

Τάξη: Α' Λυκείου

Εισηγητές: Παναγιώτης Κουτσκουδής, Αλμπέρ Ντικράν Ματοσσιάν

Εξεταστική περίοδος: Μαΐου – Ιουνίου 2014

Μυτιλήνη, 16 Ιουνίου 2014

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- α)** Σε ίσες χορδές δύο άνισων κύκλων αντιστοιχούν ίσα αποστήματα.
- β)** Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά γωνίες ίσες.
- γ)** Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
- δ)** Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.
- ε)** Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν μια πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

(Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

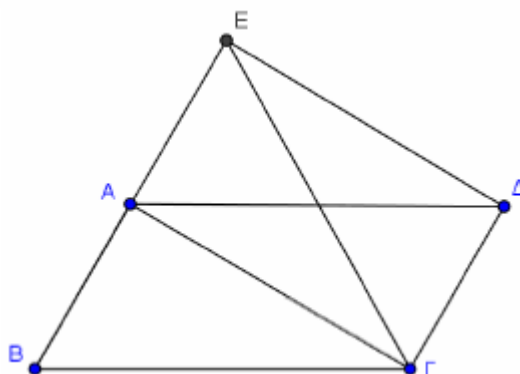
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Αν AD , GE ύψη του τριγώνου και M το μέσον της πλευράς AG .

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο, και M είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου.

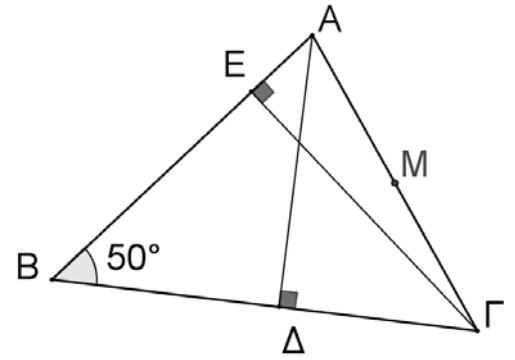
(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $EM\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{D}$, $\hat{E}\hat{M}\hat{\Delta}$ και $\hat{M}\hat{\Delta}\hat{E}$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

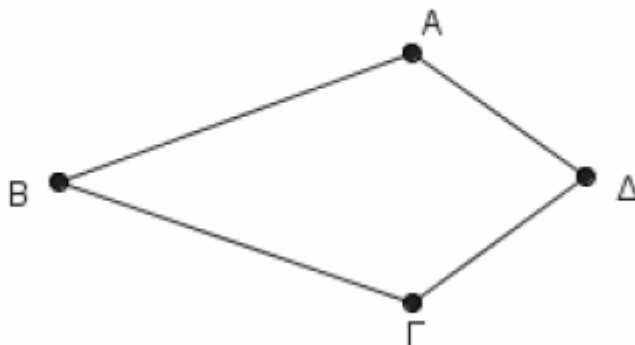
(Μονάδες 9)

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)



Η Διευθύντρια

Γεωργία Σκαλοχωρίτου

Οι καθηγητές

Παναγιώτης Κουτσκουδής
Αλμπέρ-Ντικράν Ματοσσιάν

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΘΕΜΑ 1^ο

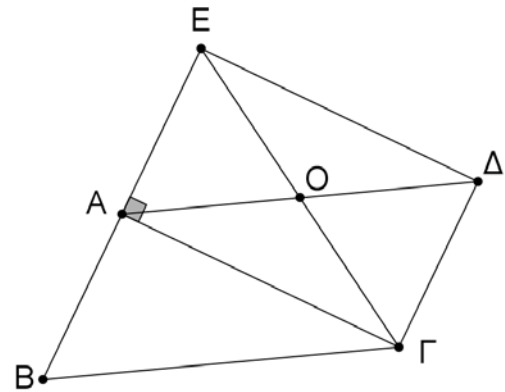
Α

- α) Λ Σε ίσες χορδές δύο **ίσων** κύκλων αντιστοιχούν ίσα αποστήματα.
- β) Λ Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά γωνίες **παραπληρωματικές**.
- γ) Σ.
- δ) Λ Κάθε **παραπληρωματικό** με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο ή Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες **που διχοτομούνται** είναι ορθογώνιο.
- ε) Σ.

Β Σχολικό σελίδα 46

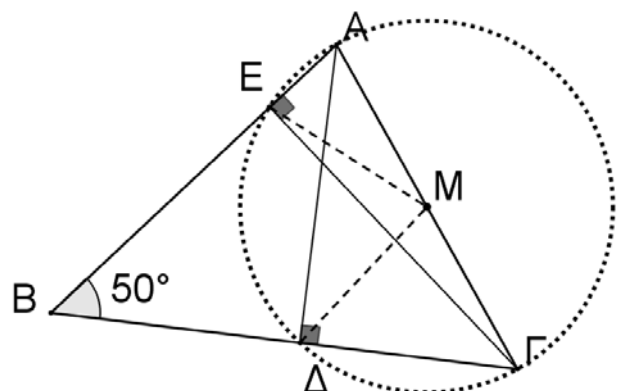
ΘΕΜΑ 2^ο

- α) $AB = \Delta\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $AE = \Gamma\Delta$ (ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου). Άρα $AB = AE$.
- β) Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ το τμήμα $ΑΓ$ είναι διάμεσος και ύψος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΕΓ = ΒΓ$.
- γ) Οι γωνίες $\widehat{ΒΓΑ}$ και $\widehat{ΑΔΕ}$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία και είναι οξείες γωνίες ορθογωνίων τριγώνων, άρα είναι ίσες
ή
 $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΓΑΔ}$ (ως εντός εναλλάξ)
 $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΓΑΔ}$ (ως εντός εναλλάξ)



ΘΕΜΑ 3^ο

- α) Στο τετράπλευρο $ΑΕΔΓ$ η πλευρά $ΑΓ$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές $Ε$ και $Δ$ υπό ίσες γωνίες ($\widehat{ΓΔΑ} = \widehat{ΓΕΑ} = 90^\circ$). Στον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου $ΑΕΔΓ$ η γωνία $\widehat{ΓΔΑ}$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή επομένως βαίνει σε ημικύκλιο, τότε το $ΑΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου και το μέσο του $Μ$ θα είναι το κέντρο του.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΜ είναι διάμεσος άρα $ΔΜ = \frac{ΑΓ}{2}$. Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ, ισχύει $ΕΜ = \frac{ΑΓ}{2}$. Επομένως το τρίγωνο ΕΜΔ είναι ισοσκελές ($ΔΜ = ΕΜ$).

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ, $\widehat{ΒΑΔ} = 90^\circ - \widehat{Β} = 90^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow \boxed{\widehat{ΒΑΔ} = 40^\circ}$.

Η $\widehat{ΕΜΔ} = 2 \cdot \widehat{ΕΑΔ}$ διότι η $\widehat{ΕΑΔ}$ είναι εγγεγραμμένη στο $\widehat{ΕΔ}$ ενώ η $\widehat{ΕΜΔ}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη. Άρα $\boxed{\widehat{ΕΜΔ} = 80^\circ}$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΜΔ: $\widehat{ΕΔΜ} = \frac{180^\circ - \widehat{ΕΜΔ}}{2} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} \Leftrightarrow \boxed{\widehat{ΕΔΜ} = 50^\circ}$

ή

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΓ, $\widehat{ΜΔΓ} = \widehat{Γ}$ (1). Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΕΔΓ:

$$\widehat{ΕΔΓ} + \widehat{Α} = 180^\circ \Leftrightarrow (\widehat{ΕΔΜ} + \widehat{ΜΔΓ}) + \widehat{Α} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \widehat{ΕΔΜ} + \widehat{Γ} + \widehat{Α} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΕΔΜ} = 180^\circ - (\widehat{Α} + \widehat{Γ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ΕΔΜ} = \widehat{Β} \Leftrightarrow \boxed{\widehat{ΕΔΜ} = 50^\circ}. \text{ Από το τρίγωνο ΕΜΔ:}$$

$$\widehat{ΕΜΔ} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{ΕΔΜ} = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ \Leftrightarrow \boxed{\widehat{ΕΜΔ} = 80^\circ}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές θα ισχύει $\widehat{Α}_1 = \widehat{Γ}_1$. Όμως $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$ (δεδομένο), άρα $\widehat{Α}_2 = \widehat{Α} - \widehat{Α}_1 = \widehat{Γ} - \widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ, άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου και επομένως $ΒΔ \perp ΑΓ$ ή από σύγκριση των τριγώνων ΑΒΔ, ΒΓΔ (είναι ίσα επειδή έχουν τις πλευρές ίσες μια προς μια), η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ άρα και κάθετη στην ΑΓ.

γ) Αν Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών,

$$ΚΛ \parallel \frac{ΑΓ}{2} \parallel ΜΝ, \text{ άρα } ΚΛΜΝ$$

παραλληλόγραμμο. Επειδή $ΚΛ \parallel ΑΓ$, $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΒΔ \perp ΑΓ$ θα είναι $\widehat{ΚΝ} = 90^\circ$ και επομένως το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

