεται να προκύψουν διαδικασίες της μορφής:

για Απαραλληλόγραμμο :ε

μ 50 δ :ε μ 100 δ :180- :ε μ 50 δ :ε μ 100 δ :180- :ε

τέλος

Η φάση αυτή ολοκληρώνεται με τον καθορισμό απ' όλες οι ομάδες της διαδικασίας που κατασκευάζει παραλληλόγραμμο με τρεις μεταβλητές (δύο για τις πλευρές και μία για τη γωνία):

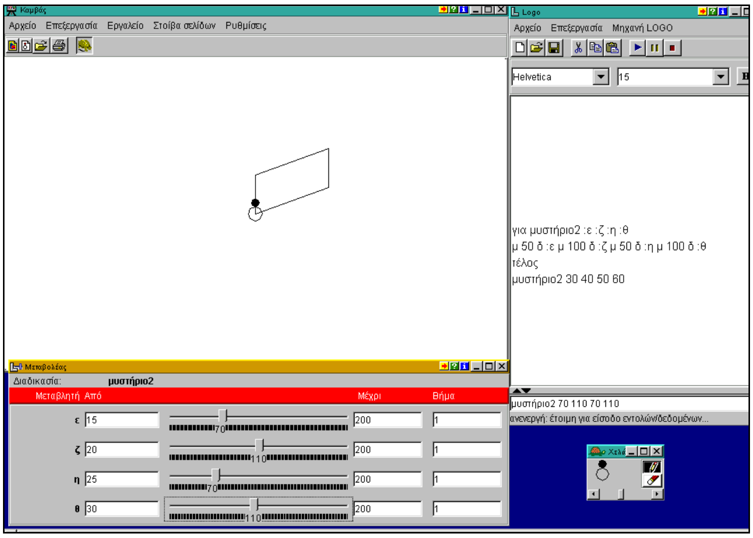
για Βπαραλληλόγραμμο :χ :ψ :ε

[3] Απαραίτητη προϋπόθεση για την εξαγωγή σωστού κανόνα στην προκειμένη περίπτωση είναι η χελώνα να επανέρχεται στην αρχική της θέση μετά το κλείσιμο του σχήματος.

μ :χ δ :ε μ :ψ δ 180 - :ε μ :χ δ :ε μ :ψ δ 180 - :ε

τέλος

Στιγμιότυπο:



Εικόνα 4

Πως εκτελεί η χελώνα κάθε γραμμή του κώδικα;

Τι καθορίζει την κλειστότητα στο σχήμα των τεσσάρων πλευρών και μάλιστα αυτό να είναι παραλληλόγραμμο;

Πόσες από τις άπειρες τετράδες των τιμών των τεσσάρων μεταβλητών ορίζουν τετράπλευρο; Και πόσες απ’ αυτές παραλληλόγραμμο; Και πόσες απ΄ αυτές ειδικό παραλληλόγραμμο;

Γ’ Φάση – Κατασκευή συνόλου παραλληλογράμμων

Στη φάση αυτή ζητείται από κάθε ομάδα μαθητών να κατασκευάσει κάτι δικό της, χρησιμοποιώντας την τελευταία διαδικασία για να φτιάξουν πολλά παραλληλόγραμμα διαφορετικών μεγεθών, των οποίων το μέγεθος θα αυξομειώνουν με το μεταβολέα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την περιοχή σχεδίασης του λογισμικού μπορούν να εμπλουτίσουν τη δημιουργία τους με χρώματα και ελεύθερο σχέδιο.

Δ’ Φάση – Κατασκευή ανεμόμυλου

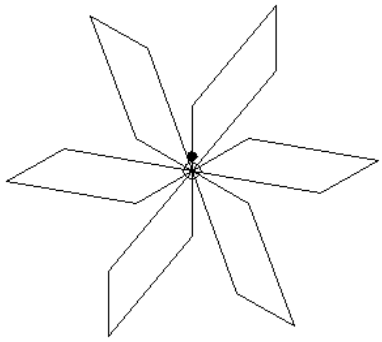
Στη φάση αυτή οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την τελευταία διαδικασία και την εντολή ‘επανάλαβε…’ για να κατασκευάσουν πολλά παραλληλόγραμμα διαφορετικών μεγεθών με τέτοιο τρόπο που να συνθέτουν ένα ανεμόμυλο. Η φάση θα ολοκληρωθεί με τον καθορισμό της παραμετρικής διαδικασίας που θα κατασκευάζει ν παραλληλόγραμμα με μεταβλητές χ, ψ, ε (το παραλληλόγραμμο της προηγούμενης διαδικασίας) που θα στρέφονται κατά γωνία 360/ν.

για ανεμόμυλο :χ :ψ :ε :ν

επαναλαβε :ν [Βπαραλληλόγραμμο :χ :ψ :ε δ 360/:ν]

τέλος

Δίνοντας στις μεταβλητές τις τιμές 50 100 40 6 αντίστοιχα, οι μαθητές θα κατασκευάσουν το επόμενο σχήμα.



Εικόνα 5

Ε' Φάση – Συγγραφή έκθεσης, παρουσίαση

Στο τέλος, κάθε ομάδα γράφει μια έκθεση (προτιμότερο στο Word) για την πορεία της εργασίας της. Συγκεκριμένα, τους ζητείται να αναλογισθούν πάνω σε αυτά που έκαναν μέχρι τώρα και, χρησιμοποιώντας τις σημειώσεις που κράτησαν, να ξανασκεφτούν τα βήματα που ακολούθησαν κατά την διεξαγωγή της δραστηριότητας και να καταγράψουν την όλη εμπειρία τους. Το περιεχόμενο της έκθεσης που θα γράψει κάθε ομάδα συζητείται στην τάξη και αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης όλως των μαθητών.

Μερικά από τα σημεία στα οποία θα πρέπει να αναφερθούν οι μαθητές στην έκθεση είναι η πορεία που ακολούθησαν στην διεξαγωγή της δραστηριότητας, οι δυσκολίες που συνάντησαν, ο τρόπος με τον οποίο τις ξεπέρασαν καθώς και ο τρόπος με τον οποίο συνεργάστηκαν με τους άλλους συμμαθητές τους. Ακόμα μπορούν να αντιγράψουν στο κείμενο της έκθεσής τους την εικόνα που κατασκεύασαν στην περιοχή σχεδίασης, ή να τη χρησιμοποιήσουν σαν εξώφυλλο της εργασίας τους.

Κάθε ομάδα παρουσιάζει τη δουλειά της στην τάξη και ακολουθεί διάλογος πάνω στις εργασίες των μαθητών.

Φύλλα εργασίας

Φύλλο εργασίας 1

Ονοματεπώνυμο μαθητών:

____

____

____

Δράση1: Στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος» και στην ψηφίδα «Logo» πληκτρολογήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

Για Αμυστήριο :α :β :γ :δ

μ :α δ 90 μ :β δ 90 μ :γ δ 90 μ :δ δ 90

τέλος

Στη συνέχεια εκτελέστε το πρόγραμμα και στη συνέχεια πληκτρολογήστε την εντολή *Αμυστήριο* και μετά το κενό πληκτρολογήστε αριθμούς για τα γράμματα α,β,γ και δ. π.χ. *Αμυστήριο 20 30 40 50*

- ✓ Περιγράψτε το σχήμα που σχηματίζει η χελώνα κατά την διαδρομή της.

Δράση2:Χρησιμοποιείστε τον μεταβολέα για να μεταβάλλετε τις τιμές για τα τέσσερα γράμματα.

- ✓ Πώς μεταβάλλεται το τετράπλευρο καθώς μεταβάλλετε τις τιμές στα γράμματα;
- ✓ Μπορείτε να επιλέξετε τέτοιες τιμές ώστε να σχηματιστεί ένα κλειστό τετράπλευρο;
- ✓ Τι σχέση έχουν οι τιμές των τεσσάρων γραμμάτων όταν σχηματίζεται κλειστό τετράπλευρο; Τι χαρακτηριστικά έχει;

Δράση3: Μπορείτε να τροποποιήσετε το πρόγραμμα ώστε η χελώνα να σχεδιάζει πάντοτε ένα ορθογώνιο;

Δράση4: Μπορείτε να τροποποιήσετε το πρόγραμμα ώστε η χελώνα να σχεδιάζει πάντοτε ένα τετράγωνο;

Φύλλο εργασίας 2

Ονοματεπώνυμο μαθητών:

____

____

____

<u>Δράση1:</u> Στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος» και στην ψηφίδα «Logo» πληκτρολογήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

Για Βμυστήριο :ε :ζ :η :θ

μ 50 δ :ε μ 100 δ :ζ μ 50 δ :η μ 100 δ :θ

τέλος

Στη συνέχεια εκτελέστε το πρόγραμμα και στη συνέχεια πληκτρολογήστε την εντολή *Βμυστήριο* και μετά το κενό πληκτρολογήστε αριθμούς για τα γράμματα ε,ζ,η και θ. π.χ. *Βμυστήριο 30 40 50 60*

- ✓ Περιγράψτε το σχήμα που σχηματίζει η χελώνα κατά την διαδρομή της.

<u>Δράση2:</u>Χρησιμοποιείστε τον μεταβολέα για να μεταβάλλετε τις τιμές για τα τέσσερα γράμματα.

- ✓ Πώς μεταβάλλεται το τετράπλευρο καθώς μεταβάλλετε τις τιμές στα γράμματα;
- ✓ Μπορείτε να επιλέξετε τέτοιες τιμές ώστε να σχηματιστεί ένα κλειστό τετράπλευρο;
- ✓ Σε τι μέγεθη του τετράπλευρου αντιστοιχούν τα τέσσερα γράμματα του προγράμματος;
- ✓ Τι σχέση έχουν οι τιμές των τεσσάρων γραμμάτων όταν σχηματίζεται κλειστό τετράπλευρο;

<u>Δράση3:</u> Μπορείτε να τροποποιήσετε το πρόγραμμα ώστε η χελώνα να σχεδιάζει πάντοτε ένα παραλληλόγραμμο;

Φύλλο εργασίας 3

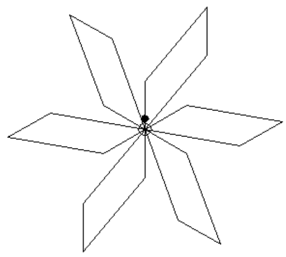
Ονοματεπώνυμο μαθητών:

Δράση1: Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα δικό σας πρόγραμμα με το οποίο η χελώνα να σχεδιάζει ένα παραλληλόγραμμο, χρησιμοποιώντας τα γράμματα χ και ψ για δυο διαδοχικές πλευρές του και ε για μια γωνία του; Ονομάστε *Γπαραλληλόγραμμο* το πρόγραμμα που θα δημιουργήσετε.

Φύλλο εργασίας 4

Ονοματεπώνυμο μαθητών:

Δράση1: Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα δικό σας πρόγραμμα με το οποίο η χελώνα να σχεδιάζει ένα ανεμόμυλο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος;



Χρησιμοποιείστε το πρόγραμμα *Γπαραλληλόγραμμο* και την εντολή *επανάλαβε :ν,* όπου με το γράμμα ν η χελώνα θα επαναλαμβάνει το πρόγραμμα *Γπαραλληλόγραμμο* να το εκτελεί ν φορές. Με τον μεταβολέα μεταβάλετε τις τιμές του γράμματος ν.

Φύλλο εργασίας 5

Ονοματεπώνυμο μαθητών:

____

____

____

<u>Δράση1: </u>Μπορείτε να συντάξετε μια αναφορά και να περιγράψετε για τον τρόπο που εργαστήκατε, την πορεία που ακολουθήσατε στην διεξαγωγή της δραστηριότητας, τις δυσκολίες που συναντήσατε, τον τρόπο με τον οποίο τις ξεπεράσατε καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνεργαστήκατε με τους άλλους συμμαθητές σας;

Αξιολόγηση

Μετά την ολοκλήρωση της διεξαγωγής της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός εξετάζει,

- ✓ την ευχέρεια των μαθητών να χρησιμοποιούν τις εντολές της Logo και ιδιαίτερα την εντολή «*επανάλαβε*» και τα γράμματα ως μεταβλητές για να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο.
- ✓ τον τρόπο που χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για να επιλέξουν κατάλληλες τιμές των μεταβλητών και να τις χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν υποθέσεις και να καταλήξουν σε συμπεράσματα,
- ✓ την σαφήνεια του φύλλου εργασίας

και επανασχεδιάζει την δραστηριότητα για το μέλλον.

Πιθανές προεκτάσεις

Οι μαθητές στην συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιήσουν το σχετικό λογισμικό και τις γνώσεις που αποκόμισαν από την διεξαγωγή της δραστηριότητας για να κατασκευάσουν αναπαραστάσεις μηχανισμών (ανεμόμυλους με άλλα γεωμετρικά σχήματα, λικνιζόμενα παραλληλόγραμμα κτλ.) αλλά και να πειραματιστούν με περισσότερο σύνθετα γεωμετρικά σχήματα που βασίζονται στα παραλληλόγραμμα, όπως κανονικά πολύγωνα.

Διαδικασίες Μοντελοποίησης - Αριθμητικές και Γεωμετρικές Πρόοδοι

Σύντομη περιγραφή του Σεναρίου:

α) Η βασική ιδέα της δραστηριότητας

Το Πρόγραμμα Σπουδών της Β/θμιας Εκπαίδευσης περιλαμβάνει τις έννοιες των γραμμικών και εκθετικών συναρτήσεων. Περιλαμβάνει επίσης τις έννοιες της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Οι έννοιες αυτές συνδέονται, αλλά οι μαθητές δύσκολα συνειδητοποιούν ότι μια αριθμητική πρόοδος δεν είναι τίποτα άλλο από τον περιορισμό μιας γραμμικής συνάρτησης στους φυσικούς αριθμούς. Αντίστοιχα ότι μια γεωμετρική πρόοδος είναι ο περιορισμός μιας εκθετικής συνάρτησης στους φυσικούς αριθμούς.**β)Σε ποιους απευθύνεται**

Η δραστηριότητα εντάσσεται στη διδασκαλία της **Άλγεβρας Β' Λυκείου**, και έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες να διακρίνουν τη σύνδεση των εννοιών που αναφέραμε παραπάνω.

γ) Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία:

Επιζητώντας τη βαθύτερη κατανόηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις, για παράδειγμα συμβολικές, γραφικές, αριθμητικές (πίνακες τιμών). Για να το επιτύχουμε θα χρησιμοποιήσουμε εκπαιδευτικό λογισμικό με δυνατότητες πολλαπλών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα το **Function Probe**.

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

α) Μαθησιακοί στόχοι

Οι μαθητές που θα ολοκληρώσουν τη δραστηριότητα αυτή θα αποκτήσουν με τη βοήθεια του λογισμικού εμπειρίες μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων. Στόχος ίδιος είναι: να κατανοήσουν ότι μια αριθμητική πρόοδος δεν είναι τίποτα άλλο από τον περιορισμό μιας γραμμικής συνάρτησης ίδιος φυσικούς αριθμούς. Αντίστοιχα μια γεωμετρική πρόοδος είναι ο περιορισμός μιας εκθετικής συνάρτησης ίδιος φυσικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, να συγκρίνουν ίδιος ρυθμούς με ίδιος οποίους μεταβάλλονται οι τιμές των γραμμικών και των εκθετικών συναρτήσεων και να κατανοήσουν ότι:

- ✓ η σταθερή διαφορά σε μια αριθμητική πρόοδο παραπέμπει ακριβώς στην κλίση ίδιος γραμμικής συνάρτησης και ότι ο πρώτος όρος ίδιος προόδου σχετίζεται, αν δεν είναι ο ίδιος, με την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η γραμμική συνάρτηση τέμνει τον άξονα των *y*.

- ✓ ο σταθερός λόγος σε μια γεωμετρική πρόοδο παραπέμπει άμεσα στην βάση ίδιος εκθετικής συνάρτησης και ότι ο πρώτος όρος ίδιος προόδου σχετίζεται αν δεν είναι ο ίδιος, με τη σταθερά b στη μορφή $y = ba^x$

β) Παιδαγωγικοί Στόχοι:

Με τις δραστηριότητες αυτού του σεναρίου, οι μαθητές, θα εξερευνήσουν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμητικών προόδων και των γραμμικών συναρτήσεων καθώς και μεταξύ των γεωμετρικών προόδων και των εκθετικών συναρτήσεων. Θα χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για καλύτερη κατανόηση των πεδίων ορισμού, των αναδρομικών τύπων, των συμβολικών τύπων, της κλίσης και θα δημιουργήσουν σύνδεση μεταξύ του πρώτου όρου μιας ακολουθίας και της τεταγμένης του σημείου τομής με τον άξονα των y.

γ) Συνεισφορά του σεναρίου στη διδασκαλία και τη μάθηση:

Μέσα από τα προτεινόμενα φύλλα εργασίας του σεναρίου οι μαθητές προτρέπονται να εργαστούν συνεργατικά για να ελέγξουν την κατανόησή τους σε θέματα που κατ' αρχήν φαίνονται οικεία. Έτσι με τη βοήθεια του λογισμικού εμπλέκονται σε διαδικασίες οι οποίες ολοένα και δημιουργούν ερωτήματα προς απάντηση.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

α) Από την πλευρά του μαθητή

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες των γραμμικών και εκθετικών συναρτήσεων καθώς και των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Επίσης είναι χρήσιμη κάποια εξοικείωση με τη χρήση και τις δυνατότητες του εκπαιδευτικού λογισμικού Function Probe .

β) Από την πλευρά του καθηγητή

Ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει τις δυνατότητες για παιδαγωγική αξιοποίηση των εργαλείων του λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων Function Probe.

Διδακτική διαχείριση της τάξης

Το μάθημα θα γίνει στο εργαστήριο των Η/Υ. Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες δύο το πολύ τριών ατόμων ανά υπολογιστή εφοδιασμένοι με φύλλα εργασίας. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος ο διδάσκων παρακολουθεί την εργασία της κάθε μιας ομάδας παρεμβαίνοντας κατάλληλα. Σε τακτά χρονικά διαστήματα προτρέπει τις ομάδες να ανακοινώνουν την πορεία της εργασίας τους, να διαπραγματεύονται με την υπόλοιπη τάξη τους προβληματισμούς και τα συμπεράσματά τους. Εξετάζει επίσης την ευχέρεια που απέκτησαν οι μαθητές στο να μοντελοποιούν καταστάσεις, να δημιουργούν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, να διακρίνουν κανονικότητες (patterns), και να «διαβάζουν» μια γραφική παράσταση. Έτσι βελτιώνει πιθανές ασάφειες του φύλλου εργασίας που διαπιστώθηκαν μετά από τις παρατηρήσεις του

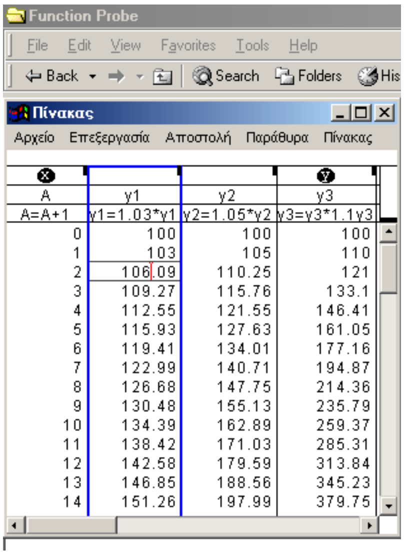
Υλοποίηση

α) Προετοιμασία

Μέσα από καθημερινά προβλήματα θα πρέπει να γίνει μια επανάληψη για τις γραμμικές και εκθετικές μεταβολές. Οι μαθητές θα συζητήσουν για τις επιλογές τους των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών κατά περίπτωση, το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, την ερμηνεία τους για την κλίση στις γραμμικές μεταβολές και το ρυθμό αύξησης ή μείωσης στις εκθετικές μεταβολές. Θα αναφερθούν και θέματα από τις αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους.

Μια μικρή εξοικείωση με το λογισμικό Function Probe θα ήταν χρήσιμη. Οι μαθητές πριν ξεκινήσουν την εργασία τους θα πρέπει να μπορούν να κατασκευάζουν, για παράδειγμα, από έναν πίνακα τιμών το αντίστοιχο γράφημα. Για την επιτυχία του στόχου αυτού προτείνεται μια δραστηριότητα με το λογισμικό όπως η ακόλουθη:

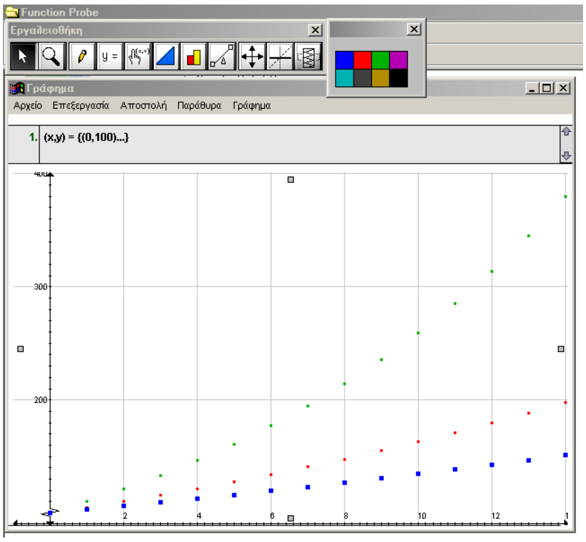
Να κατασκευαστεί ένας πίνακας που να δίνει την αξία μιας επένδυσης 100 € για μια περίοδο 15 ετών αν η επένδυση αποδίδει: α) 3% ανά έτος β) 5% ανά έτος και γ) 10% ανά έτος.



A	y1	y2	y3
A=A+1	y1=1.03*y1	y2=1.05*y2	y3=y3*1.1y3
0	100	100	100
1	103	105	110
2	106.09	110.25	121
3	109.27	115.76	133.1
4	112.55	121.55	146.41
5	115.93	127.63	161.05
6	119.41	134.01	177.16
7	122.99	140.71	194.87
8	126.68	147.75	214.36
9	130.48	155.13	235.79
10	134.39	162.89	259.37
11	138.42	171.03	285.31
12	142.58	179.59	313.84
13	146.85	188.56	345.23
14	151.26	197.99	379.75

Εικόνα 1

Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις συναρτήσεις που δίνουν την αξία της επένδυσης ως συνάρτηση του χρόνου (σε έτη) σε κάθε μια περίπτωση ανάλογα με την ετήσια απόδοση



Εικόνα 2

β)Φάσεις διεξαγωγής του σεναρίου

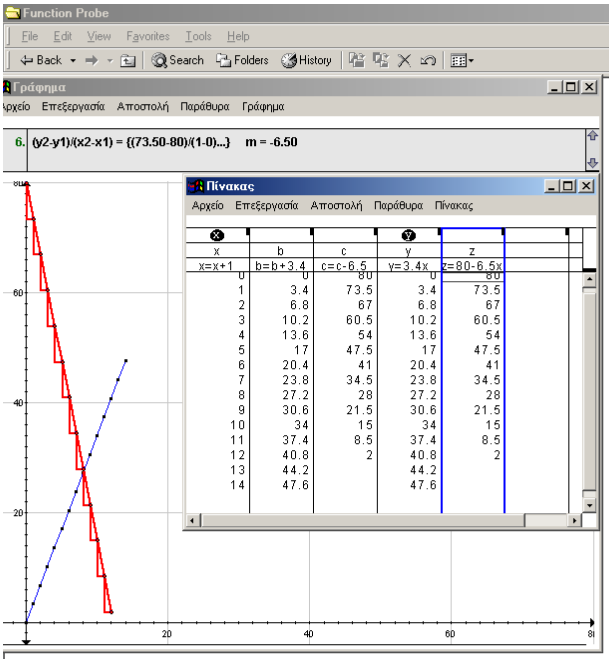
Α΄ Φάση-Γραμμικά μοντέλα

Αφού ολοκληρωθεί η εξοικείωση των μαθητών στο λογισμικό και η υπενθύμιση των γνωστών εννοιών που προαναφέραμε θα δοθούν τα ακόλουθα σχετικά με τις αριθμητικές προόδους ζητήματα τα οποία και ζητείται να περιγράψουν με μαθηματική γλώσσα:

1. Ένα δοχείο 50 λίτρων είναι κενό. Ανοίγετε τη βρύση, και το δοχείο γεμίζει με ένα ρυθμό 3,4 λίτρα ανά λεπτό.
2. Ας υποθέσουμε ότι έχετε αποταμιεύσει ένα ποσόν 80 € για να δίνετε κάθε εβδομάδα 6,5 € χαρτζιλίκι στο μικρό σας αδελφό.

Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα κατασκευάσουν με τη βοήθεια του λογισμικού πίνακα τιμών για κάθε περίπτωση θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στην πρώτη στήλη Α και την εξαρτημένη στη δεύτερη στήλη Β. Θα ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν μια αναδρομική σχέση που σε κάθε στήλη να δίνει τη νέα τιμή σε σχέση με την αμέσως προηγούμενή της. Πρέπει έτσι να βρουν Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Α, Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Β για κάθε περίπτωση, τι είδους ακολουθίες έχουμε και γιατί, Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων[4]. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και να σχολιάσουν τα συμπεράσματά τους. Κατόπιν θα τους ζητηθεί να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένους τύπους, δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη στήλη A ως στήλη των προτύπων και τη B ως στήλη των εικόνων τους και να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητικών προόδων και γραμμικών μοντέλων.

Στιγμιότυπο:



Εικόνα 3

Για εργασία οι μαθητές γράφουν μια παράγραφο στην οποία εξηγούν γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν τη μορφή που βλέπουν. Συζητούν τις απαντήσεις τους και προτρέπονται στο να διατυπώσουν ότι οι συναρτήσεις είναι γραμμικές λόγω της σταθερής κλίσης: δηλαδή θα τονιστεί το ότι σε κάθε σταθερή αύξηση στο χρόνο (προσθετική μεταβολή) έχουμε μια σταθερή μεταβολή (προσθετική) στην εξαρτημένη μεταβολή

Β΄ Φάση: Εκθετικά μοντέλα

Με ανάλογο τρόπο θα εξεταστεί το θέμα που αφορά στις έννοιες της γεωμετρικής προόδου και της εκθετικής μεταβολής. Δίνονται στους μαθητές/τριες τα ακόλουθα σχετικά με τις γεωμετρικές προόδους ζητήματα τα οποία και ζητείται να περιγράψουν με μαθηματική γλώσσα:

1. Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε 1500 € στην Τράπεζα. Η επένδυση αυξάνει με έναν ρυθμό 7,6% το χρόνο.

[4] Μπορεί να εξεταστεί η διαφορά που υπάρχει στα ζητήματα αυτά: το πρώτο αφορά μεταβλητή που παίρνει όλες τις τιμές ενός διαστήματος και το δεύτερο μεταβλητή με διακριτές τιμές.

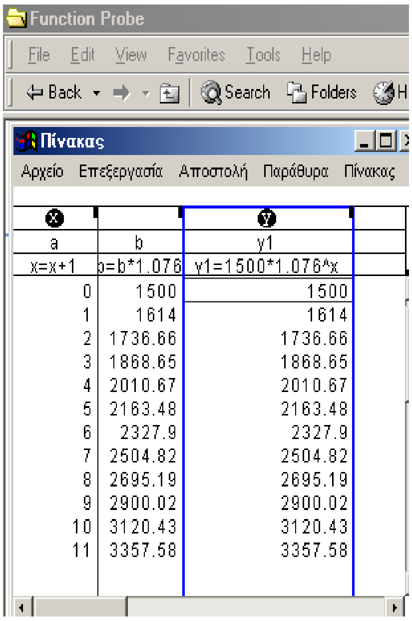
2. Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε μια μπάλα 2 μέτρα πάνω από το έδαφος. Την αφήνουμε να πέσει και αυτή αναπηδά πολλές φορές. Σε κάθε αναπήδηση, επιστρέφει σε ένα ύψος που είναι τα 80% του προηγούμενου.

Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα κατασκευάσουν με τη βοήθεια του λογισμικού πίνακα τιμών για κάθε περίπτωση, θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στην πρώτη στήλη Α και την εξαρτημένη στη δεύτερη στήλη Β. Θα ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν μια αναδρομική σχέση που σε κάθε στήλη να δίνει τη νέα τιμή σε σχέση με την αμέσως προηγούμενή της. Πρέπει έτσι να βρουν Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Α, Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιείται στη στήλη Β για κάθε περίπτωση, τι είδους ακολουθίες έχουμε και γιατί και Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων[5]. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και να σχολιάσουν τα συμπεράσματά τους. Κατόπιν θα ζητηθεί να χρησιμοποιήσουν τύπους, δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη στήλη Α ως στήλη των προτύπων και τη Β ως στήλη των εικόνων τους και να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ γεωμετρικών προόδων και εκθετικών μοντέλων.

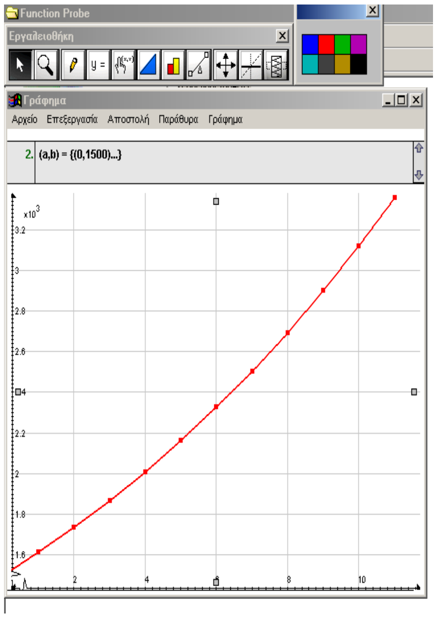
Για εργασία οι μαθητές γράφουν μια παράγραφο στην οποία εξηγούν γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν τη μορφή που βλέπουν στην οθόνη του υπολογιστή. Συζητούν τις απαντήσεις τους και προτρέπονται στο να διατυπώσουν ότι οι συναρτήσεις είναι εκθετικές λόγω του ότι σε κάθε σταθερή αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής (προσθετική μεταβολή) έχουμε μια σταθερή πολλαπλασιαστική μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή

Στιγμιότυπο:

[5] Μπορεί να εξεταστεί η διαφορά που υπάρχει στα ζητήματα αυτά: το πρώτο αφορά μεταβλητή που παίρνει όλες τις τιμές ενός διαστήματος και το δεύτερο μεταβλητή με διακριτές τιμές.



Εικόνα 4



Εικόνα 5

Κατόπιν θέτουμε στους μαθητές τα ίδια προβλήματα αλλά τώρα αυτοί πρέπει να χρησιμοποιήσουν σαφείς τύπους, δηλαδή, πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη στήλη A ως στήλη των προτύπων και τη B ως στήλη των εικόνων τους.

Η διδασκαλία με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού λογισμικού που περιγράψαμε επιτρέπει στους μαθητές /τριες να κατασκευάζουν αναπαραστάσεις που έχουν τέτοια μορφή, ώστε να τους βοηθά να δουν κανονικότητες (patterns) και να κάνουν υπολογισμούς. Επίσης τους επιτρέπει να επωφεληθούν από το γεγονός ότι διαφορετικές μορφές παρέχουν διαφορετική στήριξη για την εξαγωγή συμπερασμάτων και υπολογισμών

Φύλλα Εργασίας

Φύλλο Εργασίας (1)

(Ονοματεπώνυμα μαθητών της ομάδας)

«Ένα δοχείο 50 λίτρων είναι κενό. Ανοίγετε τη βρύση, και το δοχείο γεμίζει με ένα ρυθμό 3,4 λίτρα ανά λεπτό».

«Ας υποθέσουμε ότι διαθέτετε ένα ποσόν 80 € για να δίνετε κάθε εβδομάδα 6,5€ χαρτζιλίκι στο μικρό σας αδελφό».

1. Να δημιουργήσετε έναν πίνακα για κάθε μία κατάσταση, θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στη στήλη Α και την εξαρτημένη στη στήλη Β. Για κάθε στήλη να χρησιμοποιήσετε έναν αναδρομικό τύπο που να δημιουργεί κάθε τιμή από την προηγούμενή της.
2. Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιήθηκε για τη στήλη Α;
3. Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιήθηκε για τη στήλη Β;
4. Τι ακολουθίες δημιουργούνται στη στήλη Β;
5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων;
6. Να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό για να δημιουργήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.
7. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν τη συγκεκριμένη κατά περίπτωση μορφή
8. Να γίνει ανάλογη εργασία θέτοντας τώρα στη στήλη Β μια ρητή συνάρτηση της μεταβλητής της στήλης Α

Φύλλο Εργασίας (2)

(Ονοματεπώνυμα μαθητών της ομάδας)

«Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε 1500€ στην Τράπεζα. Η επένδυση αυξάνει με έναν ρυθμό 7,6% το χρόνο».

«Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε μια μπάλα 2 μέτρα πάνω από το έδαφος. Την αφήνουμε να πέσει και αυτή αναπηδά πολλές φορές. Σε κάθε αναπήδηση, επιστρέφει σε ένα ύψος που είναι τα 80% του προηγούμενου».

1. Να δημιουργήσετε έναν πίνακα για κάθε μία κατάσταση θέτοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στη στήλη Α και την εξαρτημένη στη στήλη Β. Για κάθε στήλη να χρησιμοποιήσετε έναν αναδρομικό τύπο που να δημιουργεί κάθε τιμή από την προηγούμενή της.
2. Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιήθηκε για τη στήλη Α;
3. Ποιος αναδρομικός τύπος χρησιμοποιήθηκε για τη στήλη Β;
4. Τι ακολουθίες δημιουργήσατε στη στήλη Β; Γιατί;
5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων; Γιατί;
6. Να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό για να δημιουργήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.
7. Ποια μορφή έχουν οι γραφικές παραστάσεις; Γιατί;
8. Να γίνει ανάλογη εργασία θέτοντας τώρα στη στήλη Β μια ρητή συνάρτηση της μεταβλητής της στήλης Α

Διαθεματικό Σενάριο Διδασκαλίας για τα Μαθηματικά

Διαθεματικές Δραστηριότητες

Η μετάβαση από τη βιομηχανική στη μεταβιομηχανική εποχή έχει δημιουργήσει νέες απαιτήσεις στους περισσότερους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας συμπεριλαμβανομένης της εκπαίδευσης.

Τα σύνορα μεταξύ των διαφόρων γνωστικών περιοχών γίνονται δυσδιάκριτα. Η διδασκαλία η οποία μεθοδολογικά τουλάχιστον απευθύνεται και αναφέρεται σε διακριτούς τομείς της διανοητικής ανάπτυξης (λογικομαθηματική-γλωσσική) δεν φαίνεται συμβατή με τη σύγχρονη αντίληψη για την ποιότητα και το είδος της γνώσης την οποία έχει ανάγκη ο μέσος πολίτης.

Από τις αρχές του 20ου αιώνα ο Dewey είχε επισημάνει ότι θα πρέπει να συνδεθούν όλα τα αντικείμενα σπουδών γιατί με τον τρόπο αυτό τα αντικείμενα γίνονται εφαρμόσιμα και ενδιαφέροντα. Παρόλα αυτά η πολυδιάσπαση των γνωστικών αντικειμένων αποτελεί την βασική επιλογή των αναλυτικών προγραμμάτων. Ο Papert από την δεκαετία του 1980 έχει επισημάνει τη δυσκαμψία των αναλυτικών προγραμμάτων που επιμένουν στη διάκριση μαθημάτων, ύλης και ειδικοτήτων.

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας της πληροφορίας και επικοινωνίας (ΤΠΕ) αποτελεί μία ευκαιρία να επαναδιαπραγματευτούμε το ερώτημα για δυνατότητα σύνθεσης των γνωστικών περιοχών στην εκπαίδευση αφού φαίνεται να λειτουργεί ως δύναμη διάσπασης της διαχωριστικής γραμμής μεταξύ τους.

Μία σημαντική διδακτική πρόταση στην κατεύθυνση της λειτουργικής σύνθεσης των διαφορετικών γνωστικών περιοχών αποτελεί και η υλοποίηση διαθεματικών δραστηριοτήτων.

Ορισμός και διάκριση.

Με τον όρο 'διαθεματικότητα' προσδιορίζεται μία ολιστική προσέγγιση της γνώσης, η οποία δεν θεωρείται πλέον ως ένα σύστημα διακριτών γνωστικών αντικειμένων. Τα μαθηματικά, η ιστορία, η αστρονομία, ή φυσική, τα γλωσσικά μαθήματα δεν διδάσκονται ως απομονωμένες επιστήμες αφού τα σύνορά τους θεωρούνται δυσδιάκριτα. αν δεν καταργούνται.

Η ανάπτυξη ενός θέματος με διαθεματικό τρόπο προϋποθέτει την ενιαιοποίηση και ενοποίηση της διδασκαλίας και τον ερευνητικό προσανατολισμό της υλοποίησής της.

Στην πράξη ένας διαθεματικός σχεδιασμός της διδασκαλίας στα μαθηματικά έχει ως αφετηρία την επιλογή ενός θέματος(π.χ ενός προβλήματος) όσον το δυνατόν περισσότερο ανοικτό σε προσεγγίσεις, σε λύσεις και προτάσεις. Στην συνέχεια καθορίζονται τα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, οι κλάδοι της επιστήμης μέσω των οποίων θα συγκροτηθεί η διδακτική πρόταση.

Από την άλλη η διεπιστημονική προσέγγιση διατηρεί την διάκριση των διαφόρων επιστημονικών κλάδων επιχειρεί όμως να συνδέσει τους κλάδους αυτούς μέσα από διδακτικές παρεμβάσεις.

Σχεδιασμός διαθεματικών δραστηριοτήτων με χρήση ΤΠΕ.

Ο σχεδιασμός μίας διαθεματικής δραστηριότητας ή σεναρίου αποτελεί μία πρόκληση για τον διδάσκοντα αφού από την φύση της είναι μία ανοικτή διαδικασία, με πλήθος μεθόδων και προσεγγίσεων. Αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό καθιστά τον σχεδιασμό μία δύσκολη και επίπονη διαδικασία.

Στην συνέχεια θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε κάποιες γενικές αρχές, μία δομή κατά τον σχεδιασμό και υλοποίηση διαθεματικών σεναρίων.

Στην αρχή επιλέγεται από τον διδάσκοντα ή τους μαθητές το θέμα, ο κεντρικός πυρήνας δηλαδή γύρω από τον οποία θα δομηθεί η δραστηριότητα. Συνήθως η αναζήτηση ενός κατάλληλου θέματος πραγματοποιείται μέσα από την εμπειρία των μαθητών, από πραγματικά προβλήματα ιστορικά ή σύγχρονα, την τέχνη, την οικονομία κ.λ.π.

Εντοπίζονται οι βασικές πτυχές του θέματος και οι συνδέσεις που θα πραγματοποιηθούν. Συγκεκριμένα επιλέγονται οι γνωστικές περιοχές οι οποίες θα εμπλακούν στην ανάλυση τους θέματος και καθορίζεται η βασική σύνδεση κάθε περιοχής με το θέμα.

Καθορίζονται οι στόχοι της δραστηριότητας. Οι στόχοι μπορεί να διακριθούν:

σε παιδαγωγικούς, με έμφαση στην συνεργασία των μαθητών την ερευνητική τους στάση την πρόκληση ενδιαφέροντος και την ανάληψη πρωτοβουλιών.

σε γνωστικούς, οι οποίοι σχετίζονται με τα γνωστικά πεδία τα οποία θα συνδεθούν και τον τρόπο με τον οποίο θα υλοποιηθεί αυτό.

σε στόχους οι οποίοι σχετίζονται με την χρήση των ΤΠΕ, δηλαδή με τον τρόπο που θα χρησιμοποιηθεί το διαδίκτυο ως πηγή πληροφορίας και εργαλείο έρευνας, εκπαιδευτικά λογισμικά δυναμικής αναπαράστασης και προσομοίωσης, λογισμικά παρουσίασης (π.χ power point) κ.λ.π

Επιλέγονται τα μέσα που θα χρησιμοποιηθούν όπως λογισμικά, βάσεις δεδομένων, διαδίκτυο, προβολές ψηφιακού υλικού, τηλεφωνία κ.λ.π. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο εξοπλισμός πολλές φορές επιβάλλει αναθεώρηση του σχεδιασμού του σεναρίου όταν δεν είναι διαθέσιμος.

Καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο τα μέσα αυτά θα εμπλακούν στην υλοποίηση, ο ιδιαίτερος ρόλος τους και ο τρόπος με τον οποίο θα συντονιστούν. Για παράδειγμα αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε το διαδίκτυο σε ένα θέμα που σχετίζεται με μαθηματικά και αστρονομία θα πρέπει να αναζητήσουμε δικτυακούς τόπου οι οποίοι περιέχουν applets, animations αλλά και κείμενα τα οποία μπορούν να περιέχουν κατάλληλες πληροφορίες για το θέμα που αναλύεται.

Πραγματοποιείται διαπραγμάτευση του τρόπου με τον οποίο μία θεματική περιοχή θα συμβάλλει στην ανάλυση του θέματος. Αν για παράδειγμα το θέμα μας είναι οι μετρήσεις και θέλουμε να προβάλλουμε μία γεωμετρική προσέγγιση τότε θα πρέπει να καθορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μετρήσεις συνδέονται με την γεωμετρία, (ομοιότητα, μετρικές σχέσεις, ιδιότητες εμβαδών). Η συμβολή της τεχνολογίας, στο ίδιο θέμα, θα μπορούσε να αναδειχθεί μέσα από μία μελέτη επιλεγμένων εργαλείων μέτρησης, παλαιοτέρων και σύγχρονων. Εδώ οι ΤΠΕ είναι δυνατόν να διαδραματίσουν έναν ρόλο καταλύτη στην ενοποίηση των θεματικών περιοχών μέσα από χρήση κατάλληλων προσομοιώσεων των εργαλείων μέτρησης, η μελέτη των οποίων θα αναδείξει τις γεωμετρικές έννοιες που είναι ενσωματωμένες σε αυτά.

Καθορίζονται οι ομάδες των μαθητών που θα αναλάβουν την επιμέρους ανάλυση του θέματος από μία θεματική περιοχή. Η συγκρότηση των ομάδων καλό θα είναι να αποτελέσει θέμα διαπραγμάτευσης των μαθητών ώστε κάθε μαθητής να εμπλακεί με το γνωστικό αντικείμενο για το οποίο ενδιαφέρεται περισσότερο.

Παρουσίαση των αναλύσεων όλων των ομάδων και προσπάθεια σύνθεσης των περιεχομένων των διαφόρων αναλύσεων ώστε να προκύψει το συνολικό προϊόν της δραστηριότητας. Συγκεκριμένα κάθε ομάδα παρουσιάζει και αναλύει την εργασία της ώστε τα μέλη των άλλων ομάδων να ενημερωθούν σφαιρικά για την πορεία του συνόλου των δράσεων. Στην συνέχεια τα μέλη των ομάδων επιχειρούν να συνθέσουν το υλικό και εδώ ο διδάσκων μαζί με τους μαθητές διαπραγματεύονται τρόπους ενιαιοποίησης των κειμένων και των παρουσιάσεων.

Αξιολόγηση του όλου έργου με γνώμονα την επίτευξη ή μη των στόχων, των σημείων που δημιούργησαν δυσκολίες στην ολοκλήρωση και προτάσεις επανασχεδιασμού των σημείων αυτών.

Ιδέες διαθεματικών δραστηριοτήτων.

Σε εκπαιδευτικές μονάδες στις οποίες έχει συστηματικά εφαρμοστεί η διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν από ένα πλήθος θέματα αυτό με το οποίο θέλουν να εμπλακούν. Στο Dartmouth College για παράδειγμα, στο οποίο από το 1994 εφαρμόζονται πειραματικά τέτοιου είδους projects, προτείνονται θέματα όπως:

- ‘‘Τα μαθηματικά και η φιλοσοφία του απείρου’’ στο οποίο διερευνούνται οι τρόποι προσέγγισης των απειροστών (infinitesimals) τόσο από τον Νεύτωνα όσο και από τον Cantor,
- ‘‘Μουσική και υπολογιστές ’’στο οποίο γίνεται διερεύνηση και ανάλυση των περιοδικών φαινομένων που δημιουργούν τα κύματα μίας νότας,
- ‘‘Αναγέννηση Αστρονομία και το νέο Σύμπαν’’ στο οποίο οι μαθητές διαπραγματεύονται την Κοπερνίκια επανάσταση.
- Η ιστορία αποτελεί μία ανεξάντλητη πηγή ιδεών για διαθεματικές δραστηριότητες και εδώ η χρήση των ΤΠΕ αναδεικνύει την σημασία των ιστορικών προβλημάτων. Για παράδειγμα:
- Οι σκιές και η σημασία τους στην ανάπτυξη έμμεσων μετρήσεων.
- Άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Η προέλευσή τους, οι αντιλήψεις με βάση τις οποίες χαρακτηρίστηκαν άλυτα, δυνατότητες δυναμικών λογισμικών για αναπαραστάσεις λύσεών τους.
- Η έννοια της αρμονίας από τον Πυθαγόρα μέχρι τον Fourier.
- Ακόμη θέματα που σχετίζονται με την τέχνη, το φυσικό περιβάλλον και τα φαινόμενά του θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν. Για παράδειγμα:
- Η έννοια της συμμετρίας στη φύση, την τέχνη και την επιστήμη.
- Οι σεισμοί και τα μαθηματικά που τους περιγράφουν.

Ενδεικτικό σενάριο διαθεματικής δραστηριότητας

Θέμα: Η μέτρηση της περιμέτρου της γης

Η βασική ιδέα

Η μέτρηση της περιμέτρου της γης αποτελεί έναν θεματικό πυρήνα γύρω από τον οποίο θα αρθρωθεί μία ποικιλία από επιμέρους δραστηριότητες. Το θέμα καταρχήν παραπέμπει σε μία καθαρά μαθηματική δραστηριότητα η οποία αφορά σε κάποιο από τα θεωρήματα μέτρησης όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα και η ομοιότητα. Μία προσεκτική μελέτη των συνθηκών μέσα στις οποίες υλοποιήθηκε η μέτρηση επιτρέπει την διάκριση επιμέρους συνιστωσών (Ιστορία, Γεωγραφία) οι οποίες παρουσιάζουν διδακτικό ενδιαφέρον. Η ανάδειξη των συνιστωσών αυτών θα μπορούσε να γίνει με δραστηριότητες που αφορούν στα παρακάτω γνωστικά αντικείμενα:

Μαθηματικά σχετικά με την μέτρηση του κύκλου, την ομοιότητα, τις παράλληλες ευθείες, τις εφαπτόμενες σε κύκλο.

Γεωγραφία που αφορά κυρίως στην έννοια του μεσημβρινού, της μελέτης χάρτη και της διαμόρφωσης του εδάφους της Αιγύπτου.

Ιστορία σχετική με τον Ελληνισμό της Αιγύπτου, την βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας και βιογραφικά στοιχεία από την ζωή και το έργο σημαντικών γεωδαιτών όπως ο Ερατοσθένης και ο Ποσειδώνιος.

Οι στόχοι

Αν θα έπρεπε να επιλέξουμε έναν γενικό στόχο του σεναρίου αυτός θα αφορούσε στην διασυνδεδεμένη γνώση, την γνώση δηλαδή η οποία δεν περιορίζεται στα πλαίσια ενός μόνο γνωστικού αντικειμένου αλλά συνθέτει αρμονικά θέματα από περισσότερα γνωστικά αντικείμενα.

Μαθηματικά.

Οι μαθητές κατ αρχήν θα έρθουν σε επαφή με την χρήση των μαθηματικών ως εργαλεία για την πραγματοποίηση έμμεσων μετρήσεων μεγεθών προς τα οποία δεν έχουμε άμεση πρόσβαση.

Οι μαθητές θα αποκτήσουν την αντίληψη ότι το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης αποτελεί ένα πολιτιστικό προϊόν, το οποίο δημιουργήθηκε μέσα από την προσπάθεια να επιλυθούν συγκεκριμένα προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά δεν είναι ανεξάρτητα από το κοινωνικό και πολιτιστικό γίγνεσθαι της συγκεκριμένης εποχής και του τόπου στον οποίο οι μαθηματικοί επεχείρησαν να τα επιλύσουν.

Ένας άλλος στόχος είναι να δημιουργήσουν οι μαθητές γεωμετρικά μοντέλα των πραγματικών καταστάσεων ώστε να οδηγηθούν στην αξιοποίηση θεωρημάτων και προτάσεων της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η διδακτική αξία της δημιουργίας μοντέλων έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν υποθέσεις, να ορίσουν εκείνοι τις παραμέτρους του φαινομένου και να δομήσουν με τον τρόπο αυτό την κατάσταση προβλήματος με μαθηματικό τρόπο.

Τέλος θα αντιμετωπίσουν την κατάσταση προβλήματος μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις οι οποίες προκύπτουν από την χρήση διαφορετικών μαθηματικών προτάσεων που σχετίζονται με την μέτρηση μεγεθών.

Γεωγραφία.

Οι μαθητές θα συνδέσουν την έννοια του μεσημβρινού με τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η σκιά των αντικειμένων πάνω στην γη.

Ακόμη θα δημιουργήσουν ένα μοντέλο της περιφοράς του ήλιου γύρω από την γη και της συμμεταβολής της σκιάς αντικειμένων με την θέση του ήλιου.

Τέλος οι μαθητές θα γνωρίσουν τα γεωγραφικά χαρακτηριστικά της Αιγύπτου ιδιαίτερα αυτά που αναφέρονται στον άξονα Ασουάν-Αλεξάνδρεια.

Εδώ είναι σημαντικό οι πληροφορίες να μην παραμείνουν ασύνδετες με τον βασικό πυρήνα της δραστηριότητας που είναι η μέτρηση της περιμέτρου της γης. Για παράδειγμα είναι σημαντική η διαπραγμάτευση για την ανάγκη οι δύο πόλεις που θα χρησιμοποιηθούν να βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό ώστε οι σκιές να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και επομένως να δημιουργούνται όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

Ιστορία.

Οι μαθητές θα γνωρίσουν τον πολιτισμό που αναπτύχθηκε από τον Ελληνισμό της βορείου Αφρικής και ιδιαίτερα της Αλεξάνδρειας.

Αυτό που θα πρέπει να συζητηθεί και αναδειχθεί είναι ότι τόσο οι κοινωνικές όσο και οι πολιτιστικές και επιστημονικές συνθήκες της συγκεκριμένης εποχής στον συγκεκριμένο τόπο συνέβαλαν ουσιαστικά στο επίτευγμα της μέτρησης της περιμέτρου από τον Ερατοσθένη. Ακόμη θα συλλέξουν πληροφορίες για το έργο του Ερατοσθένη και την βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας.

Διάκριση ως προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας

Ο τρόπος με τον οποίο είναι δομημένο το αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία ενός γνωστικού αντικειμένου είναι συνήθως φορέας μιας υπονοούμενης επιστημολογικής θέσης της κοινότητας η οποία καλείται να το εφαρμόσει. Η αντίληψη ότι τα γνωστικά αντικείμενα είναι διακριτά και αναπτύσσονται καλύτερα όταν μελετώνται αυτόνομα είναι δημιούργημα της βιομηχανικής εποχής. Ο απόηχος της αντίληψης αυτής διαπερνά την μεθοδολογία της διάκρισης των μαθημάτων που διδάσκονται τόσο στην στοιχειώδη όσο και την μέση και την ανώτατη εκπαίδευση. Διαφορετικά βιβλία, διαφορετικοί διδάσκοντες, διαφορετική αξιολόγηση σε ένα πλήθος γνωστικών αντικειμένων που παραμένουν ασύνδετα.

Οι διαθεματικές δραστηριότητες αποτελούν μία ευκαιρία σύνθεσης γνωστικών αντικειμένων, η οποία σύνθεση θα δημιουργήσει βαθύτερη κατανόηση των αντικειμένων αυτών. Στην παρούσα δραστηριότητα τα μαθηματικά των μετρήσεων συνδέονται με τις ιδιαίτερες γεωγραφικές συνθήκες του τόπου στον οποίο αναπτύχθηκαν και τις ιστορικές συνιστώσες που οδήγησαν στην ανάπτυξή τους.

Μία άλλη διάκριση από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας είναι και αυτή που αναφέρεται στην συνεργατική μάθηση, την ερευνητική στάση των μαθητών και τον ρόλο του διδάσκοντα στην πορεία της υλοποίησης της δραστηριότητας.

Οι μαθητές εργάζονται ομαδικά, αναλαμβάνοντας συγκεκριμένους ρόλους στην ομάδα, ερευνούν και συλλέγουν πληροφορίες (ιδιαίτερα από το διαδίκτυο) και επινοούν και κατασκευάζουν μοντέλα τα οποία συνθέτουν τις πληροφορίες αυτές.

Ο διδάσκων συμμετέχει στην διαδικασία ως συνερευνητής, σύμβουλος και συνδιαμορφωτής της σύνθεσης της γνώσης. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης αυτής θα αποτελεί μία προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης, μία πρόταση για την κατανόησή της και όχι ένα αδιαπραγμάτευτο, εξ ορισμού αληθές, τυπικό γνωστικό προϊόν.

Προαπαιτούμενα για την υλοποίηση της δραστηριότητας.

Ως προς τα μαθηματικά.

Οι μαθητές γνωρίζουν τις ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών, των αναλογιών και των ομοίων τριγώνων. Επιπλέον γνωρίζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, τις ιδιότητες της εφαπτομένης τους κύκλου και την περίμετρό του. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι γνώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν και από τους πρώτους γεωδαίτες για τον υπολογισμό της περιμέτρου της γης και αποτελούν τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για την υλοποίησή της.

Ως προς τα εργαλεία.

Τόσο οι μαθητές όσο και ο διδάσκων είναι εξοικειωμένοι με τις λειτουργίες επικοινωνίας και αναζήτησης πληροφοριών στο διαδίκτυο. Μία επιπλέον απαραίτητη δεξιότητα αφορά στην γνώση αναζήτησης εικόνων των περιοχών της γήινης σφαίρας από δορυφόρο. Λογισμικά και δικτυακοί τόποι που επιτρέπουν την αναζήτηση αυτή υπάρχουν ελεύθερα στο διαδίκτυο με χαρακτηριστικό παράδειγμα το Google Earth.

Ακόμη οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό την χρήση ενός από τα δυο βασικά δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά, το Cabri ή το Sketchpad αφού μέσω του λογισμικού αυτού θα κατασκευάσουν γεωμετρικά μοντέλα.

Ως προς τον χώρο υλοποίησης.

Οι μαθητές, όταν βρίσκονται στο σχολείο, εργάζονται σε ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών. Κάθε ομάδα έχει την δυνατότητα να εργάζεται στον προσωπικό υπολογιστή ενός μέλους της αλλά και κάθε μέλος θα μπορούσε να εργάζεται κατ ιδίαν συλλέγοντας πληροφορίες και συνθέτοντας το υλικό που συλλέγει με αυτό που δημιουργούν τα άλλα μέλη της ομάδας.

Ο διδάσκων, όταν βρίσκεται στο σχολικό περιβάλλον, περιφέρεται μεταξύ των ομάδων και συζητά, απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις και παρέχει τεχνικές συμβουλές στους μαθητές. Ακόμη καλεί τα μέλη μιας ομάδας και ενημερώνεται για την πρόοδο της δραστηριότητας σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Φάσεις υλοποίησης

Ιστορία

Θέματα προς διερεύνηση:

Η πολιτιστική κληρονομιά των Ελλήνων της Αλεξάνδρειας.

Ο Ερατοσθένης και η μέθοδος που επινόησε για την μέτρηση της περιμέτρου της γης.

Άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν κατά το παρελθόν για την μέτρηση της περιμέτρου της γης.

Δραστηριότητες:

Οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες αναλαμβάνουν να συλλέξουν πληροφορίες από το διαδίκτυο για την ιστορία της Αλεξάνδρειας ιδιαίτερα κατά τους χρόνους που έζησαν οι μεγάλοι μαθηματικοί και αστρονόμοι του Ελληνισμού της Αιγύπτου. Θα εστιάσουν την αναζήτησή τους σε πληροφορίες γύρω από την βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας.

Προτεινόμενες διευθύνσεις:

http://el.wikipedia.org/wiki/

http://www.perseus.tufts.edu/GreekScience/Students/Ellen/Museum.html

Ομάδες μαθητών αναζητούν πληροφορίες για να συνθέσουν μία σύντομη αναφορά για την ζωή και το έργο του Ερατοσθένη. Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στην παιδεία του Ερατοσθένη την μόρφωσή του σε συνδυασμό με το γεγονός ότι υπήρξε διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν στην επόμενη φάση να συσχετιστούν με τον τρόπο με τον οποίο επέτυχε την μέτρηση της περιμέτρου της γης.

Προτεινόμενες διευθύνσεις:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Eratosthenes.html

http://www.phys-astro.sonoma.edu/observatory/eratosthenes/

Συλλέγουν πληροφορίες για άλλους τρόπους υπολογισμού της περιμέτρου της γης οι οποίοι στηρίζονται σε στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις όπως για παράδειγμα το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Πληροφορίες για το θέμα αυτό μπορούν να αναζητήσουν στην διεύθυνση:

http://www.karlscalculus.org/measureearth.html

Στο τέλος της φάσης αυτής οι μαθητές συνθέτουν ένα κείμενο σχετικό με τους σημαντικούς Αλεξανδρινούς επιστήμονες και ιδιαίτερα τον Ερατοσθένη. Είναι σημαντικό να αναδειχθούν οι ιδέες οι οποίες βρίσκονται πίσω από την μέτρηση και όχι βιογραφικές λεπτομέρειες οι οποίες δεν έχουν ιδιαίτερα μεγάλη διδακτική αξία.

Η περιγραφή του τρόπου με τον οποίο έγινε η μέτρηση της περιμέτρου της γης από τον Ερατοσθένη θα αποτελέσει αφετηρία για την επόμενη φάση. Εδώ καλό θα είναι ο διδάσκων να κατευθύνει τους μαθητές σε πληροφορίες που αφορούν σε ποσοτικά δεδομένα όπως είναι η απόσταση των δύο πόλεων και οι μέθοδοι μέτρησης μεγάλων αποστάσεων.

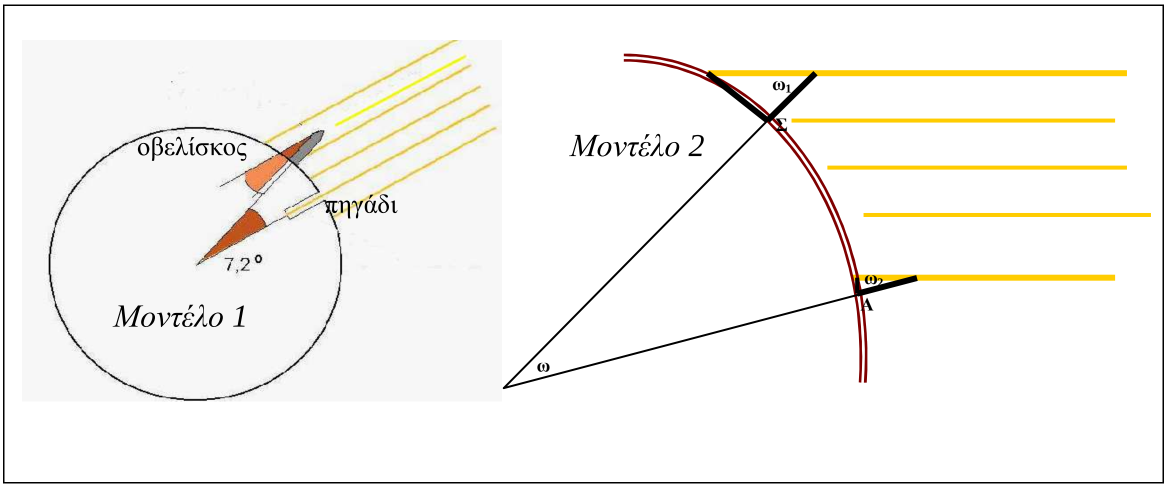
Για παράδειγμα είναι σημαντικό οι μαθητές να μάθουν ότι ο Ερατοσθένης μέτρησε την απόσταση των δυο πόλεων (Σιένη-Αλεξάνδρεια) με τον χρόνο που έκανε ένα καραβάνι να διανύσει την διαδρομή μεταξύ των δυο πόλεων (50 ημέρες) και υπολόγισε ότι ένα καραβάνι διανύει περίπου 100 στάδια την ημέρα άρα η απόσταση ήταν 5000 στάδια (1 στάδιο=165 μέτρα).

Μαθηματικά

- Στατική αναπαράσταση των μεθόδων μέτρησης της περιμέτρου της γης.

Προαπαιτούμενα για την υλοποίηση της δραστηριότητας.

Οι μαθητές δημιουργούν ένα στατικό γεωμετρικό μοντέλο της μέτρησης από τον Ερατοσθένη (εικόνα 1).



Εικόνα 1

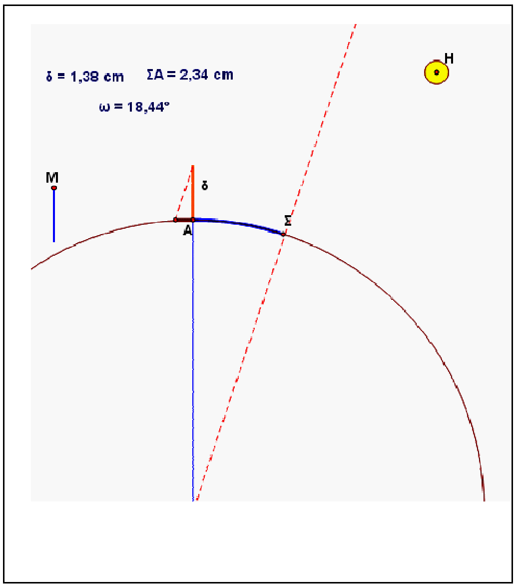
Αλλά και μοντέλα των άλλων μεθόδων.

Στο μοντέλο 1 θα απεικονίσουν τον τρόπο με τον οποίο εικάζεται ότι ο Ερατοσθένης χρησιμοποίησε την καθετότητα των ακτίνων στην περιοχή της Σιένης και την γνώση της απόστασής της από την Αλεξάνδρεια.

Στο μοντέλο 2 θα αναπαραστήσουν έναν εναλλακτικό τρόπο μέτρησης ο οποίος ίσως χρησιμοποιήθηκε αργότερα και είναι απαλλαγμένος από τον περιορισμό της καθετότητας των ηλιακών ακτίνων σε έναν τόπο. Το μοντέλο 2 θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για την υλοποίηση δραστηριότητας σχετικής με την συνεργασία των μαθητών δυο σχολείων που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση και στον ίδιο μεσημβρινό.

Το γεωμετρικό σχήμα θα τους δώσει την ευκαιρία να στοχαστούν πάνω στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία θα μεταφέρουν στην οθόνη μέσω του λογισμικού. Στην συνέχεια καταστρώνουν ένα σχέδιο για τον τρόπο με τον οποίο θα δημιουργήσουν μία κατασκευή με ένα δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό.

Οι μαθητές με βάση την προεργασία που ήδη έχουν κάνει κατασκευάζουν μια δυναμική προσομοίωση της γης του ήλιου που κινείται, των ακτίνων του και της σκιάς της ράβδου δ(εικόνα 2).



Εικόνα 2

Εδώ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί φύλλο εργασίας με ερωτήσεις της μορφής:

Φύλλο εργασίας.

1. Παίζει κάποιο ρόλο το ύψος του δ;
2. Παίζει κάποιο ρόλο η απόσταση των δύο πόλεων;
3. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την περίμετρο οποιαδήποτε ώρα της ημέρας από οποιουσδήποτε τόπους;
4. Πως θα υπολογίσουμε την ακτίνα της γης ή ενός οποιουδήποτε κύκλου;

Ο στόχος κατά την φάση αυτή είναι αφενός να εμπλακούν οι μαθητές σε διαδικασίες μοντελοποίησης και αφετέρου να διαπραγματευτούν και να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους.

Χρήση διαδικτύου

Οι μαθητές για την υλοποίηση της μέτρησης με το δεύτερο μοντέλο εκτός από την προσομοίωση με το γεωμετρικό λογισμικό θα μπορούσαν να επικοινωνήσουν με ένα άλλο σχολείο το οποίο βρίσκεται περίπου στον ίδιο μεσημβρινό με το δικό τους και να επικοινωνήσουν τις μετρήσεις με τους συμμαθητές τους του άλλου σχολείου.

Συγκεκριμένα αν οι μαθητές ενός σχολείου στην Αθήνα έρθουν σε επαφή με συμμαθητές τους από ένα σχολείο στις Σέρρες τότε μπορούν να μετρήσουν τις σκιές ίσων ράβδων την ίδια χρονική στιγμή. Η απόκλιση των δύο γωνιών θα εκφράσει την επίκεντρη γωνία στην γήινη σφαίρα (μοντέλο2).

Πριν από την υλοποίηση αυτής της μέτρησης θα μπορούσαν να επισκεφθούν την διεύθυνση http://outreach.as.utexas.edu/marykay/assignments/eratos1.html

Για να συλλέξουν πληροφορίες για τον τρόπο μα τον οποίο έχει ήδη εφαρμοστεί η μέθοδος αυτή.

Η σύνδεση τώρα με την επόμενη φάση θα γίνει μέσα από το ερώτημα γιατί ο Ερατοσθένης ενώ είχε πραγματοποιήσει ακριβείς μετρήσεις είχε μία σημαντική απόκλιση από την πραγματική περίμετρο της γης

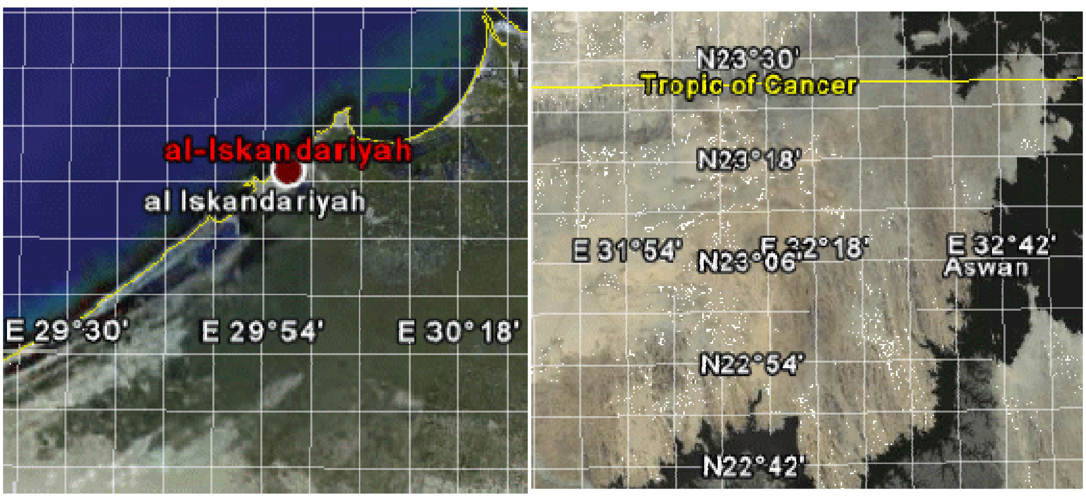
Γεωγραφία

Στη φάση αυτή ο μαθητές θα μελετήσουν τις γεωγραφικές ιδιαιτερότητες της Αιγύπτου και ιδιαίτερα του άξονα Σιένης (Ασουάν) Αλεξάνδρειας.

Ο άξονας αυτός χρησιμοποιήθηκε από τον Ερατοσθένη ο οποίος είχε την πεποίθηση ότι οι δύο πόλεις βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό.

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί ένα πρόγραμμα πλοήγησης στην υδρόγειο όπως είναι το Google Earth.

Οι μαθητές κατευθύνουν τον κέρσορα στην Αίγυπτο και μεγεθύνουν την περιοχή εμφανίζοντας μετρήσεις για το γεωγραφικό πλάτος και μήκος (εικόνα 3).



Εικόνα 3

Εδώ είναι πλέον φανερή η απόκλιση της Αλεξάνδρειας (al-Iskandariyah) Από την Σιένη (Aswan).

Ακόμη θα μπορούσαν να εστιάσουν περισσότερο στον άξονα των δύο πόλεων, να εξετάσουν πιθανές διαδρομές που θα μπορούσε να ακολουθήσει κάποιος που μεταβαίνει από την μία πόλη στην άλλη.

Τέλος παρατηρώντας τον τρόπο που εξελίσσονται οι μετρήσεις του γεωγραφικού πλάτους και μήκους θα μπορούσαν να εκτιμήσουν την πραγματική απόσταση των δύο πόλεων.

Σύνθεση.

Το τελευταίο στάδιο μιας διαθεματικής δραστηριότητας θα έχει στόχο την τελική σύνθεση των δραστηριοτήτων με τις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές.

Ο διδάσκων ζητά από τις ομάδες να συντάξουν ένα ενιαίο κείμενο, μέσα στο οποίο θα περιγράφεται το σύνολο των δραστηριοτήτων, διαπλέκοντας τις πληροφορίες για τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα.

Μία παρουσίαση σε power point θα ευνοούσε την λειτουργική σύνθεση των πληροφοριών, των κατασκευών και των ευρημάτων των μαθητών.

Σημείωση: Ο διδάσκων θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το σενάριο αυτό ως αφετηρία για την δημιουργία δραστηριοτήτων μικρότερης ή και μεγαλύτερης εμβέλειας οι οποίες όμως να ανήκουν στην ίδια θεματική ενότητα, δηλαδή την μέτρηση μέσω σκιάς.

Όσον αφορά στην μέτρηση της περιμέτρου της γης ιδέες δραστηριοτήτων και σχέδια υλοποίησής τους υπάρχουν στην διεύθυνση:

http://www.k12science.org/noonday/kickoff.09.05.html

Όσον αφορά στις μετρήσεις εν γένει (χρόνου, αποστάσεων, υψών) μέσω της σκιάς θα μπορούσε να δημιουργήσει δραστηριότητες σχετικές με την μέτρηση του ύψους της πυραμίδας, των ηλιακών ρολογιών (πολύ απαιτητική δραστηριότητα) κ.λ.π.

Εμβαδόν Παραλληλογράμμου

(Γενίκευση του τύπου υπολογισμού εμβαδού για όλα τα είδη παρ/μου)

Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Α) Η βασική ιδέα του σεναρίου

Το συγκεκριμένο παιδαγωγικό σενάριο αναφέρεται, στην κατανόηση της έννοιας παραλληλόγραμμο, των ιδιοτήτων του αντίστοιχου γεωμετρικού σχήματος καθώς και του τύπου με τον οποίο υπολογίζουμε το εμβαδόν του, με τη βοήθεια ενός μικρού εξειδικευμένου αρχείου που δημιουργήθηκε με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας The Geometer' s Sketchpad. Με το αρχείο αυτό ο μαθητής μπορεί να χειριστεί τη γεωμετρική απεικόνιση της έννοιας παραλληλόγραμμο με τις ακόλουθες δυνατότητες:Δυναμική μεταβολή του αρχικού σχήματος ανάμεσα στα διάφορα είδη της οικογένειας των παραλληλογράμμων: **ορθογώνιο ⇔ Πλάγιο ⇔ Ρόμβος ⇔ Τετράγωνο**

- Επιλογή της επιθυμητής διάστασης ύψους και βάσης του σχήματος με τη χρήση ειδικών μεταβολέων στην οθόνη του υπολογιστή που περιλαμβάνονται στο αρχείο του προγράμματος.

Ο γενικός σκοπός αυτού εκπαιδευτικού σεναρίου αναφέρεται:

- στην αξιοποίηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες στη μετάβαση από το ένα είδος παρ/μου.
- στη γενίκευση του τύπου υπολογισμού του εμβαδού παρ/μου για όλα τα είδη αυτού.
- Στη διατύπωση συμπερασμάτων και γενικεύσεων μέσω της παρατήρησης και του χειρισμού ενός γεωμετρικού μοντέλου

   1.

Β) Σε ποιους απευθύνεται

Το σενάριο απευθύνεται κυρίως σε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου αλλά με κατάλληλες αλλαγές και σε μαθητές της Α΄ Λυκείου

Γ) Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας The Geometer's Sketchpad.

Σημείωση: Το προτεινόμενο σενάριο αναφέρεται στο δεύτερο κεφάλαιο «Μετρήσεις Μεγεθών» (§ 2.11) και στο έβδομο κεφάλαιο «Ευθύγραμμα Σχήματα» (§ 7.4, 7.7) του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Στις Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών 2002-03 του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου αναφέρεται ότι στις §7.6 – 7.7 μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα «Εμβαδά Παραλληλογράμμων και Τριγώνων» σελ. 65-68 του Βιβλίου Μαθητή που συνοδεύει το αναφερόμενο λογισμικό.

Μαθησιακή και Παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

Α) Μαθησιακοί στόχοι

Το σενάριο αυτό ανταποκρίνεται στους γενικούς μαθησιακούς στόχους για την συγκεκριμένη γνωστική περιοχή στην Α΄ Γυμνασίου όπου οι μαθητές θα πρέπει (Οδηγίες 2002-03):

- ♦ Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν τον τύπο εμβαδού του παρ/μου
- ♦ Να λύνουν προβλήματα όπου δίνεται το εμβαδόν και μία διάσταση και ζητείται η άλλη.
- ♦ Ο εθισμός των μαθητών στην επίλυση εγγραμμάτων τύπων με μία ή δύο μεταβλητές.

Οι στόχοι που τίθενται στο σενάριο αυτό είναι:

- Να κατανοήσουν την έννοια των διαστάσεων ενός παρ/μου αλλά κυρίως του ύψους του ως απόσταση των απέναντι πλευρών του.
- Να κατανοήσουν τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου
- Να αντιληφθούν ότι ο ίδιος τύπος υπολογισμού εμβαδού ισχύει για όλα τα είδη του παρ/μου ανεξάρτητα από την επιλογή της βάσης και του ύψους.

Β) Παιδαγωγικοί στόχοι

Στο πλαίσιο αυτού του σεναρίου, οι μαθητές θα εργαστούν με τις προτεινόμενες δραστηριότητες όπου με τη βοήθεια του λογισμικού:

- ➢ Μετρούν – παρατηρούν – διαπιστώνουν
- ➢ Υπολογίζουν – παρατηρούν – διαπιστώνουν
- ➢ Παρατηρούν – υποθέτουν - επαληθεύουν

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

Α) Από την πλευρά του μαθητή

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών πάνω στο γνωστικό αντικείμενο που έχει επιλεγεί, εντοπίζονται στην έννοια και τα είδη του παραλληλογράμμου καθώς και στον τύπο του υπολογισμού του εμβαδού του όπως προκύπτουν μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης οι μαθητές πρέπει να έχουν κατανοήσει την έννοια της απόστασης σημείου από ευθείας και την απόσταση παράλληλων ευθειών.

Οι προαπαιτούμενες τεχνικές γνώσεις, για τη χρησιμοποίηση του λογισμικού εντοπίζονται στην εξοικείωση με τα βασικά εργαλεία του περιβάλλοντος του λογισμικού Sketchpad καθώς και τις εντολές «κατασκευή εσωτερικό πολυγώνου» (μενού κατασκευή), «μήκος τμήματος», «απόσταση», «εμβαδόν» και «υπολογισμοί» (μενού μέτρηση).

Β) Από την πλευρά του καθηγητή

Ο διδάσκων που θα χρησιμοποιήσει αυτό το σενάριο θα πρέπει να γνωρίζει:

- τα βασικά εργαλεία και τη χρήση των μενού εντολών του περιβάλλοντος του λογισμικού Sketchpad
- τον τρόπο μέτρησης και υπολογισμών με τις εντολές του προγράμματος.

Διδακτική διαχείριση της τάξης

Το προτεινόμενο σενάριο προτείνεται να ενταχθεί στο σχολείο σύμφωνα με το αναλυτικό και ωρολόγιο πρόγραμμα, μετά τη διδασκαλία των αντίστοιχων ενοτήτων. Για την εφαρμογή αυτού του σεναρίου απαιτείται ένα φύλο εργασίας για τους μαθητές, η καλή λειτουργία του εργαστηρίου υπολογιστών με το λογισμικό εγκατεστημένο και η συγκρότηση ομάδων εργασίας. Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και προσπαθούν να υλοποιήσουν το φύλλο εργασίας. Ο διδάσκων παρακολουθεί, συντονίζει και παροτρύνει αυτούς που δυσκολεύονται. Στο τέλος της διδακτικής ώρας ακολουθεί σύντομη παιδαγωγική συζήτηση για τα θέματα που απασχόλησαν τους μαθητές στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων αυτού του σεναρίου καθώς και για την ανταλλαγή απόψεων για τις σωστές απαντήσεις στα ερωτήματα που τέθηκαν.

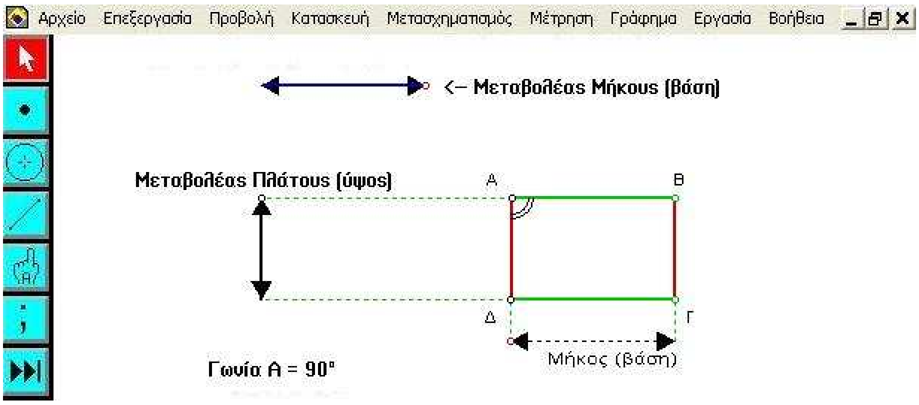
Υλοποίηση του σεναρίου

Εργασίες των μαθητών

Α΄ Μέρος

1η εργασία: Ελεύθερος πειραματισμός – γνωριμία με το λογισμικό

Οι μαθητές ανοίγουν το αρχείο που θα πρέπει ο διδάσκων να έχει δημιουργήσει με το πρόγραμμα The Geometer's Sketchpad. Το αρχείο αυτό περιέχει το μοντέλο του γεωμετρικού σχήματος παραλληλόγραμμο. Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές του να πειραματιστούν για λίγο ελεύθερα με σκοπό να εξοικειωθούν με το περιβάλλον του αρχείου και να γνωρίσουν τις δυνατότητες του δυναμικού σχήματος. Οι μαθητές μπορούν να αλλάξουν τις αποστάσεις των απέναντι πλευρών με τη βοήθεια των μεταβολέων στη οθόνη ή να μετασχηματίσουν το παραλληλόγραμμο από ορθογώνιο σε πλάγιο ή ρόμβο ή τετράγωνο μετακινώντας την κορυφή Α δεξιά ή αριστερά.



2η εργασία

Οι μαθητές θα εργαστούν με το ορθογώνιο στην οθόνη του υπολογιστή όπου με τα εργαλεία του λογισμικού θα μετρήσουν κατ' αρχάς τις διαστάσεις του σχήματος και τις αποστάσεις των απέναντι πλευρών. Στη συνέχεια θα πρέπει να απαντήσουν σε ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού στο χαρτί του φύλλου εργασίας. Με την εργασία αυτή, μέσω της παρατήρησης και σύγκρισης των μετρήσεων, αναμένεται να κατανοήσουν ότι στη περίπτωση του ορθογωνίου ότι το ύψος ταυτίζεται τόσο με την κάθετη πλευρά όσο και με την απόσταση των απέναντι πλευρών του. Στην ερώτηση αν τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και στο πλάγιο παραλληλόγραμμο, αναμένεται οι μαθητές να αναδιατυπώσουν τις ερωτήσεις κατάλληλα ώστε να έχουν κατανοήσει ότι το ύψος συμπίπτει με την απόσταση των απέναντι πλευρών και η βάση με τις πλευρές του σχήματος. Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές του να μετασχηματίσουν κατάλληλα το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή ώστε να βοηθηθούν στη λήψη της απόφασης για τις σωστές απαντήσεις.

3η εργασία

Οι μαθητές θα συνεχίσουν να εργάζονται με το ορθογώνιο στην οθόνη του υπολογιστή. Στην εργασία αυτή πρέπει να κάνουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς βάσης και αντίστοιχου ύψους για να υπολογίσουν το εμβαδόν του ορθογωνίου. Αναμένεται να κάνουν 4 συνολικά συνδυασμούς και να πινακοποιήσουν τα αποτελέσματα. Από τον πίνακα θα πρέπει να παρατηρήσουν ότι η τιμή του εμβαδού είναι η ίδια ανεξάρτητα της επιλογής βάσης και αντίστοιχου ύψους (με την προϋπόθεση ότι οι αρχικές διαστάσεις είναι σταθερές). Οι μαθητές συγκρίνουν το εμβαδόν του ορθογωνίου με τα εμβαδά των άλλων μορφών του παρ/μου με τις ίδιες όμως διαστάσεις. Επίσης θα πρέπει να παρατηρήσουν ότι σε όλες τις περιπτώσεις το ύψος ταυτίζεται με την απόσταση των απέναντι πλευρών. Οι μαθητές τέλος καλούνται να διατυπώσουν μια υπόθεση για το πότε αλλάζει το αποτέλεσμα του υπολογισμού του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Αυτή την υπόθεση θα προσπαθήσουν στη συνέχεια να την επαληθεύσουν. Στην υπόθεση αυτή αναμένεται να γράψουν ότι η τιμή του εμβαδού θα είναι διαφορετική όταν το σχήμα μετασχηματιστεί σε τετράγωνο οπότε αλλάζει αναγκαστικά τουλάχιστον η μία διάσταση.

4η εργασία: Εφαρμογή - Άσκηση

Οι μαθητές καλούνται να χαρακτηρίσουν μήκη και αποστάσεις ως βάση και ύψος σε τρία διαφορετικά σχήματα (ορθογώνιο-πλάγιο – ρόμβος).

Θα πρέπει να δοθεί προσοχή στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές διαπιστώνουν ότι το σχήμα είναι ρόμβος. Ένας τρόπος που μπορεί να προτείνει ο διδάσκων είναι να μετρηθούν οι πλευρές του σχήματος και στη συνέχεια με το μετασχηματισμό θα πρέπει στην περίπτωση του ρόμβου τα μήκη τους να είναι ίσα . Σκοπός είναι η κατανόηση ότι και στα τρία είδη παραλληλογράμμου ισχύει η ίδια ορολογία και ότι με τον ίδιο τρόπο θα υπολογιστεί κάθε φορά το εμβαδόν .

Στη συνέχεια οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν με όλους τους συνδυασμούς το εμβαδόν των τριών παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, πλάγιο, ρόμβος) με τις ίδιες αρχικές διαστάσεις αλλά και του τετραγώνου. Η περίπτωση του τετραγώνου απαιτεί αλλαγές στις αρχικές διαστάσεις του σχήματος. Σκοπός είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ενώ χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο του εμβαδού το αποτέλεσμα είναι διαφορετικά γιατί αλλάζει τουλάχιστον η μία διάσταση.

Στην ερώτηση «*Υπάρχει περίπτωση το εμβαδόν του Τετραγώνου να είναι ίσο με το εμβαδόν των άλλων σχημάτων της ίδιας οικογένειας σχημάτων;*» η απάντηση μπορεί να δοθεί διαισθητικά προσεγγίζοντας στις διαστάσεις των σχημάτων. (για παράδειγμα αν στο σχήμα επιλέξουμε με τους μεταβολείς ύψος 2 και μήκος βάσης 4,5 τότε θα βρούμε εμβαδόν 9 οπότε στην περίπτωση του τετραγώνου θα πρέπει να έχουμε ύψος και βάση 3 cm)

Β΄ Μέρος

1η εργασία

Στην εργασία αυτή οι μαθητές θα πειραματιστούν με ένα σχήμα της επιλογής τους, από την οικογένεια των παραλληλογράμμων. Θα κάνουν υπολογισμούς στο χαρτί και θα επαληθεύσουν με τη βοήθεια του λογισμικού. Προτείνεται οι ομάδες των μαθητών να δοκιμάσουν με διαφορετικά είδη παραλληλογράμμου για να γίνει στο τέλος της διδακτικής ώρας σύγκριση των απόψεων και γενίκευση. Σκοπός της εργασίας είναι να κατανοήσουν τις μεταβολές στο αποτέλεσμα του υπολογισμού του εμβαδού όταν μεταβάλλεται μια διάσταση ή όταν παραμένουν οι τιμές σταθερές αλλά αλλάζει μόνο το σχήμα. Συγκρίνουν τον υπολογισμό του εμβαδού όταν επιλέγουν άλλη βάση και ύψος ενώ διατηρούν σταθερή την απόσταση των απέναντι παραλλήλων πλευρών.

2η εργασία

Στη δεύτερη εργασία οι μαθητές πειραματίζονται με τα διάφορα είδη παραλληλογράμμου για να απαντήσουν σε κάποια ερωτήματα σχετικά με το εμβαδόν και να επαληθεύσουν αυτές τις απαντήσεις με τη βοήθεια του λογισμικού.

Οι ομάδες των μαθητών μπορεί να εργαστούν σε διαφορετικά είδη του σχήματος και να συγκρίνουν μετά τις απαντήσεις τους.

Γ΄ Μέρος

Στο τρίτο μέρος οι μαθητές συγκρίνουν τη σταθερότητα των υπολογισμών τους σχετικά με το εμβαδόν ανάμεσα στο ορθογώνιο και στο πλάγιο παραλληλόγραμμο όταν οι διαστάσεις παραμένουν σταθερές και όταν μεταβάλλονται. Αυτή η εργασία αποτελεί μια ένδειξη της κατανόησης των εννοιών που διαπραγματεύτηκαν στο Α και Β μέρος.

Ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να χρησιμοποιούν το λογισμικό έτσι ώστε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους.

Δ΄ Μέρος

Οι μαθητές προσεγγίζουν το εμβαδόν του τριγώνου όπως προκύπτει με τη βοήθεια του παραλληλογράμμου.

Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το ειδικό φύλλο εργασίας που περιγράφει τις δραστηριότητες αυτού του σεναρίου. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στο ότι με τη δυνατότητα του δυναμικού χειρισμού ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει την καθολικότητα της εφαρμογής μιας πρότασης όπως είναι η εφαρμογή του ίδιου τύπου για τον υπολογισμό του εμβαδού σε όλα τα είδη των παραλληλογράμμων ανεξάρτητα της επιλογής βάσης και αντίστοιχου ύψους. Στο πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας ο μαθητής μπορεί να χειριστεί στατικά σχήματα, μια κατάσταση που δεν επιτρέπει τη νοητική μετάβαση από το ένα είδος παραλληλογράμμου στο άλλο και υπάρχει δυσκολία να κατανοήσει ότι το σχήμα αλλάζει αλλά το εμβαδόν μένει το ίδιο ως ποσότητα. Οι δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού εντοπίζονται επίσης στον υπολογισμό όταν αλλάζουν οι θέσεις της βάσης και του αντίστοιχου ύψους.

Ο διδάσκων μπορεί να επιλέξει όποιο μέρος του σεναρίου θεωρεί ότι προσαρμόζεται καλύτερα στις ανάγκες των μαθητών του.

Φύλλα Εργασίας

Σύντομη Περιγραφή

Στο σενάριο αυτό, θα χρησιμοποιήσετε το περιβάλλον του λογισμικού Sketchpad για να υπολογίσετε το εμβαδόν στα διάφορα είδη του παραλληλογράμμου και να διατυπώσετε συμπεράσματα και γενικεύσεις.

Οι εργασίες και οι δυνατότητες με το λογισμικό

I. Θα χρησιμοποιήσετε το μοντέλο του παραλληλογράμμου στο οποίο μπορείτε να μεταβάλετε με δυναμικό τρόπο το είδος του ή τις διαστάσεις του.

II. Θα αξιοποιήσετε τα εργαλεία του λογισμικού για τις απαραίτητες μετρήσεις και υπολογισμούς.

III. Θα αξιοποιήσετε το λογισμικό για να παρατηρήσετε και επαληθεύσετε τόσο τον τύπο του εμβαδού όσο και τα αποτελέσματα των υπολογισμών σας.

Οι εργασίες στο χαρτί

I. Να συμπληρώσετε μερικούς πίνακες

II. Να συμπληρώσετε κάποιες εκφράσεις ή στοιχεία

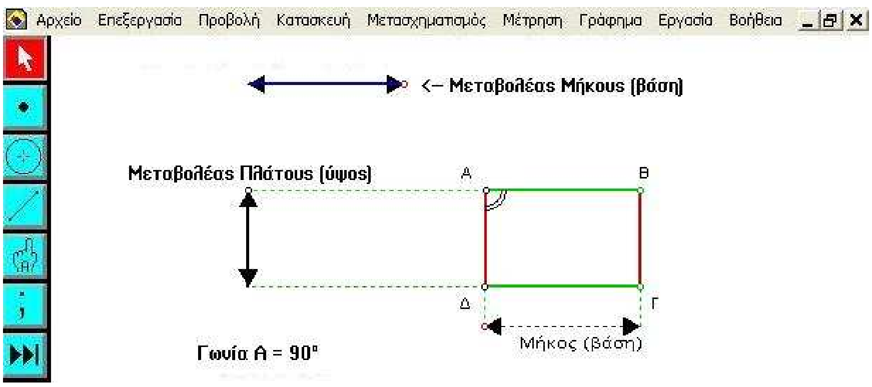
III. Να διατυπώσετε κάποια συμπεράσματα

Φύλλο εργασίας 1

Α΄ ΜΕΡΟΣ(εισαγωγική δραστηριότητα)

Πρώτη Εργασία (προετοιμάστε τον υπολογιστή)

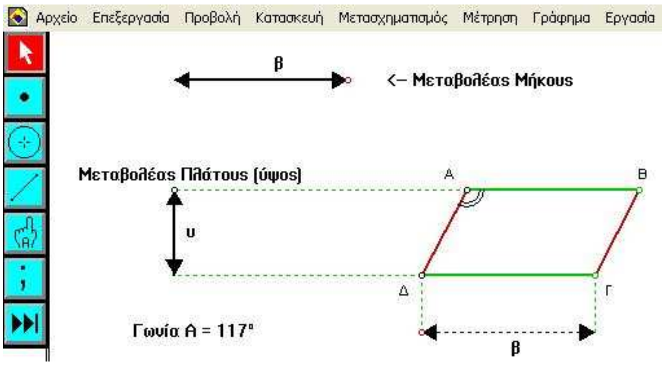
1. Ανοίξτε το αρχείο του προγράμματος The Geometer's Sketchpad. που περιέχει το μοντέλο του ευθύγραμμου σχήματος παραλληλόγραμμο και πειραματιστείτε για λίγο ελεύθερα.



Στην οθόνη παρουσιάζεται η γεωμετρική απεικόνιση της έννοιας παραλληλόγραμμο. Στο περιβάλλον του λογισμικού μπορείτε:

- Να μεταβάλλεται την απόσταση των απέναντι πλευρών είτε με τον μεταβολέα του ύψους είτε με το μεταβολέα του μήκους.
- Να μετασχηματίσετε το παραλληλόγραμμο από ορθογώνιο σε πλάγιο ή ρόμβο ή τετράγωνο μετακινώντας την κορυφή Α δεξιά ή αριστερά.

Δυναμικός Μετασχηματισμός: Αν μετακινήσετε την κορυφή Α μπορείτε να έχετε στην οθόνη το σχήμα του πλάγιου παραλληλόγραμμου.



Δεύτερη Εργασία *(μέτρηση και παρατήρηση)*

Φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι ορθογώνιο (γωνία Α = 90°) όπως στο αρχικό σχήμα.

Α) Με τα εργαλεία του λογισμικού μετρήστε τα ακόλουθα:

I. Μήκος βάσης

II. Μήκος ύψους

III. Απόσταση του Δ από το Γ

IV. Απόσταση του Α από τη ΔΓ

Β) Παρατηρήστε τα αποτελέσματα των μετρήσεων και συμπληρώστε τις ακόλουθες φράσεις σχετικά με το ορθογώνιο:

1) Το μήκος (βάση) συμπίπτει με τις πλευρές ……& ….. αλλά και με την απόσταση ………………….

2) Το πλάτος (ύψος) συμπίπτει με τις πλευρές ……&……αλλά και με την απόσταση ………………… ή την απόσταση του ……. από το ………

3) Η απόσταση του Α από το ΔΓ συμπίπτει με τις πλευρές….. & ….. αλλά και με την απόσταση του … από το …. όπως επίσης και με το μήκος ………………………...

4) Η απόσταση του Δ από το Γ συμπίπτει με τις πλευρές …… & ….. αλλά και με το …………………..

Γ) Τα παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση του πλάγιου παραλληλογράμμου;

ΝΑΙ – ΟΧΙ – ΝΑΙ με κάποιες αλλαγές

Ξαναγράψτε τις παραπάνω ερωτήσεις (1-4) με κάποια αναδιατύπωση όπου αυτή χρειάζεται, έτσι ώστε να ισχύουν για το πλάγιο παραλληλόγραμμο.

1) ______________________________

____

2) ______________________________

____

3) ______________________________

____

4)

Μπορείτε να επαληθεύσετε τις απαντήσεις σας με τον κατάλληλο μετασχηματισμό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ σε πλάγιο, στην οθόνη του υπολογιστή.

Τρίτη Εργασια *(υπολογισμοί)*

Φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι ορθογώνιο (γωνία Α = 90^o).

Χωρίς να αλλάξετε το είδος ή τις διαστάσεις του παραλληλογράμμου, επιλέγοντας κάθε φορά τα κατάλληλα τμήματα συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα (για παράδειγμα στη θέση του τμήματος θα γράφεται ΔΓ και στη στήλη τιμή το αποτέλεσμα της αντίστοιχης μέτρησης που θα έχετε κάνει με τα εργαλεία του λογισμικού).

Εμβαδόν Ορθογωνίου							
Βάση		**Ύψος**		**Απόσταση βάσης από την απέναντι πλευρά**		**Εμβαδόν**	
Τμήμα	Τιμή	Τμήμα	Τιμή	Τμήμα	Τιμή	Τύπος	Τιμή

- Ποιά σχέση υπάρχει ανάμεσα στο ύψος και στην απόσταση των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου;

- Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ;

- Τι θα συμβεί στην τιμή του εμβαδού του ΑΒΓΔ αν το μετασχηματίσετε σε άλλο είδος (χωρίς να αλλάξετε τις διαστάσεις του αρχικού σχήματος);

Μπορείτε να επαληθεύσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια του λογισμικού.

- Πότε, κατά τη γνώμη σας, θα βρεθεί διαφορετική τιμή για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ; (μπορείτε να πειραματιστείτε με το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή για να επαληθεύσετε αυτή την υπόθεση)

Εφαρμογή – Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τους μεταβολείς μήκους και πλάτους διαλέξτε κάποια συγκεκριμένα μήκη με τα οποία θα εργαστείτε σε αυτή τη δραστηριότητα. Για τις συγκεκριμένες διαστάσεις φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι **ορθογώνιο** (γωνία Α = 90^o) ή **πλάγιο** ή **ρόμβος** ανάλογα με την περίπτωση.

Να χαρακτηρίσετε τα διάφορα μήκη που παρατηρείτε στο ΑΒΓΔ

Μήκη / Αποστάσεις	**Χαρακτηρισμός (1 ή 2)**	**Χαρακτηρισμός (3 ή 4)**	**Χαρακτηρισμός (5 ή 6)**
	Ορθογώνιο	Πλάγιο	Ρόμβος
Μήκος ΔΓ			
Μήκος ΑΔ			
Μήκος ΑΒ			
Μήκος ΒΓ			
Απόσταση του Α από τη ΒΓ			
Απόσταση του Α από την ΑΔ			
Απόσταση του Β από την ΑΔ			
Απόσταση του Β από την ΔΓ			
Απόσταση του Γ από τη ΑΒ			
Απόσταση του Γ από την ΑΔ			
Απόσταση του Δ από την ΑΒ			
Απόσταση του Δ από την ΒΓ			

χαρακτηρισμός

1	Ύψος στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ
2	Βάση στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ
3	Ύψος στο πλάγιο ΑΒΓΔ
4	Βάση στο πλάγιο ΑΒΓΔ
5	Ύψος στο ρόμβο ΑΒΓΔ
4	Βάση στο ρόμβο ΑΒΓΔ

Με τα εργαλεία του λογισμικού μετρήστε τα διάφορα τμήματα του σχήματος για να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στις περιπτώσεις που το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή είναι **ορθογώνιο** (γωνία Α = 90^o) ή **πλάγιο** ή **ρόμβος.**

				Με τις ίδιες αρχικές διαστάσεις		
Υπολογισμός εμβαδού				Ορθογώνιο	Πλάγιο	Ρόμβος
Βάση		Ύψος				
Τμήμα	Τιμή	Τμήμα	Τιμή	Τιμή Εμβαδού	Τιμή Εμβαδού	Τιμή Εμβαδού

Με κατάλληλες αλλαγές στις αρχικές διαστάσεις μετασχηματίστε το σχήμα σε **τετράγωνο** και συμπληρώστε την αντίστοιχη στήλη.

Υπολογισμός εμβαδού				Τετράγωνο
Βάση		Ύψος		
Τμήμα	Τιμή	Τμήμα	Τιμή	Τιμή Εμβαδού

Υπάρχει περίπτωση το εμβαδόν του Τετραγώνου να είναι ίσο με το εμβαδόν των άλλων σχημάτων της ίδιας οικογένειας σχημάτων;

Φύλλο εργασίας 2

Πρώτη Εργασία

Θα πειραματιστείτε και πάλι με τις διάφορες μορφές της οικογένειας των παραλληλογράμμων κάνοντας υπολογισμούς στο χαρτί και στο περιβάλλον του λογισμικού.

Επιλέξτε κάποιες αρχικές διαστάσεις για τη βάση και το ύψος. (μετρήστε και φανερώστε στην επιφάνεια της οθόνης τις διαστάσεις που επιλέξατε). Στη συνέχεια συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα.

	Σχήμα: ΑΒΓΔ	Μέτρηση/ Υπολογισμός
Είδος τετράπλευρου		
Πλευρά που θα πάρετε ως **βάση** (β)		
Πλευρά (ή άλλο μήκος) που θα πάρετε ως **ύψος** (υ)		
Τύπος του εμβαδού Ε με τα γράμματα β και υ.	$E_{ΑΒΓΔ}$=	$E_{ΑΒΓΔ}$=

<u>Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού</u>

Διατηρώντας το σχήμα που περιγράφετε στον πίνακα, πειραματιστείτε με διάφορα μήκη της βάσης και του ύψους, παρατηρήστε τις μετρήσεις και απαντήστε στα ακόλουθα:

I. Αν μεταβληθεί μόνο το ύψος τότε το μήκος ……………………….…………………

II. Αν μεταβληθεί μόνο το μήκος τότε το ύψος……………………………………………..

III. Αν μεταβληθεί μόνο το ύψος τότε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ …………………………...

IV. Αν μεταβληθεί μόνο το μήκος τότε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ …………………………..

V. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου δεν μεταβάλλεται όταν ………………… ……………….και όταν … … …… …… …… ……… …… …… …… ……………………………………………….

Επαληθεύσεις μετρήσεων και σχολιασμών

Κατασκευάστε το εσωτερικό του πολυγώνου ΑΒΓΔ και μετρήστε με τα εργαλεία του λογισμικού το εμβαδόν του.

Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με τους δικούς σας υπολογισμούς στο περιβάλλον του λογισμικού (με την προϋπόθεση ότι θα χρησιμοποιήσετε τις ίδιες διαστάσεις με τον πίνακα). Μεταβάλλοντας το ύψος ή το μήκος ελέγξτε τις απαντήσεις που δώσατε στις προηγούμενες ερωτήσεις.

Αν διατηρήσετε τις ίδιες αρχικές διαστάσεις ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα και στα άλλα είδη παραλληλογράμμου ;

Δεύτερη Εργασία

Θα πειραματιστείτε με τα διάφορα είδη παραλληλογράμμου για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις;

Ορθογώνιο

Φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι ορθογώνιο (γωνία Α = 90^o).

I. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου εξαρτάται από την επιλογή της βάσης; (ΝΑΙ – ΟΧΙ);

II. Αν υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, για κάποιες συγκεκριμένες τιμές (μήκους και πλάτους), με βάση ΔΓ ή ΒΓ ή ΑΒ ή ΔΑ τότε το εμβαδόν που θα προκύπτει θα είναι διαφορετικό κάθε φορά (ΝΑΙ – ΟΧΙ);

III. Από τι εξαρτάται το εμβαδόν ενός ορθογωνίου;

Επιλέξτε συγκεκριμένες τιμές μήκους και πλάτους, υπολογίστε το εμβαδόν στο περιβάλλον του λογισμικού και συμπληρώστε τον πίνακα (3) για να επαληθεύσετε την υπόθεσή σας.

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ	$1^η$ περίπτωση		2η περίπτωση		$3^η$ περίπτωση		$4^η$ περίπτωση	
	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή
Βάση (β)	ΔΓ		ΒΓ		ΑΒ		ΔΑ	
Ύψος (υ)								
$\mathbf{E_{ΑΒΓΔ}=}$								

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων συμφωνούν με τις προηγούμενες απαντήσεις σας;

Ρόμβος

Φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι ρόμβος (γωνία Α = 150^o).

I. Το εμβαδόν ενός ρόμβου εξαρτάται από την επιλογή της βάσης; (ΝΑΙ – ΟΧΙ);
II. Αν υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του ρόμβου ΑΒΓΔ, για κάποιες συγκεκριμένες τιμές (μήκους και πλάτους), με βάση ΔΓ ή ΒΓ ή ΑΒ ή ΔΑ τότε το εμβαδόν που θα προκύπτει θα είναι διαφορετικό κάθε φορά (ΝΑΙ – ΟΧΙ);
III. Από τι εξαρτάται το εμβαδόν ενός ρόμβου;

Επιλέξτε συγκεκριμένες τιμές μήκους και πλάτους, υπολογίστε το εμβαδόν στο περιβάλλον του λογισμικού και συμπληρώστε τον πίνακα (3) για να επαληθεύσετε την υπόθεσή σας.

Ρόμβος ΑΒΓΔ	1η περίπτωση		2η περίπτωση		3η περίπτωση		4η περίπτωση	
	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή
Βάση (β)	ΔΓ		ΒΓ		ΑΒ		ΔΑ	
Ύψος (υ)								
$E_{ΑΒΓΔ}$=								

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων συμφωνούν με τις προηγούμενες απαντήσεις σας;

<u>Τετράγωνο</u>

Φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι Τετράγωνο (γωνία Α = 90^o).

I. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εξαρτάται από την επιλογή της βάσης; (ΝΑΙ – ΟΧΙ);
II. Αν υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του Τετραγώνου ΑΒΓΔ, για κάποιες συγκεκριμένες τιμές (μήκους και πλάτους), με βάση ΔΓ ή ΒΓ ή ΑΒ ή ΔΑ τότε το εμβαδόν που θα προκύπτει θα είναι διαφορετικό κάθε φορά (ΝΑΙ – ΟΧΙ);
III. Από τι εξαρτάται το εμβαδόν ενός τετραγώνου;

Επιλέξτε συγκεκριμένες τιμές μήκους και πλάτους, υπολογίστε το εμβαδόν στο περιβάλλον του λογισμικού και συμπληρώστε τον πίνακα (3) για να επαληθεύσετε την υπόθεσή σας.

Τετράγωνο ΑΒΓΔ	1η περίπτωση		2η περίπτωση		3η περίπτωση		4η περίπτωση	
	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή	Πλευρά	Τιμή
Βάση (β)	ΔΓ		ΒΓ		ΑΒ		ΔΑ	
Ύψος (υ)								
$\mathbf{E_{AB\Gamma\Delta}=}$								

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων συμφωνούν με τις προηγούμενες απαντήσεις σας;

Φύλλο εργασίας 3

Πρώτη Εργασία

Ερωτήσεις:

- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, για συγκεκριμένες τιμές μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της πλευράς ως βάση; **Σωστό - Λάθος**
- Ισχύει το ίδιο για όλα τα είδη του παραλληλογράμμου; Σωστό – Λάθος
- Για συγκεκριμένες τιμές μήκους και ύψους, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ίδιο στα παραλληλόγραμμα : Ορθογώνιο – Πλάγιο – Ρόμβος – Τετράγωνο (κυκλώστε τις απαντήσεις σας). Δικαιολογείστε την απάντησή σας:

Υπολογισμοί1 :

Χρησιμοποιείστε τους μεταβολείς μήκους και πλάτους για να δώσετε στο σχήμα παραλληλογράμμου τις διαστάσεις που επιθυμείτε.

Για συγκεκριμένες διαστάσεις μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου και του πλάγιου ΑΒΓΔ ως προς βάση τη ΔΓ και ύστερα ως προς βάση τη ΒΓ. Οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με την εντολή «υπολογισμός» του λογισμικού. Σημειώστε τα αποτελέσματα στον πίνακα.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού ως προς βάση ΒΓ χρειάζεται να κάνετε δύο συμπληρωματικές μετρήσεις με το λογισμικό. Οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με την εντολή «υπολογισμός» του λογισμικού. Σημειώστε τα αποτελέσματα στον πίνακα.

	Βάση (β)		**Ύψος** (υ)		$\mathbf{E}_{ΑΒΓΔ}$ (Ορθογώνιο)	$\mathbf{E}_{ΑΒΓΔ}$ (Πλάγιο)
1η περίπτωση	ΔΓ					
2η περίπτωση	ΒΓ					

Παρατήρηση και συμπέρασμα

Για σταθερές τιμές του μήκους και του ύψους (απόσταση των απέναντι πλευρών)

- Η τιμή του εμβαδού δεν μεταβάλλεται όταν αλλάζει το είδος του παραλληλογράμμου; (Ναι – Όχι και γιατί;)

- Η τιμή του εμβαδού δεν μεταβάλλεται όταν αλλάζει η επιλογή της πλευράς ως βάση; (Ναι – Όχι και γιατί;)
- Ισχύουν τα ίδια με τα παραπάνω αν το σχήμα γίνει ρόμβος; (ΝΑΙ – ΟΧΙ)
- Ισχύουν τα ίδια με τα παραπάνω αν το σχήμα γίνει τετράγωνο; (ΝΑΙ – ΟΧΙ)

Μπορείτε να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας;

Δεύτερη Εργασία *(Αριθμητικές Συγκρίσεις εμβαδών)*

Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις επιλέξτε και μετρήστε τη βάση και το ύψος.

Α) Επιλέξτε για το ΑΒΓΔ το σχήμα του ορθογωνίου. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα στην περίπτωση 1

Β) Σύρετε προς τα δεξιά την κορυφή Α για να μετασχηματίσετε το ορθογώνιο σε πλάγιο παραλληλόγραμμο. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα στην περίπτωση 2

Γ) Σύρετε προς τα δεξιά την κορυφή Α για να μετασχηματίσετε το παραλληλόγραμμο σε ρόμβο. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα στην περίπτωση 3

Δ) Σύρετε την κορυφή Α και τον μεταβολέα ύψους μέχρι το σχήμα να γίνει τετράγωνο με την ίδια βάση όπως και στα προηγούμενα σχήματα. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα στην περίπτωση 4

Για τους υπολογισμούς να χρησιμοποιήσετε τον υπολογιστή του λογισμικού.

	Περίπτωση 1η	Περίπτωση 2η	Περίπτωση 3η	Περίπτωση 4η
Είδος τετράπλευρου ΑΒΓΔ	Ορθογώνιο	Πλάγιο Παρ/μο	Ρόμβος	Τετράγωνο
Βάση (β)				
Ύψος (υ)				
$\mathbf{E}_{ΑΒΓΔ}$=				

Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών παραμείνουν σταθερές τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ……………. όταν είναι ……………….. ………….…………… .

Στην περίπτωση του τετραγώνου το εμβαδόν ως προς την ίδια βάση θα είναι ………….. γιατί ………………………………………….

Εφαρμογή (επίλυση προβλήματος)

Με τη βοήθεια των εργαλείων και εντολών του λογισμικού να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα: «*Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 6,82 cm^2 και είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ρόμβου. Αν η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είναι 1,74 cm τότε να βρείτε τα μήκη των πλευρών και των δύο σχημάτων*».

Λύση

Φύλλο εργασίας 4

Πρώτη Εργασία (Εμβαδόν Τριγώνου)

«Ποια σχέση έχει το εμβαδόν ενός τριγώνου με το εμβαδόν ενός παρ/μου με την ίδια βάση και ύψος;»

Με τους μεταβολείς μήκους και πλάτους διαλέξτε κάποια συγκεκριμένα μήκη με τα οποία θα εργαστείτε. Για τις συγκεκριμένες διαστάσεις φροντίστε ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι **ορθογώνιο** (γωνία Α = 90^o).

Η περίπτωση τριγώνου & ορθογωνίου

Κατασκευή: Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ κατασκευάστε τη διαγώνιο ΑΓ.

Σημείωση: Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

Ερώτηση:

Ποια σχέση μπορεί να έχει το εμβαδόν του ΑΓΔ με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

Μετρήσεις και Υπολογισμοί:

1) Να κατασκευάσετε το εσωτερικό του τριγώνου ΑΓΔ και να μετρήσετε το εμβαδόν του

2) Να μετρήσετε τα μήκη της βάσης β (ΔΓ) και του ύψους υ (ΑΔ) του ορθογωνίου. Με την εντολή «υπολογισμός» του μενού «μέτρηση» να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ ως προς βάση β και ύψος υ.

Παρατήρηση και επαλήθευση:

Παρατηρείστε τις τιμές του εμβαδού και του ορθογωνίου. Μπορείτε να επαληθεύσετε την προηγούμενη ερώτηση για τη σχέση των τιμών των εμβαδών του τριγώνου ΑΓΔ και του Ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

Μπορείτε να γράψετε τη σχέση αυτή με μαθηματική μορφή;

Μπορείτε να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει το εμβαδόν του τριγώνου με τα γράμματα Ε (εμβαδόν), β (βάση) και υ (ύψος) ;

Η περίπτωση τριγώνου & πλαγίου παρ/μου

Χωρίς να αλλάξετε τις διαστάσεις ή τις μετρήσεις που έχετε ήδη κάνει να εργαστήτε στα παρακάτω.

Δυναμικός μετασχηματισμός: Μετακινήστε το σημείο Α λίγο προς τα δεξιά για να πάρετε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. .

Παρατήρηση και ερώτηση: Παρατηρώντας τις μετρήσεις των εμβαδών τριγώνου και παραλληλογράμμου μπορείτε να βρείτε ποια σχέση έχει το εμβαδόν του ΑΓΔ με το εμβαδόν του ΑΒΓΔ με την ίδια βάση και ύψος;

Με την εντολή «υπολογισμός» του λογισμικού γράψτε το λόγο του εμβαδού του παρ/μου προς τον αριθμό2. Τι παρατηρείτε; Με ποια μέτρηση ταιριάζει αυτό το αποτέλεσμα;

Σύρετε δεξιά – αριστερά το σημείο Α και παρατηρείστε τις παραπάνω μετρήσεις για να επαληθεύσετε τη σχέση των εμβαδών τριγώνου και παρ/μου.

Μπορείτε να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει το εμβαδόν του τριγώνου με τα γράμματα Ε (εμβαδόν), β (βάση) και υ (ύψος)

Κάνοντας μια Εξερεύνηση ορατή: Η περίπτωση των ισοδυνάμων εξισώσεων.

Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας

Οι διαδικασίες για την επίλυση εξισώσεων αποτελούν κεντρικό θέμα σε κάθε Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών. Αν και οι ισοδύναμες εξισώσεις δεν αναφέρονται ρητά ως ξεχωριστό θέμα, η παραγωγή εν τούτοις ισοδυνάμων εξισώσεων βρίσκεται στην καρδιά της διαδικασίας για την επίλυση κάθε εξίσωσης. Επιπλέον δε, οι ισοδύναμες εξισώσεις παρέχουν και μια ευκαιρία για εξερεύνηση στη σχολική Άλγεβρα, δηλαδή εξερεύνηση που δεν εστιάζεται στα αριθμητικά αποτελέσματα αλλά σε μαθηματικές ιδέες που εμπλέκονται στην όλη διαδικασία.

Σε ποιους απευθύνεται

Η δραστηριότητα αυτή απευθύνεται τόσο στους μαθητές της Β΄Λυκείου , όσο και στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.

Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Function Probe.

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

Μαθησιακοί στόχοι

Οι μαθητές, συχνά ασυναίσθητα και χωρίς βαθύτερη κατανόηση για το τι κάνουν, κατασκευάζουν ισοδύναμες εξισώσεις μετασχηματίζοντας μια δοθείσα εξίσωση κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσής της. Οι κανόνες για τον «χειρισμό» των εξισώσεων προσφέρονται σαν τα μέσα για παραγωγή μιας σειράς ισοδυνάμων εξισώσεων. Σε μερικές όμως περιπτώσεις χειρισμού μιας εξίσωσης –όπως η ύψωση σε δύναμη και των δύο μελών μιας εξίσωσης - κατά τις οποίες δεν προκύπτει ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση, οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Με την εκτέλεση αυτής της δραστηριότητας αναμένεται από τους μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν ως λύση μιας εξίσωσης την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με το χ΄χ.
- Να κατασκευάζουν ισοδύναμες εξισώσεις.

- Να εκτιμούν αν μια εξίσωση έχει και πόσες λύσεις.
- Να κατανοήσουν ότι κάθε μετασχηματισμός μιας εξίσωσης δεν παράγει κατανάγκη ισοδύναμη εξίσωση.

Παιδαγωγικοί στόχοι

Με την βοήθεια του προτεινόμενου σεναρίου αναμένεται οι μαθητές να συνδέσουν διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών και να αποκτήσουν ερμηνευτικές δυνατότητες. Η ανάπτυξη της ικανότητας να εργάζονται οι μαθητές - κατά την αντιμετώπιση μιας κατάστασης προβληματισμού - σε διαφορετικά πλαίσια αναπαράστασης αυτής (αριθμητικό, γραφικό, αλγεβρικό ...) και να μεταβαίνουν από το ένα στο άλλο, συμβάλλει αποφασιστικά στην ενοποίηση της γνώσης.

Η αποτύπωση των (αλγεβρικών) βημάτων επίλυσης μιας εξίσωσης σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, το γραφικό, αναδεικνύει μια άλλη στρατηγική μέσω της οποίας θα γίνει συνολικά ορατή και σε βάθος η διαδικασία επίλυσης ξισώσεων. Αυτή η στρατηγική που χρησιμοποιεί διαδικασίες αλλαγής πλαισίου αναπαράστασης (από το συμβολικό επίπεδο στο γραφικό) μπορεί να προσφέρει αρχικά εξήγηση και στη συνέχεια να συμβάλλει στη γενίκευση και αφαίρεση (γιατί όλοι οι χειρισμοί δεν προσφέρουν ισοδύναμες εξισώσεις;).

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

Από την πλευρά του μαθητή

Για να μπορέσουν οι μαθητές να εργαστούν θα πρέπει:

- Να γνωρίζουν να λύνουν εξισώσεις δευτέρου και ανωτέρου βαθμού τόσο με τον τύπο της διακρίνουσας όσο και με παραγοντοποίηση.
- Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.
- Να γνωρίζουν τι παριστάνουν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων με τους άξονες.
- Να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργίες του παραθύρου του Γραφήματος του Function Probe, ώστε να κινούνται με ευκολία ανάμεσα στα μενού ή την εργαλειοθήκη ανάλογα με τις οδηγίες του διδάσκοντα ή του φύλλου εργασίας.

Από την πλευρά του καθηγητή

Ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει τον τρόπο χρήσης και της παιδαγωγικής αξιοποίησης των εργαλείων του λογισμικού **Function Probe.**.

Διδακτική διαχείριση της τάξης

Το μάθημα θα γίνει στο εργαστήριο Η/Υ. Οι μαθητές κάθονται ανά δύο ή τρεις σε κάθε υπολογιστή στους οποίους έχουν δοθεί φύλλα εργασίας κατάλληλα διαμορφωμένα. Ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να συνεργάζονται, να συζητούν για τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων τους, να αναλαμβάνουν εναλλασσόμενους ρόλους μέσα στην ομάδα τους, ώστε να συμμετέχουν ισότιμα, και να έχουν την ευκαιρία να εκφράζουν τις ιδέες τους. Παρακολουθεί την πρόοδο τους στην εκτέλεση των δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας και παρεμβαίνει, όπου και όταν κρίνει απαραίτητο, προσφέροντας την κατάλληλη βοήθεια, αφήνοντας ταυτόχρονα περιθώρια αυτενέργειας στους μαθητές.

Υλοποίηση

Οι οδηγίες για την προτεινόμενη διδακτική διαδικασία έχουν ενσωματωθεί στο φύλλο εργασίας που ακολουθεί.

Αρχικά δίνεται το φύλλο εργασίας στους μαθητές προκειμένου να υλοποιήσουν τα βήματά της εργασίας τους.

1. *Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων*:

   a) $f(x)=2x^4-x^3+2x-1$ *b)* $g(x)=x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}$

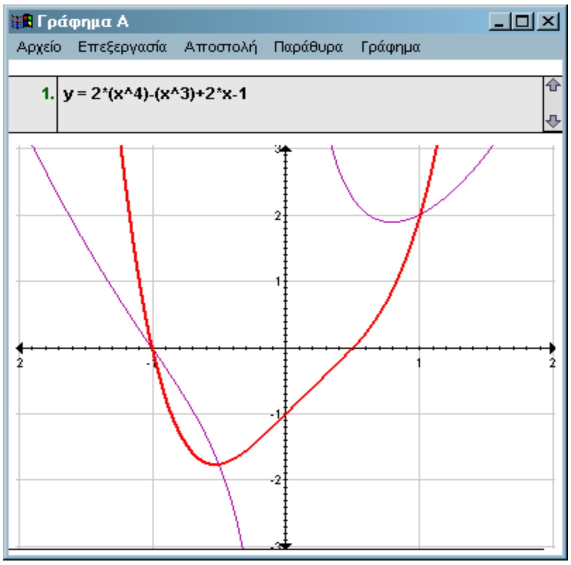
Αναμενόμενη απάντηση:

Η f(x) έχει πεδίο ορισμού όλο το R ως πολυωνυμική ενώ η g(x) έχει πεδίο ορισμού το R-{0,1/2}

2. *Στο παράθυρο γράφημα του FP κάντε τις γραφικές παραστάσεις των προηγούμενων συναρτήσεων.*

   Αναμενόμενη διαδικασία:

Οι μαθητές πληκτρολογούν στο παράθυρο γράφημα τις συναρτήσεις για να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις.



Εικόνα 1

3. *Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων με τον άξονα των xx΄.*

<u>Αναμενόμενη απάντηση:</u>

Για την πρώτη συνάρτηση τα σημεία είναι (−1,0) και (½ ,0) ενώ για τη δεύτερη είναι το (-1,0). Θα πρέπει να γίνει συζήτηση για την ερμηνεία των τετμημένων των σημείων αυτών.

4. *Να λύσετε τις εξισώσεις; f(x)=0 και g(x)=0*

<u>Αναμενόμενη απάντηση;</u>

Οι λύσεις της πρώτης είναι οι αριθμοί −1 και ½ , ενώ της δεύτερης είναι το −1.

Εδώ θα πρέπει να σχολιαστεί το γεγονός ότι ενώ προκύπτει από τις δύο αρχικές εξισώσεις τελικά η ίδια εξίσωση, δεν έχουμε τις ίδιες ρίζες.

Στο σημείο αυτό προτείνεται να γίνει εισαγωγή του ορισμού των ισοδύναμων εξισώσεων.

5. *Να συγκρίνετε τις λύσεις των εξισώσεων με τις τετμημένες των σημείων που βρήκατε στο ερώτημα 3. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.*

Αναμενόμενη απάντηση:

Οι λύσεις των εξισώσεων ταυτίζονται με τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων με τον x΄x.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε τη/τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης.

6. *Οι δύο εξισώσεις, του ερωτήματος 5,είναι ισοδύναμες;*

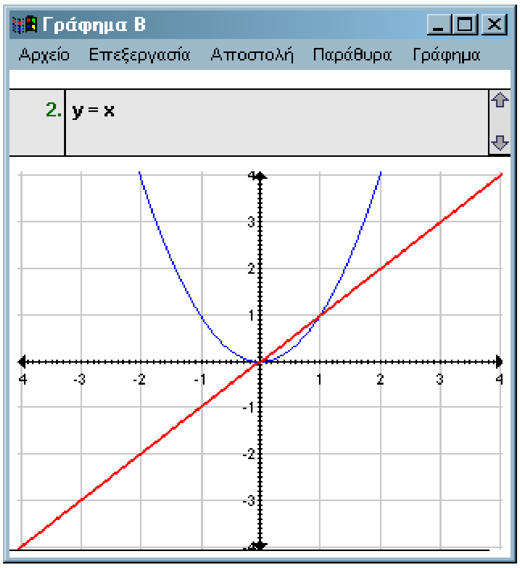
Αναμενόμενη απάντηση;

Δεν είναι γιατί δεν έχουν τις ίδιες λύσεις.

7. *Οι εξισώσεις $\chi^2=0$ και $\chi=0$ είναι ισοδύναμες; Διερευνήστε το θέμα μέσω γραφικών παραστάσεων*

Αναμενόμενη απάντηση:

Κάνοντας οι μαθητές τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων μπορούν να διαπιστώσουν ότι αυτές οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες.



Εικόνα 2

8. Η εξίσωση $\chi^3=0$ είναι ισοδύναμη με τις προηγούμενες εξισώσεις (του ερωτήματος 8);

Αναμενόμενη απάντηση:

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης διαπιστώνουν ότι είναι ισοδύναμη με τις προηγούμενες.

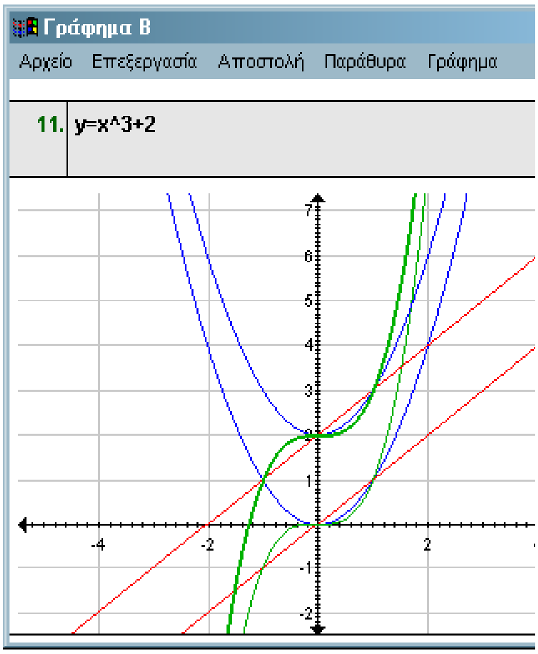
9. *Γενικότερα : Μπορεί μία πρωτοβάθμια, μία δευτεροβάθμια και μία τριτοβάθμια εξίσωση να είναι ισοδύναμες; Αν ναι, κάτω από ποιες συνθήκες συμβαίνει αυτό;*

   Οδηγία για τους μαθητές: Διερευνήστε το ερώτημα μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις: $\chi=0$ $\chi^2=0$ $\chi^3=0$ σε συναρτήσεις των αντίστοιχων μορφών $\alpha\chi=0$ $\alpha\chi^2=0$ $\alpha\chi^3=0$ και $\alpha\chi+\beta=0$ $\alpha\chi^2+\beta=0$ $\alpha\chi^3+\beta=0$

Αναμενόμενη απάντηση:

Οι εξισώσεις: $\chi=0$, $\chi^2=0$, $\chi^3=0$ είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις $\alpha\chi=0$, $\alpha\chi^2=0$, $\alpha\chi^3=0$, ενώ αντιστοίχως δεν είναι ισοδύναμες με τις $\alpha\chi+\beta=0$ $\alpha\chi^2+\beta=0$ $\alpha\chi^3+\beta=0$

Οι μαθητές θα πρέπει να οδηγηθούν σταδιακά σε πειραματισμούς με μετασχηματισμούς ('αυξομείωση', 'μετατόπιση') ώστε να διαπιστώσουν κάτω από ποιοι μετασχηματισμοί οδηγούν σε ισοδύναμες εξισώσεις.



Εικόνα 3

10. *Χωρίς να λύσετε τις εξισώσεις απαντήστε στα εξής:*

- *Οι εξισώσεις $\chi\eta\mu\chi=1$, $\eta\mu\chi=1$ και $(1/\chi)\eta\mu\chi=1$ είναι ισοδύναμες;*
- *Οι εξισώσεις $\chi\eta\mu\chi+1=0$ και $\eta\mu\chi+1=0$ είναι ισοδύναμες;*
- *Οι εξισώσεις $e^x=2$ και $e^{x-1}=2$ είναι ισοδύναμες;*

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας

Οδηγία: Διερευνήστε το ερώτημα κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς.

Αναμενόμενη διαδικασία;

Οι μαθητές εργάζονται ανάλογα με την διαδικασία του προηγουμένου ερωτήματος.

Φύλλο Εργασίας

Ονοματεπώνυμο :

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   a) $f(x)=2x^4-x^3+2x-1$ b) $g(x)=x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}$

2. Στο παράθυρο γράφημα του FP κάντε τις γραφικές παραστάσεις των προηγούμενων συναρτήσεων.

3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων με τον άξονα των xx΄.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις; f(x)=0 και g(x)=0

5. Να συγκρίνετε τις λύσεις των εξισώσεων με τις τετμημένες των σημείων που βρήκατε στο ερώτημα 3. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

6. *Οι δύο εξισώσεις, του ερωτήματος 5,είναι ισοδύναμες;*

7. Οι εξισώσεις $χ^2=0$ και $χ=0$ είναι ισοδύναμες; Διερευνήστε το θέμα μέσω γραφικών παραστάσεων

8. Η εξίσωση $χ^3=0$ είναι ισοδύναμη με τις προηγούμενες εξισώσεις;

9. Γενικότερα: Μπορεί μία πρωτοβάθμια, μία δευτεροβάθμια και μία τριτοβάθμια εξίσωση να είναι ισοδύναμες; Αν ναι, κάτω από ποιες συνθήκες συμβαίνει αυτό;

Οδηγία για τους μαθητές: Διερευνήστε το ερώτημα μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις: $χ=0$ $χ^2=0$ $χ^3=0$ σε συναρτήσεις των αντίστοιχων μορφών $αχ=0$ $αχ^2=0$ $αχ^3=0$ και $αχ+β=0$ $αχ^2+β=0$ $αχ^3+β=0$

10. Χωρίς να λύσετε τις εξισώσεις απαντήστε στα εξής:

- Οι εξισώσεις χημχ=1, ημχ=1 και (1/χ)ημχ=1 είναι ισοδύναμες;
- Οι εξισώσεις χημχ +1=0 και ημχ+1 =0 είναι ισοδύναμες;
- Οι εξισώσεις $e^x=2$ και $e^{x-1}=2$ είναι ισοδύναμες;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας

Οδηγία: Διερευνήστε το ερώτημα κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς.

Μελέτη της Εκθετικής Συνάρτησης

Σύντομη περιγραφή του σεναρίου.

α) Η βασική ιδέα του σεναρίου:

Το αναλυτικό πρόγραμμα της Β΄ και της Γ΄ Λυκείου απαιτεί, μετά την διδασκαλία της εν λόγω ενότητας, οι μαθητές να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης και να μπορούν χαράζουν τη γραφική παράσταση αυτής.

Η διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας με παραδοσιακά μέσα (πίνακας & κιμωλία, χαρτί & μολύβι) είναι χρονοβόρα και παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Τουναντίον, η διδασκαλία της με τη βοήθεια δυναμικών λογισμικών γίνεται πιο εύκολη, αφού τα δυναμικά λογισμικά παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες κατασκευής πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία θα τους βοηθήσουν να ανακαλύψουν τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης και να διατυπώσουν εικασίες σχετικά με τον τύπο της παραγώγου της και τη μορφή της γραφικής παράστασης αυτής.

β) Σε ποιους απευθύνεται:

Το πρώτο μέρος του σεναρίου αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας, ενώ το δεύτερο μέρος του απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.

γ) Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία:

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό «The geometer's Sketchpad», διότι παρέχει στους μαθητές δυνατότητες κατασκευής πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων.

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου.

α) Μαθησιακοί στόχοι:

Μετά την ολοκλήρωση όλων των δραστηριοτήτων του σεναρίου αναμένεται οι μαθητές να μπορούν να χαράζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ για οποιαδήποτε τιμή του *α,* με $0<\alpha\neq 1$, και να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες αυτής. Να γνωρίζουν δηλαδή ότι:

- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$ και η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο A(0,1) για όλες τις τιμές του α,
- Αν α>1, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \ ,$$

ενώ, αν 0<α<1, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0,$$

- $\left(\alpha^x\right)' = k\cdot\alpha^x$, όπου $k = \ln\alpha$
- $\left(\alpha^x\right)' = \alpha^x \Leftrightarrow \alpha = e$

β) Παιδαγωγικοί στόχοι:

Ο διδακτικός σχεδιασμός του σεναρίου έγινε με κυρίαρχο στόχο την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών, την ενεργοποίηση τους και την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες οι οποίες θα συμβάλλουν στην επίτευξη των επιδιωκόμενων μαθησιακών στόχων. Η μαθησιακή διαδικασία στο παράδειγμα μας καθοδηγείται και ελέγχεται από τον διδάσκοντα, ο οποίος έχει σχεδιάσει κατάλληλα τα αρχεία που θα χειριστούν ανά δύο ή τρεις οι μαθητές, ενθαρρύνοντας τους να εκτελούν κάθε φορά τους κατάλληλους πειραματισμούς, να παρατηρούν, να εικάζουν και να διατυπώνουν κανόνες, γενικεύοντας τις παρατηρήσεις τους. Ο διδάσκων ενισχύει τις προσπάθειες των μαθητών, παρέχοντας βοήθεια εκεί που είναι απαραίτητη, αρκούμενος σε κατάλληλες ερωτήσεις και επισημάνσεις.

Στην πορεία κατασκευής της νέας γνώσης σημαντικό ρόλο παίζει και το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό, το οποίο συμβάλλει στη δημιουργία ευνοϊκών συνθηκών για πειραματισμό, εξερεύνηση και παρατήρηση, με στόχο τη δημιουργία, επαλήθευση ή απόρριψη εικασιών και κοινωνική διαπραγμάτευση-αλληλεπίδραση.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες:

α) Από την πλευρά του μαθητή:

Για να μπορέσουν οι μαθητές να εργαστούν απρόσκοπτα και να συμπληρώσουν με επιτυχία το φύλλο εργασίας θα πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες:

- της γνησίως αύξουσας και της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης,

- του ορίου συνάρτησης στο $-\infty$ και στο $+\infty$,
- της κυρτής συνάρτησης και
- της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο.

β) Από την πλευρά του καθηγητή:

Ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει τον τρόπο χρήσης των εργαλείων του λογισμικού «The Geometer's Sketchpad».

Διδακτική διαχείριση της τάξης:

Ένας από τους στόχους του σεναρίου είναι η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος εμπλουτισμένου με τις νέες τεχνολογίες, προκειμένου να προωθήσει τη μάθηση μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, πειραματισμού, δημιουργίας, έκφρασης και επικοινωνίας. Για το σκοπό αυτό η μέθοδος διδακτικής που θα εφαρμόσουμε είναι αυτή της συνεργατικής μάθησης με κύριο εργαλείο τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, της οποίας τα χαρακτηριστικά είναι κοινά σε όλα αυτού του είδους τα διερευνητικά σενάρια. Στο πλαίσιο αυτό προτείνεται ως χώρος διδασκαλίας να χρησιμοποιηθεί το εργαστήριο των ηλεκτρονικών υπολογιστών όπου οι μαθητές, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες (2-3 μαθητές), δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή αναλαμβάνοντας διαφορετικούς ρόλους ο καθένας (πληκτρολόγηση-διαχείριση ποντικιού, τήρηση σημειώσεων στο τετράδιο ή το φύλλο εργασίας), ρόλοι οι οποίοι εναλλάσσονται ανάλογα με τις συμφωνίες που έχουν γίνει. Συζητούν μεταξύ τους για το πρόβλημα, κάνουν υποθέσεις, πειραματίζονται με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία, και επαναδιαπραγματεύονται τους στόχους τους ανάλογα με την πορεία της εργασίας τους.

Στο μαθησιακό αυτό περιβάλλον δεν καταργείται η χρήση των παραδοσιακών μέσων διδασκαλίας και εργασίας των μαθητών. Ο καθηγητής χρησιμοποιεί τον πίνακα όταν απευθύνεται σε όλη την τάξη, οι μαθητές συμβουλεύονται το βιβλίο τους, όταν το χρειάζονται και κρατούν σημειώσεις στο τετράδιό τους για την πορεία της εργασίας τους.

Σε αυτό το πλαίσιο ο καθηγητής αναλαμβάνει το ρόλο του συνερευνητή και του βοηθού των προσπαθειών των μαθητών. Απευθύνεται άλλοτε σε όλες τις ομάδες και άλλοτε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διερεύνησης. Οι ερωτήσεις του θα πρέπει να είναι ανοικτές, ώστε να ενθαρρύνουν τον πειραματισμό αφήνοντας στους μαθητές την πρωτοβουλία των κινήσεων και περιθώρια για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων.

Υλοποίηση:

α) Προετοιμασία:

Ο διδάσκων θα έχει δημιουργήσει από πριν το κατάλληλο αρχείο με το Geometer's Sketchpad, καθώς επίσης και ένα φύλλο εργασίας για τους μαθητές. Τα σχέδια που θα υπάρχουν στο φύλλο εργασίας θα είναι τα ίδια με αυτά που θα φαίνονται και στο αρχείο.

Το μάθημα, όπως προαναφέραμε, θα γίνει στο εργαστήριο των ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου από πριν θα πρέπει να έχει προετοιμαστεί κατάλληλα. Θα πρέπει δηλαδή το αρχείο να έχει περαστεί από πριν στο δίσκο κάθε υπολογιστή και να είναι ανοιχτό, ούτως ώστε να αρχίσει το μάθημα χωρίς καθυστερήσεις.

Οι μαθητές δεν χρειάζεται να γνωρίζουν τίποτε περισσότερο από ό,τι θεωρείται προϋπάρχουσα γνώση. Οι οδηγίες που θα υπάρχουν στο φύλλο εργασίας, θα πρέπει να είναι προσεχτικά μελετημένες, ώστε να είναι κατανοητά και σαφή όλα όσα ζητάμε από τους μαθητές να κάνουν και να μην απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις του υπολογιστή ή του λογισμικού. Επίσης ένα αρκετά σημαντικό στοιχείο, όσον αφορά το αρχείο, είναι ότι πρέπει να περιέχει ό,τι χρειάζεται για την σωστή διεξαγωγή του μαθήματος, αλλά και συγχρόνως να είναι όσο το δυνατόν λιτό, ώστε να μην αποσπάται η προσοχή του μαθητή από την εικόνα.

β) Πορεία διεξαγωγής του σεναρίου:

1η Δραστηριότητα (Απευθύνεται στους μαθητές της Β' Λυκείου):

- Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας ακολουθήσαμε με τη σειρά τα ακόλουθα βήματα:

  α) Κατασκευάσαμε έναν μεταβολέα για τη βάση α της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$.

  β) Επιλέξαμε τυχαίο σημείο x του άξονα $x'x$ και υπολογίσαμε την τετμημένη του.

  γ) Υπολογίσαμε για τη συγκεκριμένη τιμή του x την τιμή της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ και απεικονίσαμε το ζεύγος $(x, f(x))$ στο σημείο $A(x, f(x))$, το οποίο εφοδιάσαμε με την εντολή σχεδίαση ίχνους.

  δ) Χαράξαμε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $A(x, f(x))$, για να πάρουμε έτσι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$,την οποία εφοδιάσαμε με την εντολή εμφάνιση ίχνους και τέλος

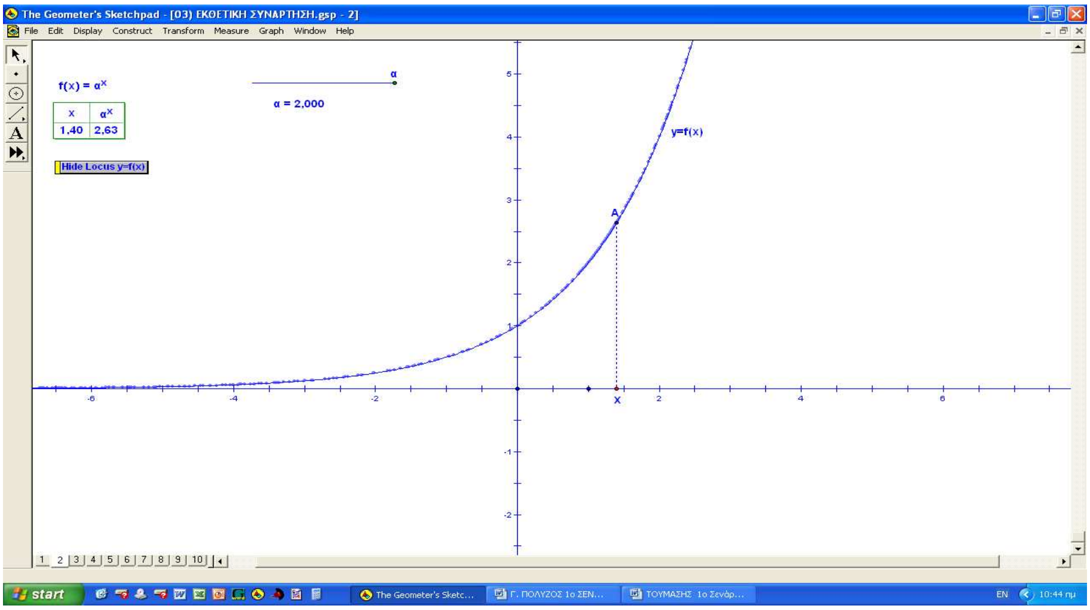
  ε) Δημιουργήσαμε ένα εικονίδιο εμφάνισης και απόκρυψης του παραπάνω γεωμετρικού τόπου.

- Κατά την εκτέλεση της συγκεκριμένης δραστηριότητας ζητείται από τους μαθητές να ακολουθήσουν με τη σειρά τα ακόλουθα βήματα:

α) Να επιλέξουν τη βάση της εκθετικής συνάρτησης που θέλουν να μελετήσουν, μετακινώντας κατάλληλα το κινητό άκρο του μεταβολέα α.

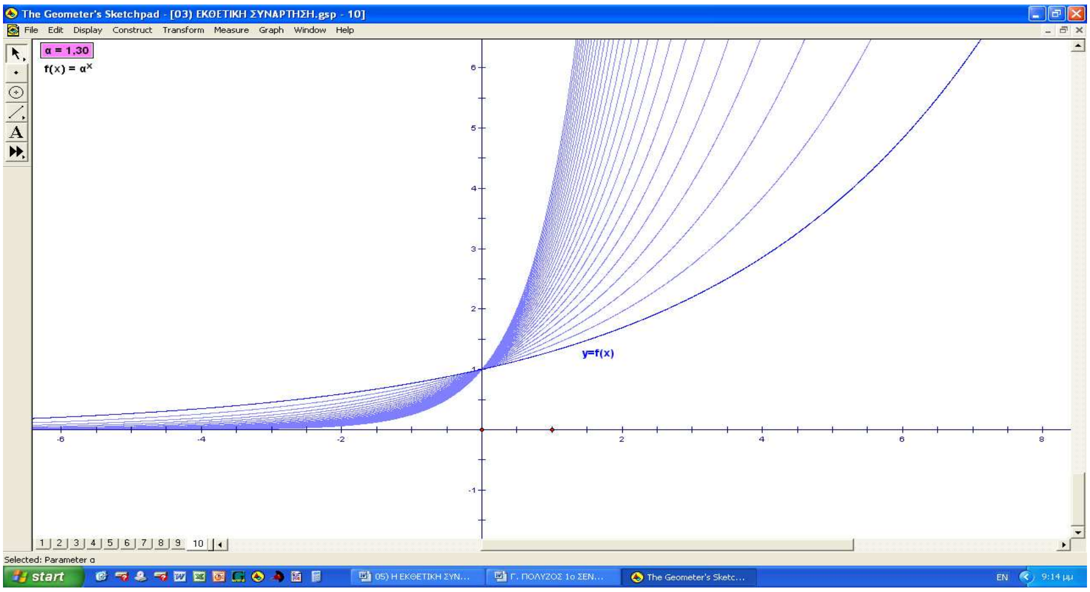
β) Να μετακινήσουν από τα αριστερά προς τα δεξιά το σημείο x του άξονα $x'x$, με σκοπό να βρουν τις τιμές της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ και να εμφανίσουν το ίχνος του σημείου $A\big(x, f(x)\big)$ της γραφικής παράστασης αυτής.

γ) Να εμφανίσουν το γεωμετρικό τόπο του σημείου $A\big(x, f(x)\big)$, για να πάρουν έτσι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ (*Εικόνα 1)*

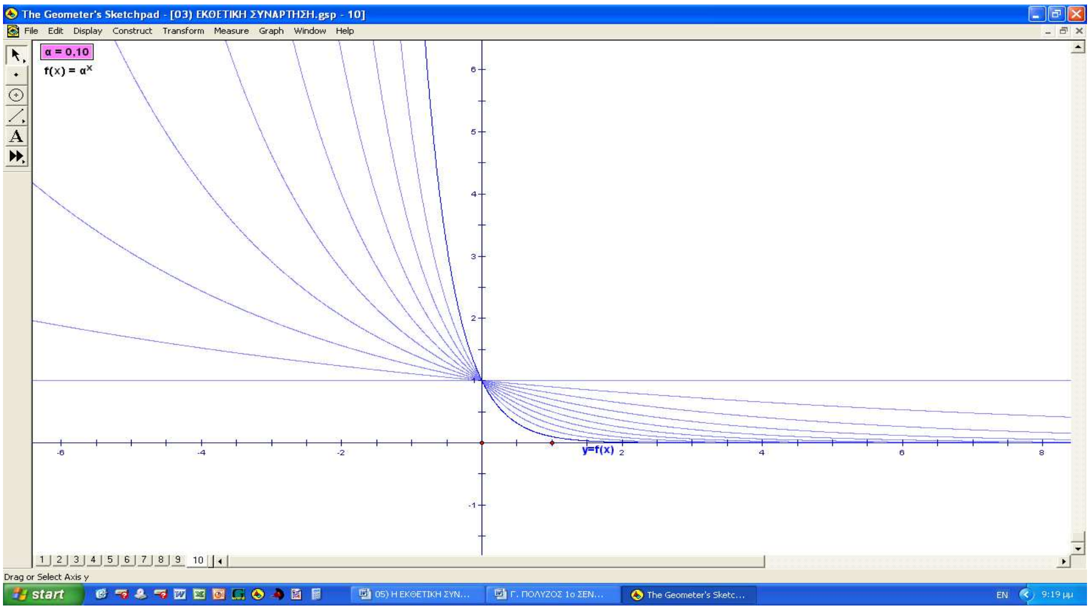


Εικόνα 1

δ) Να αυξομειώσουν τις τιμές του α με σκοπό να πάρουν τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, αρχικά για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (1, +\infty)$ (*Εικόνα 2.*) και έπειτα για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (0, 1)$ (*Εικόνα 3.*).



Εικόνα 2.



Εικόνα 3.

- Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίσουν εποπτικά τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, για τις διάφορες τιμές του α, με $0<\alpha\neq 1$, για να απαντήσουν στη συνέχεια με επιτυχία στα ερωτήματα της 1^{ης} δραστηριότητας του φύλλου εργασίας.

2^{η} Δραστηριότητα (Απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου):

- Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας, που είναι συνέχεια της 1ης δραστηριότητας, ακολουθήσαμε επιπλέον τα ακόλουθα βήματα:

  α) Κατασκευάσαμε έναν μεταβολέα με αλγεβρική τιμή *k.*

  β) Υπολογίσαμε την τιμή της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ για την τετμημένη x του μεταβλητού σημείου του άξονα $x'x$ και για μια "απειροστή" τιμή του h (εδώ πήραμε $h=0,0001$) και βρήκαμε έτσι κατά προσέγγιση την τιμή $f'(x)$ της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$. Στη συνέχεια, απεικονίσαμε το ζεύγος $\left(x, f'(x)\right)$ στο σημείο $A'\left(x, f'(x)\right)$, το οποίο εφοδιάσαμε με την εντολή σχεδίαση ίχνους.

  γ) Υπολογίσαμε την τιμή της συνάρτησης $y=k\cdot f(x)$ για την τετμημένη x του μεταβλητού σημείου του άξονα $x'x$ και απεικονίσαμε το ζεύγος $\left(x,\ k\cdot f(x)\right)$ στο σημείο $A''\left(x,\ k\cdot f(x)\right)$, το οποίο εφοδιάσαμε με την εντολή σχεδίαση ίχνους.

  δ) Χαράξαμε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $A'\left(x, f'(x)\right)$ και του σημείου $A''\left(x,\ k\cdot f(x)\right)$ με σκοπό να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=f'(x)$ και $y=k\cdot f(x)$, τις οποίες εφοδιάσαμε παράλληλα με την εντολή εμφάνιση ίχνους και τέλος

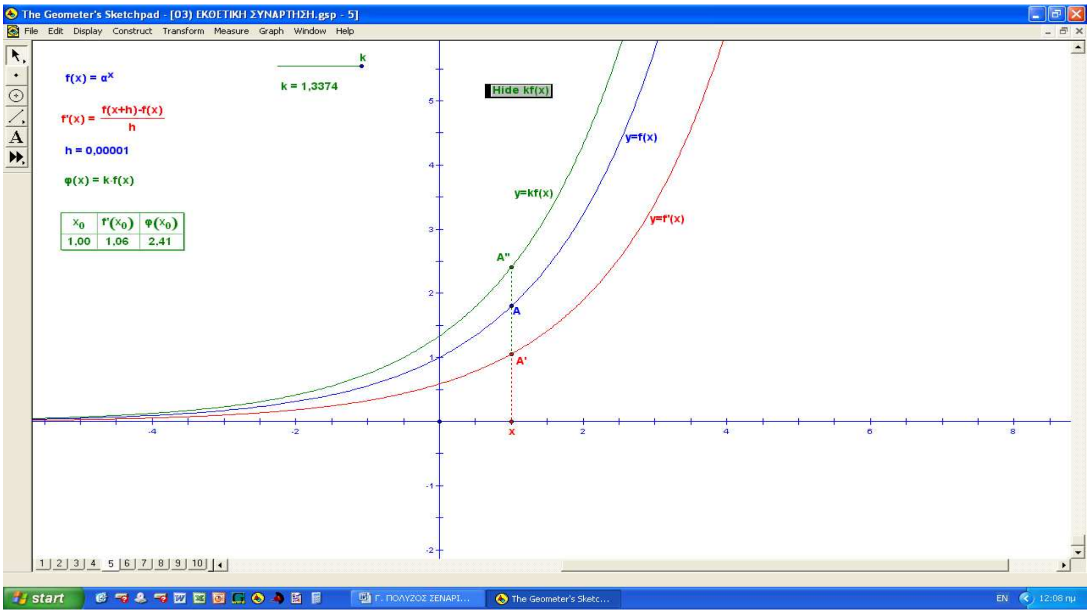
  ε) Δημιουργήσαμε δύο εικονίδια εμφάνισης και απόκρυψης των παραπάνω γεωμετρικών τόπων.

- Κατά την εκτέλεση της συγκεκριμένης δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να ακολουθήσουν με τη σειρά τα ακόλουθα βήματα:

  α) Να χαράξουν τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ για μια τυχαία τιμή του α (βλ. 1η δραστηριότητα).

  β) Να μετακινήσουν από τα αριστερά προς τα δεξιά το σημείο x του άξονα $x'x$, με σκοπό να πάρουν τα ίχνη $A'\left(x, f'(x)\right)$, και $A''\left(x,\ k\cdot f(x)\right)$, των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=f'(x)$ και $y=k\cdot f(x)$.

γ) Να εμφανίσουν το γεωμετρικό τόπο του σημείου $A'\left(x, f'(x)\right)$, και του σημείου $A''\left(x, k\cdot f(x)\right)$, για να έχουν έτσι στην επιφάνεια εργασίας του Η/Υ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=f'(x)$ και $y=k\cdot f(x)$ (*Εικόνα 4.*).



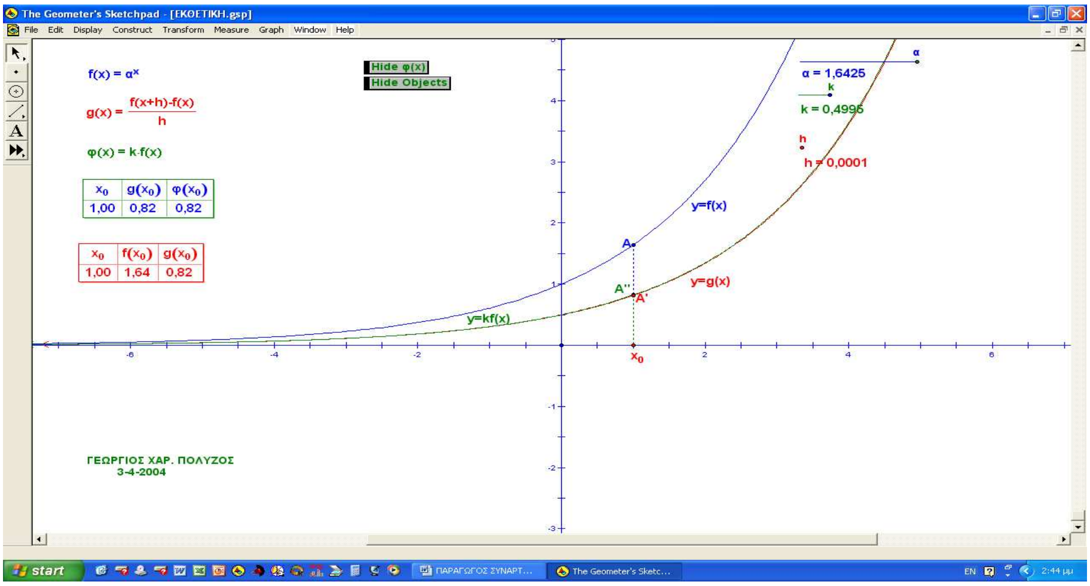
Εικόνα 4.

- Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές, <u>αυξομειώνοντας</u> τις τιμές της παραμέτρου *k*, να διαπιστώσουν ότι:

α) Υπάρχει τιμή του *k* για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=f'(x)$ και $y=k\cdot f(x)$ συμπίπτουν.(*Εικόνα 5.*). Θα οδηγηθούν, έτσι στη διατύπωση της εικασίας ότι:

$$\left(\alpha^x\right)'=k\cdot\alpha^x$$

την οποία και θα κληθούν να αποδείξουν στο φύλλο εργασίας με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης.

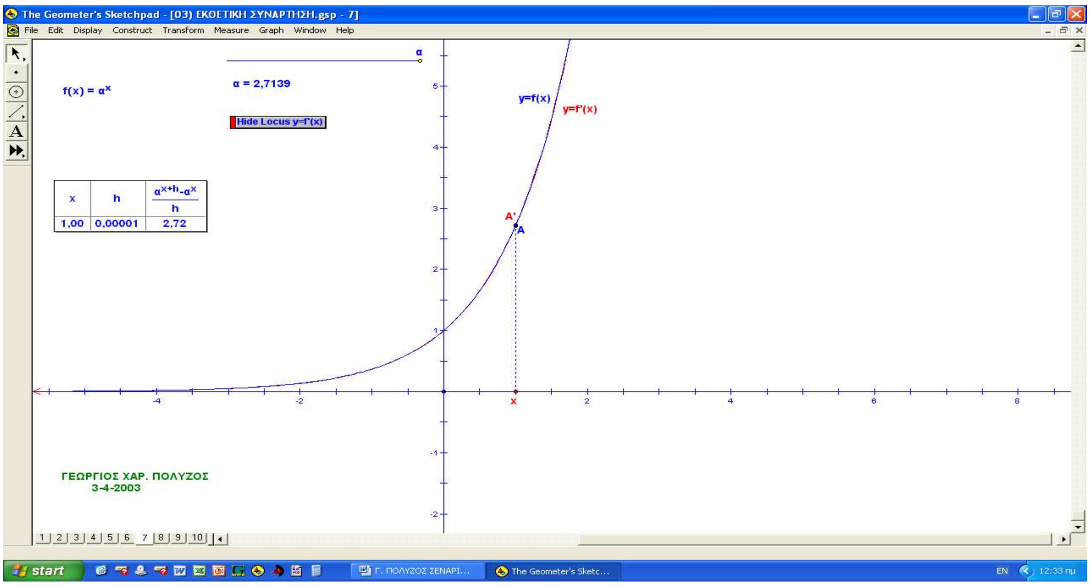


Εικόνα 5.

β) Υπάρχει τιμή του α για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\,'$ και f συμπίπτουν. (*Εικόνα 6.*) Θα οδηγηθούν έτσι στη διατύπωση της εικασίας ότι:

$$\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x} \Leftrightarrow \alpha = e,$$

την οποία θα κληθούν και να αποδείξουν στο φύλλο εργασίας.



Εικόνα 6.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………………………………..

Τάξη:...............

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1η Δραστηριότητα: (Απευθύνεται στους μαθητές της Β' Λυκείου)

Ακολουθήστε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα και στη συνέχεια σημειώστε τη σωστή απάντηση ή συμπληρώστε τα κενά στα ερωτήματα που ακολουθούν:

α) Μετακινήστε κατάλληλα το δεξιό άκρο του μεταβολέα του *α*, ούτως ώστε η τιμή του *α* να γίνει ίση με τη βάση της εκθετικής συνάρτησης που θέλετε να μελετήσετε.

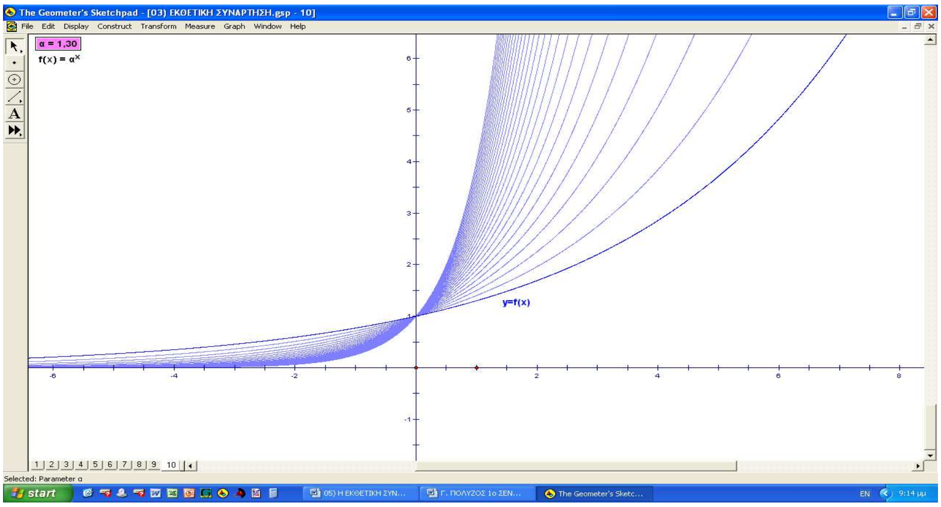
β) Μετακινήστε από τα αριστερά προς τα δεξιά το σημείο *x* του άξονα *x΄x*, και παρατηρήστε προσεκτικά τις τιμές της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ και το ίχνος του σημείου $A(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης αυτής.

γ) Εμφανίστε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $A(x, f(x))$ για να πάρετε έτσι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ και τέλος

δ) Μετακινήστε κατάλληλα το δεξιό άκρο του μεταβολέα του *α* για να πάρετε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, αρχικά για τις διάφορες τιμές του *α,* με $\alpha>1$ και έπειτα για τις διάφορες τιμές του α*,* με $0<\alpha<1$.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Α΄ Περίπτωση: $\alpha>1$.



Εικόνα 1

1. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$, είναι:

α) γνησίως αύξουσα.

β) γνησίως φθίνουσα.

2. Αν $\alpha>1$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

α) Αν $x_1<x_2$, τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$

β) Αν $x_1<x_2$, τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$

3. Αν $1<\alpha<\beta$, τότε:

α) Για $x>0$, ισχύει: α$_1$) $\alpha^x>\beta^x$ α$_2$) $\alpha^x<\beta^x$

β) Για $x<0$, ισχύει: β$_1$) $\alpha^x>\beta^x$, β$_2$) $\alpha^x<\beta^x$

4. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$ είναι: α) κυρτή, β) κοίλη.

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$, περνάει για όλες τις τιμές του *α* από το σταθερό σημείο $A(\ldots,\ldots)$.

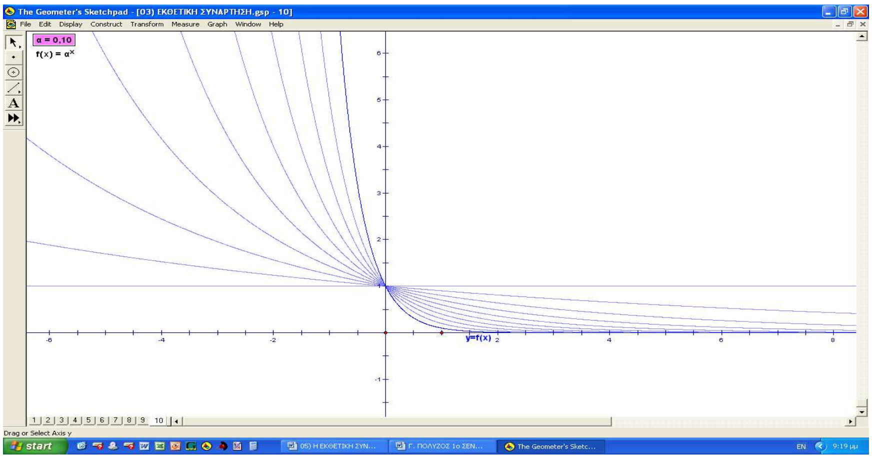
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=\ldots\ldots$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=\ldots.$

7. Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις και ανισώσεις:

α) $3^x = 3^2$, $2^{x^2-5} = 2^4$, $2^x = \frac{1}{4}$, $2^x = 3^x$

β) $2^x \geq 2^2$, $3^{2x} < 9$ $2^{x^2-x} \geq 1$ $3^x > 2^x$

Β΄ Περίπτωση: $0 < \alpha < 1$



Εικόνα 2

8. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι:

α) γνησίως αύξουσα.

β) γνησίως φθίνουσα.

9. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

α) Αν $x_1 < x_2$, τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$

β) Αν $x_1 < x_2$, τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$

10. Αν $0 < \alpha < \beta < 1$, τότε :

α) Για $x > 0$, ισχύει: α$_1$) $\alpha^x > \beta^x$ α$_2$) $\alpha^x < \beta^x$

β) Για $x < 0$, ισχύει: β$_1$) $\alpha^x > \beta^x$, β$_2$) $\alpha^x < \beta^x$

11. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$, είναι: α) κυρτή, β) κοίλη.

12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$, περνάει για όλες τις τιμές του *α* από το σταθερό σημείο $A(....,....)$.

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = ...$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = ...$

14. Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις και ανισώσεις:

α) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$, $0{,}5^{x^2-1}=0{,}5^3$,

β) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 4$, $0{,}5^x<0{,}3^x$

2η Δραστηριότητα (Απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου):

Μετακινήστε κατάλληλα το δεξιό άκρο του μεταβολέα του ***α***, ούτως ώστε η τιμή του ***α*** να γίνει ίση με **2** . Στη συνέχεια αυξομειώστε κατάλληλα τις τιμές του ***k,*** μέχρις ότου γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=k\cdot f(x)$ ταυτιστεί με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f'(x)$ και ακολούθως συμπληρώστε το πρώτο κενό του ερωτήματος 1α. Κάντε το ίδιο για ***α=5***, για ***α=0,5,*** για ***α=0,2*** και γενικά για τυχαίο ***α>0*** και στη συνέχεια συμπληρώστε τα υπόλοιπα κενά του πρώτου ερωτήματος και απαντήστε στο δεύτερο ερώτημα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. **α)** Αν α=2, τότε: $\left(2^x\right)'=........\cdot 2^x$

Αν α=5, τότε: $\left(5^x\right)'=........\cdot 5^x$,

Αν α=0,5 τότε: $\left(0{,}5^x\right)'=........\cdot 0{,}5^x$,

Αν α=0,2, τότε: $\left(0{,}2^x\right)'=........\cdot 0{,}2^x$

β) Για κάθε τιμή του α η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ είναι πολλαπλάσιο της συνάρτησης**......................,** δηλαδή ισχύει:

$$\left(\alpha^x\right)'=.k\cdot........$$

2. Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, δηλαδή με τη βοήθεια του τύπου

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha^x\right)'=k\cdot\alpha^x,\text{ όπου } k=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^h-1}{h}$$

3η Δραστηριότητα (Απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου):

Μετακινήστε κατάλληλα το δεξιό άκρο του μεταβολέα του ***α***, μέχρις ότου γραφική παράσταση της συνάρτησης *y=f΄(x)* ταυτιστεί με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *y=f(x)*. Ακολούθως, συμπληρώστε τα κενά στο πρώτο από τα παρακάτω δύο ερωτήματα και στη συνέχεια απαντήστε στο δεύτερο ερώτημα:

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ συμπίπτει με αυτή μόνο όταν α=……..,

δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία: $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x \Leftrightarrow \alpha=\ldots\ldots$

2. Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, δηλαδή με τη βοήθεια του τύπου $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x \Leftrightarrow \alpha=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

θεωρώντας ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha^h-1}{h}=1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^h-1}{h}\cong 1$, για πολύ μικρά h.

Οι Αιγύπτιοι και το εμβαδόν των χωραφιών

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Η Βασική ιδέα της δραστηριότητας.

Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου μπορεί να υπολογιστεί αν το τετράπλευρο χωριστεί σε δύο τρίγωνα. Η διαδικασία αυτή, ενώ θεωρητικά είναι απλή, στην πράξη , όταν πρόκειται για μεγάλες επιφάνειες, είναι ανεφάρμοστη αφού απαιτεί πολλές και επίπονες μετρήσεις. Ένας σχετικά απλός τρόπος υπολογισμού του εμβαδού ενός τετραπλεύρου είναι αυτός που απαιτεί μετρήσεις των διαγωνίων και της μεταξύ τους γωνίας. Αν δ_1, δ_2 τα μήκη των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου τότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $E=1/2\ \delta_1.\delta_2 ημω$ όπου ω η γωνία των διαγωνίων. Οι μαθητές της δεύτερης τάξης του Λυκείου διδάσκονται τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις αυτών, έχουν επομένως τη δυνατότητα να επεξεργαστούν προβλήματα τα οποία απαιτούν αναγνώριση μιας ημιτονοειδούς μεταβολής.

Από την άλλη ο τύπος που μας δίνει το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου συναρτήσει των διαγωνίων και της γωνίας τους μπορεί να αποτελέσει έναν πυρήνα διερεύνησης ο οποίος παρουσιάζει και ιστορικό ενδιαφέρον. Ο τύπος αυτός λέγεται ότι χρησιμοποιήθηκε από τους λογιστές των γαιοκτημόνων χωρίς το ημίτονο της γωνίας με αποτέλεσμα το εμβαδόν των τετράπλευρων χωραφιών να προκύπτει μεγαλύτερο από το πραγματικό και οι ακτήμονες καλλιεργητές να αποδίδουν μεγαλύτερο ποσοστό της εσοδείας στον ιδιοκτήτη.

Σε ποιους απευθύνεται.

- Η δραστηριότητα απευθύνεται σε μαθητές της Β΄ τάξης του Λυκείου.
- Τα γνωστικά αντικείμενα τα οποία καλύπτει είναι το εμβαδόν πολυγώνων, από τον χώρο της Γεωμετρίας και τις γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων από της Άλγεβρα.
- Ο εκτιμώμενος χρόνος για την υλοποίηση είναι 2-3 διδακτικές ώρες.

Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιηθεί τόσο το λογισμικό The Geometers sketchpad (gsp) όσο και το function probe.

ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Διδακτικοί- Μαθησιακοί στόχοι

- Ως προς τα Μαθηματικά
    1. Οι μαθητές θα μάθουν να *εντοπίζουν* την εξίσωση μιας ημιτονοειδούς καμπύλης από τη γραφική της παράσταση αλλά και από τις τιμές των ζευγών σε έναν πίνακα τιμών.
    2. Θα δημιουργήσουν τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου συναρτήσει των διαγωνίων και της γωνίας που αυτές σχηματίζουν.
- Ως προς τις γνωστικές δεξιότητες.
    1. Θα *ερμηνεύσουν* αριθμητικές τιμές μέσα στο πλαίσιο των τριγωνομετρικών μεταβολών.
    2. Θα *συνδέσουν* την ημιτονοειδή συνάρτηση με τις μεταβολές που υφίσταται το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου όταν μεταβάλλεται η γωνία των διαγωνίων του.
    3. Θα γενικεύσουν τοπικά συμπεράσματα και θα αποδείξουν τα συμπεράσματα.
- Ως προς την παιδαγωγική αξία.
    1. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ένα σύγχρονο, κοινωνικά καταξιωμένο εργαλείο με το οποίο θα *επιταχύνουν* τις υπολογιστικές δραστηριότητες.
    2. Θα εμπλακούν σε *διερευνητικές* δραστηριότητες και θα *επικοινωνήσουν* τα αποτελέσματά τους.
    3. Θα *δημιουργήσουν ένα μοντέλο* μιας κατάστασης προβλήματος και θα μελετήσουν το μοντέλο με τα υπολογιστικά εργαλεία που διαθέτουν.

Η θεωρία μάθησης μέσα στα πλαίσια της οποίας θα γίνει η υλοποίηση.

Το κατασκευαστικό μοντέλο (Κονστρουκτιβισμός) θα αποτελέσει το πλαίσιο μέσα στο οποία θα δομηθεί ο διδακτικός σχεδιασμός του σεναρίου.

Ο μαθητής εκλαμβάνεται αφενός ως ένα εργαστήριο κατασκευής της γνώσης και αφετέρου μέρος μιας ομάδας με την οποία επικοινωνεί και διαπραγματεύεται. Αυτό σημαίνει ότι τόσο το ατομικό στοιχείο όσο και η κοινωνική υπόσταση του λαμβάνονται υπ όψιν και επομένως συντίθεται ο ατομικός και ο κοινωνικός Κονστρουκτιβισμός.

Συγκεκριμένα το κοινό φύλλο εργασίας και η κοινή οθόνη αποτελούν τον πυρήνα επικοινωνίας στην ομάδα και προσδιορίζουν την κοινωνική συνιστώσα. Ακόμη ο τρόπος με τον οποίο ο διδάσκων επικοινωνεί προσωπικά με τον καθένα υπογραμμίζει την ατομική συνιστώσα.

Σύμφωνα με το κατασκευαστικό μοντέλο αφετηρία είναι συνήθως μία κατάσταση προβλήματος του οποίου η λύση δεν είναι υποχρεωτικά μονοσήμαντη και δεν διαφαίνεται από την αρχή. Καθώς ο μαθητής επιχειρεί να λύσει το πρόβλημα χρησιμοποιεί τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του αλλά κυρίως επινοεί συνθέσεις για να αντιμετωπίσει τα επιμέρους προβλήματα που προκύπτουν.

Ο διδάσκων ενισχύει την προσπάθεια των μαθητών χωρίς να παρέχει άμεση συνδρομή στην λύση του προβλήματος, αρκούμενος σε κατάλληλες ερωτήσεις και επισημάνσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές ως αφετηρία για την περαιτέρω ανάλυση της κατάστασης.

Στην υλοποίηση των κατασκευαστικών θεωριών μάθησης κρίσιμο ρόλο παίζουν τα διαθέσιμα εργαλεία. Οι δυνατότητες των εργαλείων, ιδιαίτερα οι αναπαραστασιακές, συμβάλουν στη δημιουργία ευνοϊκών συνθηκών για εξερεύνηση, δημιουργία και επαλήθευση ή απόρριψη εικασιών, επικοινωνία και αναστοχασμό όλων δηλαδή των δράσεων οι οποίες είναι απαραίτητες στην πορεία κατασκευής της νέας γνώσης.

Διάκριση ως προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.

Η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου μέσα από έναν πίνακα τιμών. Η ανάπτυξη της έννοιας γίνεται μέσα στα πλαίσια του μαθηματικού συμβολισμού και δεν αναδεικνύεται η χρήση της έννοιας στη διερεύνηση καταστάσεων προβλήματος.

Επιπλέον η μελέτη των εμβαδών στο σχολικό εγχειρίδιο εστιάζει περισσότερο στα εμβαδά των τριγώνων και περιέχει τον τύπο Ε =1/2 β.γ.ημΑ.

Η σύνδεση της ημιτονοειδούς συνάρτησης με τις μεταβολές του εμβαδού ενός τετραπλεύρου, στην παρούσα δραστηριότητα, παρακάμπτει τα στεγανά πλαίσια Άλγεβρας-Γεωμετρίας τα οποία είναι ακόμη πιο έντονα με την ύπαρξη διαφορετικών βιβλίων στο Λύκειο.

Ένα άλλο θέμα το οποίο προβάλλεται με την παρούσα δραστηριότητα είναι και αυτό της ταχύτητας με την οποία ένας μαθητής μπορεί να διαχειριστεί ένα μεγάλο πλήθος δεδομένων. Η χρήση του λογισμικού επιτρέπει την επιτάχυνση των ελέγχων των δεδομένων μετατρέποντας τη γραφική παράσταση μιας καμπύλης σε ένα δυναμικό όργανο ανίχνευσης της διάταξης σημείων για τα οποία υπάρχει ένδειξη τριγωνομετρικής συσχέτισης των συντεταγμένων τους.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

- Ως προς τα μαθηματικά.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν από τη Γεωμετρία τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει δύο πλευρών και της περιεχόμενης γωνίας τους. Από τον χώρο της Άλγεβρας θα πρέπει οι μαθητές να γνωρίζουν τη συνάρτηση f(χ)=α.ημχ, τη γραφικής της παράσταση καθώς και τις βασικές σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών τόξων, αντιθέτων και συμπληρωματικών.

- Ως προς τα εργαλεία.

Οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τις δυνατότητες του λογισμικού F.P και του gsp. Συγκεκριμένα, για το FP, θα πρέπει να γνωρίζουν την κατασκευή γραφικής παράστασης, την αλλαγή κλίμακας, την αποκοπή σημείων από το γράφημα και την αποστολή τους στον πίνακα τιμών. Για τον πίνακα τιμών θα πρέπει να γνωρίζουν τη συμπλήρωση στηλών και την αποστολή ζευγών αριθμών στο παράθυρο 'γράφημα'. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τη δυνατότητα συμπλήρωσης μιας επιπλέον στήλης με το πηλίκο των τιμών δύο άλλων. Για το gsp οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις δυνατότητες μέτρησης γωνίας και τις δυνατότητες κατασκευής τετραπλεύρου και μέτρησης του εμβαδού του.

- Ως προς τον χώρο υλοποίησης.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Κάθε ομάδα είναι εφοδιασμένη με ένα φύλλο εργασίας και ένα τετράδιο στο οποίο μπορεί να κρατά σημειώσεις ή να απαντά στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

Ο διδάσκων κινείται μεταξύ των ομάδων και συζητά, απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις και παρέχει τεχνικές συμβουλές στους μαθητές.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Πρώτη φάση

Στην αρχή ο διδάσκων επιχειρεί να κινητοποιήσει τους μαθητές επισημαίνοντας ότι η δραστηριότητα αυτή αναφέρεται σε ένα ιστορικό γεγονός το οποίο θα πρέπει να αποσαφηνιστεί με βάση τη μαθηματική επεξεργασία.

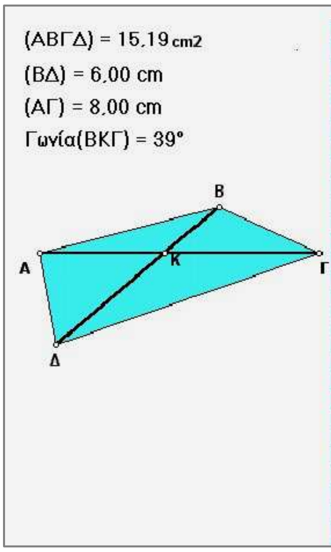
Οι μαθητές καλούνται να διαπραγματευτούν το πρόβλημα ώστε σε πρώτη φάση να επιλέξουν τα μεγέθη τα οποία θα θεωρήσουν σταθερά και αυτά τα οποία μεταβάλλονται. Μέσα από τη διαπραγμάτευση, η οποία στην αρχή θα στηριχτεί στο σχήμα των μαθητών που έχει κατασκευαστεί στο τετράδιο, θα γίνει αντιληπτό ότι κάθε φορά μελετάμε τη συμμεταβολή δύο μεγεθών, τα οποία οι μαθητές θα πρέπει να έχουν επιλέξει ως τα πλέον κατάλληλα για τη μελέτη του προβλήματος, και ότι το εμβαδόν μεταβάλλεται είτε συναρτήσει του μήκους μιας διαγωνίου είτε συναρτήσει της γωνίας των διαγωνίων.

Είναι φανερό ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα το ενδιαφέρον θα πρέπει να στραφεί στη μεταβολή του εμβαδού συναρτήσει της γωνίας των διαγωνίων του επειδή είναι το μόνο μεταβαλλόμενο μέγεθος το οποίο δεν ελάμβαναν υπ' όψιν οι γαιοκτήμονες.

Στη συνέχεια θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση για τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν τα λογισμικά των οποίων τη βασική χρήση θα πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές.

Η χρήση των λογισμικών θα μπορούσε να οδηγήσει στις παρακάτω δραστηριότητες.

1. Οι μαθητές κατασκευάζουν με το λογισμικό sketchpad ένα τετράπλευρο με διαγώνιες σταθερού μήκους π.χ 6 και 8 εκατοστών. Η κατασκευή θα μπορούσε να γίνει από τον διδάσκοντα ο οποίος να δώσει έτοιμο το αρχείο στους μαθητές. Η κατασκευή θα μπορούσε να υλοποιηθεί ως εξής:
    - Κατασκευάζεται ένας κύκλος με ακτίνα ένα τμήμα το οποίο στη συνέχεια αποκρύπτεται ώστε ο κύκλος να μην μπορεί να μεταβάλλεται.
    - Πάνω στον κύκλο επιλέγουμε ένα σημείο Α και βρίσκουμε το αντιδιαμετρικό του Α΄.
    - Αποκρύπτουμε τον κύκλο και κρατάμε στην οθόνη μόνο το τμήμα ΑΑ΄.
    - Επιλέγουμε πάνω στο ΑΑ΄ ένα τυχόν σημείο και με κέντρο το σημείο αυτό κατασκευάζουμε κύκλο με την ίδια διαδικασία όπως και τον προηγούμενο αλλά διαφορετική ακτίνα.
    - Ορίζουμε στον κύκλο τα σημεία Β και Β΄ αντιδιαμετρικά και αποκρύπτουμε τον κύκλο. Το τετράπλευρο ΑΒΑ΄Β΄ είναι ένα δυναμικό τετράπλευρο με διαγώνιες σταθερού μήκους και μεταβλητής γωνίας.
2. Οι μαθητές στη δεύτερη ερώτηση του φύλλου εργασίας αναγνωρίζουν τα ποσά τα οποία μεταβάλλονται και αυτά που παραμένουν σταθερά.
3. Στην επόμενη ερώτηση μετρούν τη γωνία των διαγωνίων, το εμβαδόν του τετραπλεύρου και κινούν τη μία κορυφή καταγράφοντας τα διάφορα ζεύγη τιμών για τα μεγέθη που μετρούν. Η οθόνη παρουσιάζει την εξής εικόνα (1):



Γωνία(ΒΚΓ)	(ΑΒΓΔ)
5,6	2,3
11,2	4,7
17,3	7,1
22,6	9,2
29,8	11,9
32,8	13,0
39,3	15,2
46,0	17,3
54,7	19,6
59,3	20,6
66,9	22,1
75,0	23,2
80,9	23,7
86,6	24,0
93,3	24,0
98,9	23,7
107,1	22,9
114,9	21,8
120,6	20,6
125,0	19,7
134,4	17,1
141,3	15,0
147,2	13,0
150,0	12,0
156,9	9,4
162,9	7,0
169,0	4,6

Εικόνα 1

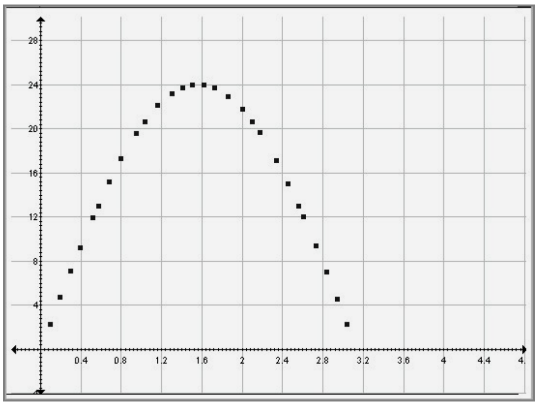
Εδώ οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές του εμβαδού παραπέμπει σε ημιτονοειδή μεταβολή.

Η εικασία αυτή ενισχύεται και με έναν άλλο τρόπο. Αν παρατηρήσουν τις τιμές του εμβαδού, για παραπληρωματικές γωνίες, αυτές είναι παραπλήσιες, οπότε προκύπτει η ανάγκη χρήσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Δεύτερη φάση

1. Στη συνέχεια οι μαθητές έχουν δυο δυνατότητες.

- μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ίδιο λογισμικό για να προβάλλουν τα σημεία σε άξονες.
- περνούν τα ζεύγη στον πίνακα του λογισμικού function probe και στη συνέχεια στον πίνακα γράφημα οπότε θα εμφανιστούν τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη (εικόνα 2).



Εικόνα 2

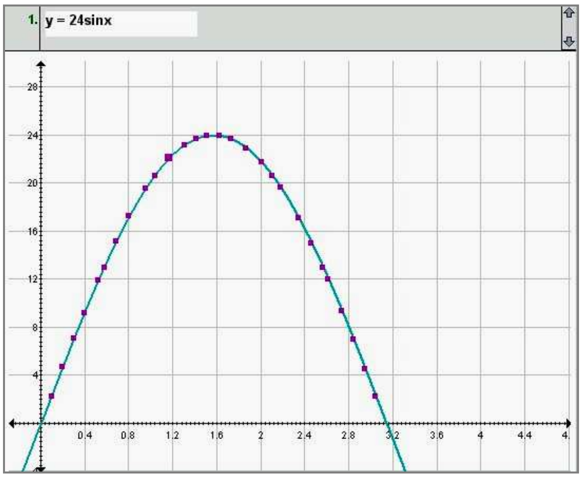
Εδώ πλέον ενισχύεται η εικασία για ημιτονοειδή μεταβολή των τιμών του εμβαδού αφού το μέγιστο εμβαδόν αντιστοιχεί σε γωνία 1,57rad (90 μοίρες).

Η καμπύλη πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία είναι σχετικά εύκολα αναγνωρίσιμη ως y=24ημx.

Η χρήση του function probe δίνει περισσότερες δυνατότητες στον μαθητή για να διερευνήσει γραφικές παραστάσεις και συναρτήσεις.

Παρατήρηση: Θα ήταν πολύ χρήσιμο, από διδακτική άποψη, να γίνει διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη για το αν υπάρχουν και άλλες γραφικές παραστάσεις οι οποίες θα μπορούσαν να περάσουν από όλα τα σημεία του πίνακα. Η παραβολή είναι ένα πιθανό μοντέλο συνάρτησης με παρόμοιο σχήμα και το function probe παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου και απόρριψης του μοντέλου αυτού.

2. Οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και η κατασκευή αυτή επιβεβαιώνει την εικασία αφού τα αρχικά σημεία ανήκουν πάνω στην καμπύλη.



Εικόνα 3

Η επιβεβαίωση της εικασίας είναι προφανής στην εικόνα 3.

Σημείωση:

Μία περισσότερο διερευνητική δραστηριότητα με τη χρήση του λογισμικού θα μπορούσε να είναι η εξής:

- Οι μαθητές κατασκευάζουν την καμπύλη ψ=ημχ
- και στη συνέχεια με τα κατάλληλα εργαλεία επιχειρούν να προσαρμόσουν τη γραφική παράσταση πάνω στα συγκεκριμένα σημεία.

Τρίτη φάση

1. Ο διδάσκων επισημαίνει στους μαθητές ότι η σχέση που έχουν εντοπίσει θα πρέπει κατ αρχήν να διατυπωθεί ως ένα θεώρημα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα προβούν σε μία γενίκευση των μαθηματικών τα οποία έχουν ήδη εντοπίσει.
2. Ο διδάσκων επισημαίνει στους μαθητές ότι είναι απαραίτητη μία αυστηρή απόδειξη ότι το εμβαδόν κάθε τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\delta_1.\delta_2.\eta\mu\omega$. Η απόδειξη αυτή μπορεί πλέον να γίνει μέσω του τύπου $E=\frac{1}{2}\beta.\gamma.\eta\mu A$ ο οποίος μας δίνει το εμβαδόν τριγώνου σαν συνάρτηση της περιεχόμενης γωνίας δύο πλευρών του.

Φύλλο εργασίας.

Οι ιστορικοί υποστηρίζουν ότι στην αρχαία Αίγυπτο οι ακτήμονες που καλλιεργούσαν χωράφια των γαιοκτημόνων ήσαν υποχρεωμένοι να αποδίδουν στους τελευταίους σοδειά ανάλογη προς το εμβαδόν του κτήματος που καλλιεργούσαν. Οι γαιοκτήμονες για να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός χωραφιού(συνήθως τα χωράφια ήταν τετράπλευρα) πολλαπλασίαζαν τα μήκη των δύο διαγωνίων και διαιρούσαν το αποτέλεσμα δια δύο.

Ήταν άραγε δίκαιος ο τρόπος αυτός υπολογισμού του εμβαδού ή υπήρχε κάποια σκοπιμότητα;

1. Να κατασκευάσετε ένα γεωμετρικό σχήμα στο τετράδιό σας και με βάση αυτό να διαπραγματευτείτε την κατασκευή ενός μοντέλου με τη βοήθεια του λογισμικού.
2. Ποια μεγέθη θα πρέπει να θεωρηθούν μεταβλητά και ποια σταθερά στο μοντέλο;
3. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών για τα δύο βασικά μεταβαλλόμενα μεγέθη τα οποία θα μελετήσετε ως προς τον τρόπο που μεταβάλλονται. Από τον πίνακα να κάνετε μία εικασία για ενδεχόμενη σχέση η οποία συνδέει τα δύο μεγέθη.

4. Να μεταφέρεται τα ζεύγη των τιμών στον πίνακα τιμών του function probe. Να αποστείλετε τα σημεία στον πίνακα γράφημα. Να διαπραγματευτείτε τη διάταξη των σημείων σε σχέση με την εικασία του προηγούμενου ερωτήματος.
5. Με τη βοήθεια του λογισμικού να ελέγξετε, μέσω μιας κατάλληλης γραφικής παράστασης, την εικασία σας.
6. Να διατυπώσετε μία γενική πρόταση για το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου.
7. Να αποδείξετε την πρόταση που έχετε διατυπώσει με αυστηρά μαθηματικό τρόπο στο τετράδιό σας.

Τελικά ποια σκοπιμότητα εξυπηρετούσε ο τρόπος μέτρησης του εμβαδού από τους λογιστές των γαιοκτημόνων;

ΠΙΘΑΝΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει δραστηριότητα η οποία να αφορά στο εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει μιας γωνίας του και των δύο πλευρών οι οποίες την περιέχουν.

Συγκεκριμένα μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα τρίγωνο με δύο πλευρές σταθερού μήκους αλλά μεταβλητής γωνίας. (Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί με τις ακτίνες δύο ομόκεντρων κύκλων τους οποίους έχουν αποκρύψει).

Στη συνέχεια οι μαθητές θα κατασκευάσουν πίνακα τιμών για τη μεταβαλλόμενη γωνία και το εμβαδόν και θα μεταφέρουν τα ζεύγη στον πίνακα τιμών του FP. Η καμπύλη που θα προκύψει θα οδηγήσει σταδιακά στον εντοπισμό του τύπου ο οποίος συνδέει το εμβαδόν με το ημίτονο γωνίας στο τρίγωνο.

Σημείωση:

Προφανώς αν οι μαθητές έχουν ήδη διδαχτεί τον τύπο του εμβαδού τριγώνου Ε=1/2β.γ.ημΑ τότε η δραστηριότητα έχει την έννοια της επιβεβαίωσης του τύπου μέσω των υπολογιστικών εργαλείων.

Σταλακτίτες

Το πρόβλημα

Ένα από τα αντικείμενα μελέτης της σπηλαιολογίας είναι το φαινόμενο του σχηματισμού και της εξέλιξης των σταλακτιτών και των σταλαγμιτών. Στο πλαίσιο των ερευνών για το θέμα αυτό, άρχισε το 1952 η καταμέτρηση του μήκους του σταλακτίτη και του αντίστοιχου σταλαγμίτη που φαίνονται στη διπλανή εικόνα. Οι μετρήσεις γίνονταν κάθε δύο χρόνια με όργανα ακριβείας. Τη χρονιά που άρχισαν οι μετρήσεις η απόσταση μεταξύ του σταλακτίτη και του σταλαγμίτη ήταν 2133 mm.

Το 2002 οι σπηλαιολόγοι, έχοντας τα δεδομένα των μετρήσεων 50 ετών, θέλησαν να προβλέψουν πότε ο σταλακτίτης και ο σταλαγμίτης θα συναντηθούν για να αποτελέσουν πλέον μία ‘κολώνα’.

Σύντομη περιγραφή του σεναρίου.

Βασική ιδέα.

Η βασική ιδέα για το σενάριο αυτό προήλθε από μία άσκηση στο κεφάλαιο των συναρτήσεων του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου. Το πρόβλημα με το σταλακτίτη και τον αντίστοιχό του σταλαγμίτη προσφέρεται για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν μία μαθηματική αναπαράσταση του φυσικού φαινομένου της μεταβολής του μήκους του σταλακτίτη και του αντίστοιχου σταλαγμίτη με το πέρασμα του χρόνου, στηριζόμενοι σε ερευνητικά δεδομένα. Η ‘μαθηματικοποίηση’ του φυσικού φαινομένου δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και επίλυσης προβλήματος.

Ένταξη στο Αναλυτικό πρόγραμμα

Το σενάριο αυτό μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Γ΄ Γυμνασίου στο κεφάλαιο των συναρτήσεων και ειδικότερα στη μελέτη των μετασχηματισμών της ψ=αχ. Μπορεί να διδαχθεί τόσο πριν την εισαγωγή των μαθητών στο αντίστοιχο θέμα, αντικαθιστώντας τη διδασκαλία των αντιστοίχων παραγράφων, όσο και στο τέλος του κεφαλαίου σαν μία εναλλακτική διδακτική προσέγγιση και εφαρμογή των αποκτηθέντων γνώσεων.

Τεχνολογικά εργαλεία

Για την υλοποίηση του σεναρίου έχει χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Function Probe (FP) - διερευνητικό λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων, το οποίο υποστηρίζει και ενθαρρύνει τη δημιουργία και τη μελέτη συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ συμεταβαλλόμενων μεγεθών.

Το FP συνοδεύεται από οδηγίες χρήσης, βιβλίο καθηγητή και βιβλίο μαθητή.

Μαθησιακή και παιδαγωγική διάσταση του σεναρίου

Μαθησιακοί στόχοι

Οι δραστηριότητες, που περιγράφονται παρακάτω, έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου:

- Να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής και τους λόγους χρήσης της.
- Να επιλέξουν τη σωστή κλίμακα για μία δεδομένη γραφική παράσταση
- Να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο παράγεται (μέσω μετασχηματισμών) η συνάρτηση y=αx+β από τη συνάρτηση y=x.
- Να κατανοήσουν τον τρόπο συμμεταβολής δύο μεγεθών που συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις της μορφής y=αx+β, μέσα από διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασή τους (πίνακα τιμών, αλγεβρικό τύπο και γραφική παράσταση).
- Να κατασκευάσουν σταδιακά σχέσεις συμμεταβαλλόμενων μεγεθών.
- Να αντιληφθούν τη διευκόλυνση που τους παρέχεται από τη χρήση των πρωτοβάθμιων συναρτήσεων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
- Να 'μαθηματικοποιήσουν' ένα φυσικό φαινόμενο.

Παιδαγωγικοί στόχοι

Η χρήση του συγκεκριμένου λογισμικού και το συνεργατικό μαθησιακό περιβάλλον, που περιγράφεται παρακάτω, παρέχουν τη δυνατότητα στους μαθητές:

- Να οργανώσουν τα δεδομένα τους ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων και στην εύρεση λύσεων.

- Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να καταχωρίσουν τα δεδομένα τους, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.
- Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους ή την καθηγήτριά τους.

Συνεισφορά του σεναρίου στη διδασκαλία και τη μάθηση

Βασικό πυρήνα του σχεδιασμού του σεναρίου αποτέλεσαν δύο από τους ειδικούς στόχους διδασκαλίας των Μαθηματικών, που αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα: «η ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπισης πραγματικών καταστάσεων» καθώς και «η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και της πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών». Επίσης με δεδομένη την αδυναμία ή δυσκολία των παραδοσιακών μέσων για τη διδασκαλία των γραφικών παραστάσεων, έγινε προσπάθεια, με τη βοήθεια του λογισμικού FP, να σχεδιαστεί ένα σενάριο το οποίο να εμπλέκει τους μαθητές σε δράσεις που δεν είναι εύκολες με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας.

Οι δυνατότητες του προς χρήση λογισμικού στο παρόν σενάριο διαφοροποιούν σε μεγάλο βαθμό τη μαθησιακή διαδικασία σε σχέση με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας. Η ιδέα της επικοινωνίας ανάμεσα σε μαθηματικές αναπαραστάσεις μέσω παραθύρων στο λογισμικό Function Probe παρέχει στους μαθητές ένα δυναμικό τρόπο για το συντονισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την επίλυση προβλημάτων. Έτσι, οι μαθητές με τη χρήση του μπορούν να πειραματιστούν, μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων (συμβολική έκφραση, πίνακα τιμών και γράφημα) με τις πρωτοβάθμιες συναρτήσεις, και των μετασχηματισμών τους και στη συνέχεια να βρουν και να διερευνήσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβαλλόμενων μεγεθών. Επίσης η ευκολία και η ταχύτητα ανταπόκρισης του λογισμικού στις αιτούμενες ενέργειες δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να δοκιμάζουν την ορθότητα των διαισθητικών τους αντιλήψεων, χωρίς το άγχος ότι μπορούν να κάνουν λάθος. Έτσι, κατασκευάζοντας π.χ. οι μαθητές μία συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλόμενων μεγεθών, μπορούν με διαδοχικές δοκιμές να διαπιστώσουν αν είναι σωστή και με τον τρόπο αυτό να μάθουν μέσα από τα λάθη τους.

Διδακτική διαχείριση της τάξης

Ένας από τους στόχους του σεναρίου ήταν η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος εμπλουτισμένου με τις νέες τεχνολογίες, προκειμένου να προωθήσει τη μάθηση μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, πειραματισμού, δημιουργίας, έκφρασης και επικοινωνίας. Για το σκοπό αυτό η προσβλεπόμενη μέθοδος διδακτικής είναι αυτή της συνεργατικής μάθησης με κύριο εργαλείο τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, της οποίας τα χαρακτηριστικά είναι κοινά σε όλα αυτού του είδους τα διερευνητικά σενάρια. Στο πλαίσιο αυτό προτείνεται σαν χώρος διδασκαλίας να χρησιμοποιηθεί το εργαστήριο των ηλεκτρονικών υπολογιστών εκτός των περιπτώσεων εκείνων που δεν απαιτείται η χρήση τους. Οι μαθητές χωρισμένοι σε μικρές ομάδες (2-3 μαθητές) δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή, αναλαμβάνοντας διαφορετικούς ρόλους ο καθένας (πληκτρολόγηση-διαχείριση ποντικιού, τήρηση σημειώσεων στο τετράδιο ή το φύλλο εργασίας), ρόλοι οι οποίοι εναλλάσσονται ανάλογα με τις συμφωνίες που έχουν γίνει. Συζητούν μεταξύ τους για το πρόβλημα, κάνουν υποθέσεις, πειραματίζονται με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία, και επαναδιαπραγματεύονται τους στόχους τους ανάλογα με την πορεία της εργασίας τους.

Στο μαθησιακό αυτό περιβάλλον δεν καταργείται η χρήση των παραδοσιακών μέσων διδασκαλίας και εργασίας των μαθητών. Ο καθηγητής/η καθηγήτρια χρησιμοποιεί τον πίνακα όταν απευθύνεται σε όλη την τάξη, οι μαθητές συμβουλεύονται το βιβλίο τους όταν το χρειάζονται και κρατούν σημειώσεις στο τετράδιό τους για την πορεία της εργασίας τους.

Ο καθηγητής/η καθηγήτρια σε αυτό το πλαίσιο αναλαμβάνει το ρόλο του συνερευνητή/της συνερευνήτριας και του βοηθού /της βοηθού των προσπαθειών των μαθητών. Απευθύνεται άλλοτε σε όλες τις ομάδες και άλλοτε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του/της ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διερεύνησης.. Επίσης οι ερωτήσεις του/της θα πρέπει να είναι ανοικτές ώστε να ενθαρρύνουν τον πειραματισμό αφήνοντας στους μαθητές την πρωτοβουλία των κινήσεων και περιθώρια για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων

Προϋποθέσεις εφαρμογής του σεναρίου

Είναι προφανές, από αυτά που έχουν περιγραφεί στις προηγούμενες παραγράφους ότι τόσο το μαθησιακό περιβάλλον που προτείνεται για την υλοποίηση του εν λόγω σεναρίου, όσο και οι ρόλοι των μαθητών και των διδασκόντων διαφοροποιούνται σε σχέση με το παραδοσιακό μάθημα των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό η βασικότερη προϋπόθεση για την επιτυχή υλοποίηση του προτεινομένου σεναρίου είναι ο διδάσκων/η διδάσκουσα να έχει επιμορφωθεί κατάλληλα στην παιδαγωγική αξιοποίηση του προς χρήση λογισμικού. Δεν αρκεί, δηλαδή, η καλή γνώση λειτουργίας και χειρισμού του εν λόγω λογισμικού, αλλά είναι απαραίτητη η γνώση της παιδαγωγικής και διδακτικής διάστασής του από το διδάσκοντα/τη διδάσκουσα.

Άλλη, επίσης βασική προϋπόθεση για την 'επιτυχή' υλοποίηση του εν λόγω σεναρίου, είναι ο διδάσκων/η διδάσκουσα να έχει ολοκληρωμένη άποψη για τη συνολική διδακτική πορεία του σεναρίου. Αυτό σημαίνει ότι, πριν να το εφαρμόσει στην τάξη του/της, θα πρέπει να το υλοποιήσει ο ίδιος/η ίδια βήμα προς βήμα, παίρνοντας το ρόλο του μαθητή. Από τη διαδικασία αυτή, και γνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητες των μαθητών του/της, θα προκύψουν περισσότερα μαθησιακά οφέλη, αφού θα είναι σε θέση να γνωρίζει εκ των προτέρων τους κύριους άξονες πάνω στους οποίους θα οικοδομήσει τη διδακτική του/της πρακτική.

Για την επιτυχή υλοποίηση του σεναρίου, απαραίτητη προϋπόθεση είναι και η σωστή οργάνωση της τάξης. Προς την κατεύθυνση αυτή, σημαντικό ρόλο παίζουν:

- Ο χωρισμός των μαθητών σε ομάδες, όπου η σύνθεση της ομάδας θα πρέπει να εξασφαλίζει την κατά το δυνατό ομαλότερη και αποδοτικότερη λειτουργία της
- Η ενημέρωση των μαθητών για τους κανόνες που ισχύουν για τη σωστή λειτουργία του εργαστηρίου με στόχο την αποφυγή βλαβών στα μηχανήματα
- Η ύπαρξη όλων των απαραίτητων μέσων που εξασφαλίζουν την απρόσκοπτη λειτουργία του μαθήματος (π.χ. τετράδια, βιβλία, απλές οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού κτλ.)

Υλοποίηση

Οι παρατηρήσεις για τη διδακτική διαδικασία έχουν ενσωματωθεί στο φύλλο εργασίας των μαθητών και έχουν δοθεί οι απαντήσεις των ερωτημάτων. Επίσης έχουν επισυναφθεί στις απαντήσεις και εικόνες –στιγμιότυπα από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού.

Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από τα βήματα του φύλλου εργασίας που δίνεται στους μαθητές. Αρχικά οι μαθητές ενημερώνονται για το πρόβλημα συνολικά (υπάρχει εισαγωγικό σημείωμα στην αρχή του φύλλου εργασίας) και κατόπιν απαντούν στα ερωτήματα.

Διάρκεια υλοποίησης του φύλλου εργασίας: 3 διδακτικές ώρες.

Περιγραφή βημάτων υλοποίησης

1. ***Δημιουργείστε ένα πίνακα στο FP, που να περιέχει τις μετρήσεις που έκαναν οι σπηλαιολόγοι σε σχέση με τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές των μετρήσεων αυτών.***

Οδηγίες:

Α) Οι μετρήσεις μπορούν να μεταφερθούν στο FP με τη διαδικασία copy-paste κάθε στήλης ξεχωριστά.

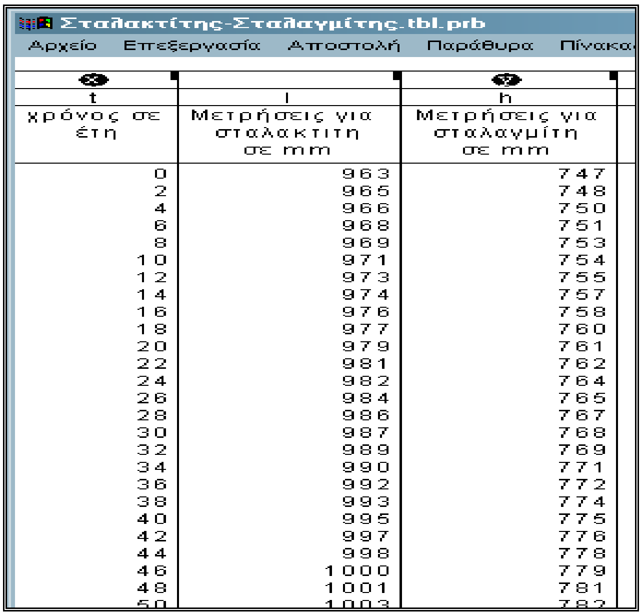
Β) Να λάβετε υπόψη σας ότι η εξέλιξη του φαινομένου εξαρτάται από το χρόνο αλλά είναι ανεξάρτητη από τη χρονολογία που άρχισαν οι μετρήσεις.

Γ) Ονομάστε την πρώτη στήλη t (χρόνος σε έτη), τη δεύτερη ℓ (μετρήσεις μήκους σταλακτίτη σε mm) και την τρίτη h (μετρήσεις μήκους σταλαγμίτη σε mm).

Δ) Ονομάστε τον πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης'

<u>Αναμενόμενη διαδικασία</u>

Οι μαθητές δημιουργούν ένα πίνακα στο FP, όπου θα εξαρτήσουν τις μετρήσεις από τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να γίνει συζήτηση στην τάξη για τη λογική με την οποία θα γεμίσουν την πρώτη στήλη του πίνακα (0 έως 50 με βήμα 2, βλέπε εικόνα 1)



t	l	h
χρόνος σε έτη	Μετρήσεις για σταλακτιτη σε mm	Μετρήσεις για σταλαγμίτη σε mm
0	963	747
2	965	748
4	966	750
6	968	751
8	969	753
10	971	754
12	973	755
14	974	757
16	976	758
18	977	760
20	979	761
22	981	762
24	982	764
26	984	765
28	986	767
30	987	768
32	989	769
34	990	771
36	992	772
38	993	774
40	995	775
42	997	776
44	998	778
46	1000	779
48	1001	781
50	1003	782

Εικόνα 1

2. ***Στείλτε τα σημεία της πρώτης και δεύτερης στήλης στο γράφημα. Αλλάξτε την κλίμακα του γραφήματος ώστε να φαίνονται τα σημεία αυτά, ονομάστε το γράφημα 'Σταλακτίτης' και προσδιορίστε το τι δείχνει ο κάθε άξονας (μεταβλητές)***

<u>Αναμενόμενη διαδικασία</u>

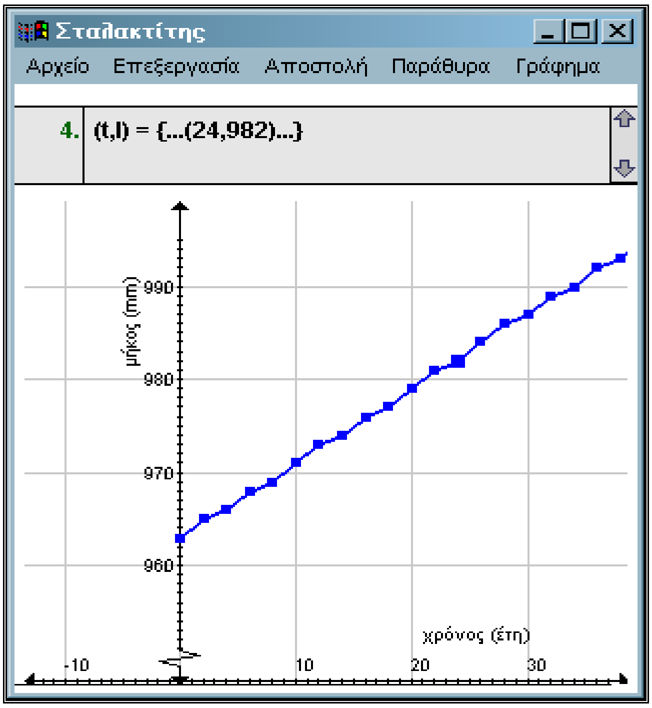
Θα πρέπει να γίνει συζήτηση στην τάξη:

- για την αναγκαιότητα αλλαγής της κλίμακας του γραφήματος
- για τη σωστή επιλογή των ορίων της κλίμακας (Προτείνεται: για τον άξονα χχ΄ από 0 έως 52 και για τον ψψ΄ 960 έως 1005)
- για την ονομασία των αξόνων (προσδιορισμός μεταβλητών βλέπε εικόνα 2)

3. ***Ενώστε τα σημεία και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας από τη γραφική παράσταση των σημείων***

Παρατηρήσεις επί της διαδικασίας

Εκτός από παρατηρήσεις σχετικές με την αύξηση του μήκους του σταλακτίτη με το πέρασμα του χρόνου, οι μαθητές θα πρέπει να οδηγηθούν στην παρατήρηση ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται, **κατά προσέγγιση**, πάνω σε μία ευθεία (Εικόνα 2). Στόχος, λοιπόν, είναι να προσδιοριστεί αυτή η ευθεία γραφικά. Ο προσδιορισμός της θα πρέπει να γίνει σταδιακά, ξεκινώντας από τον τύπο της συνάρτησης - πρότυπο ℓ=t. Επειδή η συνάρτηση αυτή (όταν πληκτρολογηθεί στο παράθυρο του γραφήματος) δεν είναι ορατή θα πρέπει να προετοιμαστούν οι μαθητές για τη συνάρτηση ℓ=963+t του επομένου ερωτήματος.



Εικόνα 2

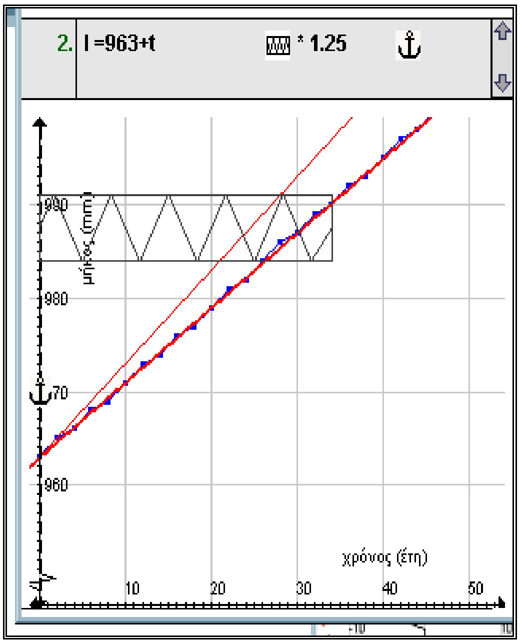
4. ***Πληκτρολογήστε στο γράφημα τη συνάρτηση ℓ=963+t και προσπαθήστε με τον κατάλληλο μετασχηματισμό της να προσεγγίσετε όσο το δυνατόν περισσότερο τη γραμμή που ενώνει τα σημεία. (Οδηγία: Μετασχηματίστε τη συνάρτηση, με το εργαλείο του γραφήματος 'αυξομείωση' ώστε να συμπέσει με τη γραμμή που ενώνει τα σημεία).***

   Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ℓ=963+t και του μετασχηματισμού της;

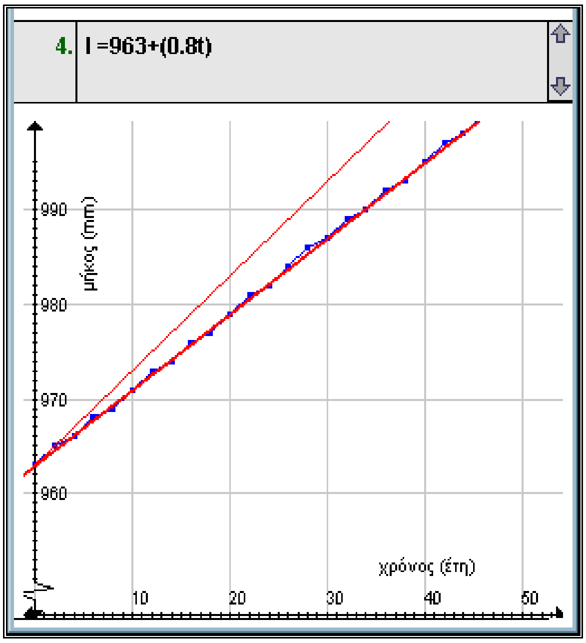
Παρατηρήσεις επί της διαδικασίας

Οι μαθητές για να βρουν τη σχέση (συνάρτηση) που περιγράφει το φαινόμενο θα πρέπει να μετασχηματίσουν την ℓ=963+t χρησιμοποιώντας οριζόντια αυξομείωση από τα εργαλεία του γραφήματος (εικόνες 3 και 4).

Στην ερώτηση αυτή θα πρέπει να δοθεί έμφαση στο μετασχηματισμό της ℓ=963+t σε ℓ=963+0,8t, στη σημασία του συντελεστή 0,8 και στο ότι η συνάρτηση που έχει προκύψει περιγράφει- 'μοντελοποιεί' - το φαινόμενο της αύξησης του μήκους του σταλακτίτη σε σχέση με το χρόνο. Είναι πολύ πιθανό, κάθε ομάδα να βρει διαφορετικές τιμές για το συντελεστή του t πχ 0,79 . Αυτό δεν πρέπει να αποτελέσει πρόβλημα αφού στη συνέχεια μπορούν να 'βελτιώσουν' τον τύπο της συνάρτησης όταν θα την πληκτρολογήσουν στον πίνακα (ερώτηση 6)



Εικόνα 3



Εικόνα 4

5. ***Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία***

Αναμενόμενη απάντηση

Ο τύπος της συνάρτησης είναι**: ℓ=963+0.8t.**

6. ***Πληκτρολογήστε στην τέταρτη στήλη του πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης' τη συνάρτηση που βρήκατε στο γράφημα από τον μετασχηματισμό της ℓ=963+t (ονομάζοντάς την L), συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.***

Παρατηρήσεις επί της διαδικασίας

Οι τιμές της συνάρτησης ℓ=963+0.8t. με τις αντίστοιχες μετρήσεις έχουν μικρές διαφορές (μόνο σε δεκαδικά ψηφία, που αν γίνει στρογγυλοποίηση, οι τιμές της δεύτερης και τρίτης στήλης συμπίπτουν). Οπότε η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει με πολύ καλή προσέγγιση το φαινόμενο (εικόνα 5). Επίσης θα πρέπει να επισημανθεί ότι από τη στιγμή που βρέθηκε η συνάρτηση-'μοντέλο', μπορούν να βρουν το μήκος του σταλακτίτη σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και όχι μόνο για το διάστημα των 50 ετών. Για το λόγο αυτό μπορεί να τους ζητηθεί το μήκος του σταλακτίτη μετά από 52,57,65 κοκ χρόνια (από το 1952).

Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης.tbl.prb

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	l	h	L=963+0.8*t
χρόνος σε έτη	Μετρήσεις για σταλακτιτη σε mm	Μετρήσεις για σταλαγμίτη σε mm	Μήκος σταλακτίτη σε mm
0	963	747	963
2	965	748	964.6
4	966	750	966.2
6	968	751	967.8
8	969	753	969.4
10	971	754	971
12	973	755	972.6
14	974	757	974.2
16	976	758	975.8
18	977	760	977.4
20	979	761	979
22	981	762	980.6
24	982	764	982.2
26	984	765	983.8
28	986	767	985.4
30	987	768	987
32	989	769	988.6
34	990	771	990.2
36	992	772	991.8
38	993	774	993.4
40	995	775	995
42	997	776	996.6
44	998	778	998.2
46	1000	779	999.8
48	1001	781	1001.4
50	1003	782	1003

Εικόνα 5

7. *Πόσο μήκος θα έχει ο σταλακτίτης το έτος:*

- ***2008*** ***Μήκος σταλακτίτη (L) =..........***
- ***2037*** ***Μήκος σταλακτίτη (L) =..........***
- ***2100*** ***Μήκος σταλακτίτη (L) =..........***
- ***2192*** ***Μήκος σταλακτίτη (L) =..........***

Αναμενόμενη διαδικασία

Για να απαντήσουν οι μαθητές σε αυτή την ερώτηση ευκολότερα, θα ήταν καλό να οδηγηθούν να κατασκευάσουν μία συνάρτηση (U=1952+t) που, συνδέει το χρόνο t με τη χρονολογία που άρχισαν οι μετρήσεις (1952). Αυτό θα τους διευκολύνει και στην απάντηση επόμενων ερωτημάτων. Επίσης για να απαντήσουν για τις χρονολογίες που τους ζητούνται θα πρέπει να γεμίσουν την πρώτη στήλη του πίνακα με διαφορετικές τιμές από αυτές που είχαν στο προηγούμενο ερώτημα (εικόνα 6).

Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης.tbl.prb

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνα

t	h	L=963+0.8*t	U=1952+t
χρόνος σε έτη		Μήκος σταλακτίτη σε mm	Χρονολογία
50		1003	2002
51		1003.8	2003
52		1004.6	2004
53		1005.4	2005
54		1006.2	2006
55		1007	2007
56		1007.8	2008
85		1031	2037
148		1081.4	2100
149		1082.2	2101
240		1155	2192
250		1163	2202

Εικόνα 6

Αναμενόμενες απαντήσεις

- 2008 Μήκος σταλακτίτη (L) =1007,8 mm
- 2037 Μήκος σταλακτίτη (L) =1031 mm
- 2100 Μήκος σταλακτίτη (L) =1081,4 mm
- 2192 Μήκος σταλακτίτη (L) =1155 mm

8. ***Μέχρι τώρα έχετε βρει (αν όλα πήγαν καλά) τη σχέση (συνάρτηση) που μας δίνει το μήκος του σταλακτίτη σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.***

   Να επαναλάβετε τη διαδικασία των ερωτημάτων 2,3,4,5 στέλνοντας τα σημεία της πρώτης και τρίτης στήλης του πίνακα σε ένα άλλο γράφημα, που θα το ονομάσετε 'Σταλαγμίτης' και πληκτρολογώντας στο γράφημα τη συνάρτηση h=747+t.

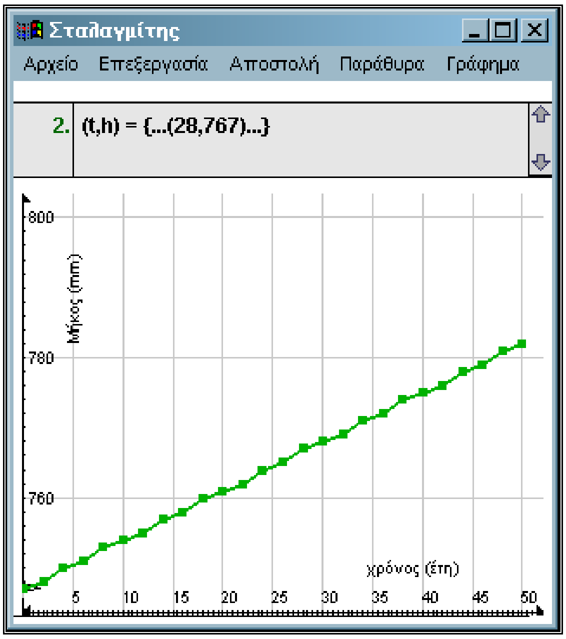
   Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία.

Αναμενόμενη διαδικασία

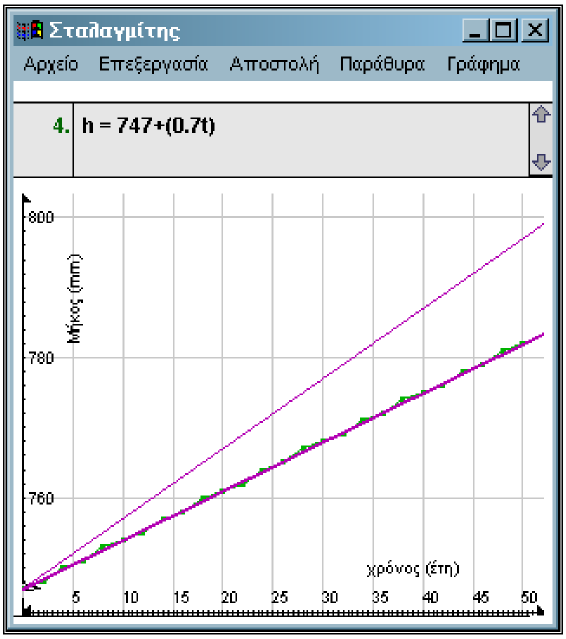
Ακολουθείται η διαδικασία των ερωτημάτων 2,3,4 και 5 (βλέπε εικόνες 7 και 8).

Αναμενόμενη απάντηση

Ο τύπος της συνάρτησης είναι: **h=747+0.7t**



Εικόνα 7



Εικόνα 8

9. Πληκτρολογήστε σε μία στήλη του πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης' τη συνάρτηση που βρήκατε στο γράφημα 'Σταλαγμίτης' από τον μετασχηματισμό της h=747+t (ονομάζοντάς την Η), συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρίσκονται στην τρίτη στήλη του πίνακα και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Αναμενόμενη διαδικασία

Βλέπε εικόνα 9 και παρατηρήσεις ερωτήματος 6.

Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης.tbl.prb

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	l	h	L=963+0.8*t	U=1952+t	H=747+0.7*t
χρόνος σε έτη	Μετρήσεις για σταλακτιτη σε mm	Μετρήσεις για σταλαγμίτη σε mm	Μήκος σταλακτίτη σε mm	Χρονολογία	Μήκος σταλαγμίτη σε mm
0	963	747	963	1952	747
2	965	748	964.6	1954	748.4
4	966	750	966.2	1956	749.8
6	968	751	967.8	1958	751.2
8	969	753	969.4	1960	752.6
10	971	754	971	1962	754
12	973	755	972.6	1964	755.4
14	974	757	974.2	1966	756.8
16	976	758	975.8	1968	758.2
18	977	760	977.4	1970	759.6
20	979	761	979	1972	761
22	981	762	980.6	1974	762.4
24	982	764	982.2	1976	763.8
26	984	765	983.8	1978	765.2
28	986	767	985.4	1980	766.6
30	987	768	987	1982	768
32	989	769	988.6	1984	769.4
34	990	771	990.2	1986	770.8
36	992	772	991.8	1988	772.2
38	993	774	993.4	1990	773.6
40	995	775	995	1992	775
42	997	776	996.6	1994	776.4
44	998	778	998.2	1996	777.8
46	1000	779	999.8	1998	779.2
48	1001	781	1001.4	2000	780.6
50	1003	782	1003	2002	782

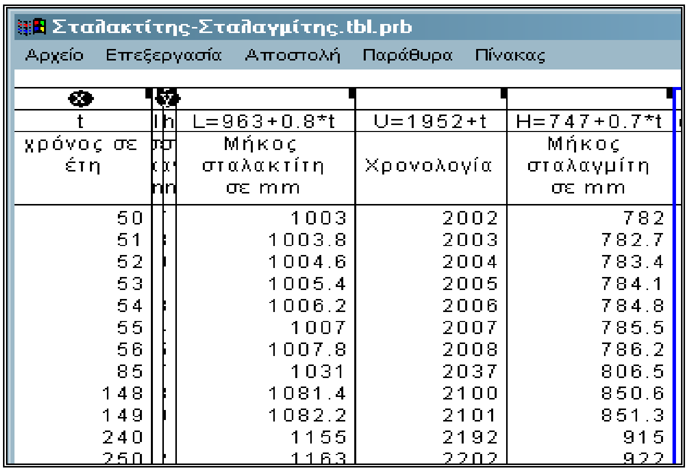
Εικόνα 9

10.Πόσο μήκος θα έχει ο σταλαγμίτης το έτος

- ***2008 Μήκος σταλαγμίτη (H) =***
- ***2037 Μήκος σταλαγμίτη (H) =***
- ***2100 Μήκος σταλαγμίτη (H) =***
- ***2192 Μήκος σταλαγμίτη (H) =***

<u>Αναμενόμενη διαδικασία</u>

Βλέπε εικόνα 10 και παρατηρήσεις ερωτήματος 7.



t	l h	L=963+0.8*t	U=1952+t	H=747+0.7*t
χρόνος σε έτη		Μήκος σταλακτίτη σε mm	Χρονολογία	Μήκος σταλαγμίτη σε mm
50		1003	2002	782
51		1003.8	2003	782.7
52		1004.6	2004	783.4
53		1005.4	2005	784.1
54		1006.2	2006	784.8
55		1007	2007	785.5
56		1007.8	2008	786.2
85		1031	2037	806.5
148		1081.4	2100	850.6
149		1082.2	2101	851.3
240		1155	2192	915
250		1163	2202	922

Εικόνα 10

<u>Αναμενόμενες απαντήσεις</u>

- 2008 Μήκος σταλαγμίτη (H) =786,2 mm
- 2037 Μήκος σταλαγμίτη (H) =806,5 mm
- 2100 Μήκος σταλαγμίτη (H) =850,6 mm
- 2192 Μήκος σταλαγμίτη (H) =915 mm

11.Πόση θα είναι η απόσταση του σταλακτίτη από το σταλαγμίτη το έτος:

- ***2008 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =..........***
- ***2037 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =..........***
- ***2100 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =..........***
- ***2192 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =..........***

<u>Αναμενόμενη διαδικασία</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν μία νέα συνάρτηση d (d=2133-L-H) που να δίνει την απόσταση σταλακτίτη - σταλαγμίτη ανά χρονική στιγμή (εικόνα 11)

Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης.tbl.prb

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	Ih	L=963+0.8*t	U=1952+t	H=747+0.7*t	d=2133-L-H
χρόνος σε έτη		Μήκος σταλακτίτη σε mm	Χρονολογία	Μήκος σταλαγμίτη σε mm	Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη
50		1003	2002	782	348
51		1003.8	2003	782.7	346.5
52		1004.6	2004	783.4	345
53		1005.4	2005	784.1	343.5
54		1006.2	2006	784.8	342
55		1007	2007	785.5	340.5
56		1007.8	2008	786.2	339
85		1031	2037	806.5	295.5
148		1081.4	2100	850.6	201
149		1082.2	2101	851.3	199.5
240		1155	2192	915	63
250		1163	2202	922	48

Εικόνα 11

Αναμενόμενες απαντήσεις

- 2008 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =339 mm
- 2037 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =295,5 mm.
- 2100 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =201 mm
- 2192 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =63 mm

12.*Ποιο έτος θα συναντηθούν ο σταλακτίτης και ο σταλαγμίτης;*

Αναμενόμενη διαδικασία

Οι μαθητές θα πρέπει να εντοπίσουν πότε η απόσταση d γίνεται 0 (εικόνα 12). Επιπλέον καλό θα είναι, αν εμφανιστούν κάποιες αρνητικές τιμές για την απόσταση, να τους ζητηθεί η ερμηνεία τους.

Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης.tbl.prb

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	L=963+0.8*t	U=1952+t	H=747+0.7*t	d=2133-L-H
χρόνος σε έτη	Μήκος σταλακτίτη σε mm	Χρονολογία	Μήκος σταλαγμίτη σε mm	Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη
50	1003	2002	782	348
51	1003.8	2003	782.7	346.5
52	1004.6	2004	783.4	345
53	1005.4	2005	784.1	343.5
54	1006.2	2006	784.8	342
55	1007	2007	785.5	340.5
56	1007.8	2008	786.2	339
85	1031	2037	806.5	295.5
148	1081.4	2100	850.6	201
149	1082.2	2101	851.3	199.5
240	1155	2192	915	63
250	1163	2202	922	48
252	1164.6	2204	923.4	45
254	1166.2	2206	924.8	42
278	1185.4	2230	941.6	6
280	1187	2232	943	3
282	1188.6	2234	944.4	0
284	1190.2	2236	945.8	-3
286	1191.8	2238	947.2	-6
288	1193.4	2240	948.6	-9
290	1195	2242	950	-12
292	1196.6	2244	951.4	-15
294	1198.2	2246	952.8	-18
296	1199.8	2248	954.2	-21
298	1201.4	2250	955.6	-24
300	1203	2252	957	-27

Εικόνα 12

<u>Αναμενόμενη απάντηση</u>

Ο σταλακτίτης και ο σταλαγμίτης θα συναντηθούν 282 χρόνια μετά το 1952 δηλαδή το έτος 2234.

Φύλλο εργασίας

Ονόματα μελών της ομάδας:

Στόχος της εργασίας που θα κάνετε είναι η μαθηματική αναπαράσταση του φυσικού φαινομένου της μεταβολής του μήκους ενός σταλακτίτη και του αντίστοιχου σταλαγμίτη με το πέρασμα του χρόνου. Θα χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα των μετρήσεων των σπηλαιολόγων και, στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εργαλείων του FP και του καθηγητή σας ή της καθηγήτριάς σας, θα κατασκευάσετε δύο αλγεβρικές σχέσεις που θα προσεγγίζουν τα πραγματικά δεδομένα. Δηλαδή από τα δεδομένα των μετρήσεων των σπηλαιολόγων θα πρέπει να κατασκευάσετε μία σχέση που θα δίνει το μήκος του σταλακτίτη για οποιαδήποτε χρονιά και μία αντίστοιχη για το σταλαγμίτη. Με τη βοήθεια των συναρτήσεων αυτών θα μπορέσετε να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που θα συναντηθούν για να σχηματίσουν μία 'κολώνα'

Πριν από όλα θα πρέπει να ενημερωθείτε για το φαινόμενο της δημιουργίας και εξέλιξης των σταλακτιτών και των σταλαγμιτών από σχετικά βιβλία ή από το διαδίκτυο. Κατόπιν διαβάστε προσεκτικά το πρόβλημα και υλοποιήστε τα βήματα του φύλλου εργασίας που έχετε μπροστά σας.

Το πρόβλημα

Ένα από τα αντικείμενα μελέτης της σπηλαιολογίας είναι το φαινόμενο του σχηματισμού και της εξέλιξης των σταλακτιτών και των σταλαγμιτών. Στο πλαίσιο των ερευνών για το θέμα αυτό, άρχισε το 1952 η καταμέτρηση του μήκους του σταλακτίτη και του αντίστοιχου σταλαγμίτη που φαίνονται στη διπλανή εικόνα. Οι μετρήσεις γίνονταν κάθε δύο χρόνια με όργανα ακριβείας. Τη χρονιά που άρχισαν οι μετρήσεις η απόσταση μεταξύ του σταλακτίτη και του σταλαγμίτη ήταν 2133 mm.

Το 2002 οι σπηλαιολόγοι, έχοντας τα δεδομένα των μετρήσεων 50 ετών (όπως φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί), θέλησαν να προβλέψουν πότε ο σταλακτίτης και ο σταλαγμίτης θα συναντηθούν για να αποτελέσουν πλέον μία ‘κολώνα’.

Μετρήσεις του μήκους σταλακτίτη και σταλαγμίτη σε mm		
Έτος	**Μήκος σταλακτίτη**	**Μήκος σταλαγμίτη**
1952	963	747
1954	965	748
1956	966	750
1958	968	751
1960	969	753
1962	971	754
1964	973	755
1966	974	757
1968	976	758
1970	977	760
1972	979	761
1974	981	762
1976	982	764
1978	984	765
1980	986	767
1982	987	768
1984	989	769
1986	990	771
1988	992	772
1990	993	774
1992	995	775
1994	997	776
1996	998	778
1998	1000	779
2000	1001	781
2002	1003	782

1. Δημιουργείστε ένα πίνακα στο Function Probe, που να περιέχει τις μετρήσεις που έκαναν οι σπηλαιολόγοι σε σχέση με τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές των μετρήσεων αυτών.

Οδηγίες:

Α) Οι μετρήσεις μπορούν να μεταφερθούν στο FP με τη διαδικασία copy-paste κάθε στήλης ξεχωριστά.

Β) Να λάβετε υπόψη σας ότι η εξέλιξη του φαινομένου εξαρτάται από το χρόνο αλλά είναι ανεξάρτητη από τη χρονολογία που άρχισαν οι μετρήσεις.

Γ) Ονομάστε την πρώτη στήλη t (χρόνος σε έτη), τη δεύτερη ℓ (μετρήσεις μήκους σταλακτίτη σε mm) και την τρίτη h (μετρήσεις μήκους σταλαγμίτη σε mm).

Δ) Ονομάστε τον πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης'

2. Στείλτε τα σημεία της πρώτης και δεύτερης στήλης στο γράφημα. Αλλάξτε την κλίμακα του γραφήματος ώστε να φαίνονται τα σημεία αυτά, ονομάστε το γράφημα 'Σταλακτίτης' και προσδιορίστε το τι δείχνει ο κάθε άξονας (μεταβλητές).

3. Ενώστε τα σημεία και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας από τη γραφική παράσταση των σημείων

4. Πληκτρολογήστε στο γράφημα τη συνάρτηση $\ell=963+t$ και προσπαθήστε με τον κατάλληλο μετασχηματισμό της να προσεγγίσετε όσο το δυνατόν περισσότερο τη γραμμή που ενώνει τα σημεία.

Οδηγία: *Μετασχηματίστε τη συνάρτηση, με το εργαλείο του γραφήματος 'αυξομείωση' ώστε να συμπέσει με τη γραμμή που ενώνει τα σημεία.*

Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\ell=963+t$ και του μετασχηματισμού της;

5. Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία

6. Πληκτρολογήστε στην τέταρτη στήλη του πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης' τη συνάρτηση που βρήκατε στο γράφημα από τον μετασχηματισμό της ℓ=963+t (ονομάζοντάς την L), συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

7. Πόσο μήκος θα έχει ο σταλακτίτης το έτος

- 2008 Μήκος σταλακτίτη (L) =……….
- 2037 Μήκος σταλακτίτη (L) =……….
- 2100 Μήκος σταλακτίτη (L) =……….
- 2192 Μήκος σταλακτίτη (L) =……….

8. Μέχρι τώρα έχετε βρει (αν όλα πήγαν καλά) τη σχέση (συνάρτηση) που μας δίνει το μήκος του σταλακτίτη σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Να επαναλάβετε τη διαδικασία των ερωτημάτων 2,3,4,5, στέλνοντας τα σημεία της πρώτης και τρίτης στήλης του πίνακα σε ένα άλλο γράφημα, που θα το ονομάσετε 'Σταλαγμίτης' και πληκτρολογώντας στο γράφημα τη συνάρτηση h=747+t.

Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης που προέκυψε από την προηγούμενη διαδικασία.

9. Πληκτρολογήστε σε μία στήλη του πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης' τη συνάρτηση που βρήκατε στο γράφημα 'Σταλαγμίτης' από τον μετασχηματισμό της h=747+t (ονομάζοντάς την H), συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρίσκονται στην τρίτη στήλη του πίνακα και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

10. Πόσο μήκος θα έχει ο σταλαγμίτης το έτος:

- 2008 Μήκος σταλαγμίτη (H) =………..
- 2037 Μήκος σταλαγμίτη (H) =………..
- 2100 Μήκος σταλαγμίτη (H) =………..
- 2192 Μήκος σταλαγμίτη (H) =………..

11. Πόση θα είναι η απόσταση του σταλακτίτη από το σταλαγμίτη το έτος:

- 2008 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =………..

- 2037 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =………..

- 2100 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =………..

- 2192 Απόσταση σταλακτίτη-σταλαγμίτη (d) =………..

Οδηγία: *Βρείτε μία σχέση που να υπολογίζει την απόσταση του σταλακτίτη από το σταλαγμίτη ονομάστε την d και πληκτρολογήστε την σε μία στήλη του πίνακα 'Σταλακτίτης-Σταλαγμίτης'.*

12. Ποιο έτος θα συναντηθούν ο σταλακτίτης και ο σταλαγμίτης;

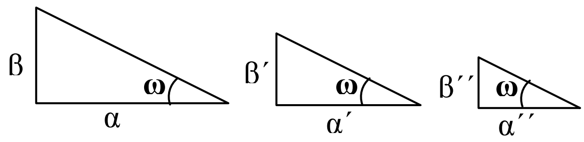
Απάντηση: ………………………………………………………………………………….

Τα Όμοια Τρίγωνα

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Η Βασική ιδέα της δραστηριότητας.

Τα όμοια τρίγωνα είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη βασική ιδιότητα των ομοίων τριγώνων, την σταθερότητα δηλαδή του λόγου των πλευρών τους, ώστε να κατατάξουν ένα μεγάλο αριθμό τριγώνων σε ομάδες οι οποίες θα περιέχουν όμοια μεταξύ τους τρίγωνα.



Ο σταθερός λόγος των πλευρών ομοίων τριγώνων διακρίνεται σε δύο είδη :

1. Τον εσωτερικό λόγο δηλαδή τον λόγο δύο πλευρών του ίδιου τριγώνου $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta''}{\alpha''}$.

   Στην ουσία ο λόγος αυτός, στην περίπτωση των ορθογωνίων τριγώνων, αποτελεί ένα αναλλοίωτο μέγεθος μέσα στις μεταβολές των τριγώνων το όνομα του οποίου είναι ‘εφαπτομένη της γωνίας ω’.

2. Τον εξωτερικό λόγο, δηλαδή τον λόγο δύο αντιστοίχων πλευρών των δύο τριγώνων. $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ και $\frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\alpha'}{\alpha''}$. Εδώ ο λόγος είναι στην ουσία ο συντελεστής μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης δηλαδή η κλίμακα.

Αν διαθέτουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό ορθογωνίων τριγώνων και τις μετρήσεις των δύο καθέτων πλευρών τους μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν πίνακα με δύο στήλες. Η πρώτη στήλη θα περιέχει το μήκος της μίας κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου και η δεύτερη στήλη θα περιέχει το μήκος της άλλης καθέτου. Η απεικόνιση των ζευγών θα μπορούσε να υποδείξει τις ομάδες των ομοίων τριγώνων μέσω των συνευθειακών σημείων τα οποία θα δημιουργούσαν.

Τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα αναπαριστώνται πλέον μέσω συνευθειακών σημείων ενώ η κλίση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν προσδιορίζει τον σταθερό εσωτερικό λόγο δηλαδή την εφαπτομένη της γωνίας ω.

Με δεδομένο ότι ο αριθμός των μετρήσεων είναι μεγάλος και ότι ένα λογισμικό θα μπορούσε να προβάλλει και ελέγξει την συνευθειακότητα των σημείων που θα προκύψουν γίνεται φανερή η συμβολή του στην επίλυση αυτής της μορφής προβλημάτων.

Σε ποιους απευθύνεται

- Τάξη: Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Γραμμική συνάρτηση-ανάλογα ποσά, Όμοια τρίγωνα. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.
- Διδακτική ενότητα: Κεφάλαιο 6. Παρ.6.6 Κεφάλαιο 7. Παρ. 7,1

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες με χώρο υλοποίησης το εργαστήριο Η/Υ του σχολείου.

Χρησιμοποιούμενα τεχνολογικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό function probe.

ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Διδακτικοί- Μαθησιακοί στόχοι

- Ως προς τα Μαθηματικά
  1. Οι μαθητές θα μάθουν να *χρησιμοποιούν* την ιδιότητα των ομοίων τριγώνων (διατήρηση του λόγου των πλευρών τους) για να βρίσκουν όμοια μεταξύ τους τρίγωνα.
  2. Θα μάθουν να *υπολογίζουν* τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν είναι γνωστές οι δυο κάθετες πλευρές του.
- Ως προς τις γνωστικές δεξιότητες.
  1. Θα *ερμηνεύσουν* την ύπαρξη συνευθειακών σημείων μέσα στο πλαίσιο της ομοιότητας των τριγώνων.
  2. Θα *αντιστρέψουν* την διαδικασία: γωνία $\longrightarrow$ εφαπτομένη σε εφαπτομένη $\longrightarrow$ γωνία
  3. Θα *συνδέσουν* την γραμμική συνάρτηση με την ομοιότητα των τριγώνων.

- Ως προς την παιδαγωγική αξία.

    1. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ένα σύγχρονο, κοινωνικά καταξιωμένο εργαλείο με το οποίο θα *επιταχύνουν* τις υπολογιστικές δραστηριότητες.
    2. Θα εμπλακούν σε *διερευνητικές* δραστηριότητες και θα *επικοινωνήσουν* τα αποτελέσματά τους.

Η θεωρία μάθησης μέσα στα πλαίσια της οποίας θα γίνει η υλοποίηση.

Το κατασκευαστικό μοντέλο (Κονστρουκτιβισμός) θα αποτελέσει το πλαίσιο μέσα στο οποία θα δομηθεί ο διδακτικός σχεδιασμός του σεναρίου.

Ο μαθητής εκλαμβάνεται αφενός ως ένα εργαστήριο κατασκευής της γνώσης και αφετέρου μέρος μιας ομάδας με την οποία επικοινωνεί και διαπραγματεύεται. Αυτό σημαίνει ότι τόσο το ατομικό στοιχείο όσο και η κοινωνική υπόσταση του λαμβάνονται υπ όψιν και επομένως συντίθεται ο ατομικός και ο κοινωνικός Κονστρουκτιβισμός.

Συγκεκριμένα το κοινό φύλλο εργασίας και η κοινή οθόνη αποτελούν τον πυρήνα επικοινωνίας στην ομάδα και προσδιορίζουν την κοινωνική συνιστώσα. Ακόμη ο τρόπος με τον οποίο ο διδάσκων επικοινωνεί προσωπικά με τον καθένα υπογραμμίζει την ατομική συνιστώσα.

Σύμφωνα με το κατασκευαστικό μοντέλο αφετηρία είναι συνήθως μία κατάσταση προβλήματος του οποίου η λύση δεν είναι υποχρεωτικά μονοσήμαντη και δεν διαφαίνεται από την αρχή. Καθώς ο μαθητής επιχειρεί να λύσει το πρόβλημα χρησιμοποιεί τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του αλλά κυρίως επινοεί συνθέσεις για να αντιμετωπίσει τα επιμέρους προβλήματα που προκύπτουν.

Ο διδάσκων ενισχύει την προσπάθεια των μαθητών χωρίς να παρέχει άμεση συνδρομή στην λύση του προβλήματος, αρκούμενος σε κατάλληλες ερωτήσεις και επισημάνσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές ως αφετηρία για την περαιτέρω ανάλυση της κατάστασης.

Στην υλοποίηση των κατασκευαστικών θεωριών μάθησης κρίσιμο ρόλο παίζουν τα διαθέσιμα εργαλεία. Οι δυνατότητες των εργαλείων, ιδιαίτερα οι αναπαραστασιακές, συμβάλουν στην δημιουργία ευνοϊκών συνθηκών για εξερεύνηση, δημιουργία και επαλήθευση ή απόρριψη εικασιών, επικοινωνία και αναστοχασμό όλων δηλαδή των δράσεων οι οποίες είναι απαραίτητες στην πορεία κατασκευής της νέας γνώσης.

Διάκριση ως προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.

Η γραμμική συνάρτηση και η γραφική της παράσταση διδάσκεται στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου και την Α΄ Λυκείου σε διακριτά κεφάλαια με παραδείγματα από το εμπόριο κυρίως (Α΄, Β΄ Γυμνασίου) ή με απλή συμπλήρωση αριθμητικού πίνακα Γ΄ Γυμνασίου.

Η σύνδεση της συνάρτησης αυτής με την ομοιότητα, στην παρούσα δραστηριότητα, παρακάμπτει τα στεγανά πλαίσια Άλγεβρας- Γεωμετρίας τα οποία είναι ακόμη πιο έντονα με την ύπαρξη διαφορετικών βιβλίων στο Λύκειο.

Ακόμη η δυνατότητα δυναμικής περιστροφής μιας ευθείας προσδίδει ένα ιδιαίτερο νόημα στον συντελεστή διεύθυνσης ο οποίος μετατρέπεται σε ένα μεταβαλλόμενο μέγεθος καθώς περιστρέφεται η ευθεία. Ο συντελεστής διεύθυνσης σε ένα βιβλίο αναφέρεται σε συγκεκριμένη ευθεία και κάθε εικόνα ευθείας αποτελεί και μία διαφορετική ευθεία, ενώ στην οθόνη πρόκειται για *διαφορετικές θέσεις της ίδιας ευθείας*. Η κίνηση της ευθείας τελικά αποτελεί ένα ιδιαίτερο μαθηματικό φαινόμενο.

Ένα άλλο θέμα το οποίο προβάλλεται με την παρούσα δραστηριότητα είναι και αυτό της ταχύτητας με την οποία ένας μαθητής μπορεί να διαχειριστεί ένα μεγάλο πλήθος δεδομένων. Η χρήση του λογισμικού επιτρέπει την επιτάχυνση των ελέγχων των δεδομένων μετατρέποντας την γραφική παράσταση ευθείας σε ένα δυναμικό όργανο ανίχνευσης συνευθειακών σημείων τα οποία αναδεικνύουν σταθερό λόγο πλευρών.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

- Ως προς τα μαθηματικά.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις δυο βασικές ιδιότητες των ομοίων τριγώνων (διατήρηση του μέτρου των γωνιών και διατήρηση του λόγου των πλευρών τους). Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου καθώς και το ότι σχέσεις της μορφής $y=ax$ έχουν γραφική παράσταση ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και αποτελούν την συμβολική έκφραση των αναλόγων ποσών.

- Ως προς τα εργαλεία.

Οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τις δυνατότητες του λογισμικού F.P. Συγκεκριμένα γνωρίζουν την κατασκευή γραφικής παράστασης, την αλλαγή κλίμακας, την αποκοπή σημείων από το γράφημα και την αποστολή τους στον πίνακα τιμών. Ακόμη γνωρίζουν την διαδικασία περιστροφής μίας ευθείας.

Για τον πίνακα τιμών θα πρέπει να γνωρίζουν την συμπλήρωση στηλών και την αποστολή ζευγών αριθμών στο παράθυρο 'γράφημα'. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την δυνατότητα συμπλήρωσης μιας επιπλέον στήλης με το πηλίκο των τιμών δύο άλλων.

Τέλος όσον αφορά στην λειτουργία της αριθμομηχανής θα πρέπει να γνωρίζουν την σημασία της αντιστροφής μέσω του κουμπιού inverse.

- Ως προς τον χώρο υλοποίησης.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Κάθε ομάδα είναι εφοδιασμένη με ένα φύλλο εργασίας και ένα τετράδιο στο οποίο μπορεί να κρατά σημειώσεις ή να απαντά στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

Ο διδάσκων κινείται μεταξύ των ομάδων και συζητά, απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις και παρέχει τεχνικές συμβουλές στους μαθητές.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Φύλλο εργασίας

Ο καθηγητής των Μαθηματικών σε ένα σχολείο δεν βαθμολογεί μόνο την ικανότητα να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα αλλά και το πόσο γρήγορα το λύνει.

Ο καθηγητής λοιπόν έδωσε στους μαθητές έναν πίνακα με τις κάθετες πλευρές β και γ είκοσι ορθογωνίων τριγώνων (πίνακας 1).

Ζήτησε από τους μαθητές να ελέγξουν αν υπάρχουν μεταξύ των τριγώνων αυτών όμοια τρίγωνα και συγχρόνως να τα κατατάξουν σε ομάδες. Επιπλέον ζήτησε να υπολογίσουν τη μικρότερη από τις οξείες γωνίες κάθε τριγώνου.

Ομάδα	Πλευρά β	Πλευρά γ	Γωνία Β
	0,83	1,08	
	0,24	0,57	
	1,58	2,84	
	1,12	2,69	
	2,55	4,59	
	1,02	1,33	
	11,51	14,98	
	1,38	3,31	
	3,43	6,17	
	6,25	8,13	
	2,24	2,91	
	2,51	6,02	
	5,18	6,73	
	6,01	10,82	
	5,67	13,61	
	4,38	10,51	
	3,24	4,21	
	3,01	7,22	
	5,19	9,34	
	4,73	6,15	

Πίνακας 1

Να συζητήσετε και να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Διαθέτουμε δυο τρίγωνα και θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι όμοια, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

2. Αν περάσουμε τις τιμές των πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων σε δυο στήλες του πίνακα τιμών του F.P, πως μπορούμε να διακρίνουμε τα όμοια τρίγωνα;

3. Αν περάσουμε τα ζεύγη των καθέτων πλευρών στον πίνακα γράφημα και κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης y=χ, πως μπορούμε να εντοπίσουμε τις ομάδες των ομοίων τριγώνων;

4. Πως συνδέονται οι απαντήσεις στις δύο προηγούμενες ερωτήσεις;

5. Έχετε εντοπίσει τις ομάδες των ομοίων τριγώνων. Στην πρώτη (κενή) στήλη του πίνακα που έχει δοθεί στο φύλλο εργασίας σε κάθε κελί να γράψετε την ομάδα στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο τρίγωνο ($1^η$. $2^η$, $3^η$). Αν σας ζητούσαν να συμπληρώσετε στην δεύτερη ομάδα ένα τρίγωνο όμοιο με τα ήδη υπάρχοντα πως θα μπορούσε να γίνει αυτό;

6. Τώρα θα πρέπει να συμπληρωθεί η τρίτη στήλη με τις γωνίες των τριγώνων. Θα πρέπει να υπολογίσουμε 20 διαφορετικές γωνίες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός συνδέεται με τα δεδομένα του προβλήματος;

Με τη βοήθεια της αριθμομηχανής να υπολογίσετε τη γωνία B που αντιστοιχεί σε κάθε πηλίκο και τα αποτελέσματα να περαστούν στην τρίτη στήλη.

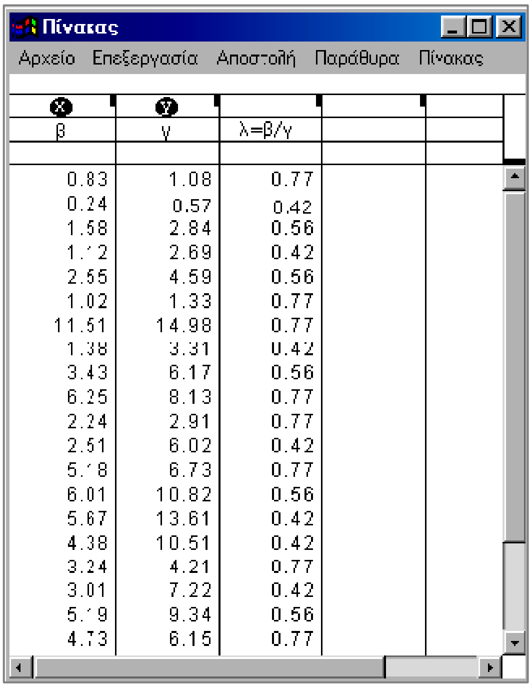
Πρώτη φάση

Στην αρχή ο διδάσκων επιχειρεί να κινητοποιήσει τους μαθητές επισημαίνοντας ότι στην δραστηριότητα αυτή εκτός από το αποτέλεσμα έχει σημασία και ο χρόνος υλοποίησης ο οποίος θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με την βοήθεια των υπολογιστικών εργαλείων που διαθέτουν.

1. Στην ερώτηση 1 ουσιαστικά θα γίνει μια αναφορά από τους μαθητές των ιδιοτήτων των ομοίων τριγώνων. Οι μαθητές θα πρέπει να αναφέρουν ότι δυο όμοια τρίγωνα

έχουν ίσες γωνίες και πλευρές ανάλογες. Εδώ θα υπογραμμιστεί ότι οι ίσες γωνίες βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές. Είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί ότι ο λόγος δυο καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου παραμένει σταθερός σε κάθε όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο.

2. Στην ερώτηση 2 οι ομάδες θα διαπραγματευτούν το ερώτημα με βάση την απάντηση στο ερώτημα 1 και τις δυνατότητες του λογισμικού. Ενδεικτικά θα μπορούσαν να ζητήσουν από το λογισμικό να συμπληρώσει μία επιπλέον στήλη με το πηλίκο των τιμών των δύο άλλων στηλών. Ο διδάσκων συζητά με κάθε ομάδα την δυνατότητα αυτή ή οποιαδήποτε άλλη λύση προτείνουν τα μέλη της ομάδας. Στην ερώτηση 2 τα όμοια τρίγωνα καθορίζονται από τους ίσους λόγους οι οποίοι προκύπτουν στη τρίτη στήλη από όπου οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την αντίστοιχη ιδιότητα των ομοίων τριγώνων.



β	γ	λ=β/γ
0.83	1.08	0.77
0.24	0.57	0.42
1.58	2.84	0.56
1.[illegible]2	2.69	0.42
2.55	4.59	0.56
1.02	1.33	0.77
11.51	14.98	0.77
1.38	3.31	0.42
3.43	6.17	0.56
6.25	8.13	0.77
2.24	2.91	0.77
2.51	6.02	0.42
5.[illegible]8	6.73	0.77
6.01	10.82	0.56
5.67	13.61	0.42
4.38	10.51	0.42
3.24	4.21	0.77
3.01	7.22	0.42
5.[illegible]9	9.34	0.56
4.73	6.15	0.77

Εικόνα 1

Αν οι μαθητές κατασκευάσουν μια τρίτη στήλη (εικόνα 1) η οποία να υπολογίζει το πηλίκο β/γ τότε θα παρατηρήσουν ότι το πηλίκο αυτό παίρνει τρεις διαφορετικές τιμές 0,77 , 0,56 και 0,42. Οι τιμές αυτές καθορίζουν και τις τρεις ομάδες ομοίων τριγώνων.

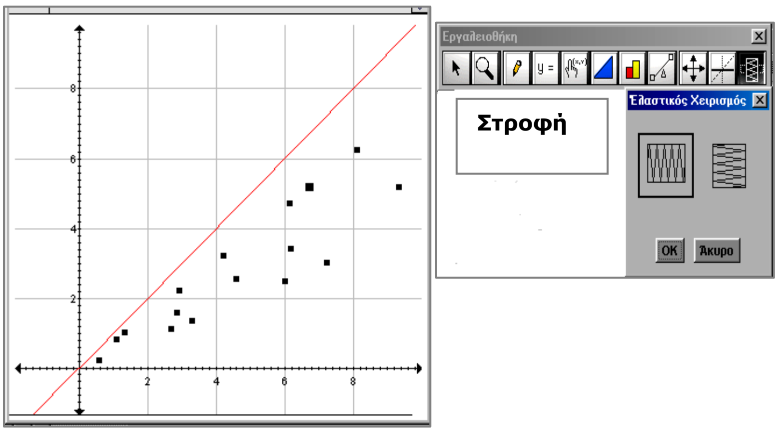
Εδώ καλό θα είναι να υπογραμμιστεί ότι το πηλίκο β/γ δεν είναι λόγος ομοιότητας αλλά αποτελεί κριτήριο ομοιότητας όταν παραμένει σταθερό σε διάφορα τρίγωνα.

Ακόμη καλό θα ήταν στον άξονα χ΄χ να τοποθετηθούν οι τιμές της πλευράς γ γιατί τότε το πηλίκο γ/χ θα εκφράζει την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας Β και οι τιμές της εφαπτομένης θα παρουσιάζονται στην τρίτη στήλη.

3. Στην ερώτηση 3 ο διδάσκων θέτει το ερώτημα αν τα ζεύγη τιμών μεταφερόμενα στους άξονες του πίνακα γράφημα παρουσιάσουν κάποια κανονικότητα. Η συζήτηση πάνω στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα σημεία μάλλον θα παρουσιάσουν τρεις διαφορετικές κανονικότητες, μια για κάθε ομάδα σημείων. Εδώ τίθεται πλέον το ερώτημα πως θα ανακαλυφθούν οι τρεις ομάδες με τις δυνατότητες που μας παρέχει ο πίνακας γράφημα.

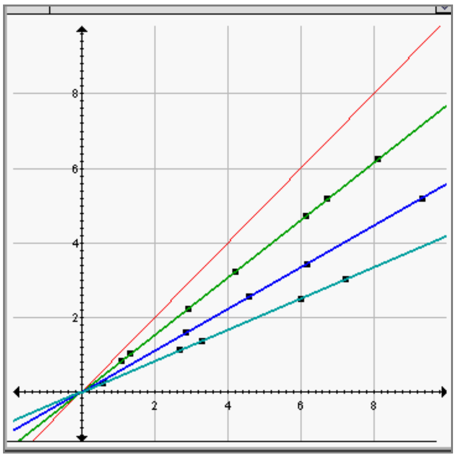
   Οι αναλογίες θα πρέπει να παραπέμψουν τους μαθητές σε γραμμικές σχέσεις οι οποίες εκφράζονται από εξισώσεις της μορφής y=α.χ.

   Στη συνέχεια οι μαθητές αποστέλλουν τα σημεία στους άξονες (εικόνα 2).



Εικόνα 2

Οι μαθητές κατασκευάζουν την ευθεία y=χ και στη συνέχεια με το εργαλείο του ελαστικού χειρισμού περιστρέφουν την ευθεία ώστε να προσαρμοστεί πάνω στα σημεία (εικόνα 3).



Εικόνα 3

Μέσω της περιστροφής της ευθείας με εξίσωση y=χ οι μαθητές ανακαλύπτουν τρεις ομάδες

συνευθειακών σημείων ενώ συγχρόνως το λογισμικό τους δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουν και τις εξισώσεις των τριών ευθειών που προκύπτουν:

y=0,77x

y=0,56x

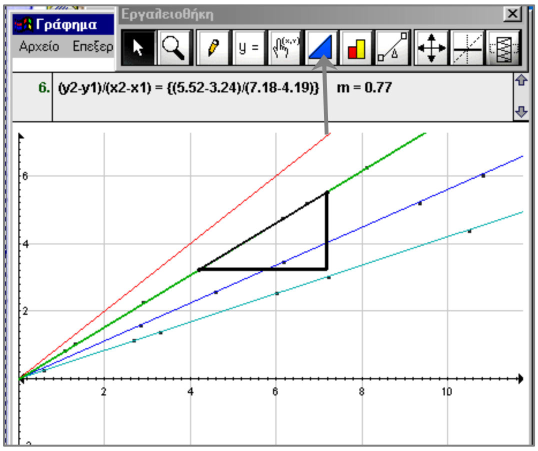
y=0,42x

4. Στην ερώτηση 4 οι μαθητές στοχάζονται και συζητούν τα αποτελέσματα στις δύο προηγούμενες ερωτήσεις μα στόχο να τα συνδέσουν.

   Μία σύνδεση θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι οι λόγοι που είχαν εντοπίσει με τον πίνακα τιμών εμφανίζονται ως συντελεστές διεύθυνσης στις ευθείες του ερωτήματος 3. Αυτό παραπέμπει σε τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας που βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη πλευρά.

   Εδώ ο διδάσκων έχει την δυνατότητα να οδηγήσει τους μαθητές στην ανάκληση της έννοιας της κλίσης ευθείας η οποία μπορεί να διερευνηθεί μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού.

   Η κλίση κάθε ευθείας μπορεί να εντοπιστεί με τη βοήθεια του κατάλληλου εργαλείου που υποδεικνύει και το οποίο λειτουργεί εφόσον έχει επιλεγεί μια συγκεκριμένη ευθεία.



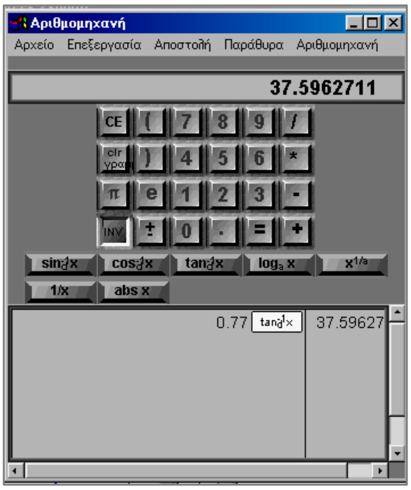
Εικόνα 4

Εδώ το σημαντικό είναι ότι το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο κατασκευάζει το λογισμικό (εικόνα 4) έχει πλευρές των οποίων τα μέτρα είναι ανάλογα προς τα μέτρα των πλευρών των τριγώνων της ομάδας. Οι μαθητές τώρα μπορούν να κατασκευάσουν οσαδήποτε τρίγωνα όμοια προς τα τρίγωνα της αντίστοιχης ομάδας. Οπότε απαντούν και στην ερώτηση 5.

Φάση δεύτερη

1. Στην ερώτηση 6 οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν μια βασική ιδιότητα των ομοίων τριγώνων (έχουν ίσες γωνίες) ώστε να απαντήσουν ότι απαιτείται υπολογισμός μόνο τριών διαφορετικών γωνιών, όσες δηλαδή είναι και οι ομάδες.

2. Στην ερώτηση 7 οι μαθητές θα πρέπει μετά από διαπραγμάτευση να αναγνωρίσουν στο πηλίκο β/γ την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης της γωνίας Β. Ακόμη θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι το πρόβλημα το οποίο καλούνται να λύσουν είναι: ‶ Να υπολογιστεί η τιμή της γωνίας ω όταν είναι γνωστή η τιμή της εφω.



Εικόνα 5

Το πρόβλημα αυτό είναι το αντίστροφο του συνηθισμένου προβλήματος '' Να υπολογιστεί η τιμή της εφω όταν είναι γνωστή η τιμή ω'' και αυτό θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές αφού έτσι θα καταλάβουν τη σημασία να επιλέξουμε το κουμπί INV (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΉ) στην αριθμομηχανή ώστε να εμφανιστεί το κουμπί $\tan^{-1}\chi$ με το οποίο μπορούμε να υπολογίζουμε τη γωνία όταν γνωρίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας (εικόνα 5).

Περιγραφή-Αναφορά από τους μαθητές της υλοποίησης της δραστηριότητας.

Μετά την ολοκλήρωση των φάσεων της δραστηριότητας οι μαθητές περιγράφουν γραπτώς την πορεία και τα αποτελέσματά της.

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να απαντήσουν σε συγκεκριμένα ερωτήματα ώστε να τα χρησιμοποιήσουν ως βάση διαπραγμάτευσης.

Τα ερωτήματα αυτά θα μπορούσαν να έχουν την παρακάτω δομή και σειρά:

1. Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσατε το λογισμικό για να εντοπίσετε όμοια τρίγωνα και να αναφέρετε τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες αξιοποιήσατε το λογισμικό.
2. Να τεκμηριώσετε την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων σας, για ποιόν λόγο δηλαδή μπορεί να είναι κάποιος βέβαιος ότι οι στήλες έχουν συμπληρωθεί με τα σωστά αριθμητικά δεδομένα.
3. Να αναφέρετε και να σχολιάσετε τυχόν νέα μαθηματικά δεδομένα που προέκυψαν κατά την διάρκεια της δραστηριότητας. Συγκεκριμένα να περιγράψετε τις συνδέσεις που έχετε κάνει μεταξύ μαθηματικών εννοιών οι οποίες δεν ήταν φανερές στο

σχολικό βιβλίο και τα μαθήματα που είχατε μέχρι στιγμής παρακολουθήσει στο σχολείο.

4. Να αναφέρετε τυχόν δυσκολίες τις οποίες συναντήσατε και τον τρόπο με τον οποίο τις ξεπεράσατε.

ΠΙΘΑΝΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Η επέκταση στηρίζεται στην βασική ιδέα της κύριας δραστηριότητας και επιχειρεί να συνδέσει την έννοια της ομοιότητας με την τετραγωνική συνάρτηση μέσω του εμβαδού ομοίων ορθογωνίων τριγώνων.

Φύλλο εργασίας

Δίνονται 11 ορθογώνια τρίγωνα. Ο πίνακας 2 στην πρώτη στήλη περιέχει τα μήκη της μιας κάθετης πλευράς α και στη δεύτερη τα μήκη της άλλης κάθετης πλευράς β. Η τρίτη στήλη θα συμπληρωθεί με τα εμβαδά των τριγώνων.

α	β	Ε
0.13	0.2	
1.25	1.88	
2.58	3.87	
3.9	5.85	
5.12	7.68	
6.7	10.05	
8	12	
9.4	14.1	
11.23	16.85	
13.1	19.65	
15	22.5	

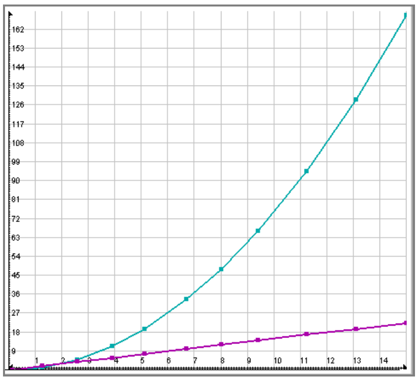
Πίνακας 2

1. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι όμοια με τη βοήθεια του πίνακα τιμών του FP αλλά και με τον πίνακα γράφημα.
2. Να συμπληρώσετε τη στήλη του εμβαδού με τη βοήθεια του λογισμικού.
3. Να αποστείλετε τη στήλη της πλευράς α και του εμβαδού στους άξονες. Ποια σχέση συνδέει το εμβαδόν με την πλευρά;

Συνοπτική υλοποίηση της επέκτασης.

1. Το πηλίκο β/α παραμένει σταθερό (1,5) άρα τα τρίγωνα, με δεδομένο ότι είναι ορθογώνια, είναι όμοια.

Η αποστολή των ζευγών στους άξονες δημιουργεί συνευθειακά σημεία που δείχνουν ανάλογα ποσά.(είναι τα κάτω σημεία στην εικόνα 6)



Εικόνα 6

2. Οι μαθητές θα πληκτρολογήσουν τον τύπο Ε=0.5αβ

3. Τα σημεία θα διαταχθούν όπως δείχνει η εικόνα (τα επάνω σημεία). Πρόκειται μάλλον για δευτεροβάθμια σχέση και αυτό επιβεβαιώνεται από το ότι:

   $E=0.5\alpha\beta =0.5\alpha(1.5\alpha)=0.75\alpha^2$