ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2. Ισχύει ότι $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω.
3. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση: $P(A) + P(B) = 1$.
4. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους.
5. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους Α' και Β' είναι επίσης ξένα μεταξύ τους.
6. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι πάντα συμπληρωματικά.
7. Αν P(A)+P(B)=1 τότε τα Α και Β είναι συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.
8. Αν P(A)=1 τότε Α=Ω, όπου Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω.
9. Αν P(A)=0 τότε Α= **Ο** , όπου Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω.
10. Αν Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης τότε P(Ω)=1.
11. Η πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι $P(\varnothing) = 0$.
12. Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει 0 < P(A) < 1.
13. Αν τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα, τότε ονομάζουμε πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου Α τον αριθμό: $P(A) = \dfrac{N(\Omega)}{N(A)}$.
14. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Το ενδεχόμενο Α-Β πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Β και δεν πραγματοποιείται το Α.
15. Ασυμβίβαστα λέγονται δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω όταν η ένωσή τους είναι το κενό σύνολο.
16. Το συμπλήρωμα Α' ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου Α ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του δειγματικού χώρου.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ - ΔΙΑΤΑΞΗ - ΡΙΖΕΣ - ΑΠΟΛΥΤΑ

17. Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
18. Ισχύει $|-x| \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
19. Για κάθε α, β $\in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$.
20. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$.
21. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
22. Αν θ > 0, τότε : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.
23. Για κάθε πραγματικό αριθμό α , ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.
24. Για κάθε α,β $\in \mathbb{R}$ και για κάθε ν φυσικό ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
25. Ισχύει η συνεπαγωγή: $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, όπου $\gamma < 0$.
26. Ισχύει η ισότητα: Αν α, β > 0 τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, $\nu \in \mathbb{N}$.
27. Ισχύει η ισοδυναμία: $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$ όπου x, α οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

28. Η απόσταση των αριθμών α και β δίνεται από τον τύπο: d(α,β)= |α - β|
29. Ισχύει $α^0$= 1 για κάθε α ≠ 0.
30. Ισχύει $α^μ \cdot α^ν = α^{μν}$ $(α \neq 0$ και $μ,ν \in \mathbb{N})$.
31. Ισχύει |α| < 0 για κάθε α πραγματικό αριθμό.
32. Ισχύει ότι $|x| \geq θ \Leftrightarrow -θ \leq x \leq θ$ όπου θ θετικός αριθμός.
33. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $|α|^2 > α^2$.
34. Αν α, β ≥ 0 ισχύει ότι: $\sqrt[ν]{α} + \sqrt[ν]{β} = \sqrt[ν]{α+β}$, $ν \in \mathbb{N}$.
35. Για κάθε αριθμό θ ισχύει: $|x| \leq θ \Leftrightarrow -θ \leq x \leq θ$.
36. Αν θ > 0 τότε ισχύει : $|x| > θ \Leftrightarrow x > θ$ και $x < θ$.
37. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: |α| = |-α|.
38. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: |α| = -|α|.
39. Αν α < β και β < γ τότε α < γ , για κάθε α,β,γ $\in \mathbb{R}$.
40. Αν α + β > β + γ τότε: α > γ , για κάθε α,β,γ $\in \mathbb{R}$.
41. Αν α+β > γ+δ τότε ισχύει πάντα: α > γ και β > δ , για κάθε α,β,γ,δ $\in \mathbb{R}$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

42. Αν αβ=0 τότε α=0 και β=0.
43. Αν αβ≠0 τότε α≠0 ή β≠0
44. Η εξίσωση $x^ν$ = α, με ν περιττό και α $\in \mathbb{R}$ έχει πάντοτε λύση.
45. Αν η διακρίνουσα μιας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι Δ>0 η εξίσωση είναι αδύνατη.
46. Η εξίσωση αx + β = 0 με α = 0 και β ≠ 0 είναι αδύνατη.
47. Η εξίσωση $x^ν$= α , με α < 0 και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[ν]{|α|}$.
48. ‘Εστω Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $αx^2$ + βx + γ = 0, α ≠0. Αν Δ < 0 το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.
49. Η εξίσωση $χ^ν$ = α , με α>0 και ν άρτιο φυσικό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[ν]{α}$ και $-\sqrt[ν]{α}$.
50. Αν Δ>0 και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $αx^2$ + βx + γ = 0, α ≠0, τότε
    $αx^2 + βx + γ = α(x – x_1)(x – x_2)$.
51. Αν η εξίσωση $αx^2$ + βx + γ = 0, α ≠0, έχει μία διπλή ρίζα, τότε Δ=0.
52. Αν α = 0 και β = 0, τότε η εξίσωση αχ+β=0 είναι αδύνατη.
53. Αν α > 0 και Δ < 0 τότε η ανίσωση $αx^2$ + βx + γ < 0 αληθεύει για κάθε x $\in \mathbb{R}$.
54. Αν η διακρίνουσα Δ < 0, η εξίσωση $αx^2$ + βx + γ = 0 έχει δύο πραγματικές λύσεις.
55. Το τριώνυμο $αx^2$ + βx + γ με α, β ,γ $\in \mathbb{R}$, είναι πάντα θετικό, όταν Δ<0.
56. Αν αγ<0 τότε η εξίσωση $αx^2$ + βx + γ = 0 με α, β ,γ $\in \mathbb{R}$, έχει 2 λύσεις άνισες.
57. Αν αγ > 0 τότε η εξίσωση $αx^2$ + βx + γ = 0 με α, β ,γ $\in \mathbb{R}$, δεν έχει λύσεις στο R
58. Αν α ≠ 0 τότε η εξίσωση αx + β = 0 έχει ακριβώς μια λύση.
59. Αν η εξίσωση x^2 – Sx + P = 0 έχει πραγματικές ρίζες, τότε το άθροισμά τους, είναι ίσο με τον αριθμό S και το γινόμενό τους, ίσο με τον αριθμό P.
60. Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.
61. Αν για την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $αx^2$ + βx + γ = 0, α ≠0, ισχύει Δ < 0 τότε η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
62. Αν Δ=0 τότε η εξίσωση $αx^2$ + βx + γ = 0 (α ≠ 0) έχει δύο ίσες ρίζες $x_1 = x_2 = -\frac{β}{α}$.
63. Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $αx^2$ + βx + γ = 0, τότε $x_1 + x_2 = -\frac{β}{α}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α}$.

64. Η εξίσωση με ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι η : $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ΠΡΟΟΔΟΙ

65. Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.
66. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β ,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
67. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ο β λέγεται πάντα γεωμετρικός μέσος των α, γ.
68. Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει α + β = β + γ.
69. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: αβ = βγ.
70. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω ισχύει ότι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu + 1)\omega$.
71. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω ισχύει ότι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu+1)\omega\right]$.
72. Αν λ είναι ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), τότε: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1} \cdot \lambda$.
73. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο λ ισχύει ότι: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.
74. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής πρόοδο (α_ν) με λόγο λ ≠ 1 είναι: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

75. Το σημείο Μ(x, y) με x < 0 και y < 0 βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο.
76. Η ευθεία y = α x + β, με α > 0 σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x' x.
77. Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε, ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x.
78. Αν Α(α, β) σημείο του επιπέδου, τότε το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Α'(β, α) .
79. Αν $M(x,y) \in C_f$ τότε f(x) = y.
80. Αν α > 0, τότε η συνάρτηση f(x) = αx + β είναι γνησίως φθίνουσα.
81. Στη στήλη Α δίνεται το είδος της συμμετρίας και στη στήλη Β το συμμετρικό ενός σημείου Μ(α,β). Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της στήλης Α στο σωστό αριθμό της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Ως προς τον άξονα x'x.	1. Α (β, α)
β. Ως προς τον άξονα y'y.	2. Β (-α, -β)
γ. Ως προς την αρχή των αξόνων 0(0,0).	3. Γ (α, -β)
δ. Ως προς την διχοτόμο της γωνίας x0y .	4. Δ (-α, β)
	5. Ε(α, β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Α. Να λυθούν οι εξισώσεις $6x^2+x-1=0$ και $125x^4=64x$.

Β. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι P(A) , $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι οι ρίζες των εξισώσεων $6x^2+x=1$ και $125x^4=64x$. Επιπλέον $P(A')>P(B')$.

i. Να δείξετε ότι $P(A)<P(B)$

ii. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ξένα μεταξύ τους.

iii. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A) , P(B), $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ και $P(B-A)$

2. Α. Έστω Ω={10, 11, 12, … ,. 21) ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Να γράψετε με αναγραφή τα στοιχεία των συνόλων Α, Β με Α ={$\alpha \in \Omega$/ α είναι πολλαπλάσιο του 4} και Β ={$\beta \in \Omega$/ β πρώτος αριθμός} και να βρείτε τις πιθανότητες τους (πρώτοι αριθμοί είναι οι ακέραιοι που διαιρούνται μόνο με το ένα και με τον εαυτό τους).

Β. i. Να βρείτε τον α_{11} της Γ.Π με $\alpha_1=3072*P(B)$ και $\lambda=2*P(A)$

ii. Να υπολογίσετε το S_{11} της παραπάνω προόδου

3. Έστω Ω={1,2,3,…,ν} ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα , όπου ν είναι η τάξη του όρου α_ν της Α.Π προόδου με $\alpha_1=3$ και $\omega=4$ που ισούται με 39.

i. Να βρεθεί το ν και το σύνολο Ω.

ii. Να βρείτε τα ενδεχόμενα Α={$\kappa \in \Omega$ / $\frac{8-k}{2}-1<0$ } και Β={$\lambda \in \Omega/\lambda^2-11\lambda+24=0$} καθώς και τις πιθανότητες τους.

iii. Να βρείτε τις $P(A \cup B)$,$P(A \cap B)$ και $P(A-B)$

4. Α. Να αποδείξετε ότι $4x^2+9y^2-4x-6y+2=(2x-1)^2+(3y-1)^2$

Β. Αν για τις πιθανότητες P(A), P(B) , P(A-B) δύο ενδεχόμενων Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $(5P(A-B)-1)^2+4(P(A))^2+9(P(B))^2=4P(A)+6P(B)-2$:

i. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A-B)=\frac{1}{5}$

ii. Να υπολογίσετε την $P(A \cup B)$.

iii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου να συμβεί μόνο ένα εκ των Α ή Β.

5. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y=(\lambda^2-1)x-6$ και ε_2: $y=(|\lambda|+1)x+3\lambda$, $\lambda \in R$.

i. Να εξηγήσετε γιατί η ευθεία ε_2 σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα xx΄ για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού λ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον xx΄ είναι αμβλεία;

iii. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού λ , ώστε οι ευθείες ε_1, ε_2 να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

iv. Για λ=-2 να σχεδιάσετε σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy την ευθεία ε_1 ή ε_2 και να βρείτε τα σημεία Α, Β που τέμνει αυτή τους άξονες.

v. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

6. Δίνονται τα σημεία Α(ρ,4) και Β($ρ^4$,4). Ο πραγματικός ρ είναι λύση της εξίσωσης $x^5 - 4x^4 - k^2x^2 - 1 = 0$

i. Να δείξετε ότι τα Α, Β είναι διαφορετικά μεταξύ τους.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα Α, Β.
iii. Ποια γωνία σχηματίζει η (ε) με τον άξονα xx΄;

7. Α. Δείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από τα σημεία Α(1, 2) και $B(\frac{1}{2}, 3)$ είναι η y=-2x+4.

Β. Αν μία Αριθμητική Πρόοδος ($α_ν$) έχει πρώτο όρο την κλίση της ευθείας και διαφορά την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα yy΄, να υπολογίσετε:

i. Τον όρο $α_{20}$ της προόδου.
ii. Το άθροισμα 10 πρώτων όρων της.
iii. Το άθροισμα $α_{11}+α_{12}+\ldots+α_{20}$

8. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \lambda x^2-16, & x\le 2 \\ 8-2\lambda x, & x>2 \end{cases}$

i. Αν η C_f τέμνει τον xx΄ στο Α(4,0), να υπολογισθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

Για λ=1

ii. Να βρείτε τις τιμές f(2) , f(0) , f(3)
iii. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0.
iv. Να λύσετε την ανίσωση f(x)>0

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \lambda x^2+1, & x\le 3 \\ 10-2\lambda x, & x>3 \end{cases}$

i. Αν το σημείο $A(1,2)\in C_f$ να υπολογισθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

Για λ=1

ii. Να βρείτε τις τιμές f(2) , f(3) , f(4) , f(π) και $f(\sqrt{8})$
iii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.
iv. Να υπολογίσετε το S_{96} της Αριθμητικής Προόδου με $α_1 = f(2)$ και $ω = f(4)$

10. Α. Να λύσετε την ανίσωση $3 \le x^2+x+4 \le 6$

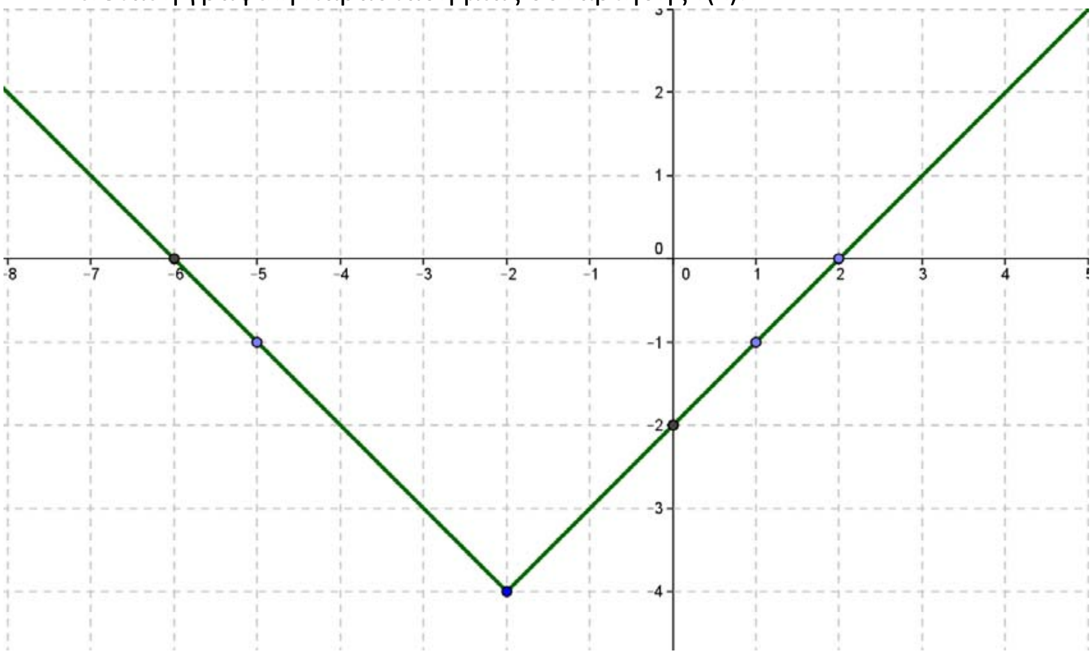
Β. Έστω δύο ενδεχόμενα Α, Β δειγματικού χώρου Ω με P(A)=0,6 , P(B)=0,7 και $P(A\cap B)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{10}+0,4$.

i. Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν μπορεί να είναι ξένα μεταξύ τους.
ii. Να εξηγήσετε γιατί $P(A\cap B)\le 0,6$ καθώς και γιατί $P(A\cap B)\ge 0,3$
iii. Να δείξετε ότι $-2 \le α \le 1$

11. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=|x-1|-2 .

i. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς τη χρήση της απόλυτης τιμής.
ii. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .
iii. Να βρείτε γραφικά τα σημεία που η C_f τέμνει τους άξονες xx΄ και yy΄.
iv. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις f(x) < 1 και f(x) > 5
v. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας στο (iv) ερώτημα.

12. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x).



i. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι ο f(x)= $\begin{cases} x-2, & x \geq -2 \\ -x-6, & x < 2 \end{cases}$

ii. Να βρείτε γραφικά τα σημεία που η C_f τέμνει τους άξονες xx΄ και yy΄.

iii. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις f(x) > -1 και f(x) < -5

iv. Να δείξετε ότι f(x) = |x+2| - 4

v. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας στο (iii) ερώτημα.

13. A. i. Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2$ - 3x + 10 για τις διάφορες τιμές του πραγματικού x.

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt[4]{x^2-4x+4}$

B. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) = $\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+10}}{\sqrt[4]{x^2-4x+4}}$

i. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της f(x)

ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης, απλοποιημένος, γράφεται f(x) = $\sqrt{x+5}$

14. Ένας εύπορος παππούς άφησε σαν κληρονομιά για τα δυο εγγόνια του, τα παρακάτω:
Για τον πρωτότοκο εγγονό θα έδινε 5000€ τον πρώτο χρόνο της ζωής του και το ποσό θα αυξάνεται κατά 1000 € κάθε χρόνο, μέχρι την συμπλήρωση του 18^{ου} έτους. Αν σπούδαζε, θα συνεχιζόταν η χορηγία και κατά τη βασική διάρκεια των σπουδών του. Για τον δευτερότοκο εγγονό θα έδινε 1000€ κάθε χρόνο από την ηλικία των 7 ετών έως και την ενηλικίωσή του. Αν όμως σπούδαζε, το ποσό θα τετραπλασιαζόταν κάθε χρόνο, όσο διαρκούσαν οι βασικές σπουδές του.

i. Μπορείτε να βρείτε τι ποσό θα πάρει κάθε εγγονός μέχρι την ενηλικίωσή του;

ii. Ποιος από τους δύο είναι πιο ευνοημένος, αν σπούδαζαν σε σχολή που διαρκεί 4 χρόνια;

iii. Κάποιος είπε στον δευτερότοκο να σπουδάσει σε μια σχολή πενταετούς φοίτησης. Είχε δίκιο και γιατί;

15. Α. i. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α = $\sqrt{\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}}$ ισούται με 2.

ii. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης Β = $\dfrac{2^{2^3}+(2^2)^3}{\sqrt[4]{4^{12}}}$ ισούται με 5.

Β. Αν Κ, Λ δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $P(K-\Lambda)=\dfrac{A}{B}$ και $P(\Lambda)=\dfrac{1}{A}$ να βρείτε:

i. Την πιθανότητα του ενδεχόμενου να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Κ, Λ

ii. Την πιθανότητα του ενδεχόμενου να μην συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα Κ, Λ

16. Α. i. Να λυθεί η ανίσωση $-36x^2+36x>0$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $9x^2-6x+(\lambda^2-\lambda+1)=0$ (1) με άγνωστο τον x, έχει δύο λύσεις άνισες για κάθε $\lambda\in(0,1)$.

Β. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με P(B-A), P(A) να είναι λύσεις της εξίσωσης (1) του Α(ii) ερωτήματος.

i. Να εξηγήσετε με ένα διάγραμμα Venn ότι $P(B-A)+P(A)=P(A\cup B)$

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β.

iii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην συμβεί κανένα εκ των Α ή Β.

17. Από τους 200 μαθητές ενός Λυκείου, 50 μαθητές συμμετέχουν σε ένα περιβαλλοντικό πρόγραμμα, 40 μαθητές συμμετέχουν σε ένα πρόγραμμα αγωγής υγείας και 20 μαθητές συμμετέχουν και στα δύο προγράμματα.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει στο περιβαλλοντικό πρόγραμμα;

β) να μην συμμετέχει στο περιβαλλοντικό πρόγραμμα;

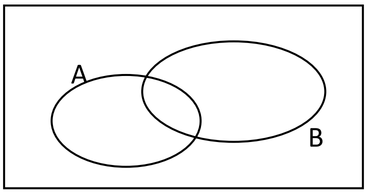
γ) να συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον από τα δυο προγράμματα;

δ) να συμμετέχει μόνο σε ένα από τα δυο προγράμματα;

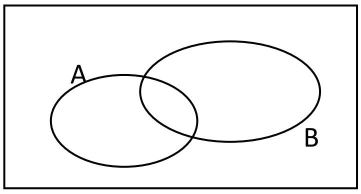
ε) να μη συμμετέχει σε κανένα από τα δυο προγράμματα;

18. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω, όπως φαίνεται στο παρακάτω διαγράμματα Venn. Αφού περιγράψετε στην καθομιλουμένη τι παριστάνουν τα ενδεχόμενα να γραμμοσκιάσετε σε κάθε διάγραμμα τα αντίστοιχα ενδεχόμενα:

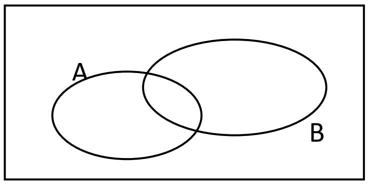
1. (B-A)



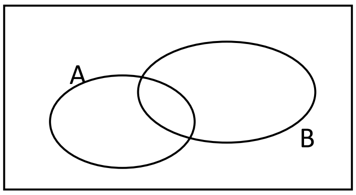
2. $(A\cap B)$



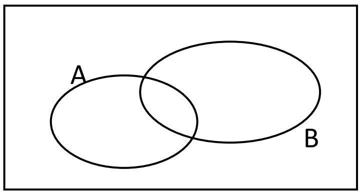
3. $(A\cup B)$



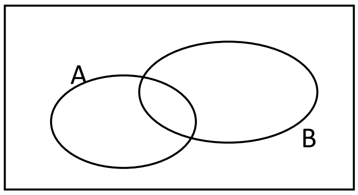
4. A'



5. $(A\cup B)'$



6. $(A\cap B)'$



19. Από τους 200 μαθητές ενός Λυκείου, 50 μαθητές συμμετέχουν σε ένα περιβαλλοντικό πρόγραμμα, 40 μαθητές συμμετέχουν σε ένα πρόγραμμα αγωγής υγείας και 20 μαθητές συμμετέχουν και στα δύο προγράμματα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει στο περιβαλλοντικό πρόγραμμα;
β) να μην συμμετέχει στο περιβαλλοντικό πρόγραμμα;
γ) να συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον από τα δυο προγράμματα;
δ) να συμμετέχει μόνο σε ένα από τα δυο προγράμματα;
ε) να μη συμμετέχει σε κανένα από τα δυο προγράμματα;

20. Α. Το 44% των μαθητών μιας τάξης είναι αγόρια. Το 40% από τους μαθητές πάνε σχολείο με ποδήλατο. Από τα 14 κορίτσια που είχε η τάξη , τα 4 πάνε σχολείο με ποδήλατο. Να αποδείξετε ότι :

i. Οι μαθητές της τάξης είναι 25.
ii. Τα αγόρια που πάνε σχολείο με ποδήλατο είναι 6

Β. Δίνονται τα ενδεχόμενα:
Α={ ο μαθητής είναι αγόρι) και Π={ο μαθητής πάει σχολείο με ποδήλατο)
Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα παραπάνω ενδεχόμενα και αφού περιγράψετε στην καθομιλουμένη ποια είναι τα ενδεχόμενα: Α' , (ΑUΠ)' , Α-Π να υπολογίσετε την πιθανότητα του καθενός.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+x}{x-1}$ και $g(x) = -x^2 + x + 2$

i. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων f, g
ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$
iii. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = f(2)\text{-}f(4)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
iv. Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g να βρίσκεται πάνω από την ευθεία y = A.
v. Να λυθεί η εξίσωση $(\sqrt{x}-1)f(x) = g(x)$

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\mu+9)x-(1-7\mu)=0,\ \mu\in\mathbb{R}$ (1) .

i) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=\mu^2-10\mu+85$
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.
iii) Αν x_1, x_2 οι δύο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το σύνολο Α των τιμών του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $x_1+x_1x_2>(x_1+x_2)^2-x_2-57$.
iv) Αν $\mu\in(-8, -2)$, να απλοποιήσετε την παράσταση $|\mu-2|-2|-8-\mu|+|\mu+12|$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-|2x-1|}}{x}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
ii) Να υπολογιστούν τα $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ και $f(1)$.
ii) Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το $f(1)$ και λόγο $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Να υπολογιστούν τα α_4 και S_4 .

24. Α. Μια στέγη σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου, έχει 20 σειρές με κεραμίδια. Τα πλήθη των κεραμιδιών κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Η 1η σειρά έχει 16 ενώ η 7η έχει 28 κεραμίδια.

α) Να βρείτε πόσα κεραμίδια έχει η 10η σειρά.

β) Πόσα κεραμίδια υπάρχουν από την 4η έως και τη 10η σειρά;

Β. Η 1η σειρά της στέγης έχει 6 σπασμένα κεραμίδια, η 2η σειρά έχει 9 σπασμένα κεραμίδια και η 3η σειρά έχει 12 σπασμένα κεραμίδια.

α) Από ποιά σειρά και μετά υπάρχουν μόνο σπασμένα κεραμίδια;

β) Πόσα είναι τα καλά κεραμίδια που έχει η στέγη;

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+32}+\sqrt{x^2+6x+5}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Σε μια γεωμετρική πρόοδο με λ > 0 ισχύει $\alpha_1 = f(-8)$ και $\alpha_2 = f(-1)f(-5)$.

(α) Να υπολογίσετε τα α_1 και α_2.

(β) Να αποδείξετε ότι $\lambda = f(4)$.

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{\alpha_5-9\alpha_3}{\sqrt{21}}$.

26. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε 1 ώρα.

i) Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος τους μετά από το πέρασμα 6 ωρών.

ii) Στο τέλος της 6ης ώρας, γίνεται ένας ψεκασμός στα βακτηρίδια με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό της και συγχρόνως προκαλεί μείωση του πλήθους τους κατά 270 βακτηρίδια κάθε μία ώρα.

(α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά από τον ψεκασμό.

(β) Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα έχει μηδενιστεί το πλήθος των βακτηριδίων;

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{x\sqrt{-x^2+3x+4}}$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $xf(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

iii) Έστω x_1, x_2 οι δύο πραγματικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 < x_2$. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το x_1 και λόγο το x_2. Να βρείτε:

(α) Τον πέμπτο όρο της.

(β) Το άθροισμα των πρώτων 5 όρων της.

(γ) Το άθροισμα $S=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\ldots+\alpha_{11}-\alpha_{12}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha}{x-3}, \alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii) Αν $6f\left(\dfrac{1}{2}\right)-21=0$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) Για α = 9

(α) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f

(β) Να λυθεί η ανίσωση $|f(x)| < 10$.

29. Η Μαρία και η Ελένη εξετάζονται σε ένα μάθημα με πιθανότητες επιτυχίες αντίστοιχα $\dfrac{5}{7}$ και $\dfrac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πετύχουν και οι δύο είναι $\dfrac{15}{28}$. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) Να αποτύχει η Μαρία;
ii) Να επιτύχουν και οι δύο;
iii) Να αποτύχουν και οι δύο;
iv) Τουλάχιστον μια από τις δύο να επιτύχει;

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x -8$.

i) Αν α_ν αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5$ και $\omega = 3$, να δείξετε ότι τα σημεία (ν, α_ν), με $\nu \in \mathbb{N}$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x).
ii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |7 – 2x|$.

31. Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{2\alpha_\nu}{3}+1$ για κάθε φυσικό ν.

i) Να υπολογίσετε του πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας και να δείξετε ότι δεν είναι γεωμετρική πρόοδος.
ii) Δίνεται η ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_\nu – \kappa$, για κάθε φυσικό ν. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό κ ώστε η ακολουθία β_ν να είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να προσδιορίσετε τον πρώτο όρο και το λόγο.

32. Έστω ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης x^2 - 8x + 9 = 0, με $\rho_1 < \rho_2$. Αν κ , λ είναι ετερόσημοι πραγματικοί τέτοιοι ώστε, ρ_1, κ, ρ_2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ ρ_1, λ, ρ_2 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς κ και λ.

33. Αν Α είναι ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, και P(A) η πιθανότητα πραγματοποίησής του, τότε

i) Να προσδιορίσετε το Α ώστε η εξίσωση $\left(P(A)-2\right)x^2 - 8x - 8\left(P(A)+1\right) = 0$ να έχει διπλή ρίζα.
ii) Για ποια ενδεχόμενα η ανίσωση $\left(P(A)-2\right)x^2 - 8x - 8\left(P(A)+1\right) < 0$ επαληθεύεται για κάθε τιμή του x;

34. Δυο ποδηλάτες συμμετέχουν σε έναν αγώνα και ξεκινούν με 6 λεπτά διαφορά. Η μέση ταχύτητα του κάθε ποδηλάτη είναι 40 km/h στην ευθεία, 25 km/h στην ανάβαση και 90 km/h στην κατάβαση. Το σχεδιάγραμμα της διαδρομής δίνεται παρακάτω: