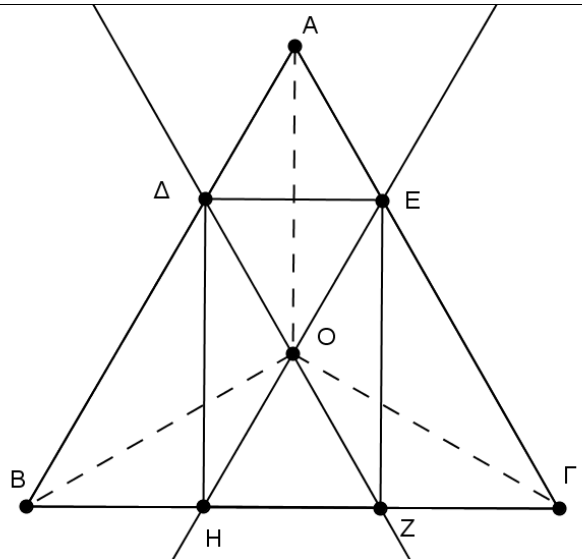


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

<p>1. Από τυχαίο σημείο Γ ημικυκλίου διαμέτρου AB φέρω παράλληλη προς την AB, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ.</p> <p>i. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται είναι ισοσκελές τραπέζιο.</p> <p>ii. Αν οι $AD, B\Gamma$ τέμνονται στο E και οι $A\Gamma, B\Delta$ τέμνονται στο Z, να δείξετε ότι $EZ \perp AB$.</p>	
<p>2. Δίνεται γωνία $\chi O\gamma$. Με κέντρο τυχαίο σημείο K της διχοτόμου $O\delta$ της γωνίας, γράφω κύκλο, που τέμνει τις πλευρές $O\chi, O\gamma$ στα A, B, και Δ, Γ αντίστοιχα.</p> <p>Να δείξετε ότι :</p> <p>i. $AB = \Gamma\Delta$</p> <p>ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο</p> <p>Αν OM, ON εφαπτόμενες του κύκλου, τότε</p> <p>iii. Τα τρίγωνα $MBA, N\Gamma\Delta$ είναι ίσα.</p>	
<p>3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Έστω $\Delta K \parallel BA$ και $\Delta\Lambda \parallel \Gamma A$.</p> <p>Αν οι $\Delta K, \Delta\Lambda$ τέμνουν τις $A\Gamma, AB$ στα Z, E αντίστοιχα, να δείξετε ότι:</p> <p>i. Τα K, A, Λ είναι συνευθειακά .</p> <p>ii. Τα τρίγωνα $\Lambda AE, \Gamma Z\Delta$ είναι ίσα</p> <p>iii. Οι $\Gamma\Lambda, A\Delta, KB$ και EZ συντρέχουν.</p>	
<p>4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Επί των καθέτων στις $AB, A\Gamma$ στο σημείο A παίρνω σημεία Δ, E αντίστοιχα ώστε $A\Delta = AE$ (όπως στο σχήμα) τέτοια ώστε $\Delta\Delta B \neq AB\Gamma$. Να δείξετε ότι:</p> <p>i. Αν M, N τα μέσα των $\Delta B, E\Gamma$ αντίστοιχα, τότε το AMN είναι ισοσκελές τρίγωνο.</p> <p>ii. $\angle MAB = \angle NAG$</p> <p>iii. $MN \parallel \Gamma B$.</p>	

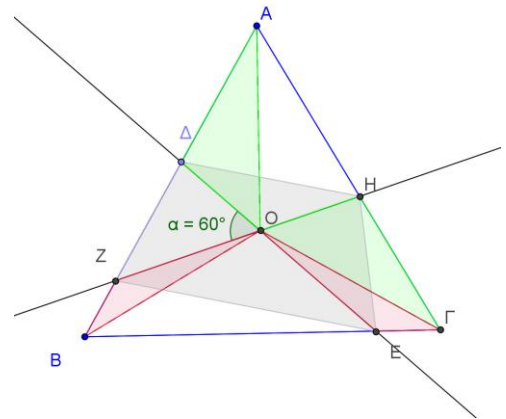
5. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου το O . Δύο ευθείες διέρχονται από το O , είναι παράλληλες στις πλευρές $AB, A\Gamma$ του τριγώνου και τέμνουν τις $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα στα Δ, Z και E, H . Να δείξετε ότι :

- i. Το $A\Delta O E$ είναι ρόμβος
- ii. Το $\Delta E Z H$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
- iii. $ZH = \frac{1}{3} B\Gamma$.



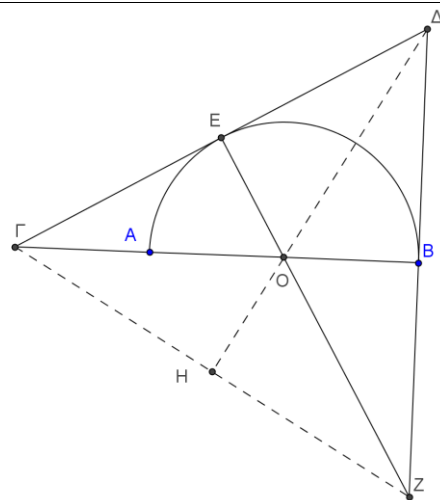
6. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το κέντρο O του περιγεγραμμένου του κύκλου διέρχονται δύο ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους, γωνία 60° , δεν είναι παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου και τις τέμνουν στα Δ, E και Z, H .

- Να δείξετε ότι:
- i. τα τρίγωνα $A\Delta O$ και $\Gamma O H$ είναι ίσα.
 - ii. $\Delta O H = O E Z = 30^\circ$
 - iii. το $E Z O H$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



7. Δίνεται ημικύκλιο (O, R) διαμέτρου $AB=2R$. Στην προέκταση της BA προς το A παίρνω σημείο Γ τέτοιο ώστε $A\Gamma=R$. Η εφαπτόμενη GE από το Γ στο ημικύκλιο, και η εφαπτόμενη στο B , τέμνονται στο Δ . Να δείξετε ότι :

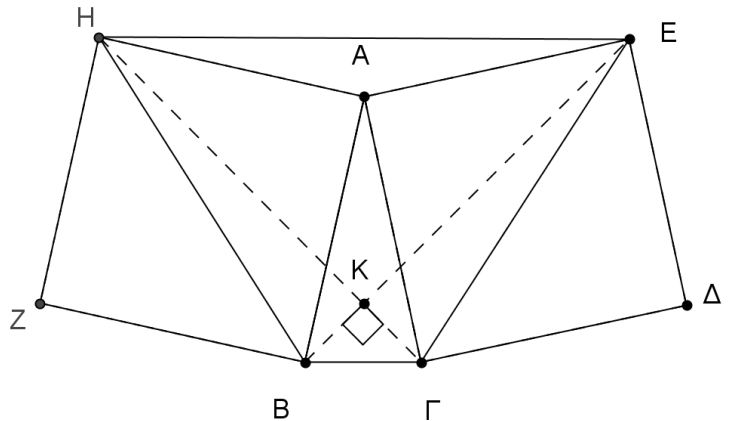
- i. $\angle O\Gamma E = 30^\circ$
- ii. $\Delta O = 2R$
- iii. Το $\Delta Z\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- iv. Η ΔO διέρχεται από το μέσον της ΓZ .



8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα τετράγωνα $A\Gamma\Delta E$ και $ABZH$.

Να δείξετε ότι:

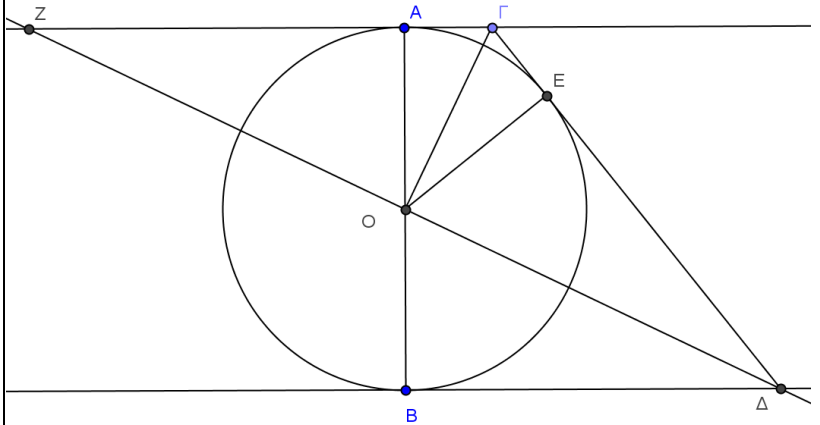
- i. τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και ABE είναι ίσα.
- ii. Τα σημεία H, B, Γ, E είναι ομοκυκλικά
- iii. Η γωνία $\angle B\Gamma E = 45^\circ$
- iv. $HE \parallel B\Gamma$
- v. $H\Gamma \perp EB$



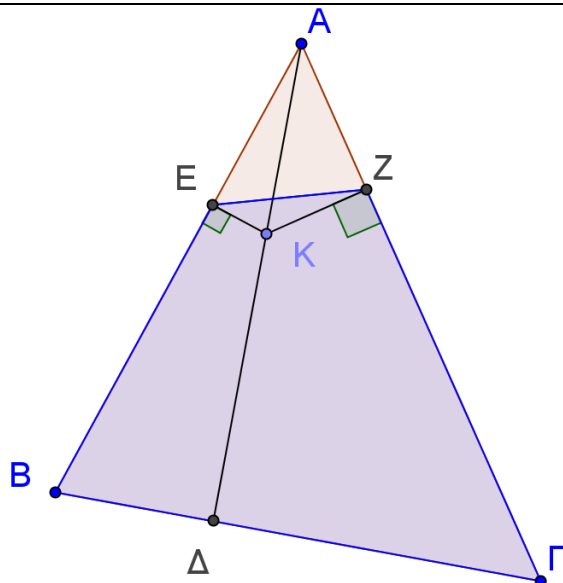
9. Δίνεται κύκλος (O,R) και οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας διαμέτρου AB . Τυχαιά ευθεία που διέρχεται από το O τέμνει τις δύο παράλληλες στα Δ, Z . Αν Γ σημείο της εφαπτομένης που δεν περιέχει το Δ , τέτοιο ώστε $O\Gamma \perp O\Delta$.

Να δείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο $\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές
- ii. Η $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (O,R)
- iii. $\Delta\Gamma = A\Gamma + B\Delta$



10. Από τυχαίο σημείο K του ύψους AD τριγώνου $AB\Gamma$ φέρω τις κάθετες KE, KZ στις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

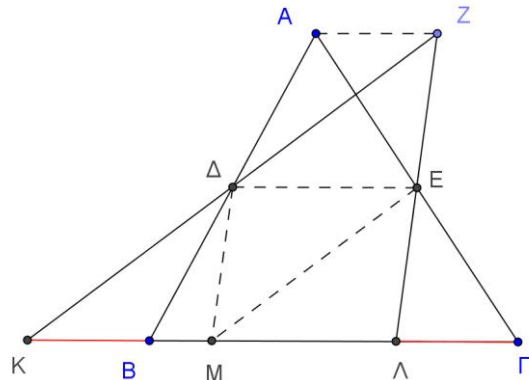


11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επί της ΓΒ παίρνω σημεία Κ εξωτερικό της ΓΒ προς το Β και Λ εσωτερικό της ΓΒ, έτσι ώστε ΒΚ=ΛΓ.
 Αν οι ΚΔ, ΛΕ τέμνονται στο Ζ. Να δείξετε ότι:

i. $ΔΕ // \frac{ΚΛ}{2}$

ii. Τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΚΖ, ΛΖ αντίστοιχα

iii. $ΑΖ // ΒΓ$

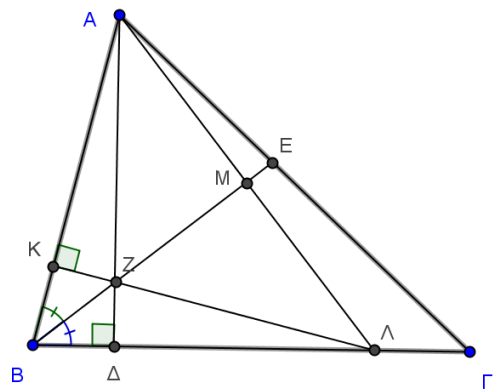


12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ. Αν η διχοτόμος του ΒΕ, τέμνει την ΑΔ στο Ζ και η κάθετη από το Ζ στην ΑΒ τέμνει την ΒΓ στο Λ, να δείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΑΚΖ και ΛΔΖ είναι ίσα.

ii. Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΑΛ.

iii. Η ΖΜ είναι διχοτόμος της ΑΖΛ.

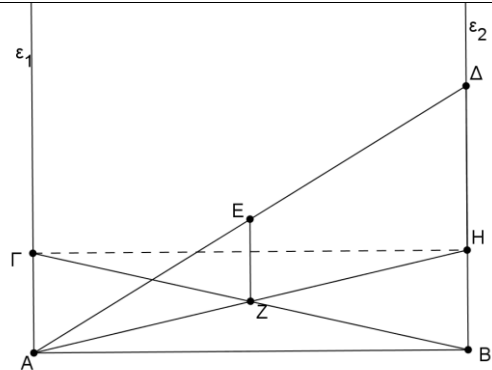


13. Έστω ϵ_1, ϵ_2 ημιευθείες κάθετες στα άκρα Α, Β ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Γ, Δ τυχαία σημεία πάνω σε αυτές αντίστοιχα. Αν Ζ, Ε τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα και η ΑΖ τέμνει την ϵ_2 στο Η. Να δείξετε ότι:

i. $ΑΖ = \frac{ΓΒ}{2}$

ii. $ΕΖ = \frac{ΔΒ - ΑΓ}{2}$

iii. $ΓΗ \perp ΒΔ$



<p>14. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και μια χορδή του $\Gamma\Delta$ που τέμνει την AB στο E και σχηματίζει με αυτήν γωνία 45°. Έστω Γ', Δ' οι προβολές των Γ, Δ αντίστοιχα πάνω στην AB. Έστω επίσης $OK \perp \Gamma\Delta$ και $KL \perp AB$.</p> <p>Να δείξετε ότι:</p> <ol style="list-style-type: none"> Τα τρίγωνα $E\Gamma\Gamma', E\Delta\Delta'$ είναι ισοσκελή Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta', O\Gamma\Gamma'$ είναι ίσα $\Delta\Delta' - \Gamma\Gamma' = 2KL$ 	
<p>15. Δύο κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα A, B. Οι κάθετες από το Λ στις KA, KB τέμνουν τον κύκλο (Λ,ρ) στα H, Θ αντίστοιχα.</p> <p>Να δείξετε ότι :</p> <ol style="list-style-type: none"> Τα τρίγωνα $K\Lambda A, K\Lambda B$ είναι ίσα Οι χορδές ΓA και $B\Delta$ είναι ίσες $KH = K\Theta$ 	
<p>16. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Η κάθετος από το A στην $B\Delta$ τέμνει τις $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E, Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:</p> <ol style="list-style-type: none"> το $EZ\Gamma B$ είναι εγγράψιμο αν ο περιγεγραμμένος κύκλος στο $EZ\Gamma B$ τέμνει την AB στο H τότε $HB = Z\Gamma$ $\Delta H = AZ$ 	

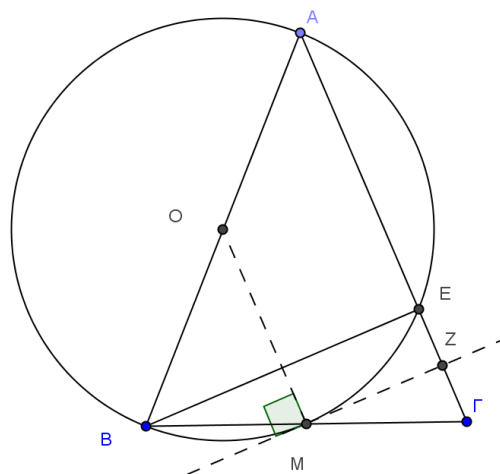
17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση την ΒΓ. Ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ τέμνει την ΒΓ στο Μ και την ΑΓ στο Ε.

i. Να δείξετε ότι ΒΕ ύψος του τριγώνου.

ii. Το Μ είναι μέσον της ΒΓ

iii. Αν Ο μέσον της ΑΒ τότε $ΟΜ \perp ΒΕ$

iv. Η εφαπτόμενη του κύκλου (Ο, ΟΑ) στο σημείο του Μ, διέρχεται από το μέσον της ΕΓ.

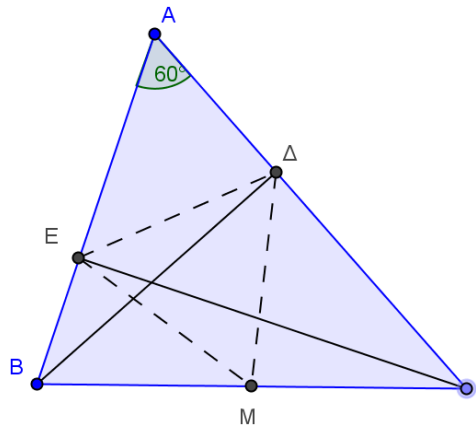


18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 60^\circ$ και Μ το μέσον της ΒΓ. Επίσης ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του.

Να δείξετε ότι:

i. $ΜΔ = ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισόπλευρο

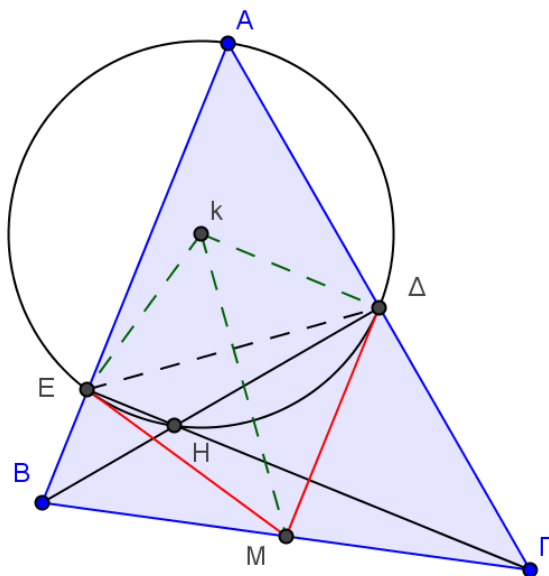


19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσον της ΒΓ και Η το σημείο τομής των υψών του ΒΔ, ΓΕ.

i. Να δείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$

ii. Οι ΜΔ, ΜΕ είναι εφαπτόμενες στον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ΑΔΕ

iii. Αν Κ το κέντρο του παραπάνω κύκλου τότε η ΚΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΔ.



<p>20. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 120^\circ$. Έστω επίσης σημεία Δ, E επί της $B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Να δείξετε ότι</p> <ol style="list-style-type: none"> Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές Το E είναι κέντρο βάρους του $A\Gamma Z$ το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο. 	
<p>21. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών A, B τέμνονται όπως στο σχήμα, ναδειχθεί ότι:</p> <ol style="list-style-type: none"> $AE \perp BZ$ Τα σημεία M, O, N είναι συνευθειακά. $OM + ON = \frac{1}{2}(EZ + AB)$ 	
<p>22. M τυχαίο σημείο του (K, r). Δείξε ότι MK κάθετη στην $\Delta\Gamma$.</p>	
<p>23. Αν Γ μέσον τόξου AB κύκλου (O, ρ) και οι τυχαίες χορδές $\Gamma\Delta, \Gamma E$ τέμνουν την AB στα Z, H αντίστοιχα τότε $\Delta E H Z$ εγγράψιμο.</p>	