ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο **C** των **μιγαδικών αριθμών** είναι ένα υπερσύνολο του **R** με τα εξής χαρακτηριστικά:

Α) Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο **R** επεκτείνονται και στο **C**, δηλαδή όπως ισχύει για παράδειγμα 5+2=7 στο **R**, το ίδιο ισχύει και στο **C**.[1] Το 0 εξακολουθεί να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 του πολλαπλασιασμού.

Β) Στο **C** υπάρχει ένα στοιχείο i, το οποίο δεν ανήκει στο **R**. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του στοιχείου αυτού με τον εαυτό του ορίζουμε να είναι ίσο με -1, δηλαδή $i\cdot i=-1$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο i είναι μια λύση της εξίσωσης $x^2=-1$.

Γ) Η πράξη του πολλαπλασιασμού επεκτείνεται σε σχέση με το **R**, ώστε να ισχύει $1\cdot i=1$ και $0\cdot i=0$. Όμως, τα στοιχεία του **R** και το στοιχείο i δεν είναι τα μοναδικά στοιχεία που έχει το σύνολο **C**. Για κάθε $\beta\in$**R**, με $\beta\neq 0$ και $\beta\neq 1$, ορίζουμε ο πολλαπλασιασμός $\beta\cdot i$ να έχει ως αποτέλεσμα ένα νέο στοιχείο που δεν είναι ίσο ούτε με το i, ούτε ίσο με κάποιον πραγματικό αριθμό. Το στοιχείο αυτό θα δηλώνεται με την πράξη από την οποία προέρχεται δηλαδή με $\beta\cdot i$ ή πιο απλά βi. Τα στοιχεία της μορφής βi με $\beta\in$**R** ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί**. Θα ήταν λάθος να υποθέσουμε ότι τελικά τα στοιχεία του **C** είναι μόνο τα στοιχεία του **R** και τα στοιχεία της μορφής βi, $\beta\in$**R**. Η πράξη της πρόσθεσης επεκτείνεται ώστε να ισχύει $0+\beta i=\beta i$. Επίσης, αν $\alpha,\beta\in$**R** με $\alpha\neq 0$, τότε η ορίζουμε η πρόσθεση του α με το στοιχείο βi , δηλαδή η πράξη $\alpha+\beta i$, να είναι ένα νέο στοιχείο που δεν είναι ίσο ούτε με κάποιον πραγματικό αριθμό, ούτε ίσο με κάποιον φανταστικό αριθμό. Κάθε ένα τέτοιο στοιχείο θα συμβολίζεται με τις πράξεις από τις οποίες προέρχεται, δηλαδή $\alpha+\beta i$.

Τελικά το σύνολο **C** είναι ένα σύνολο όπου κάθε στοιχείο z του γράφεται κατά <u>μοναδικό τρόπο</u> στη μορφή $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in$**R**. Αυτό σημαίνει ότι αν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$, όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in$**R**, τότε αναγκαστικά, λόγω της μοναδικής

---

[1] Πράξη στο **R** είναι η αντιστοιχία ενός διατεταγμένου ζεύγους από στοιχεία του **R** σε ένα επίσης στοιχείο του **R**. Δηλαδή για την πράξη 5+2=7, θα μπορούσαμε να γράψουμε $(5,2)\rightarrow 7$. Λέγοντας ότι στο **C** διατηρούνται οι πράξεις που ισχύουν και στο **R**, εννοούμε ότι για την ίδια πράξη διατηρούνται οι ίδιες αντιστοιχίες. Με άλλα λόγια, για την πρόσθεση όπως ισχύει η αντιστοιχία $(5,2)\rightarrow 7$ στο **R**, η ίδια αντιστοιχία ισχύει και για την πρόσθεση αυτών των στοιχείων όταν αυτά θεωρούνται στοιχεία του **C**.

γραφής, ισχύει α=γ και β=δ. Οι πράξεις για δύο στοιχεία του **C** ακολουθούν ανάλογες ιδιότητες με αυτές των πράξεων δύο πολυωνύμων πρώτου βαθμού. Π.χ. όπως (3+2x)+(7+4x)=(3+7)+(2+4)x=10+6x, έτσι και (3+2i)+(7+4i)=(3+7)+(2+4)i=10+6i. Ακόμη για τον πολλαπλασιασμό θα έχουμε :

$(3+2i)\cdot(7+4i)=3\cdot7+3\cdot4i+2i\cdot7+2i\cdot4i=21+12i+14i+8i^2=21+26i+8\cdot(-1)=21-8+26i=13+26i$.

Δ) Γενικά το σύνολο **C** λέμε ότι είναι ένα <u>σώμα</u>, δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω 9 ιδιότητες:

Για τρεις οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, z_3 \in$ **C**, ισχύει

Ι1) $(z_1+z_2)+z_3= z_1+(z_2+z_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)

Ι2) $z_1+z_2= z_2+z_1$ (αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)

Ι3) $z_1+0= z_1$ (το 0 είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και στο σύνολο **C**)

Ι4) Υπάρχει στοιχείο $v\in$ **C** ώστε $z_1+v=0$. Το v θα το συμβολίζουμε ως $-z_1$. Δηλαδή για κάθε $z_1\in$ **C** υπάρχει στοιχείο $-z_1\in$**C** ώστε $z_1+(-z_1)=0$. Ο $-z_1$ καλείται ***αντίθετος*** του z_1.

Ι5) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3= z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

Ι6)) $z_1\cdot z_2= z_2\cdot z_1$ (αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

Ι7)) $z_1\cdot 1= z_1$ (το 1 είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού και στο σύνολο **C**)

Ι8) Αν $z_1\neq0$, τότε υπάρχει στοιχείο $w\in$ **C**, ώστε $z_1\cdot w=1$. Το w θα το συμβολίζουμε ως $\frac{1}{z_1}$. Δηλαδή για κάθε $z_1\in$ **C**, υπάρχει στοιχείο $\frac{1}{z_1}\in$ **C** ώστε $z_1\cdot\frac{1}{z_1}=1$. Ο $\frac{1}{z_1}$ καλείται ***αντίστροφος*** του z_1. Το στοιχείο $\frac{1}{z_1}$ θα το συμβολίζουμε επίσης ως z_1^{-1}.

Ι9) $z_1\cdot(z_2+z_3)= z_1\cdot z_2+ z_1\cdot z_3$ (επιμεριστική ιδιότητα)

Συνέπειες: Με τη βοήθεια των προηγούμενων 9 ιδιοτήτων αποδεικνύονται οι ακόλουθες 3:

Έστω $z,w \in \mathbf{C}$. Τότε ισχύει:

I10) $z \cdot 0 = 0$.
I11) $z \cdot w = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ή $w = 0$.
I12) $z^2 = w^2 \Leftrightarrow z^2 - w^2 = 0 \Leftrightarrow (z-w)\cdot(z+w) = 0 \Leftrightarrow z - w = 0$ ή $z + w = 0 \Leftrightarrow z = w$ ή $z = -w$.

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα προσέξει ότι οι ιδιότητες (I10) έως (I12) ισχύουν και στο σύνολο **R**. Αυτό δεν είναι τυχαίο με το γεγονός ότι στο σύνολο **R** όπως και στο σύνολο **C** ισχύουν οι ιδιότητες (I1) έως (I9). Γενικά κάθε σύνολο που ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1) έως (I9) θα ικανοποιεί και τις ιδιότητες (I10) έως (I12). Πάμε παρακάτω να δούμε μια ιδιότητα που ισχύει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά δεν ισχύει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

<u>Διάταξη στο σύνολο C.</u>

Γνωρίζουμε ότι στο **R** αν $\alpha>0$ και $\beta>0$, τότε ισχύουν οι ιδιότητες (i) $\alpha+\beta>0$ και (ii) $\alpha\cdot\beta>0$. Στο σύνολο **C** δεν μπορούμε να ορίσουμε διάταξη που να ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι στο **C** ορίζεται σχέση διάταξης που να ικανοποιεί τις ιδιότητες της εκφώνησης. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί «θετικοί». Έστω λοιπόν οι μιγαδικοί αριθμοί z και w, με $z>0$ και $w>0$. Τότε θα έχουμε σύμφωνα με την υπόθεση ότι $z+w>0$ και $z\cdot w>0$. Για το στοιχείο i, θα ισχύει $i>0$ ή $i=0$ ή $i<0$. Προφανώς $i\neq 0$. Έστω ότι $i>0$. Τότε θα ισχύει και $i\cdot i>0$. Δηλαδή $-1>0$, άτοπο. Έστω ότι $i<0$. Τότε $-i>0$. Άρα $(-i)\cdot(-i)>0 \Leftrightarrow -1>0$, άτοπο. Αφού λοιπόν κάθε περίπτωση είναι αδύνατη, αυτό σημαίνει ότι στο **C** δεν μπορούμε να ορίσουμε σχέση διάταξης που να ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii).[1]

Σχόλια:

(1) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύει $z<w$, τότε θα εννοούμε ότι $z,w \in \mathbf{R}$.
(2) Ιδιότητες που ισχύουν στο **R** και οι οποίες αποδεικνύονται με τη βοήθεια της διάταξης ενδέχεται να μην «μεταφέρονται» και στο **C**. Για παράδειγμα ξέρουμε ότι αν $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$. Αυτή η ισοδυναμία

[1] Η απόδειξη αυτή παρουσιάζει διάφορα κενά. Δεν εξηγείται για παράδειγμα τι εννοούμε με τον όρο «σχέση διάταξης» ή γιατί πρέπει να ισχύει η συνθήκη ($i>0$ ή $i=0$ ή $i<0$). Ωστόσο η πραγμάτευση τέτοιων λεπτομερειών ξεφεύγει από το σκοπό αυτού του άρθρου.

αποδεικνύεται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων που ισχύουν αναφορικά με τη διάταξη.[1] Εντούτοις, στο **C** δεν ισχύει η ισοδυναμία αυτή. Στην πραγματικότητα αποδεικνύεται ότι αν $z,w\in\mathbf{C}$ τότε $z^2+w^2=0\Leftrightarrow z=iw$ ή $z=-iw$ (η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη).

[1] Πράγματι, έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $\alpha^2+\beta^2=0$. Αν $\alpha^2>0$ και $\beta^2>0$, τότε $\alpha^2+\beta^2>0$, άτοπο. Άρα $\alpha^2=0$ ή $\beta^2=0$. Αν $\alpha^2=0$, τότε $\alpha=0$. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει ότι $\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\beta^2=0\Leftrightarrow\beta=0$. Όμοια αν $\beta^2=0$, προκύπτει πάλι ότι $\alpha=\beta=0$. Αντίστροφα τώρα αν $\alpha=\beta=0$, τότε προφανώς $\alpha^2+\beta^2=0$. Αποδείξαμε λοιπόν την ισοδυναμία $\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$.