



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη: Β' Λυκείου

Εισηγητές: Παναγιώτης Κουτσκουδής – Αλμπέρ Ντικράν Ματοσσιάν

Εξεταστική περίοδος: Μάιος – Ιούνιος 2014

29 Μαΐου 2014

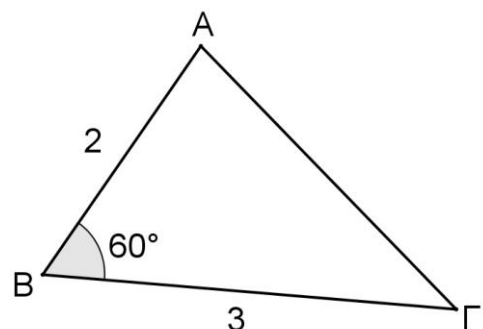
ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
(10 μονάδες)
- B. Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση (AB) των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
(5 μονάδες)
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α) $(AB) = |\vec{OA} - \vec{OB}|$, όπου με (AB) συμβολίζουμε την απόσταση των σημείων A και B.
- β) Ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
- γ) Τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά όταν $\det(\vec{AB}, \vec{AG}) \neq 0$.
- δ) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του E'E, είναι έλλειψη.
- ε) Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση: $yy_1 = p(x + x_1)$.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι $AB = 2$,
 $B\Gamma = 3$ και $B = 60^\circ$.

- α) Να δείξετε ότι $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma} = -3$.
(8 μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{B\Gamma} - \vec{AB}$.
(8 μονάδες)
- γ) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB} + \frac{\vec{B\Gamma}}{3}$ και $\vec{A\Gamma} - \vec{AB}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
(9 μονάδες)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $(4 - \lambda^2)x + (\lambda + 2)y + 2\lambda = -4$ (1)

- α)** Βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. (6 μονάδες)
- β)** Βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η ευθεία με εξίσωση την (1) διέρχεται από το σημείο (1, -3). (7 μονάδες)
- γ)** Για την ευθεία που προκύπτει αν θέσουμε $\lambda = 1$ στην (1):
- i)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες. (5 μονάδες)
- ii)** Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής, που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο (1, 1) (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2kx + 2(k+3)y + 2k^2 + 6k + 8 = 0$ (1)

- α)** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με σταθερή ακτίνα, για κάθε $k \in \mathbb{R}$. (7 μονάδες)
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων που δίνονται από την (1). (6 μονάδες)
- γ)** Να δείξετε ότι οι κύκλοι που δίνονται από την (1) εφάπτονται της ευθείας (ε): $y = -x - 3 + \sqrt{2}$ (7 μονάδες)
- δ)** Δείξτε ότι τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου, που προκύπτει αν θέσουμε $k = -3$ στην (1) και διέρχονται από το A(3, 0), βρίσκονται πάνω σε κλάδο υπερβολής. (5 μονάδες)

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ο Διευθυντής

Οι καθηγητές

Γεωργία Σκαλοχωρίτου

Παναγιώτης Κουτσοκουλής
Αλμπέρ Ντικράν Ματοσσιάν

ΘΕΜΑ 1^ο

A. σχολικό σελ 83

B. Σχολικό σελ 35

Γ.

- α)** $(AB) = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}|$ Σ
- β)** θέλει $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ Λ
- γ)** Τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά όταν $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 0$ Λ
- δ)** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του E'E, είναι έλλειψη Σ
- ε)** Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση:
 $xx_1 = p(y + y_1)$ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{B\Gamma}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, διότι η γωνία που σχηματίζουν τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι 120°

ή $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = -|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{B\Gamma}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}) = -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = -3$

β) $|2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{AB}|^2 = (2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{AB})^2 = 4\overrightarrow{B\Gamma}^2 - 4\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 4|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 - 4\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 =$
 $= 4 \cdot 9 - 4 \cdot (-3) + 4 = 52$. Άρα $|2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{AB}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

γ) Αρκεί τα $\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{3}$ και $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$ να έχουν εσωτερικό γινόμενο 0.

$$\left(\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{3}\right) \cdot (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{3}\right) \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma}^2}{3} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \frac{|\overrightarrow{B\Gamma}|^2}{3} = -3 + \frac{9}{3} = 0$$

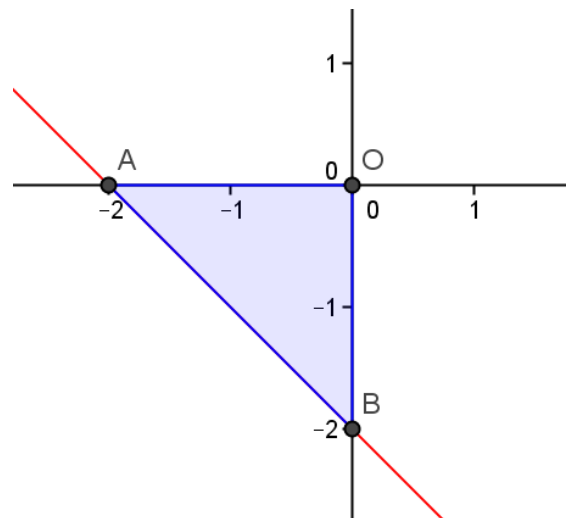
ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $(4 - \lambda^2)x + (\lambda + 2)y + 2\lambda = -4$ (1)

α) Ο συντελεστής του x μηδενίζεται όταν $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$. Ο συντελεστής του y μηδενίζεται όταν $\lambda = -2$. Άρα οι συντελεστές των x, y μηδενίζονται ταυτόχρονα για $\lambda = -2$. Δηλαδή η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$

β) Για να διέρχεται η (1) από το (1, -3) πρέπει $(4 - \lambda^2) \cdot 1 - 3(\lambda + 2) + 2\lambda + 4 = 0$ δηλαδή $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ άρα $\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$ (απορρίπτεται από τον περιορισμό).

γ) Η ευθεία που προκύπτει αν θέσουμε $\lambda = 1$ στην (1) είναι η (ε): $x + y + 2 = 0$



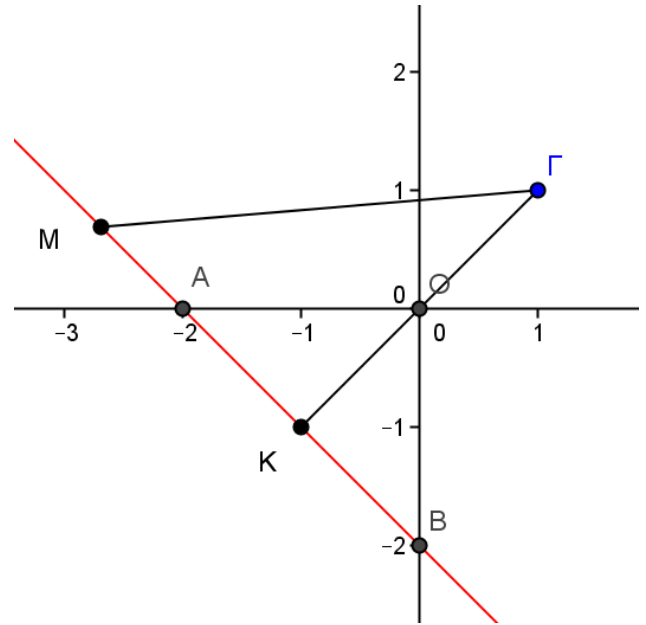
i) Αυτή τέμνει τους άξονες στα $A(-2, 0)$ και $B(0, -2)$. Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι το ορθογώνιο ABO . Έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot |-2| = 2$

ii) Έστω τυχαίο σημείο M της ευθείας και K η προβολή του $\Gamma(1,1)$ σε αυτήν. Ισχύει $GM \leq GK$ αφού η πλάγια είναι πάντα μικρότερη από την κάθετη. Άρα το σημείο της ευθείας που απέχει την μικρότερη απόσταση από το $\Gamma(1,1)$ είναι το K . Η GK είναι κάθετη στην (ε) άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda' = 1$ και εξίσωση την $y - 1 = 1(x - 1)$ δηλαδή $y = x$.

Η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

δίνει τις συντεταγμένες του K , δηλαδή $K(-1, -1)$.



ΘΕΜΑ 4^ο

α) Για να παριστάνει κύκλο η (1) για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{aligned} (-2\kappa)^2 + [2(\kappa+3)]^2 - 4(2\kappa^2 + 6\kappa + 8) &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\kappa^2 + 4\kappa^2 + 24\kappa + 36 - 8\kappa^2 - 24\kappa - 32 &> 0 \Leftrightarrow 4 > 0 \end{aligned}$$

που ισχύει. Οι παραπάνω κύκλοι έχουν κέντρο το $K(\kappa, -\kappa-3)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

β) Έστω $K(x, y)$ άρα $x = \kappa$ και $y = -\kappa - 3$. Με απαλοιφή του κ προκύπτει $y = -x - 3$ η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων είναι η $x + y + 3 = 0$.

γ) Για να εφάπτονται οι κύκλοι που δίνονται από την (1) της ευθείας $(\varepsilon): y = -x - 3 + \sqrt{2}$ πρέπει και αρκεί $d(K, \varepsilon) = R$.

$$\text{Πράγματι: } d(K, \varepsilon) = \frac{|\kappa \cdot 1 + (-\kappa - 3) \cdot 1 + 3 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1 = R$$

δ) Η (1) για $\kappa = -3$ δίνει τον κύκλο C_1 με κέντρο το $B(-3, 0)$ και ακτίνα $R = 1$.

Έστω M το κέντρο ενός κύκλου, που εφάπτεται εξωτερικά του C_1 και διέρχεται από το $A(3, 0)$.

Επειδή $MB - MA = MB - ME = EB = 1 < AB$ το M κινείται στον κλάδο της υπερβολής με εστίες τα A, B και άξονα συμμετρίας τον xx' που έχει $x > 0$ (διότι $MB - MA > 0 \Leftrightarrow MB > MA$, άρα το M ανήκει στην περιοχή του επιπέδου δεξιά του $y'y$).

