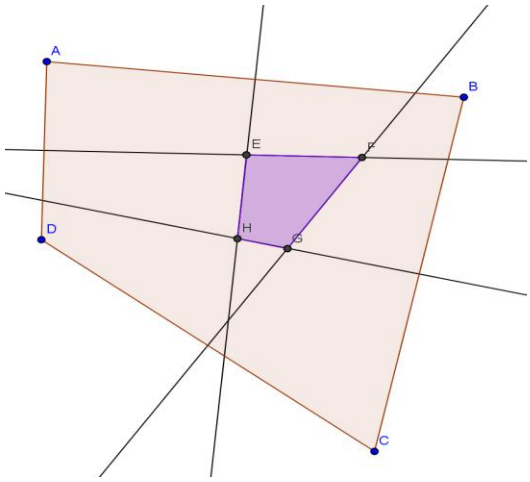
ΤΑ ΑΝΟΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Καλογήρου Μ. – Ταμπάκος Κ.

Να διερευνήσετε τις ιδιότητες του τετραπλεύρου που ορίζουν ανά δύο οι μεσοκάθετοι των διαδοχικών πλευρών του

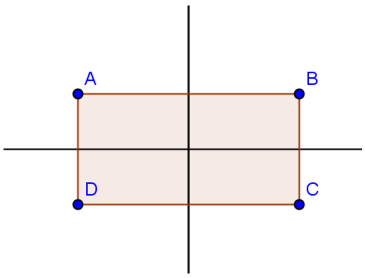


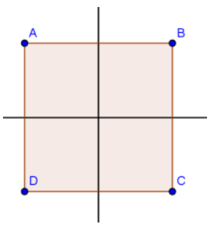
Το πρόβλημα αυτό έχει τα χαρακτηριστικά των «ανοικτών προβλημάτων». Σε ένα πρόβλημα που παρουσιάζεται σε μια ανοιχτή μορφή οι ίδιοι οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν για την επιλογή μιας πορείας λύσης. Συνεπώς, τίθενται αντιμέτωποι με μια κατάσταση στην οποία πρέπει να *ανακαλύψουν* ένα αποτέλεσμα, το οποίο μπορεί και να μην είναι το μοναδικό. Ένα ανοιχτό πρόβλημα επιτρέπει την ελευθερία στην παραγωγή των υποθέσεων. Απαιτεί από τους μαθητές να θέσουν οι ίδιοι ερωτήματα και όχι να απαντήσουν στα προκαθορισμένα. Για να λυθεί ένα ανοιχτό πρόβλημα οι μαθητές πρέπει να υποβληθούν στην ακόλουθη διαδικασία: να αναπαραστήσουν σχηματικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα, να διερευνήσουν τη γεωμετρική κατάσταση του προβλήματος, να κάνουν υποθέσεις, να επικυρώσουν τις υποθέσεις και στο τέλος να παρουσιάσουν μια γραπτή απόδειξη του προβλήματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η προσοχή να στρέφεται όχι μόνο στην «παραγωγή της λύσης» αλλά στη «διαδικασία» που την παράγει.

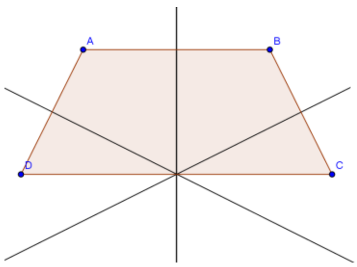
Στη συνέχεια , ενδεικτικά, προτείνουμε η ανάπτυξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος να ολοκληρωθεί σε τέσσερα στάδια:

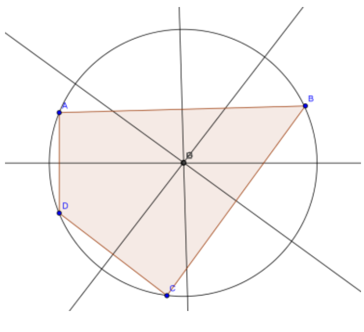
<u>Α. Ύπαρξη τετραπλεύρου</u>

Το ζητούμενο τετράπλευρο δεν έχει νόημα ύπαρξης όταν οι μεσοκάθετοι συντρέχουν. Οι μεσοκάθετοι ενός τετραπλεύρου συντρέχουν όταν είναι εγγράψιμο σε κύκλο .Γνωστά εγγράψιμα τετράπλευρα είναι τα ορθογώνια, τα τετράγωνα, τα ισοσκελή τραπέζια στα οποία οι μεσοκάθετοι των πλευρών διέρχονται από το κέντρο του περιγεγραμμένου τους κύκλου.





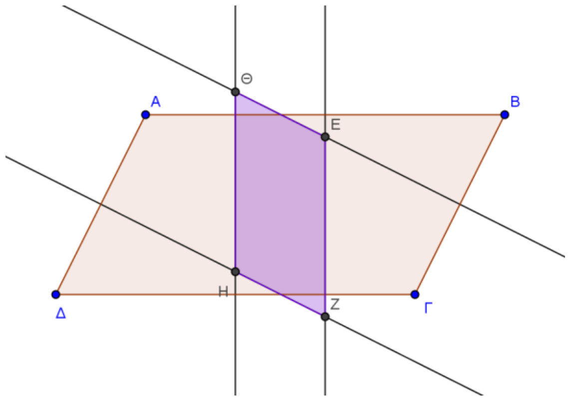




B. Μελέτη απλούστερων και γνωστών σχημάτων .Η περίπτωση του παραλληλογράμμου

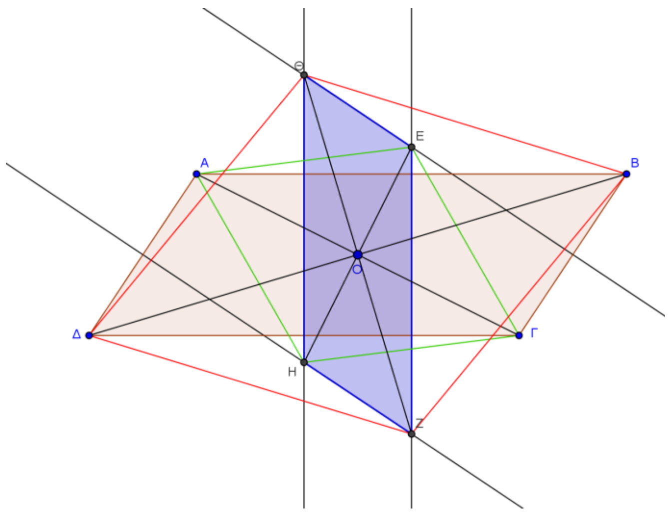
Συχνά ,κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος , επιλέγουμε να επιλύσουμε αρχικά ένα απλούστερο πρόβλημα , κυρίως μέσω της ειδίκευσης. Ειδίκευση είναι η μετάβαση από τη θεώρηση ενός δοσμένου συνόλου αντικειμένων σε ένα μικρότερο σύνολο, που περιέχεται στο αρχικό (G.Polya 1957). Έτσι μπορούμε να διερευνήσουμε αρχικά τις ιδιότητες του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τις μεσοκαθέτους των πλευρών ενός πλαγίου παραλληλογράμμου , αντί τυχαίου τετραπλεύρου.

Ας θεωρήσουμε πλάγιο παράλληλόγραμμο ΑΒΓΔ .Οι μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ τέμνονται στο Ε, των ΒΓ και ΓΔ στο Θ , των ΓΔ και ΑΔ στο Η και των ΑΔ και ΑΒ στο Ζ. ‘Ετσι σχηματίζεται το τετράπλευρο ΕΖΗΘ , του οποίου θα διερευνήσουμε ενδεικτικά κάποιες από τις ιδιότητες του .



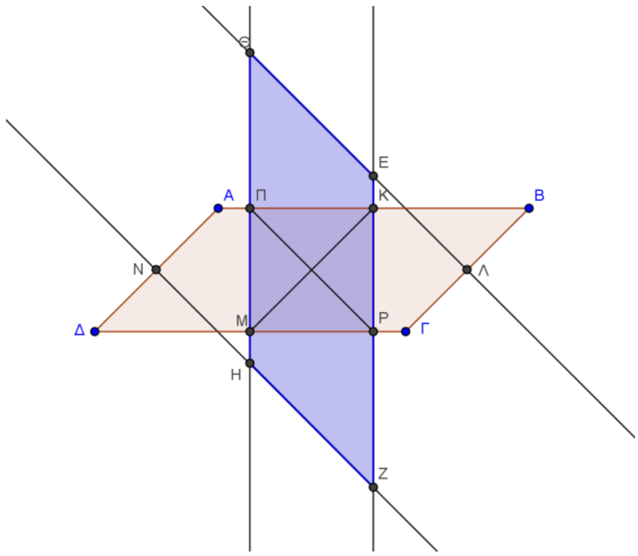
I. *Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι επίσης παρ/μο.*
Πράγματι , το ΕΖΗΘ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες αφού είναι κάθετες στις απέναντι παράλληλες πλευρές του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
II. *Οι γωνίες του ΕΖΗΘ είναι ανά δύο ίσες με τις γωνίες του ΑΒΔΓ.*
Πράγματι οι γωνίες ΗΘΕ και ΑΒΓ των παρ/μων ΘΗΖΕ και ΑΒΓΔ αντίστοιχα , είναι ίσες μεταξύ τους ως γωνίες με πλευρές κάθετες
III. *Τα τετράπλευρα ΑΕΓΗ και ΔΘΒΖ είναι ρόμβοι.*
IV. *Οι διαγώνιοι των δυο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ τέμνονται κάθετα μεταξύ τους και διέρχονται από το ίδιο σημείο , δηλαδή τα δυο παραλληλόγραμμα έχουν ίδιο κέντρο.*

Πράγματι, έστω Ο το κέντρο του παρ/μου ΑΒΔΓ . Το Θ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΓΔ , άρα ΘΓ=ΘΔ και στη μεσοκάθετο του ΒΓ, άρα ΘΓ=ΘΒ, οπότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΔ (1). Ομοίως το Ζ ανήκει στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΑΔ , άρα ΖΒ=ΖΑ και ΖΑ=ΖΔ, δηλαδή ΖΔ=ΖΒ, άρα το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΔ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η ΘΖ είναι μεσοκάθετος του ΒΔ, άρα διέρχεται από το μέσο Ο του ΒΔ. Εργαζόμενοι ανάλογα ,συμπεραίνουμε ότι και η ΕΗ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα θα διέρχεται από το μέσο Ο του ΑΓ.



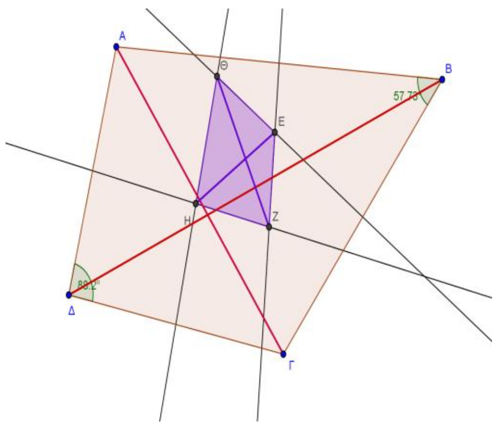
Άρα τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν κοινό κέντρο. Επίσης τα τρίγωνα ΔΟΘ και ΖΟΒ είναι ίσα, άρα ΔΘ=ΒΖ. Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι ΘΒ=ΒΖ=ΔΖ=ΘΔ, άρα το ΔΘΒΖ είναι ρόμβος, άρα οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι το ΑΕΓΗ είναι

V. *Το κοινό μέρος των δυο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο ,αν μια γωνία του ΑΒΓΔ είναι 45^o .*



Πράγματι, στο διπλανό σχήμα ισχύει ΑΚ//=ΔΜ , άρα το ΑΚΜΔ είναι παραλληλόγραμμο ,οπότε ΑΔ//=ΚΜ και επειδή το ΠΚΡΜ είναι ορθογώνιο θα είναι ΜΚ=ΠΡ, άρα τα τραπέζια ΑΠΡΔ και ΠΡΓΒ θα είναι ισοσκελή. Δηλαδή οι γωνίες ΑΔΡ και ΠΡΔ θα είναι ίσες. Όμως ΑΔΡ=ΗΖΕ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες) και ΠΡΚ=90^o –ΠΡΔ=90^O –ΗΖΕ. Αν το ΠΚΡΜ είναι τετράγωνο, οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα ΠΡΚ=45^o. Τότε όμως και ΗΖΕ=45^O άρα ΑΔΡ=45^o . Δηλαδή αν στο αρχικό παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι 45^o, τότε το ΠΚΡΜ είναι τετράγωνο.

<u>Γ. Γενίκευση σε τυχαίο τετράπλευρο.</u>



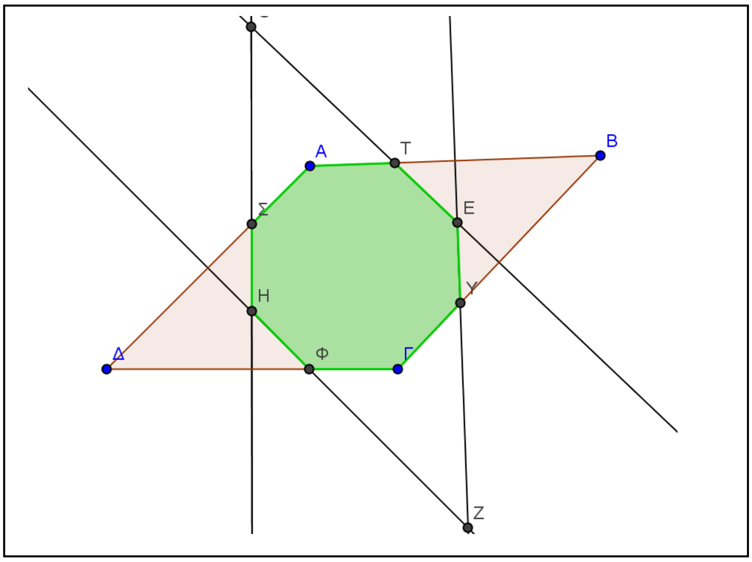
Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη απλούστερη περίπτωση , είναι πιο εύκολο να γενικεύσουμε σε τυχαίο τετράπλευρο , κάνοντας εικασίες και ελέγχοντας τους συλλογισμούς μας. Έτσι καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

I. Τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν ανά δυο τις γωνίες τους ίσες.
II. Δεν έχουν κοινό κέντρο, αλλά οι διαγώνιές τους τέμνονται ανά δυο κάθετα.
III. Τα ΑΕΓΗ και ΔΘΒΖ είναι ορθοδιαγώνια τετράπλευρα.
IV. Το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος ή τραπέζιο ,αν και το αρχικό τετράπλευρο είναι αντίστοιχα ρόμβος ή τραπέζιο.
(Τα παραπάνω αποδεικνύονται εύκολα , με ανάλογο τρόπο όπως αποδείξαμε στην περίπτωση του πλαγίου παραλληλογράμμου)

<u>Δ. Επέκταση (δημιουργικές –συνθετικές εργασίες)</u>

Το αρχικό πρόβλημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν αφετηρία για να διερευνηθούν και να ανακαλυφθούν νέες σχέσεις, ιδιότητες και παραδείγματα. Παράδειγμα:

Έστω ότι η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει τη ΒΓ σε εσωτερικό σημείο Υ, η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΒ σε εσωτερικό σημείο Τ, η μεσοκάθετος της ΓΔ τέμνει την ΑΔ σε εσωτερικό σημείο Σ, η μεσοκάθετος της ΑΔ τέμνει τη ΓΔ σε εσωτερικό σημείο Φ. Να βρείτε τις προυποθέσεις που πρέπει να πληροί το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , έτσι ώστε το ΑΤΕΥΓΦΗΣ να είναι κανονικό οκτάγωνο.



Φυσικά υπάρχει πλήθος ιδιοτήτων σχέσεων και θεωρημάτων που προκύπτουν από τη μελέτη του τετραπλεύρου που ορίζουν ανά δυο οι μεσοκάθετοι των διαδοχικών πλευρών του, τα οποία θα μπορούσαμε να ανακαλύψουμε και να επαληθεύσουμε. Εμείς απλά δώσαμε το έναυσμα για μια περεταίρω ενασχόληση και έρευνα από τους μαθητές.