Απαντήσεις και Μοριοδότηση

Θεμάτων

Μαθηματικών Προσανατολισμού

3ης Διαλυκειακής Γραπτής Δοκιμασίας

" Θεόδωρος Φυλακτός "

Γ' Τάξης Ημερησίων Γενικών Λυκείων

Δυτικής Θεσ/νίκης 2021

2ο ΠΕ.ΚΕ.Σ Κεντρικής Μακεδονίας

ΘΕΜΑ Α

Α1 **6**	Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$ και f συνεχής στο x_o, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_o]$.	**1**
	Επομένως ισχύει ότι $f(x)\le f(x_o)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_o]$. **[1]**	**1**
	Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$ και f συνεχής στο x_o, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_o,\beta)$.	**1**
	Επομένως ισχύει ότι $f(x)\le f(x_o)$, για κάθε $x\in(x_o,\beta]$. **[2]**	**1**
	Από **[1]** και **[2]**, έπεται ότι $f(x)\le f(x_o)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_o)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής	**2**

Α2 **4**	Αν μια συνάρτηση f είναι: ➢ συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] ➢ παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και ➢ f(α) = f(β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$	**4**

Α3 (α) **3**	**Χαρακτηρισμός:** Σωστό.	**1**
	Αιτιολόγηση: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.	**1**
	Άρα σύμφωνα με τον ορισμό , η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.	**1**

Α3 (β) **4**	**Χαρακτηρισμός:** Λάθος.	**1**
	Αιτιολόγηση: Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$.	**1**
	Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή στο σύνολο IR, διότι η παράγωγος $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.	**1**
	Ωστόσο δεν ισχύει ότι $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, αφού είναι $f''(0)=0$.	**1**

Α4. **2**	Η σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g συμβολίζεται με gof έχει τύπο $(gof)(x)=g(f(x))$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1=\{x\in A / f(x)\in B\}$	**2**

Α5. **6**	α) Λ β) Σ γ) Σ	**6**

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. **6**	Έστω $x_1, x_2 \in IR-\{\alpha\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{\alpha x_1-\beta}{x_1-\alpha}=\frac{\alpha x_2-\beta}{x_2-\alpha} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x_1=x_2$ Άρα η f είναι “1-1”, οπότε είναι αντιστρέψιμη.	**1**
	$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\alpha x-\beta}{x-\alpha}=y \Leftrightarrow xy-\alpha y=\alpha x-\beta \Leftrightarrow (y-\alpha)x=\alpha y-\beta \overset{y\neq\alpha}{\Leftrightarrow} x=\frac{\alpha y-\beta}{y-\alpha}$ Ακόμη είναι $x \neq \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha y-\beta}{y-\alpha} \neq \alpha \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \beta \neq \alpha^2$ που ισχύει	**2**
	Άρα $f^{-1}(y)=\frac{\alpha y-\beta}{y-\alpha},\ y\neq\alpha$ *δηλαδή* $f^{-1}(x)=\frac{\alpha x-\beta}{x-\alpha},\ x\neq\alpha$	**1**
	Είναι $D_{f^{-1}}=D_f=IR-\{\alpha\}$ *και* $f^{-1}(x)=f(x)=\frac{\alpha x-\beta}{x-\alpha}$, *για κάθε* $x\in IR-\{\alpha\}$ Άρα $f=f^{-1}$.	**2**

Β2 **5**	*Είναι* $f'(x)=\frac{\alpha(x-\alpha)-\alpha x+\beta}{(x-\alpha)^2}=...=\frac{\beta-\alpha^2}{(x-\alpha)^2}$	**1**
	Η κλίση της C_f στο σημείο της $A(3,5)$ είναι -1, άρα: $\begin{cases} f(3)=5 \\ f'(3)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha-\beta}{3-\alpha}=5 \\ \frac{\beta-\alpha^2}{(3-\alpha)^2}=-3 \end{cases}$	**2**
	$\begin{cases} 3\alpha-\beta=15-5\alpha \\ \frac{\beta-\alpha^2}{(3-\alpha)^2}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=8\alpha-15 \\ \frac{8\alpha-15-\alpha^2}{9-6\alpha+\alpha^2}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=8\alpha-15 \\ 8\alpha-15-\alpha^2=-27+18\alpha-3\alpha^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=8\alpha-15 \\ 2\alpha^2-10\alpha+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=8\alpha-15 \\ \alpha^2-5\alpha+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \Rightarrow \beta=1 \\ \alpha=3 \Rightarrow \beta=9, \text{ απορρίπτεται αφού είναι } \beta=\alpha^2 \end{cases}$ Άρα α = 2 και β = 1.	**2**

Β3 **5**	*Είναι* $f(x)=\frac{2x-1}{x-2},\ x\neq 2$ *Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων αντίστοιχα. Ισχύει ότι:* $f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)'=\frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2}<0$, *για κάθε* $x\neq 2$ *Κατά συνέπεια η f είναι γν. φθίνουσα στα διαστήματα (-∞,2) και (2, +∞)*	**3**

Η f' είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 2$ ως πράξη παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\left(-\frac{3}{(x-2)^2}\right)'=\ldots=\frac{6}{(x-2)^3}$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$.
Δεν έχει σημεία καμπής.

2

B4

Κατακόρυφες ασύμπτωτες:
Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^-}(2x-1)\cdot\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=3\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^+}(2x-1)\cdot\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=3\cdot(+\infty)=+\infty$$

Άρα, η x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

2

Πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες:

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=2$$

έπεται ότι η ευθεία y = 2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.

2

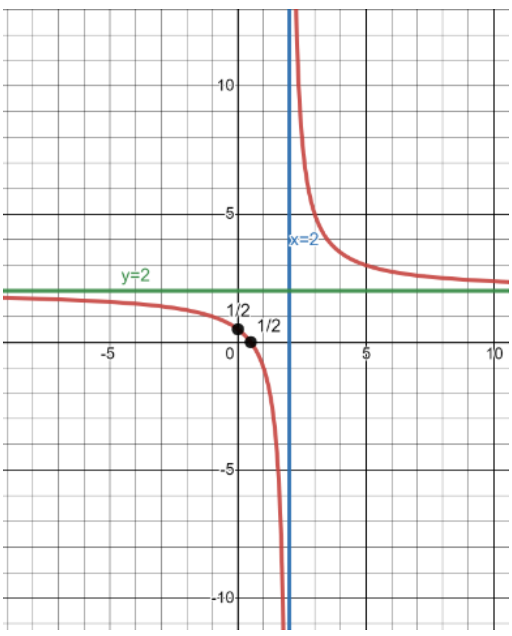
Σημεία τομής με τον άξονα x΄x: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Σημεία τομής με τον άξονα y΄y: $f(0)=\frac{1}{2}$

1

9

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ως εξής



- Η οριζόντια ασύμπτωτη 1
- Η κατακόρυφη ασύμπτωτη 1
- Κάθε κλάδος από 1+1

4

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 6

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(0, f(0)):

$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$ ή $y = f'(0)\cdot x + f(0)$ — **1**

Πρέπει: $f(0)=1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

και $f'(0)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ — **1**

Η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$*, άρα θα είναι και συνεχής στο* $x_0 = 0$*,*

οπότε: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow \gamma = \alpha = 1$ — **1**

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x + \alpha - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$, *που ισχύει* — **1**

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma e^{\beta x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\beta x}-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(e^{\beta x}-1\right)'}{(x)'} = \ldots = \beta$ — **2**

Άρα β=1

Γ2 5

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x + 1 & ,\ \alpha\nu\ \ -\pi \le x \le 0\\ e^x & ,\ \alpha\nu\ \ 0 < x \le 1\end{cases}$$

- για $x \in [\pi, 0)$, $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$
- για $x \in (0, 1]$, $f'(x) = e^x$
- για $x = 0$, $f'(0) = 1$

$$f'(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x & ,\ \alpha\nu\ \ -\pi \le x \le 0\\ e^x & ,\ \alpha\nu\ \ 0 < x \le 1\end{cases}$$

2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		1
f’(x)	−	**0**	+	|	+	
f(x)	↘		↗			
	Τ.Μ.	Ο.	Ε.			Τ.Μ.

Είναι f ↘ *στο* $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ *και* f ↗ *στο* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 1\right]$

$f(-\pi) = 1$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \to$ *Ο.Ε.*, $f(1) = e \to$ *Ο.Μ.*

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Μέγιστης κ Ελάχιστης Τιμής το σύνολο τιμών της

$f\left([-\pi, 0]\right) = [0, e]$

3

Γ3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x^2\right)-1}{\sqrt{1-x^2}-1}\overset{x^2=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)-1}{\sqrt{1-u}-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\left(f(u)-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-u}+1\right)}{-u}=$	**2**
4	$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)-1}{u}\cdot\lim\limits_{u\to 0}\left[-\left(\sqrt{1-u}+1\right)\right]=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)-f(0)}{u-0}\cdot(-2)=f'(0)\cdot(-2)=-2$	**2**

Γ4	Επειδή η f είναι κυρτή και η (ε): $y=x+1$, εφαπτομένη της C_f ισχύει: $f(x)\geq x+1$, για κάθε $x\in\left[-\pi,1\right]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0.	**1**
	Άρα $x+1-f(x)<0$, για κάθε $x\in\left[-\pi,1\right]-\left\{0\right\}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+1-f\left(x\right)\right)=0$ Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1-f\left(x\right)}=-\infty$	**2**
5	Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu(x+3)=\sigma\upsilon\nu 3<0$, αφού $3\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x+3\right)}{x+1-f\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1-f\left(x\right)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu(x+3)=$ $=\left(-\infty\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 3=+\infty$	**2**

Γ5.	$M(x(t),y(t))\in C_f\Leftrightarrow y(t)=f(x(t))$ (1)	**1**
	Άρα είναι: $y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$ (2)	**1**
	Έστω t_1 η χρονική στιγμή όπου είναι $x'(t_1)=y'(t_1)>0$	**1**
5	Από την (2) για $t=t_1$ έχουμε : $y'(t_1)=f'\left(x(t_1)\right)\cdot x'(t_1)\overset{y'(t_1)=x'(t_1)}{\Leftrightarrow}$ $x'(t_1)=f'\left(x(t_1)\right)\cdot x'(t_1)\Leftrightarrow f'\left(x(t_1)\right)=1=f'(0)\overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow}x(t_1)=0$	**1**
	Άρα το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $M\left(0,f(0)\right)$ δηλ. το $M(0,1)$	**1**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **6**	Ισχύει: $\frac{f(x)}{x}=f'(x)-e \Leftrightarrow f(x)=xf'(x)-ex$, για κάθε x>0 (1) Η hείναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}-\frac{e}{x}\overset{(1)}{=}\frac{xf'(x)-(xf'(x)-ex)}{x^2}-\frac{ex}{x^2}=0$ για x>0. Επομένως η hείναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.	**2**
	Επειδή ισχύει $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_o=\frac{1}{e}$ καιείναι παραγωγίσιμη σε αυτό οπότε από Θ. Fermatισχύει $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0\overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right)=-1$.	**2**
	Επειδή ηh είναι σταθερή υπάρχει σταθερά $c\in IR$ τέτοια ώστε $h(x)=c\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-e\ln x=c \Leftrightarrow f(x)=cx+ex\ln x$ για κάθε $x>0$	**1**
	Όμως $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1\Leftrightarrow \frac{c}{e}+e\cdot\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-1\Leftrightarrow\frac{c}{e}-1=-1\Leftrightarrow c=0$ Και επομένως $f(x)=ex\ln x,\ x>0$	**1**

Δ2. **4**	Είναι $f'(x)=e(\ln x+1),\ x>0$ και $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ ➢ $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ ➢ Και $f'(x)<0\Leftrightarrow \ln x<-1\Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$ οπότε fγνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$. ➢ Ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1$.	**3**
	Είναι $f''(x)=\frac{e}{x}>0$, για κάθε x>0 οπότε η fκυρτή στο $(0,+\infty)$.	**1**

Δ3 **5**	Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{\frac{1}{x+6}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x+6)}{(\ln x)^2}=\frac{x\ln x-(x+6)\ln(x+6)}{x(x+6)(\ln x)^2}=\frac{\frac{f(x)}{e}-\frac{f(x+6)}{e}}{x(x+6)(\ln x)^2}=\frac{f(x)-f(x+6)}{ex(x+6)(\ln x)^2}$	**2**
	Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ για x> 1 είναι $1<x<x+6$ => $f(x)<f(x+6)\Rightarrow g'(x)<0$	**2**
	Άρα, η gείναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.	**1**

Δ4	Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $\lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow g'(\xi) \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$	**1**
	Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [2,3] οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(3)-g(2)}{3-2} \Rightarrow g'(\xi) = 2-3 = -1$	**1**
5	Αφού $g(3) = \dfrac{\ln 9}{\ln 3} = \dfrac{\ln 3^2}{\ln 3} = \dfrac{2\ln 3}{\ln 3} = 2$ και $g(2) = \dfrac{\ln 8}{\ln 2} = \dfrac{\ln 2^3}{\ln 2} = \dfrac{3\ln 2}{\ln 2} = 3$.	**2**
	Επειδή gκυρτή η g' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό	**1**

Δ5	Η εξίσωση ορίζεται για κάθε x> 0 αφούαπό υπόθεση για κάθε x> 0 ισχύει $f(x) \geq f(\frac{1}{e}) = -1 \Rightarrow f(x)+3 \geq 2 > 1$, επομένως και $f(x)+10 > f(x)+9 > f(x)+4 \geq 3 > 1$. Η εξίσωση γράφεται $g(f(x)+4) = g(f(x)+3) - 1 \Leftrightarrow g(f(x)+4) - g(f(x)+3) = -1$ $\Leftrightarrow g(f(x)+4) - g(f(x)+3) = g(3) - g(2) \Leftrightarrow \varphi(f(x)+3) = \varphi(2)$ (2)	**3**
5	Όπου $\varphi(x) = g(x+1) - g(x),\ x > 1$. Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(x) = g'(x+1) - g'(x) > 0$, για κάθε $x > 1$ αφού η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1 – 1 στο $(1,+\infty)$.	**1**
	Έτσι έχουμε $\varphi(f(x)+3) = \varphi(2) \overset{\varphi\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x)+3 = 2 \Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$,αφού για κάθε $0 < x \neq \dfrac{1}{e}$ είναι: f(x)>– 1.	**1**