

ΘΕΩΡΙΑ 1 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί: Οι αριθμοί που βρίσκουμε στην φύση (Natura), δηλαδή το σύνολο των αριθμών
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100, 101, \dots, 2000, \dots\}$ δηλαδή ξεκινάνε από το μηδέν και προχωράνε ανά μία μονάδα
- Πως μπορούμε να γράψουμε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό:
Χρησιμοποιούμε τα εξής δέκα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Ασκήσεις

1. Σωστό ή λάθος

- α) Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι Σ Λ
β) Οι φυσικοί αριθμοί έχουν ελάχιστο στοιχείο και είναι το μηδέν Σ Λ
γ) Οι φυσικοί αριθμοί έχουν μέγιστο στοιχείο Σ Λ
δ) Τα έτη που γεννηθήκαμε είναι φυσικοί αριθμοί Σ Λ
ε) Τα νούμερα των ποδοσφαιριστών στις φανέλες είναι φυσικοί αριθμοί
 Σ Λ
στ) Τα κιλά είναι πάντα φυσικός αριθμός Σ Λ
ζ) Το ύψος είναι πάντα φυσικός αριθμός Σ Λ
η) Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν προηγούμενο και έναν επόμενο φυσικό αριθμό Σ Λ
θ) Το μηδέν έχει μόνο επόμενο φυσικό αριθμό Σ Λ

2. Κυκλώστε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι φυσικοί.

- α) 2365 β) 12,34 γ) - 12 δ) 7/12 ε) 0 στ) 1001 ζ) $1\frac{1}{2}$ η) 0,1

3) Ποιες από τις καθημερινές εκφράσεις που χρησιμοποιούμε είναι φυσικοί αριθμοί

- α) Όταν φτερνιζόμαστε και μας λένε ένα νούμερο
β) Η ηλικία μας
γ) Το βάρος μας
δ) Το ύψος μας
ε) Το νούμερο των παπουτσιών μας
στ) Καρπούζια που αγοράζουμε
ζ) Θερμοκρασία τόπου
η) Οι αριθμοί του Λόττο
θ) Έκπτωση ή ΦΠΑ (19%)

ΘΕΩΡΙΑ 2 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται στους άρτιους και στους περιττούς
- **Άρτιοι** (ή ζυγοί) αριθμοί είναι οι αριθμοί που τελειώνουν στα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8
- **Περιττοί** (ή μονοί) αριθμοί είναι οι αριθμοί που τελειώνουν στα ψηφία 1, 3, 5, 7, 9

Ασκήσεις

1. Βάλτε Χ στο κουτάκι που ανήκει κάθε αριθμός.

Παραδείγματα	Άρτιος	Περιττός
12		
358		
246801		
2008		
210		
Μήνα που γεννηθήκατε		
Νούμερο παπουτσιών		
Πινακίδα αυτοκινήτου (πχ. 6625)		
Έτος ίδρυσης της ΑΕΚ (1924)		
2,34		

2. Σωστό ή λάθος

- α) Υπάρχει φυσικός αριθμός που να είναι άρτιος και περιττός Σ Λ
- β) Το μηδέν είναι περιττός Σ Λ
- γ) Αν α άρτιος τότε ο επόμενος αριθμός είναι περιττός Σ Λ
- δ) Αν α περιττός τότε ο προηγούμενος αριθμός είναι άρτιος Σ Λ
- ε) Οι άρτιοι αριθμοί είναι περισσότεροι από τους περιττούς Σ Λ
- στ) Το πλήθος των μαθητών μέσα στην τάξη είναι περιττό Σ Λ

ΘΕΩΡΙΑ 3 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Τι σημαίνει διατάσσουμε τους φυσικούς αριθμούς; Σημαίνει ότι τους βάζουμε σε μία σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά)
- Ποια σύμβολα υπάρχουν για την σύγκριση των φυσικών αριθμών; Τα σύμβολα είναι $<$, $>$, $=$
- Αν $\alpha < \beta$ σημαίνει ότι ο α είναι μικρότερος από το β και βρίσκεται πιο αριστερά στον άξονα των φυσικών αριθμών
- Αν $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι το α είναι μεγαλύτερο από το β και βρίσκεται πιο αριστερά στον άξονα των φυσικών αριθμών
- Αν $\alpha = \beta$ σημαίνει ότι το α είναι ίσο με το β και βρίσκονται στην ίδια θέση στον άξονα των πραγματικών αριθμών
- Πως ονομάζεται το κάθε ψηφίο ενός φυσικού αριθμού; Βλέπε το παράδειγμα.
Πχ 254.897
7: μονάδες, 9: δεκάδες 8: εκατοντάδες 4: χιλιάδες 5: δεκάδες χιλιάδες και το 2: εκατοντάδες χιλιάδες

Ασκήσεις

1. Βάλτε το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$, $=$ στα παρακάτω κενά μεταξύ των φυσικών αριθμών.

- α) 123 ... 132 β) 1111.... 111 γ) 8.765.... 8.977 δ) 242 ... 242
ε) 123.897 87.452 στ) 0 ... 100 ζ) 1.234.567.890 12.345.6789

2. Τοποθετήστε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

5.315 , 12.380 , 5.153 , 779, 5.100 , 4.550, 5.135, 5.305

Λύση:

3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τα κατάλληλα ψηφία όπου χρειάζονται

Αριθμοί	Μονάδες	Δεκάδες	Εκατοντάδες	Χιλιάδες	Δεκάδες χιλιάδες	Εκατοντάδες χιλιάδες
123.456						
208.895						
8.906						
12						
9						
1010						
812						

ΘΕΩΡΙΑ 4 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Πρόσθεση φυσικών αριθμών
- $\alpha + \beta = \gamma$
- α, β : προσθετέοι
- γ : άθροισμα (το αποτέλεσμα της πρόσθεσης)
- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- Πρόσθεση με το μηδέν: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

Ασκήσεις

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Παράδειγμα	Προσθετέοι	Άθροισμα	Άρτιος ή Περιττός
137 + 245	137 και 245	382	άρτιος
2.137 + 8.896			
56.567 + 89.347			
3.123 + 3.321			
89.360 + 2.356			
1.278.345 + 56.812			
230.828 + 6.729.012			
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10			
	23 και ;	182	
	12 και 524		
2.670 +	576 και		

2. Να συμπληρώσετε τα κενά με τα κατάλληλα ψηφία:

$$\begin{array}{r}
 67_3_48 \\
 + \quad _245_9 \\
 \hline
 _54_11_
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3_ _ _ _ 6 \\
 + _16486_ \\
 \hline
 5662145
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 _ _ 65 _ _ 7 \\
 + \quad 17 _ _ 34 _ \\
 \hline
 6289662
 \end{array}$$

3. Να γίνουν οι παρακάτω προσθέσεις με το μηδέν:

- α) $5 + 0 = \dots$ β) $0 + 2008 + 3 = \dots$ γ) $234 + 0 = \dots$ δ) $0 + 0 = \dots$
 ε) $1201 + 0 = \dots$ στ) $11 + 0 + 12 + 0 + 13 + 0 + 14 + 0 + 15 + 0 + 16 = \dots$

4) Να γίνει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης:

- α) $4 + 8 = \dots + \dots$ β) $54 + 72 = \dots + \dots$ γ) $\nabla + \square = \dots + \dots$
 δ) $1 + 99 = \dots + \dots$ ε) $\clubsuit + \heartsuit = \dots + \dots$ στ) $0 + 777 = \dots + \dots$

5) Να γίνει η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης:

α) $1 + (99 + 234) = (... + ...) + ...$

β) $99 + (101 + 23.458) = (... + ...) + ...$

γ) $\nabla + (\heartsuit + \clubsuit) = (... + ...) + ...$

δ) $0 + (999 + 1.324) = (... + ...) + ...$

ΘΕΩΡΙΑ 5 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Αφαίρεση φυσικών αριθμών
- $\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$ ή $M - A = \Delta \Leftrightarrow M = A + \Delta$
- α : Μειωτέος (M)
- β : Αφαιρετέος (A)
- γ : Διαφορά (Δ) (το αποτέλεσμα της αφαίρεσης)
- Για να είναι η διαφορά φυσικός αριθμός πρέπει $M > A$
- Για να βρούμε την αφαίρεση $M - A = \Delta$ αρκεί να κάνουμε πρόσθεση $M = A + \Delta$

Ασκήσεις

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Αφαίρεση	Μειωτέος	Αφαιρετέος	Διαφορά
$5 - 3$	5	3	2
$1.213 - 567$			
$567 - 567$			
$231.456 - 86.502$			
	5.160	238	
	234.678	79.999	
		345	57
		123	32
	234		180

2. Σωστό ή Λάθος

- α) Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην αφαίρεση, δηλαδή
 πχ. $5 - 3 = 3 - 5$ Σ Λ
- β) Ισχύει, $\alpha - 0 = \alpha$ Σ Λ
- γ) Ισχύει, $\alpha - \alpha = 0$ Σ Λ
- δ) Αν έχουμε μειωτέο το 7 και αφαιρετέο το 1 τότε η διαφορά είναι το 5
Σ Λ
- ε) Αν αφαιρούμε δυο φυσικούς αριθμούς, τότε και η διαφορά τους είναι φυσικός αριθμός Σ Λ

ΘΕΩΡΙΑ 6 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /

- Πρόσθεση του ίδιου αριθμού με τον εαυτό του
- $\underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{\text{ν φορές}} = \nu \cdot \alpha$
- $\alpha \cdot \beta = \gamma$
- α, β : παράγοντες
- γ : γινόμενο (το αποτέλεσμα του πολ/μου)
- **Ουδέτερο στοιχείο η μονάδα (το 1 «χάνει» στον πολ/μο):**
 $\alpha \cdot 1 = \alpha$
- **Πολ/μος με το μηδέν (το 0 «κερδίζει» πάντα στον πολ/μο):**
 $\alpha \cdot 0 = 0$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα:** $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα:** $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα:** $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα της προπαίδειας:

0·0=	1·0=	2·0=	3·0=	4·0=	5·0=
0·1=	1·1=	2·1=	3·1=	4·1=	5·1=
0·2=	1·2=	2·2=	3·2=	4·2=	5·2=
0·3=	1·3=	2·3=	3·3=	4·3=	5·3=
0·4=	1·4=	2·4=	3·4=	4·4=	5·4=
0·5=	1·5=	2·5=	3·5=	4·5=	5·5=
0·6=	1·6=	2·6=	3·6=	4·6=	5·6=
0·7=	1·7=	2·7=	3·7=	4·7=	5·7=
0·8=	1·8=	2·8=	3·8=	4·8=	5·8=
0·9=	1·9=	2·9=	3·9=	4·9=	5·9=
0·10=	1·10=	2·10=	3·10=	4·10=	5·10=

$6 \cdot 0 =$	$7 \cdot 0 =$	$8 \cdot 0 =$	$9 \cdot 0 =$	$10 \cdot 0 =$
$6 \cdot 1 =$	$7 \cdot 1 =$	$8 \cdot 1 =$	$9 \cdot 1 =$	$10 \cdot 1 =$
$6 \cdot 2 =$	$7 \cdot 2 =$	$8 \cdot 2 =$	$9 \cdot 2 =$	$10 \cdot 2 =$
$6 \cdot 3 =$	$7 \cdot 3 =$	$8 \cdot 3 =$	$9 \cdot 3 =$	$10 \cdot 3 =$
$6 \cdot 4 =$	$7 \cdot 4 =$	$8 \cdot 4 =$	$9 \cdot 4 =$	$10 \cdot 4 =$
$6 \cdot 5 =$	$7 \cdot 5 =$	$8 \cdot 5 =$	$9 \cdot 5 =$	$10 \cdot 5 =$
$6 \cdot 6 =$	$7 \cdot 6 =$	$8 \cdot 6 =$	$9 \cdot 6 =$	$10 \cdot 6 =$
$6 \cdot 7 =$	$7 \cdot 7 =$	$8 \cdot 7 =$	$9 \cdot 7 =$	$10 \cdot 7 =$
$6 \cdot 8 =$	$7 \cdot 8 =$	$8 \cdot 8 =$	$9 \cdot 8 =$	$10 \cdot 8 =$
$6 \cdot 9 =$	$7 \cdot 9 =$	$8 \cdot 9 =$	$9 \cdot 9 =$	$10 \cdot 9 =$
$6 \cdot 10 =$	$7 \cdot 10 =$	$8 \cdot 10 =$	$9 \cdot 10 =$	$10 \cdot 10 =$

α) Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα του πολ/σμου με το μηδέν;

Απάντηση

.....

β) Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα του πολ/μου με το ένα;

Απάντηση

.....

γ) Παρατηρούμε ότι $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ από τον πίνακα, πως λέγεται αυτή η ιδιότητα και βρείτε άλλα πέντε ίδια παραδείγματα

Απάντηση

.....

δ) Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα του πολ/σμου με το δέκα;

Απάντηση

.....

Βρείτε τα εξής αποτελέσματα με παρόμοιο τρόπο:

α) $234 \cdot 10 = \dots\dots$ β) $234 \cdot 1000 = \dots\dots$ γ) $234 \cdot 10.000 = \dots\dots\dots$

2. Γράψτε πιο απλά τα εξής αθροίσματα:

α) $\alpha + \alpha + \alpha = \dots$

β) $\chi + \chi + \chi + \chi = \dots\dots\dots$

γ) $\beta + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta = \dots\dots$

δ) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots$

3. Να εφαρμόσετε την προσεταιριστική ιδιότητα του πολ/σμου:

α) $4 \cdot (25 \cdot 113) = (\dots \cdot \dots) \cdot \dots$ β) $2 \cdot (5 \cdot 113) = (\dots \cdot \dots) \cdot \dots$
 γ) $2 \cdot (3 \cdot 11) = (\dots \cdot \dots) \cdot \dots$ δ) $500 \cdot (2 \cdot 1013) = (\dots \cdot \dots) \cdot \dots$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $123 \cdot 12 = \dots$ β) $987 \cdot 456 = \dots$
 γ) $1002 \cdot 14 = \dots$ δ) $13321 \cdot 1 = \dots$
 ε) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \dots$
 στ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 0 = \dots$

5. Να γίνει η επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2 \cdot (5 + 3) = \dots + \dots$ β) $4 \cdot (5 + 1) = \dots + \dots$
 γ) $12 \cdot (10 + 7) = \dots + \dots$ δ) $2 \cdot (\alpha + 3) = \dots + \dots$

6. . Να γίνει η επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2 \cdot (5 - 3) = \dots - \dots$ β) $5 \cdot (3 - 1) = \dots - \dots$
 γ) $7 \cdot (12 - 6) = \dots - \dots$ δ) $2 \cdot (\chi - 3) = \dots - \dots$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $3 \cdot 101 = 3 \cdot (100 + 1) = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 1 = 300 + 3 = 303$
 β) $7 \cdot 101 = \dots(\dots + \dots) = \dots$

 γ) $6 \cdot 201 = \dots(\dots + \dots) = \dots$

 δ) $6 \cdot 12 = \dots(\dots + \dots) = \dots$

 ε) $32 \cdot 99 = \dots(\dots - \dots) = \dots$
 ...
 στ) $17 \cdot 18 = \dots(\dots - \dots) = \dots$

ΘΕΩΡΙΑ 7 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ / ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- **Τι ονομάζουμε δύναμη του α στην ν :** Είναι το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει ν παράγοντες ίσους με το α και συμβολίζεται για λόγους ευκολίας με $\alpha^ν$

- **Τύπος:**

$$\alpha^ν = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{ν \text{ φορές}}$$

- **Ονομασίες:** α: βάση το ν: εκθέτης και $\alpha^ν$: δύναμη του α στην ν

- **Ειδικές ονομασίες:** α^2 : α τετράγωνο και α^3 : α στον κύβο

- **Εκθέτης μονάδα:**

$$\alpha^1 = \alpha$$

- **Βάση μονάδα:**

$$1^ν = 1$$

Ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Παραδείγματα	Βάση	Εκθέτης	Αποτέλεσμα
2^3			
5^2			
12^2			
2^5			
3^3			
2008^1			
2^{10}			
24^3			
1^4			
1^{12}			
1^{200}			
200^1			
Μάκης ¹			
1 ^{Αποστόλης}			
10^1			
10^2			
10^3			
10^4			
10^5			
10^6			

	7	4	
	3		81
	5		25
	9		9
	4		16
	2		16
	10		1000

α) Τι παρατηρείτε για τις δυνάμεις του 10;

Απάντηση: _____

β) Τι πράξη είναι τελικά η δύναμη;

Απάντηση: _____

γ) Είναι σωστό να γράψουμε $2^3 = 2 \cdot 3 = 6$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας

Απάντηση: _____

2) Γράψτε τα παρακάτω σε μορφή δύναμης:

α) $2 \cdot 2 \cdot 2 = \dots\dots\dots$

β) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \dots\dots\dots$

γ) $x \cdot x = \dots\dots\dots$

δ) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = \dots\dots\dots$

ε) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \dots\dots\dots$

στ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \dots\dots\dots$

ΘΕΩΡΙΑ 8 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ / ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

- **Τι γίνεται όταν έχουμε μια παράσταση με πολλές πράξεις;** Η σειρά που ακολουθούμε στις πράξεις είναι η εξής:
 - Πράξεις μέσα στην παρένθεση
 - Δυνάμεις
 - Πολλαπλασιασμοί
 - Προσθέσεις και αφαιρέσεις
- **Τι ονομάζουμε αλγεβρική παράσταση;** Κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων δηλαδή (+, -, ·)

Πχ. $2 \cdot (13 - 5 \cdot 2)^2 + 3 - 1 \cdot 2$

Ασκήσεις

1. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

α) $15 + 3 \cdot 5 =$

β) $7 \cdot 12 - 10 =$

γ) $12 \cdot 147 + 12 \cdot 3 - 12 \cdot 150 =$

δ) $24 \cdot 16 + 24 \cdot 18 - 24 \cdot 32 =$

ε) $82 + 13 - (2 \cdot 16 + 5) + 11 =$

στ) $45 + 4 \cdot (89 - 2 \cdot 44) \cdot (2 \cdot 3) - 22 =$

ζ) $(14 - 2 \cdot 7) \cdot 2009 + (3 \cdot 20 - 4 \cdot 15 + 1) \cdot 2008 =$

η) $(2 \cdot 5 - 3)^3 =$

$$\theta) 137 - 2 \cdot (3+1)^3 =$$

$$\iota) (2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3+2)^2 =$$

$$\iota\alpha) (2+3)^3 - 8 \cdot 3^2 =$$

$$\iota\beta) (1+2) \cdot (3+4) =$$

$$\iota\gamma) 22 - 4^2 + (7 - 2^2)^2 =$$

$$\iota\delta) 2 + 4 \cdot 3^3 + 2^3 - 6 \cdot 1^{2008} =$$

$$\iota\epsilon) 4 + 5 \cdot 2^2 \cdot (2 + 2^2)^3 - 5^3 + 10^1 - 0^2 =$$

$$\iota\sigma\tau) 2 \cdot (13 - 5 \cdot 2)^2 + 3 - 1 \cdot 2 =$$

2) Α) Συμπληρώστε τον πίνακα

α	5	7	6	13
β	3	1	6	12
$\alpha^2 + \beta^2$				
$(\alpha + \beta)^2$				
$\alpha^2 - \beta^2$				
$(\alpha - \beta)^2$				
$(\alpha \cdot \beta)^2$				

$\alpha^2 \cdot \beta^2$				
--------------------------	--	--	--	--

Β) Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, βάλτε το κατάλληλο σύμβολο < , > , = στα παρακάτω κενά:

i. $(\alpha + \beta)^2 \dots \alpha^2 + \beta^2$

ii. $(\alpha - \beta)^2 \dots \alpha^2 - \beta^2$

iii. $(\alpha \cdot \beta)^2 \dots \alpha^2 \cdot \beta^2$

ΘΕΩΡΙΑ 9 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ / ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

- **Ποια διαίρεση ονομάζουμε Ευκλείδεια;** Η διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών

- **Ποια είναι η επαλήθευση της Ευκλείδειας διαίρεσης;**

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon, \quad \text{όπου } \upsilon < \delta$$

Δ – Διαιρετέος

δ – διαιρέτεος

π – πηλίκο

υ – υπόλοιπο

- **Πότε ονομάζουμε την διαίρεση τέλεια;** Όταν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι μηδέν ($\upsilon=0$), δηλαδή $\Delta = \delta \cdot \pi$

- **Προσοχή!** Ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι μηδέν, άρα $\delta \neq 0$

<u>Δ</u> ιαιρετέος	<u>δ</u> ιαιρέτης
<u>υ</u> υπόλοιπο	<u>π</u> ηλίκο

Ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω Ευκλείδειες διαιρέσεις και να γίνουν οι δοκιμές τους.

$\begin{array}{r} 4002 \\ \hline 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} 925 \\ \hline 37 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5082 \\ \hline 77 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1445 \\ \hline 17 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3621 \\ \hline 213 \end{array}$	

2. Συμπληρώστε τον πίνακα

Δ	δ	π	υ
523	84		
2.345	12		
	22	5	3
4.248	18		

- α) Τι παρατηρείτε για το υπόλοιπο (υ) και τον διαιρέτη (δ);
 β) Πως λέγεται η διαίρεση στην τελευταία περίπτωση;

3. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν «Ευκλείδεια διαίρεση» (Ναι ή Όχι) και αν **ναι**, γράψτε τον Διαιρετέο – διαιρέτη το πηλίκο και το υπόλοιπο

Ισότητα	Ναι / Όχι	Δ	δ	π	υ
$120 = 28 \cdot 4 + 8$					
$1.345 = 59 \cdot 21 + 106$					
$374 = 8 \cdot 46 + 6$					
$125 = 35 \cdot 3 + 20$					
$762 = 38 \cdot 19 + 40$					
$1500 = 42 \cdot 35 + 30$					
$300 = 18 \cdot 16 + 12$					
$125 = 35 \cdot 3 + 120$					

4. Το 6^ο Γυμνάσιο Ιλίου θα κάνει παρέλαση για την 28^η Οκτωβρίου και θα παρελάσουν 168 μαθητές. Αν τους διατάξουμε σε
 α) Τριάδες β) Τετράδες γ) Πεντάδες δ) Εξάδες
 βρείτε κάθε φορά πόσες σειρές θα σχηματιστούν και πόσοι μαθητές θα περισσέψουν.

5. α) Αν φέτος γιόρτασα την Δευτέρα, σε ένα χρόνο (365 μέρες) από τώρα τι μέρα θα είναι η γιορτή μου;
 β) Και αν ο χρόνος είναι δίσεκτος (366 μέρες) τι μέρα θα είναι;

ΘΕΩΡΙΑ 10 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ / ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ - Ε.ΚΠ

- **Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού α** ; Είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή η προπαίδεια του α ,
 $0 \cdot \alpha = \alpha, 1 \cdot \alpha = \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, 4 \cdot \alpha, \dots$
- **Τι ονομάζουμε Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π) δύο και περισσοτέρων φυσικών αριθμών**; Το μικρότερο μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα 11 πρώτα πολλαπλάσια των παρακάτω αριθμών.

α) πολ/σια του 2:

β) πολ/σια του 3:

γ) πολ/σια του 4:

δ) πολ/σια του 5:

ε) πολ/σια του 6:

στ) πολ/σια του 7:

ζ) πολ/σια του 8:

2. Βρείτε το Ε.Κ.Π των παρακάτω αριθμών:

α) Ε.ΚΠ (2,3,6) =

β) Ε.Κ.Π (2, 4, 8)=

γ) Ε.Κ.Π (1, 3, 6) =

δ) Ε.Κ.Π (1,2,3,4,5) =

3. Τρία πλοία επισκέπτονται την Βενετία. Το πρώτο ανά 3 ημέρες το δεύτερο ανά 4 ημέρες και το τρίτο ανά 8 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από την Βενετία ταυτόχρονα και τα τρία πλοία, βρείτε μετά από πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι της Βενετίας;

Λύση

ΘΕΩΡΙΑ 11 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ / ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ – Μ.Κ.Δ

- **Τι ονομάζουμε διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a** ; Είναι οι αριθμοί που το διαιρούν ακριβώς (δηλαδή το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι μηδέν)
πχ Διαιρέτες του 6 είναι το 1, 2, 3, 6
- **Κάθε φυσικός αριθμός έχει πάντα δύο διαιρέτες, ποιοι είναι**; Κάθε αριθμός a έχει διαιρέτες το 1 και το a (ενδέχεται να έχει και άλλους εκτός από αυτούς)
- **Ποιος αριθμός λέγεται πρώτος και ποιος σύνθετος**; Αν ένας φυσικός αριθμός a έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και την μονάδα τότε λέγεται **πρώτος**, διαφορετικά **σύνθετος**.
- **Τι ονομάζουμε Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (Μ.Κ.Δ)**; Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες που έχουν δύο ή και περισσότεροι αριθμοί

Ασκήσεις

1. Βρείτε όλους τους διαιρέτες των παρακάτω φυσικών αριθμών.

α) Διαιρέτες του 2:

β) Διαιρέτες του 3:

γ) Διαιρέτες του 4:

δ) Διαιρέτες του 6:

ε) Διαιρέτες του 12:

στ) Διαιρέτες του 18:

ζ) Διαιρέτες του 24:

2. Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι πρώτος και ποιος σύνθετος; Γράψτε τους στους παρακάτω πίνακες.

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3. Στο παρακάτω δελτίο του Λόττο κυκλώστε στο πεδίο Α τους πρώτους αριθμούς ενώ στο πεδίο Β κυκλώστε τους σύνθετους αριθμούς. Τι παρατηρείται; Στο πεδίο Γ δώστε τις προβλέψεις σας για την επόμενη κλήρωση, πόσους πρώτους και σύνθετους διαλέξατε; Καλή επιτυχία!

Στην Υπηρεσία
του Αθλητισμού
και του
ΟΠΑΠ Α.Ε. Πολυπαιχτού

ΟΔΗΓΙΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

α. ΛΟΤΤΟ
 Μπορείς να παίξεις σε κάθε περιοχή του δελτίου:

- **Απλές Στήλες**
Σημειώνοντας 6 αριθμούς.
- **Πλήρες Σύστημα**
Σημειώνοντας περισσότερους από 6 αριθμούς. (βλέπε όπισθεν πίνακα)
- **Τυποποιημένα Συστήματα**
Σημειώνοντας το πλήθος των επιλεγμένων αριθμών και τον αντίστοιχο κωδικό του συστήματος. (βλέπε όπισθεν πίνακα)
- **Συστήματα Συνδυασμών**
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΣΤΑ ΠΡΑΚΤΟΡΕΙΑ

β. ΠΡΟΤΟ
 Σημείωσε στο χώρο που παίζεται το ΠΡΟΤΟ, τον αριθμό των συμμετοχών που επιθυμείς να παίξεις.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	Α
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	Β
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	Γ
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	
1	2	3	4	5	6	10	20	50	100			

ΕΔΩ ΠΑΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΠΡΟΤΟ

4. Σωστό ή Λάθος; Κυκλώστε το Σ αν είναι σωστή η πρόταση, ενώ το Λ αν είναι λάθος η πρόταση.

- α) Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι Σ Λ
- β) Το 2 είναι μοναδικός άρτιος αριθμός που είναι πρώτος Σ Λ
- γ) Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί Σ Λ
- δ) Όλοι οι περιττοί είναι πρώτοι αριθμοί Σ Λ
- ε) Το 1 δεν είναι ούτε πρώτος, ούτε σύνθετος Σ Λ
- ****Σημείωση: Είναι σωστό, γιατί εμείς το ορίσαμε έτσι.****
- στ) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν δύο τουλάχιστον διαιρέτες Σ Λ
- ζ) Το 7 είναι πρώτος αριθμός Σ Λ
- η) Το έτος 2008 είναι πρώτος αριθμός Σ Λ
- θ) Το έτος 2009 είναι σύνθετος αριθμός Σ Λ

5. Βρείτε το Μ.Κ.Δ των παρακάτω φυσικών αριθμών:
 α) Μ.Κ.Δ (6, 12) =

ΘΕΩΡΙΑ 12 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /
ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

- **Πως αναλύουμε έναν φυσικό αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;** Σχεδιάζουμε μια κατακόρυφη γραμμή και πάνω αριστερά βάζουμε τον φυσικό αριθμό που θα αναλύσουμε. Δεξιά βάζουμε τους πρώτους αριθμούς που θα τον διαιρούν. Σταματάμε όταν στην αριστερή στήλη καταλήξουμε στην μονάδα. Το γινόμενο των πρώτων αριθμών (δεν κάνουμε πράξεις και αν έχουμε ίδιους αριθμούς τους γράφουμε ως δύναμη) μας δίνει τον φυσικό αριθμό. Δες παράδειγμα 2 / σελ 28 σχολικό βιβλίο.
- **Πως βρίσκουμε το Ε.Κ.Π – Μ.Κ.Δ από την παραπάνω ανάλυση;** Το Ε.Κ.Π το βρίσκουμε αν πάρουμε τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη, ενώ για τον Μ.Κ.Δ παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με την μικρότερη δύναμη.

Σημείωση: Αυτόν τον τρόπο τον εφαρμόζουμε όταν έχουμε κυρίως μεγάλους αριθμούς, διαφορετικά κάνουμε αυτά που έχουμε μάθει.

Ασκήσεις

1. Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: α) 600 (λυμένο παράδειγμα)

600	2	διαιρώ με το 2 (πρώτος και τον διαιρεί)
300	2	διαιρώ με το 2 (πρώτος και εξακολουθεί να τον διαιρεί)
150	2	διαιρώ με το 2 (πρώτος και εξακολουθεί να τον διαιρεί)
75	3	διαιρώ με το 5 (το 2 δεν διαιρεί το 50 άρα συνεχίζω στον επόμενο πρώτο που είναι το 3)
25	5	διαιρώ με το 5 (το 2 και το 3 δεν διαιρούν το 50 άρα συνεχίζω στον επόμενο πρώτο που είναι το 5)
5	5	διαιρώ με το 5 (πρώτος και εξακολουθεί να τον διαιρεί)
1		σταματάμε την ανάλυση

$$\text{άρα } 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

β) 2.520

γ) 1.210

δ) 2.344

$2.520 = \dots\dots\dots$ $1.210 = \dots\dots\dots$ $2.344 = \dots\dots\dots$

ε) 2.940



στ) 3.780



$2.940 = \dots\dots\dots$

$3.780 = \dots\dots\dots$

2. Βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

α) Ε.Κ.Π (2.520 , 600 , 2940) =
Μ.Κ.Δ (2.520 , 600 , 2940) =

β) Ε.Κ.Π (1.210, 600, 2.344) =
Μ.Κ.Δ (1.210, 600, 2.344) =

γ) Ε.Κ.Π (2520, 2940, 3790) =
Μ.Κ.Δ(2520, 2940, 3790) =

ΘΕΩΡΙΑ 13 / ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ /
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

- **Τι ονομάζουμε κριτήρια διαιρετότητας;** Λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται ακριβώς με αυτούς τους αριθμούς.
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10;** Αν το τελευταίο ψηφίο του είναι το μηδέν
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2;** Αν το τελευταίο του ψηφίο είναι άρτιος αριθμός.
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5;** Αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0 ή 5.
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3;** Αν το άθροισμα όλων των ψηφίων του δίνει 3 ή 6 ή 9
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9;** Αν το άθροισμα όλων των ψηφίων του δίνει 9
- **Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή 25;** Αν τα δύο τελευταία ψηφία που σχηματίζουν τον αριθμό διαιρείται με το 4 ή με το 25 αντίστοιχα.

Ασκήσεις

1. Βάλτε \surd αν οι αριθμοί διαιρούνται ή \times αν οι αριθμοί δεν διαιρούνται στον παρακάτω πίνακα.

	2	3	4	5	9	10	25
100							
225							
300							
224							
1.200							
30.000							
12.510							
13.600							
2.009							