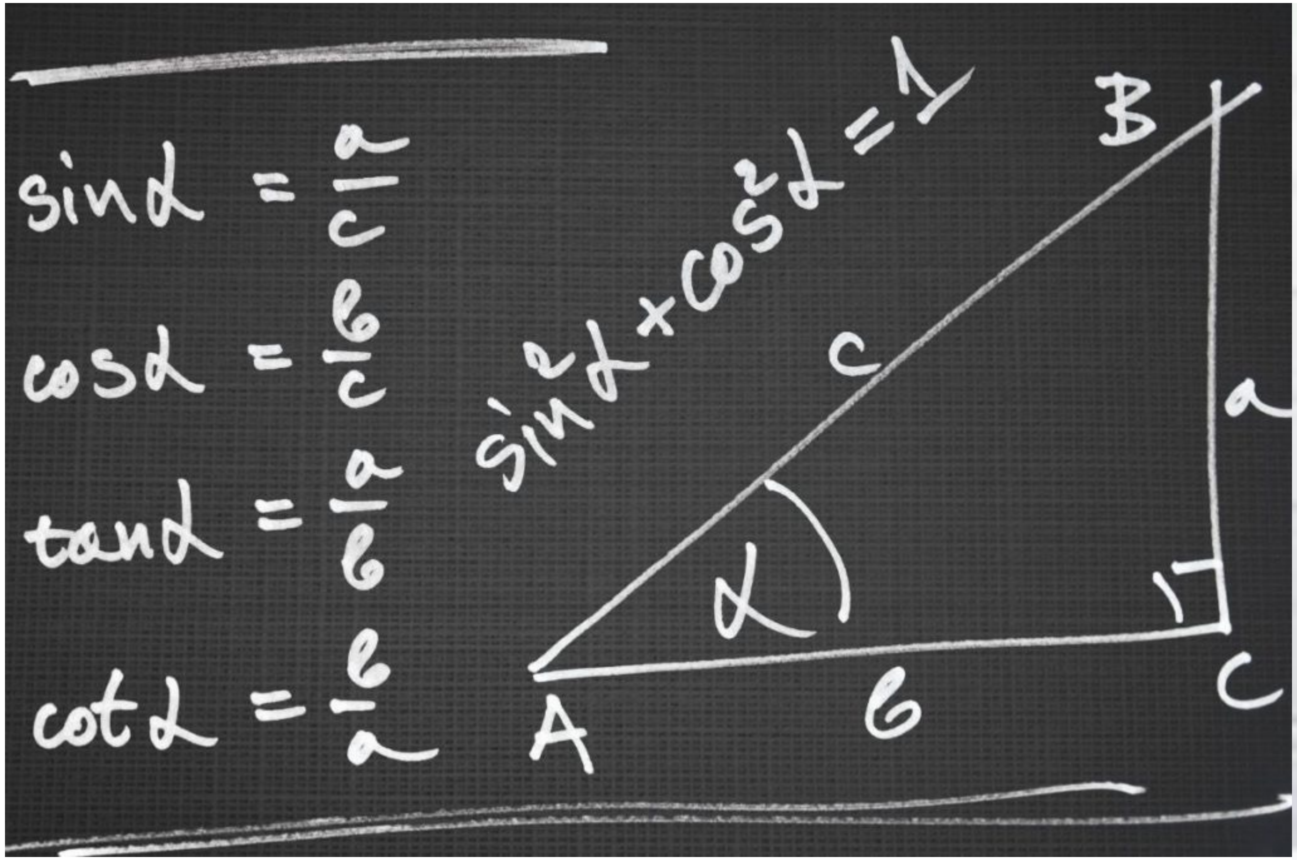
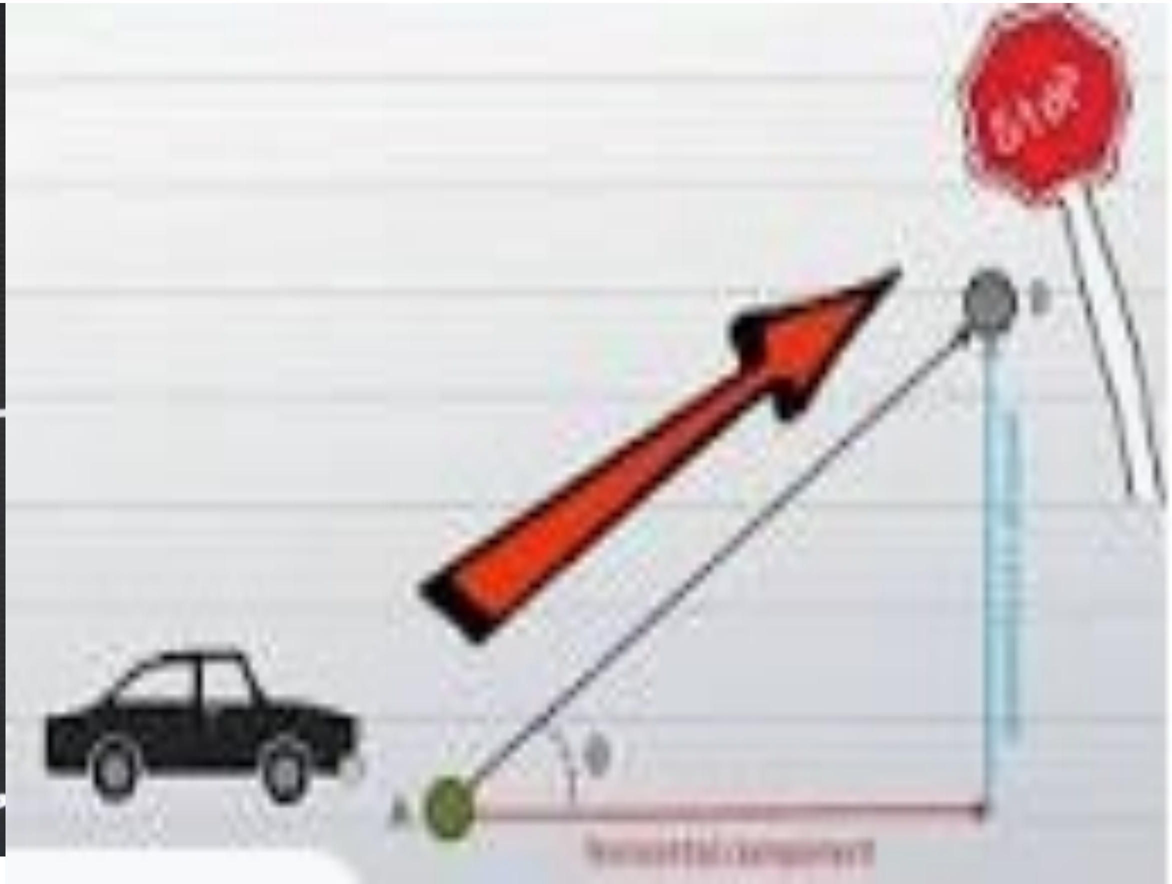
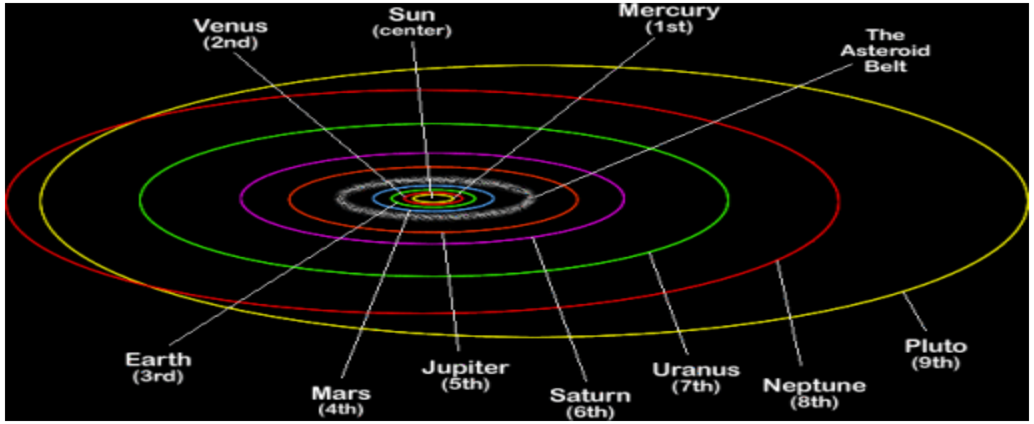


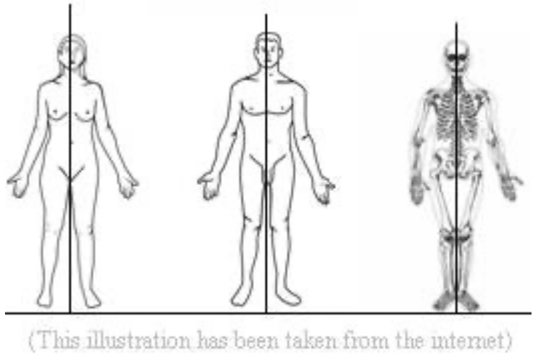


Τριγωνομετρία για τις φυσικές επιστήμες

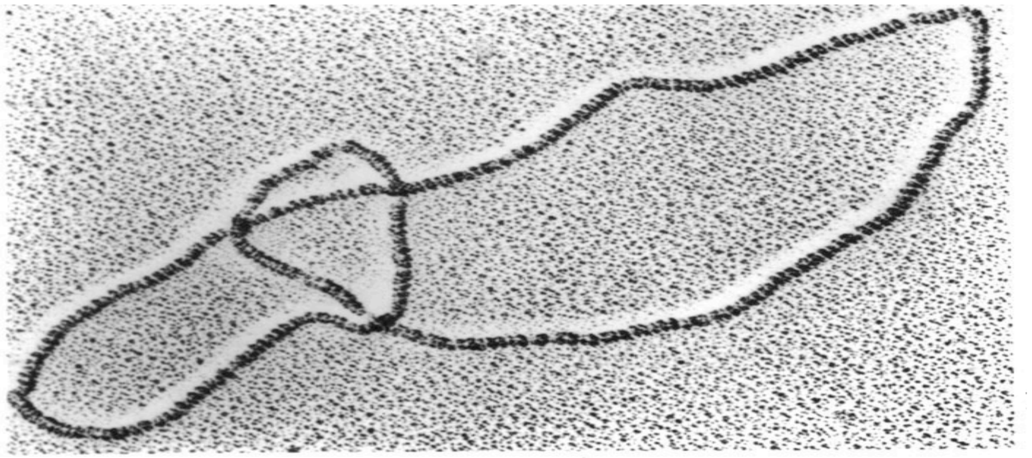
- Να αποκρυπτογραφήσουμε τις ***ελλειπτικές τροχιές των πλανητών***:



- Να μελετήσουμε τη ***συμμετρία*** που παρατηρούμε στη φύση και στο σώμα μας:

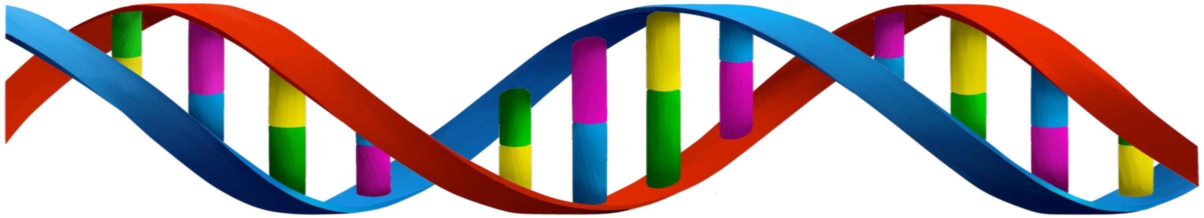


Μετά την ανακάλυψη των κινούμενων μορίων του DNA (το 1953, από τους Watson και Crick, βραβείο Νόμπελ 1962), οι επιστήμονες άρχισαν να αναρωτιούνται εάν η ***τοπολογική μορφή του DNA***, δηλαδή η θέση του μέσα στο κύτταρο, έχει επιπτώσεις στην εξέλιξη του κυττάρου. Το 1971 ο βιοχημικός James Wang παρατήρησε ότι κάποια ένζυμα μπορούν να τροποποιήσουν την εικόνα του DNA, να δημιουργήσουν ***«κόμπους»***



Από το DNA στην Τοπολογία!

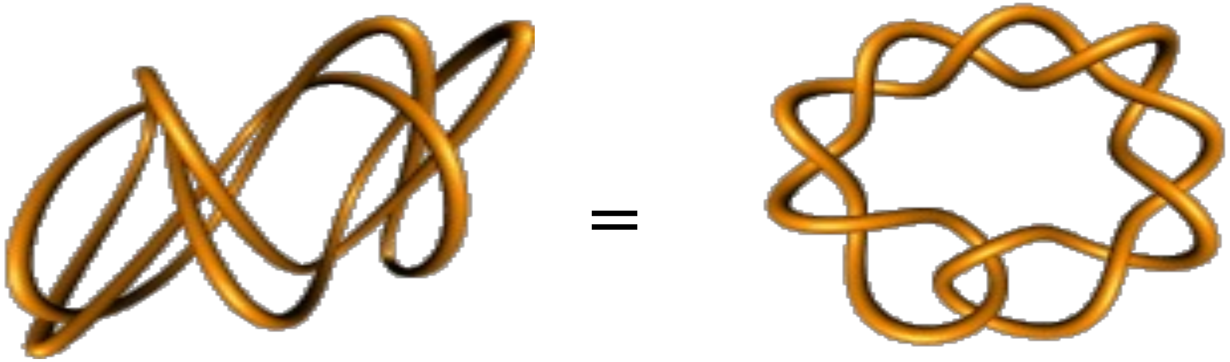
Όλοι, πλέον, γνωρίζουμε το μόριο του DNA που βρίσκεται μέσα σε κάθε κύτταρο ζωντανού οργανισμού και περιέχει όλες τις γενετικές πληροφορίες που καθορίζουν τη βιολογική ανάπτυξη του κυττάρου και, κατ' επέκταση, όλου του οργανισμού. Επίσης, όλοι γνωρίζουμε τη δομή αυτού του μορίου, τη διπλή έλικα (δύο έλικες που συστρέφονται η μία γύρω από την άλλη):



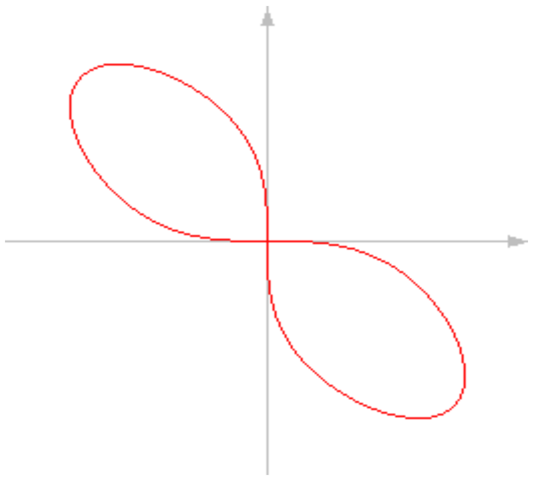
γεγονός που έχει επιπτώσεις στη συμπεριφορά του μορίου του DNA μέσα στο κύτταρο. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, τη βοήθεια της ***Τοπολογίας***, ενός κλάδου των Καθαρών Μαθηματικών, γνωστού και ως *«Γεωμετρίας του καουτσούκ»,* που μελετά τις ιδιότητες των «αντικειμένων – συνόλων» που μένουν αναλλοίωτες από τις παραμορφώσεις

(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Mug_and_Torus_morph.gif),

και ειδικότερα της ***«Τοπολογίας των κόμπων»*** *(Knot Topology)*



για να μελετήσουμε την τοπολογική συμπεριφορά του DNA και τις επιπτώσεις της στην λειτουργία των κυττάρων!!!



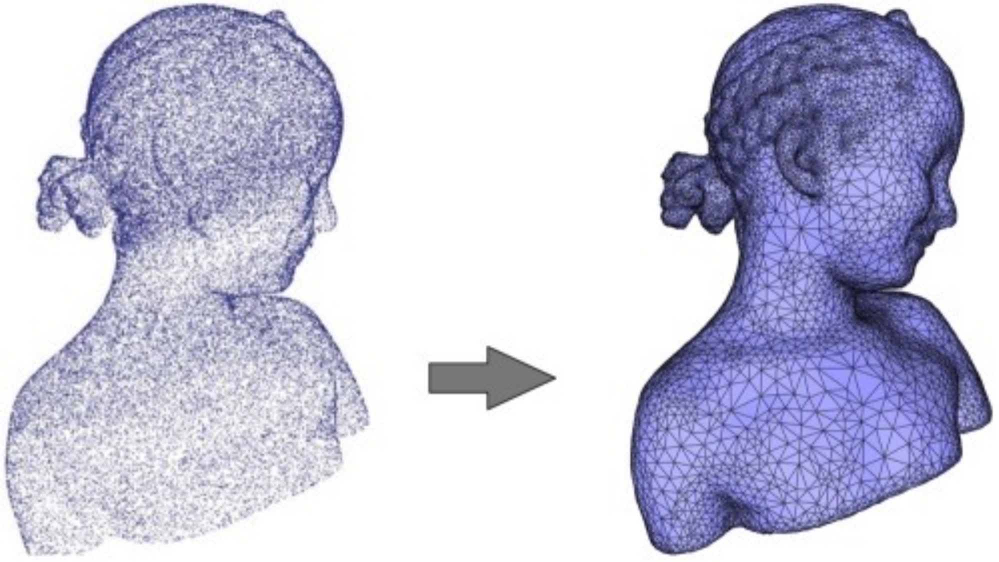
Αλγεβρική καμπύλη

$$x^4 + y^4 + 4xy = 0$$

Αλγεβρική επιφάνεια

$$x^2+y^2 + z^2+2xyz=1$$

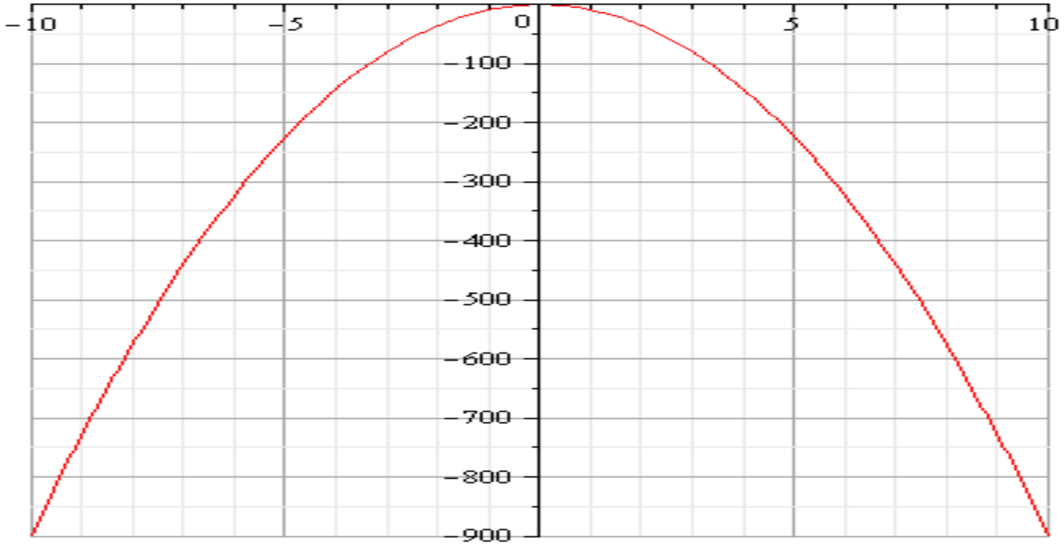
Π.χ., μπορούμε να ***«προσθέτουμε» κατά κάποιο τρόπο*** **σημεία των αλγεβρικών καμπυλών, επιφανειών, και να λαμβάνουμε σημεία πάλι της καμπύλης, της επιφάνειας**... Οι ιδιότητες αυτές μελετούνται από τους ειδικούς και τους βοηθούν να παράγουν νέα και ασφαλέστερα πρωτόκολλα κρυπτογραφίας!



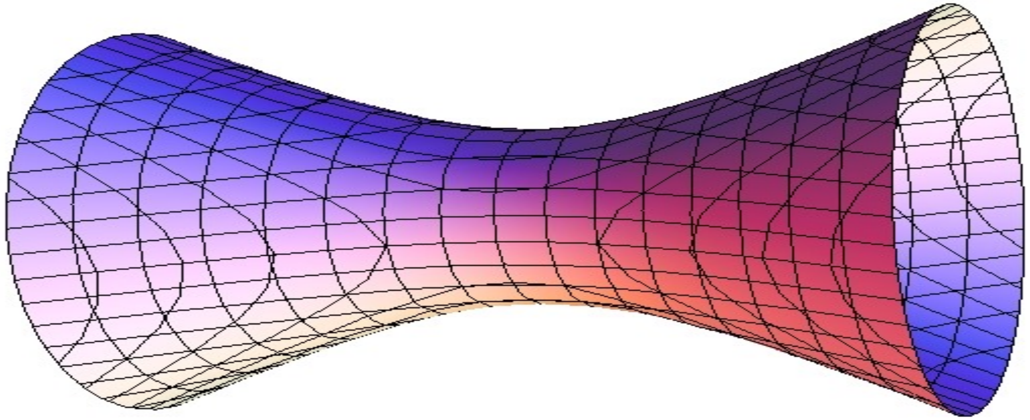
Βάσει αυτής της τεχνικής, απεικονίζουμε τους όγκους που έχουν εντοπισθεί σε έναν οργανισμό και ανάλογα με το σχήμα τους, τους διαχωρίζουμε σε καλοήθεις και κακοήθεις…

Μονότοξο γεφύρι της Πλάκας (1866)

Υπερβολοειδής γέφυρα (Manchester 1999)



Παραβολή: $\boldsymbol{y = -px^2,\ p > 0}$



Μονόχωνο υπερβολοειδές: $\boldsymbol{x^2 - y^2 + z^2 = 1}$

Μαθηματικά και Αρχιτεκτονική

Οι πυραμίδες της Γκίζας, 2580 π.χ.

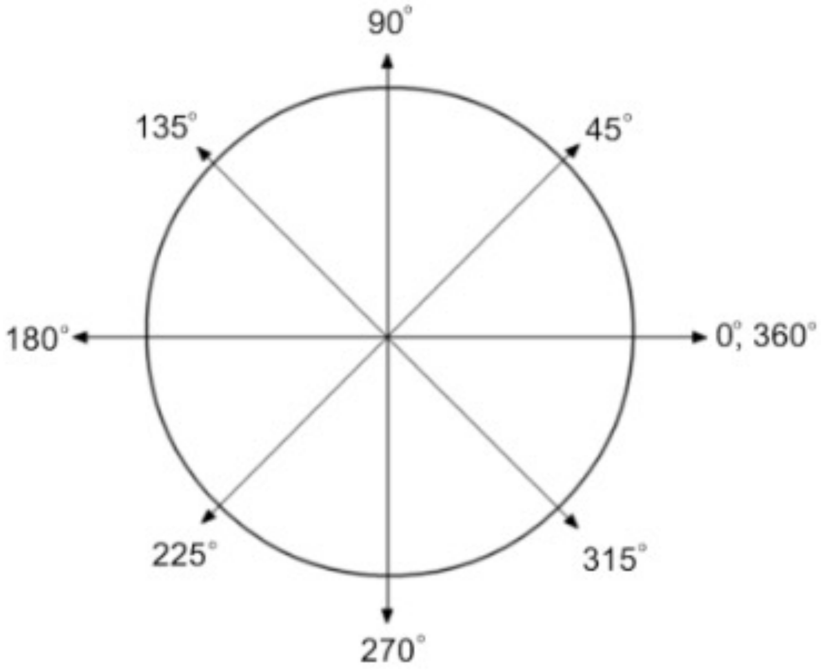
Η πυραμίδα του Λούβρου, 1989

Παρθενώνας (438 π.χ.) και θέατρο της Επιδαύρου (4ος αιώνας π.χ.), στην κατασκευή τους έχει ρόλο ο αριθμός

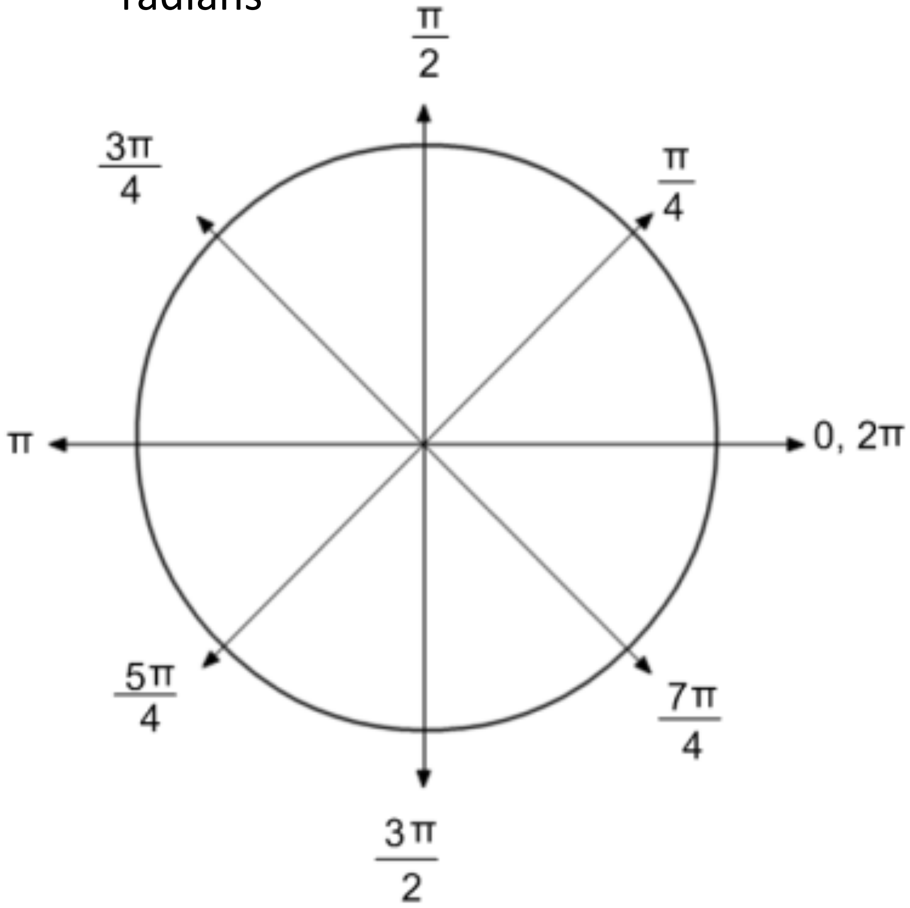
$\boldsymbol{\varphi^2 = \varphi + 1}$, ***ο αριθμός της αρμονίας που διέπει τη φύση, ο αριθμός της χρυσής τομής!!!***

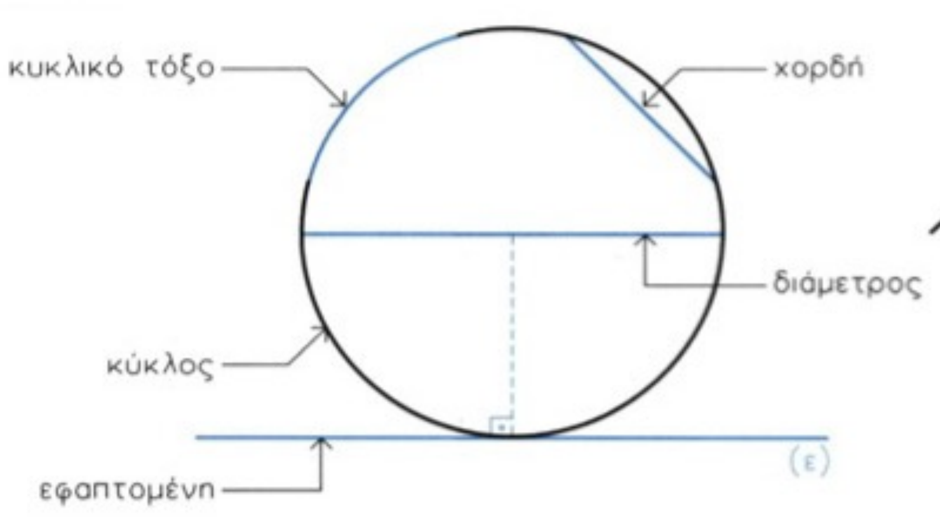
Κύκλος

μοίρες

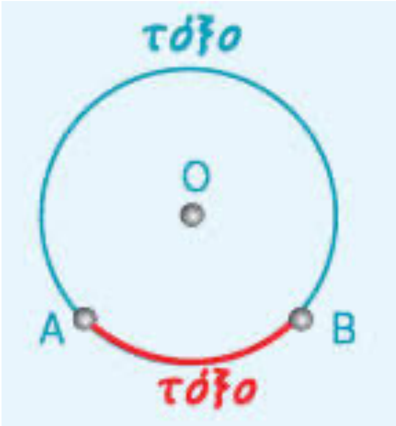


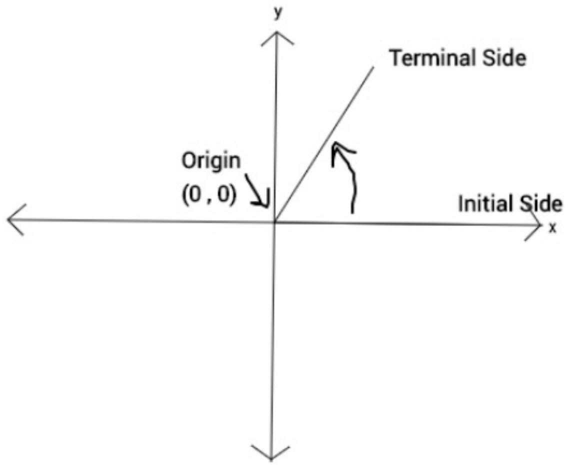
radians



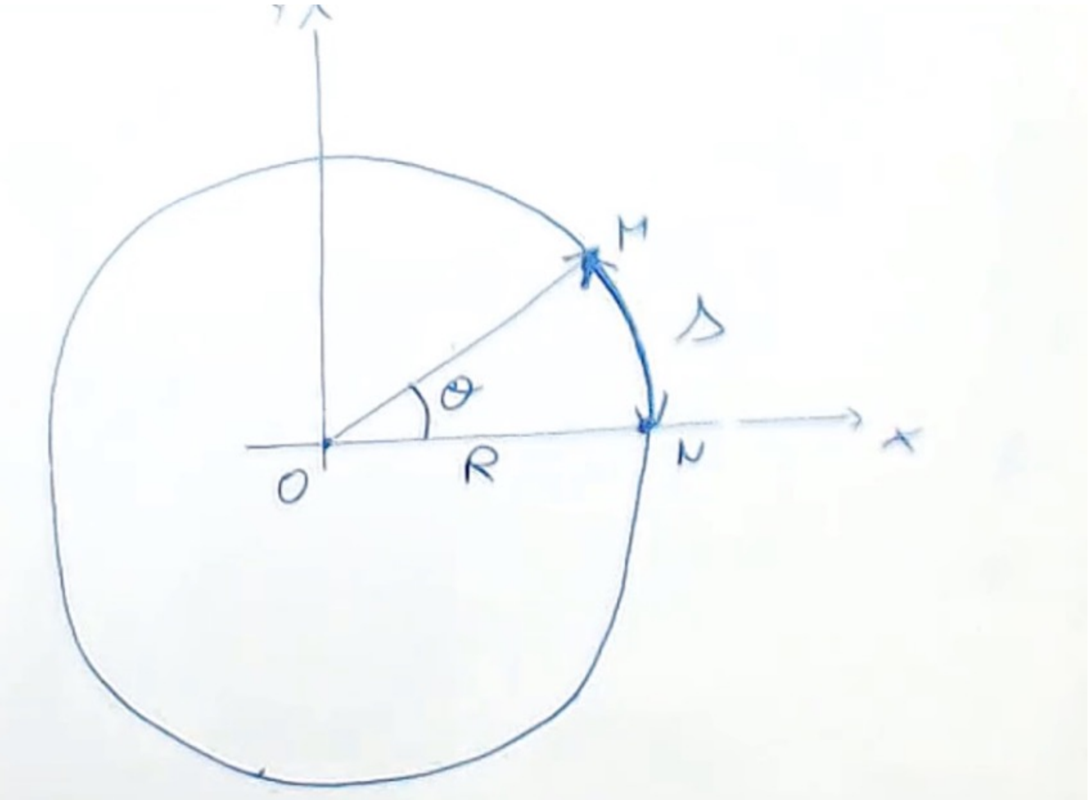


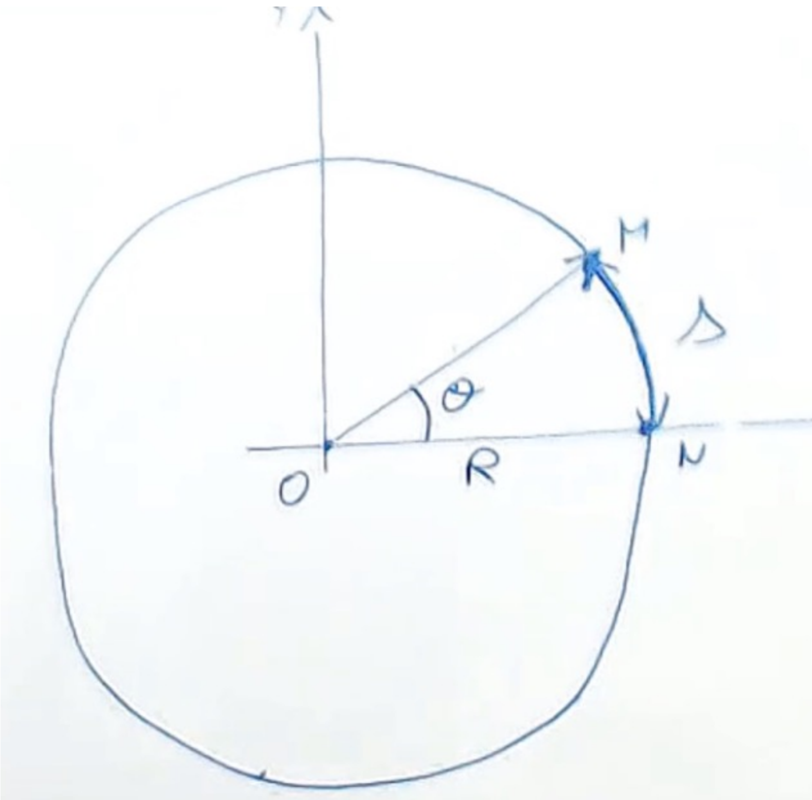
τόξο





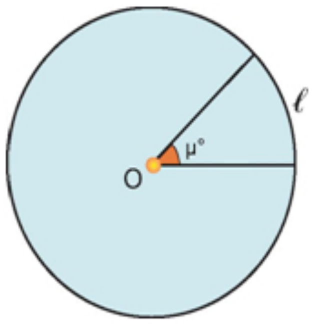
Ορισμός γωνίας

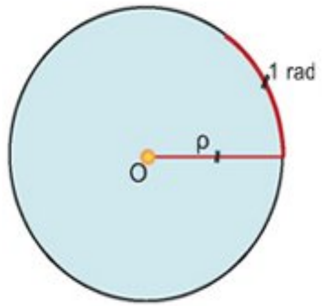




$$\theta = \frac{s}{R} = 2\pi$$

$$\frac{\theta(Rad)}{\theta(^\circ)} = \frac{2\pi\ Rad}{360^\circ}$$





Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την **απλή μέθοδο** των τριών.

Ένα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος 2πρ.

Ένα τόξο μ° πόσο μήκος έχει;

Τόξο	Μήκος
360°	2πρ
μ°	ℓ

Έχουμε: $\frac{360}{2\pi\rho} = \frac{\mu}{\ell}$ ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$.

Το μήκος ενός τόξου μ° ισούται με: $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$.

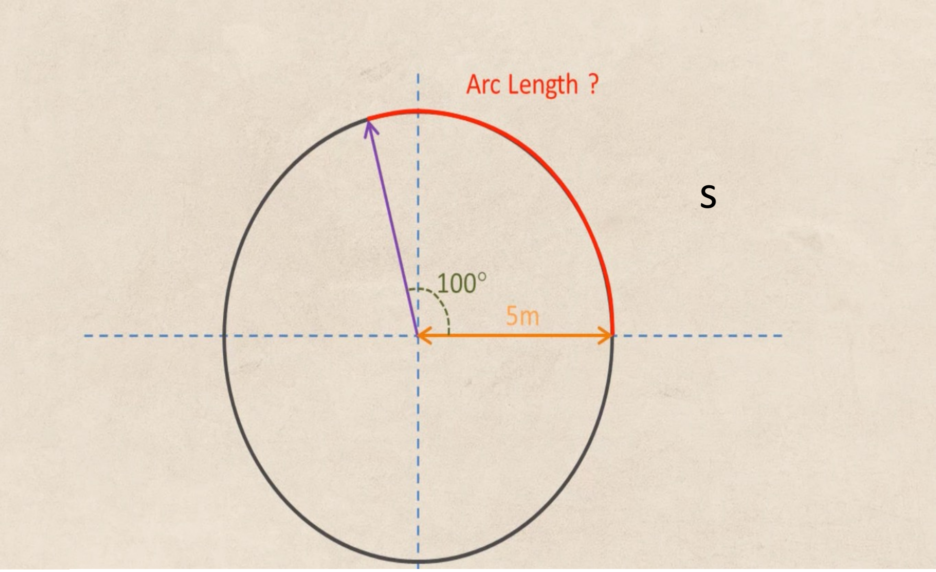
Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: ℓ = αρ.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radians}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radians}$$

180 degrees = 1 radian π



$R = 5\,m$

$\theta = 100^\circ = \frac{\pi}{180} \times 100 = \frac{\pi}{1,8}$

$s = R\theta$

$s = 5 \times \frac{\pi}{1,8} =$

Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια (rad)

Η μετατροπή μοιρών σε ακτίνια (rad) γίνεται με την αντιστοιχία 180° σε π rad. Έτσι, με την απλή μέθοδο των τριών βρίσκουμε:

Σε 180° αντιστοιχούν π rad

60° $\quad\varphi$

$$\frac{180}{60} = \frac{\pi}{\varphi} \quad \text{ή} \quad \varphi_{(60^\circ)} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Επομένως, ισχύει $\varphi_{(45^\circ)} = \frac{\pi}{4}$ rad, $\varphi_{(120^\circ)} = \frac{2\pi}{3}$ rad κ.λπ.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$

$$\ell = \alpha\rho$$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή $\pi \cdot \frac{\mu}{180} = \alpha$ ή $\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$.

Ένα τόξο 30° έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι :

$\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$1{,}3 = \pi\rho\frac{30}{180}$$

$$1{,}3 = \pi\rho\frac{1}{6}$$

$$\pi\rho = 7{,}8$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} = 2{,}48 \text{ (cm)}.$$

Convert the following degree measures into radians

1) 45° 2) 76° 3) 510° 4) -240° 5) 0°

6) 150° 7) 40° 8) 270° 9) 120° 10) 10°

11) 50° 12) -30° 13) 6° 14) 300° 15) -24°

Μετατροπή 60 μοιρών σε radians

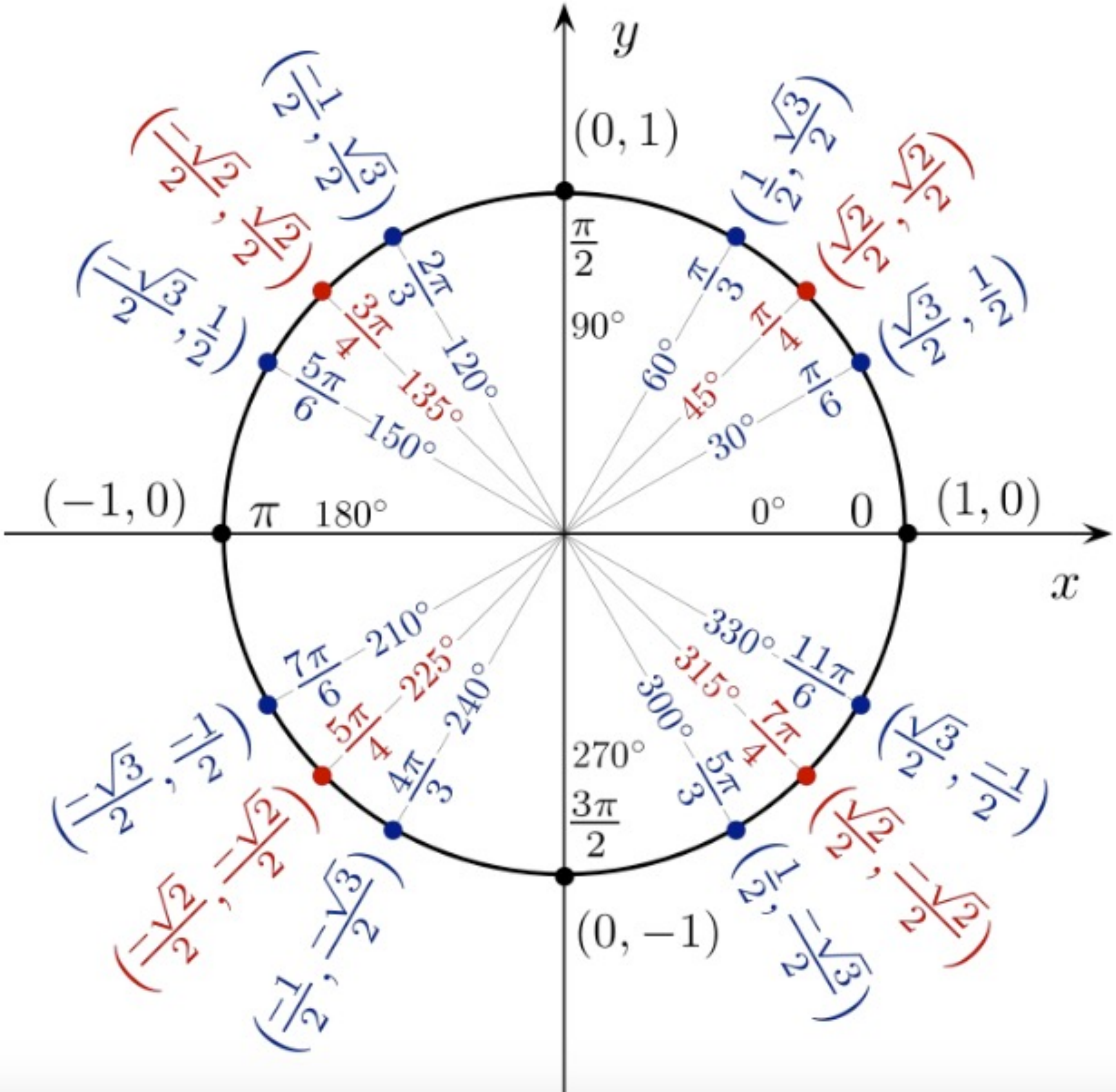
60·(1degree) π =60· π =60π =π radian

Convert the following radian measures into degrees

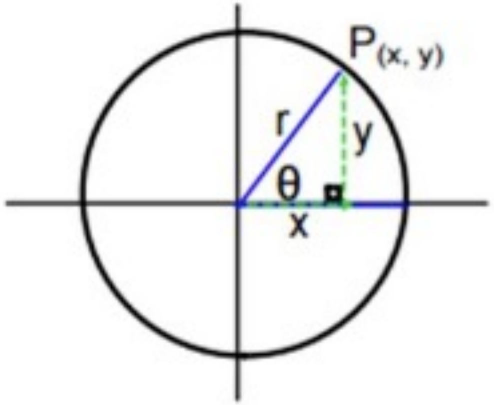
16) 420° 17) 30° 18) 10° 19) 135° 20) -585° 21) 180° 22) 315°

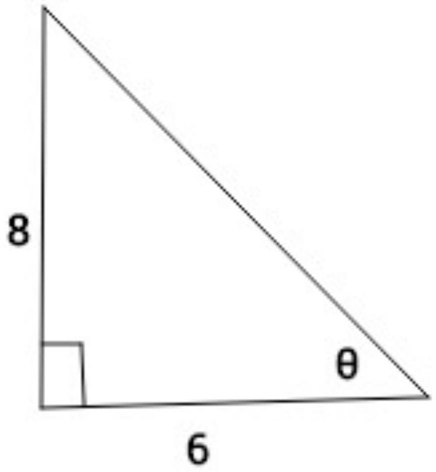
23)-765° 24) 360° 25) 60° 26) 120° 27)−45° 28) 0° 29) 225°

30) 540°



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
0
$0°$
$\frac{\pi}{6}$
$30°$
$\frac{\pi}{4}$
$45°$
$\frac{\pi}{3}$
$60°$
$\frac{\pi}{2}$
$90°$
$\frac{2\pi}{3}$
$120°$
$\frac{3\pi}{4}$
$135°$
$\frac{5\pi}{6}$
$150°$
π
$180°$
$\frac{7\pi}{6}$
$210°$
$\frac{5\pi}{4}$
$225°$
$\frac{4\pi}{3}$
$240°$
$270°$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$300°$
$\frac{7\pi}{4}$
$315°$
$\frac{11\pi}{6}$
$330°$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$





$$6^2 + 8^2 = c^2$$

$$36 + 64 = c^2$$

$$100 = c^2$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{c^2}$$

$$10 = c$$

$$\sin\theta = \frac{o}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$$

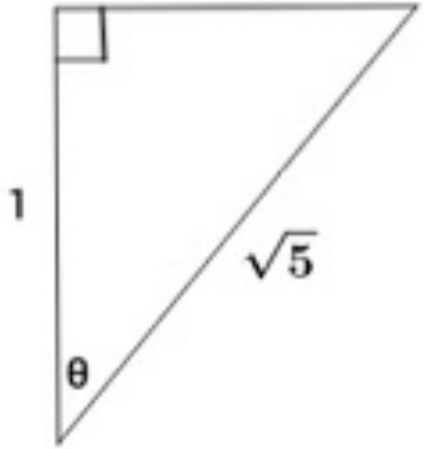
$\sin\theta = \frac{y}{r}$,

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

These thr

$\csc\theta = \frac{r}{y}$



$$1^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$1 + b^2 = 5$$

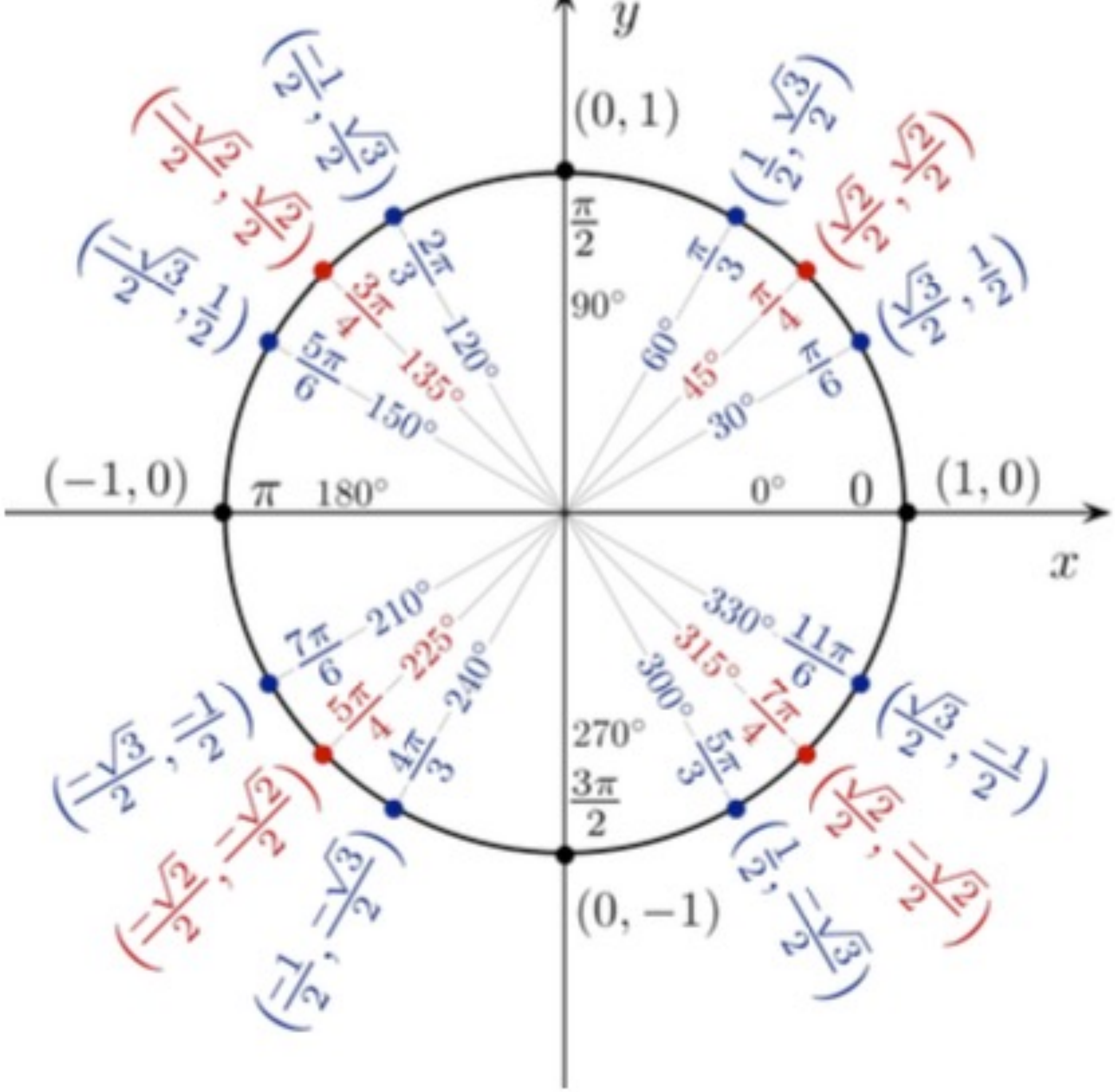
$$b^2 = 4$$

$$b = 2$$

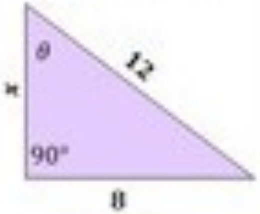
$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

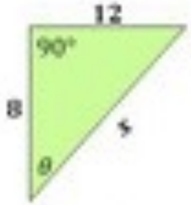
$$\tan\theta = \frac{2}{1} = 2 \qquad \cot\theta = \frac{1}{2}$$



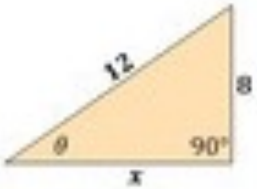
y
x
(0, 1)
(1, 0)
(−1, 0)
(0, −1)
π/2
90°
0
0°
π
180°
3π/2
270°
π/6
30°
π/4
45°
π/3
60°
2π/3
120°
3π/4
135°
5π/6
150°
7π/6
210°
5π/4
225°
4π/3
240°
5π/3
300°
7π/4
315°
11π/6
330°
(√3/2, 1/2)
(√2/2, √2/2)
(1/2, √3/2)
(−1/2, √3/2)
(−√2/2, √2/2)
(−√3/2, 1/2)
(−√3/2, −1/2)
(−√2/2, −√2/2)
(−1/2, −√3/2)
(1/2, −√3/2)
(√2/2, −√2/2)
(√3/2, −1/2)



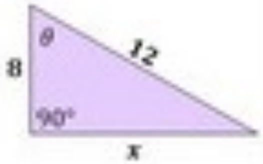
$\cos\theta =$



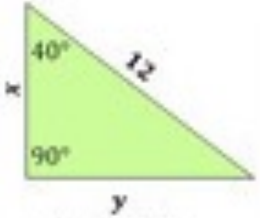
$\sin\theta =$



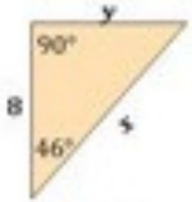
$\tan\theta =$



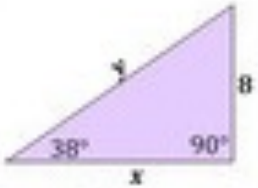
$\cos\theta =$



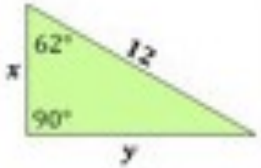
$\sin 40° =$



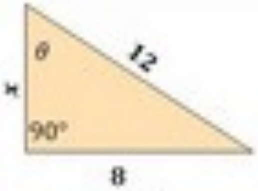
$\tan 46° =$



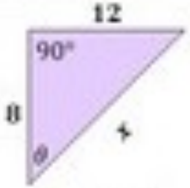
$\cos 38° =$



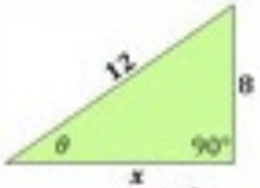
$\tan 62° =$



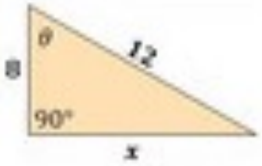
$\frac{8}{x} =$ $\sin\theta$ $\cos\theta$ $\tan\theta$



$\frac{12}{8} =$ $\sin\theta$ $\cos\theta$ $\tan\theta$

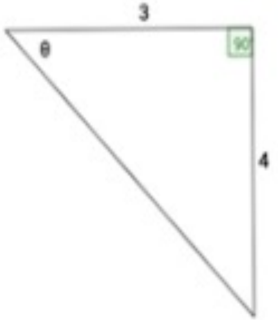


$\frac{x}{12} =$ $\sin\theta$ $\cos\theta$ $\tan\theta$

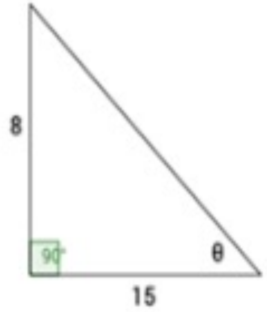


$\frac{x}{12} =$ $\sin\theta$ $\cos\theta$ $\tan\theta$

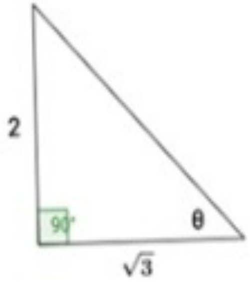
1)



2)

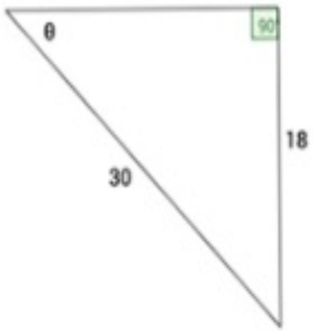


3)

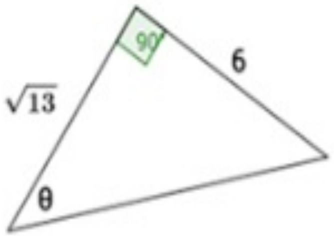


4)

5)



6)



sinθ

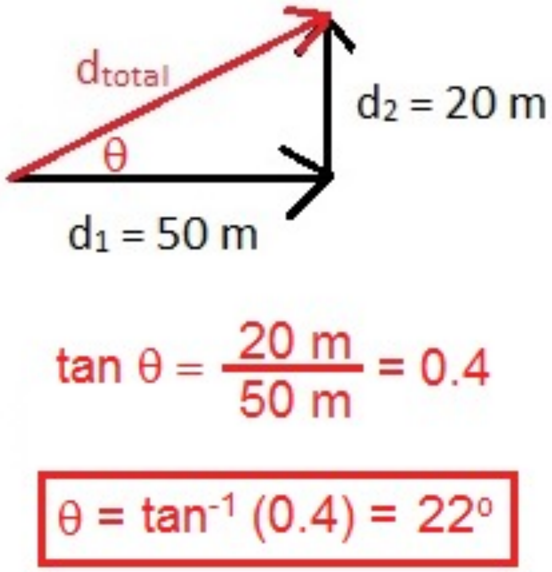
+	+
–	–

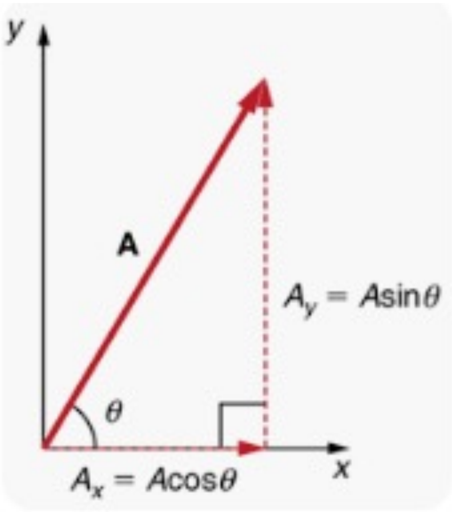
cosθ

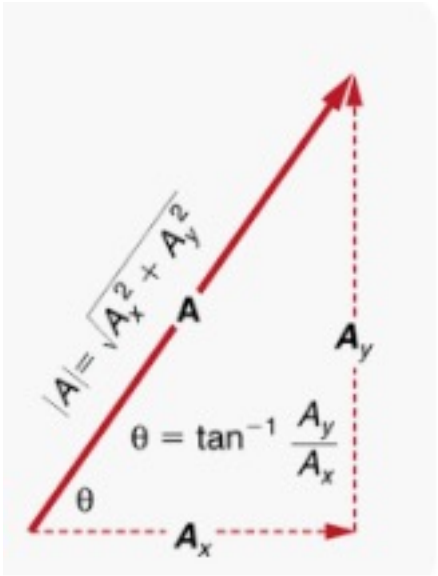
–	+
–	+

tanθ

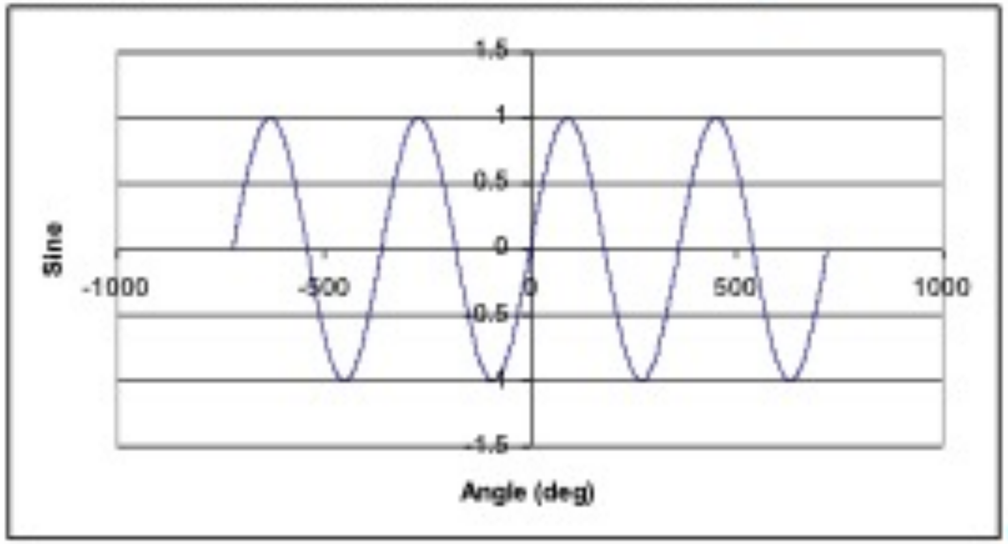
–	+
+	–

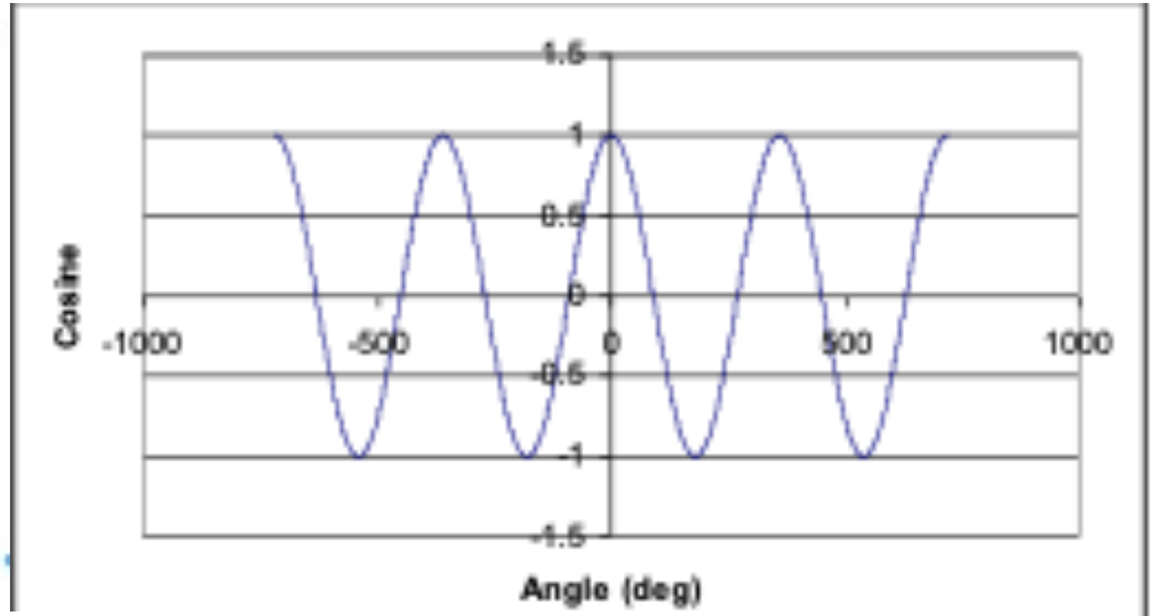


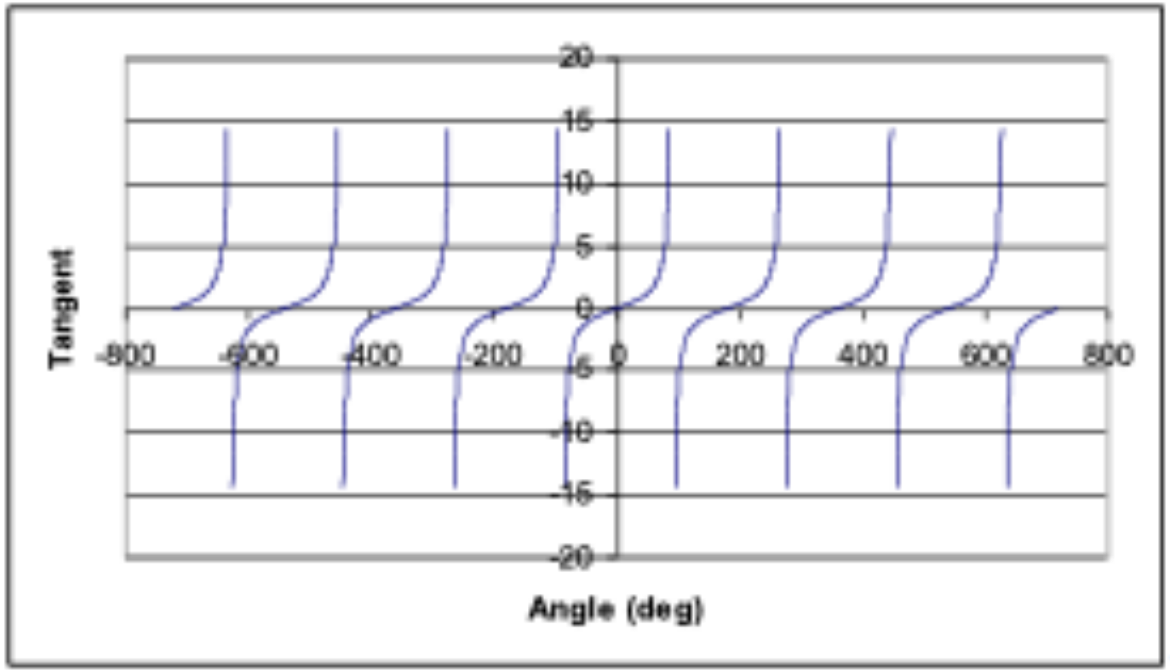




Sin θ: Notice that the range of sinθ is between −1 and 1.







Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. $\eta\mu 60^{o}$, β. $\eta\mu 150^{o}$, γ. $\sigma\upsilon\nu 120^{o}$.

Λύση

α. $\eta\mu 60^{o} = \eta\mu(90^{o} - 30^{o}) = \sigma\upsilon\nu 30^{o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

β. $\eta\mu 150^{o} = \eta\mu(180^{o} - 30^{o}) = \eta\mu 30^{o} = \dfrac{1}{2}$.

γ. $\sigma\upsilon\nu 120^{o} = \sigma\upsilon\nu(180^{o} - 60^{o}) = -\sigma\upsilon\nu 60^{o} = -\dfrac{1}{2}$.

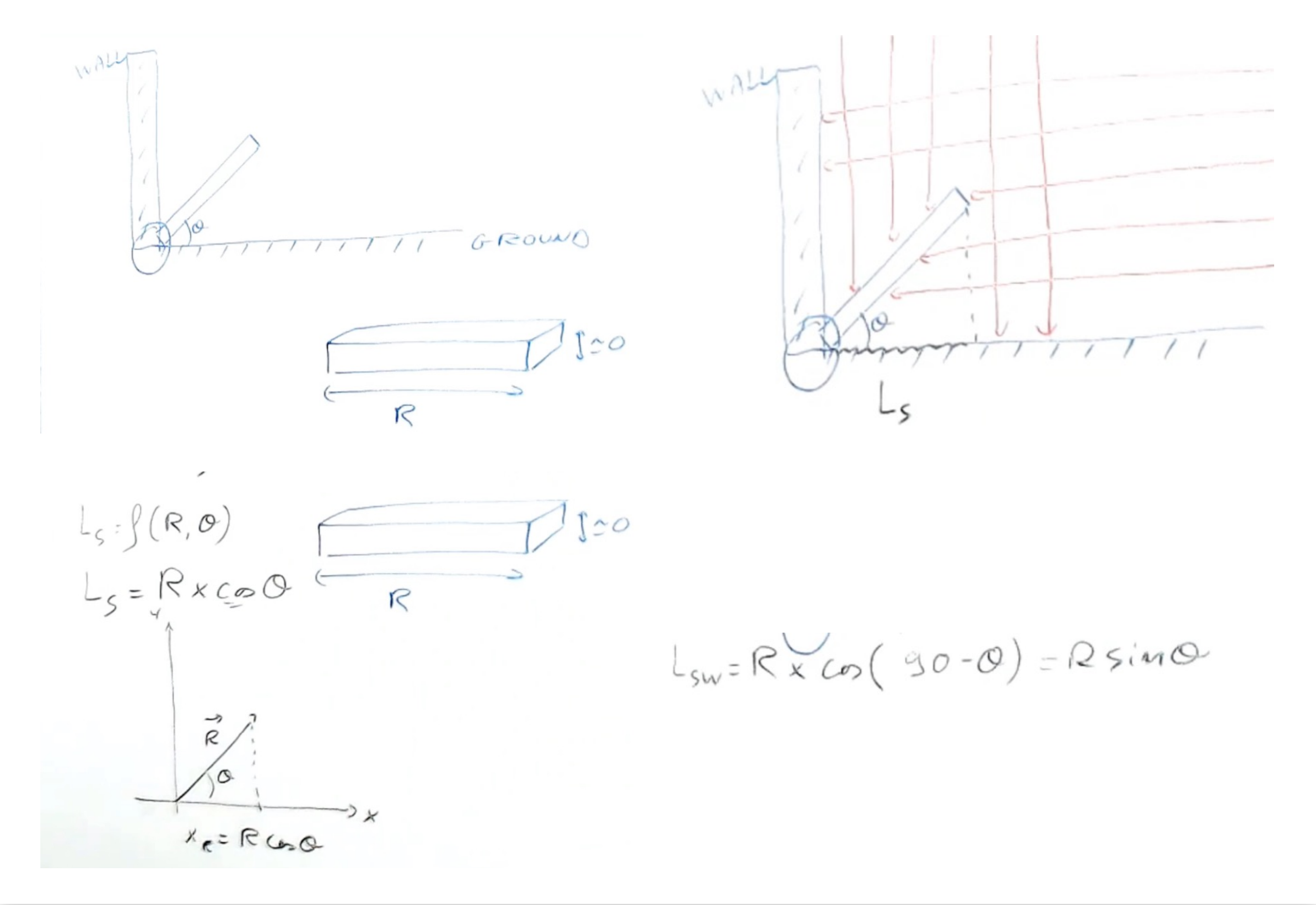
Ορισμοί γωνιών στο τρίγωνο ΑΒΓ

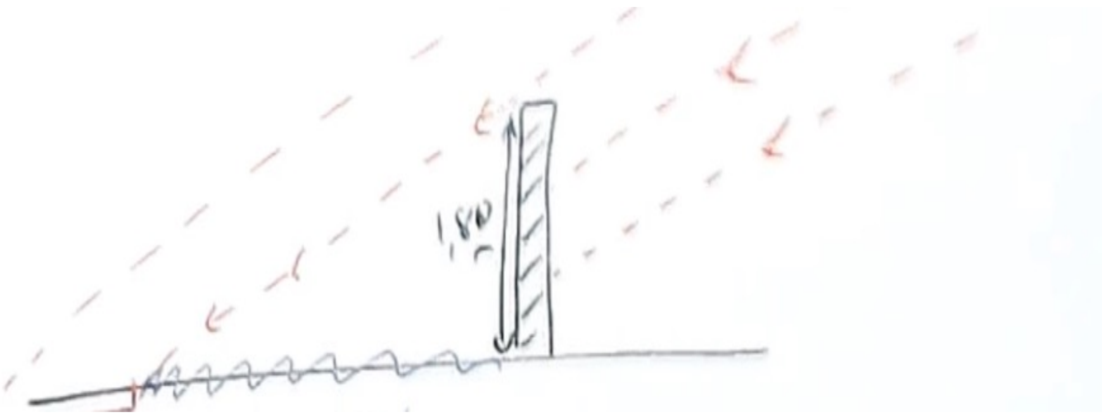
Γωνία Β	$\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha}$	$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha}$	$\varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma}$	$\sigma\varphi B = \dfrac{\gamma}{\beta}$
Γωνία Γ	$\eta\mu \Gamma = \dfrac{\gamma}{\alpha}$	$\sigma\upsilon\nu \Gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$	$\varepsilon\varphi \Gamma = \dfrac{\gamma}{\beta}$	$\sigma\varphi \Gamma = \dfrac{\beta}{\gamma}$

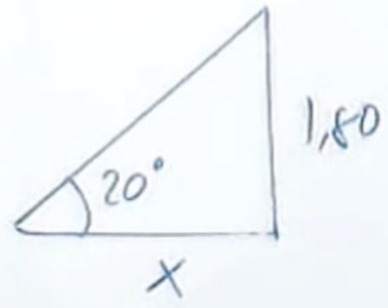
Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας φ

βασικοί τύποι	$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$	$\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = 1$
συμπληρωματικές γωνίες	$\eta\mu(90^o - \varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu(90^o - \varphi) = \eta\mu\varphi$
παραπληρωματικές γωνίες	$\eta\mu(180^o - \varphi) = \eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu(180^o - \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi$
αντίθετα τόξα	$\eta\mu(-\varphi) = -\eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu(-\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$

Εφαρμογή στη φυσική





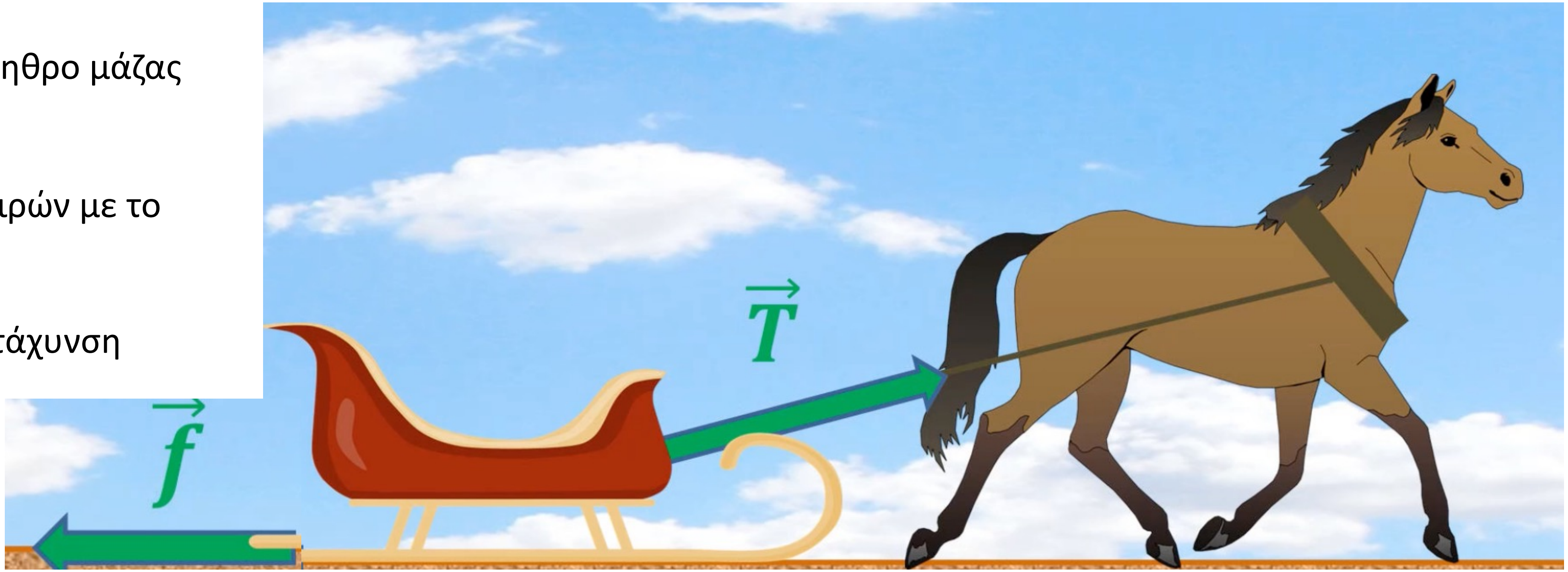


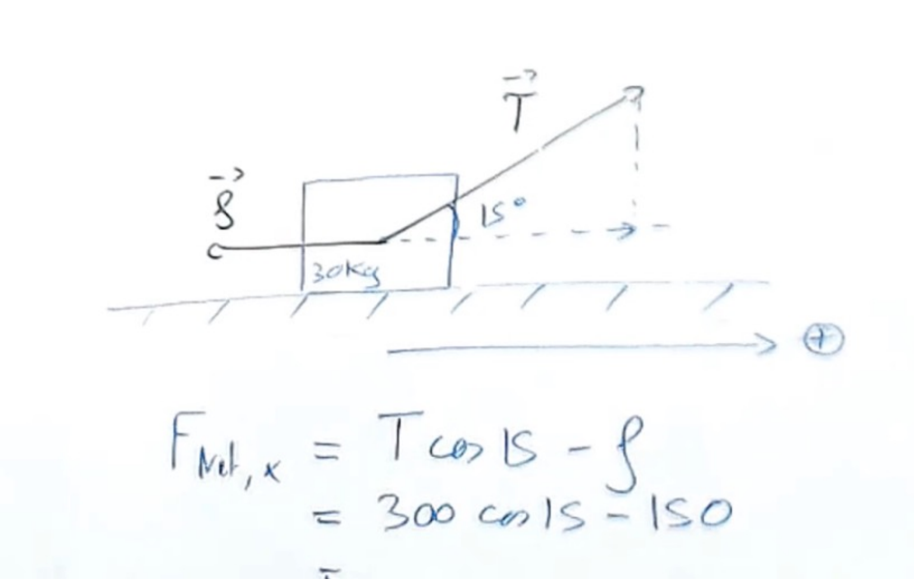
$$\tan\theta = \frac{OPP}{ADJ}$$

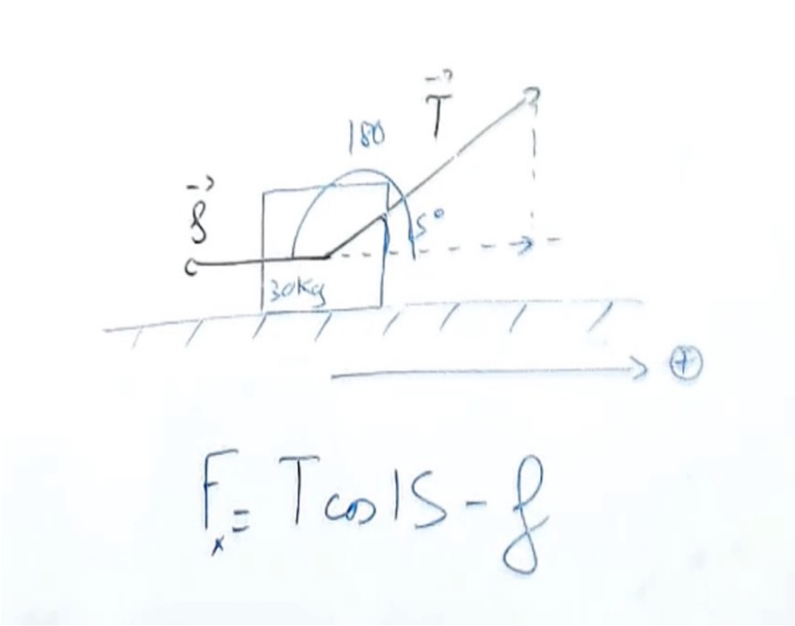
$$\tan 20 = \frac{1{,}80}{X}$$

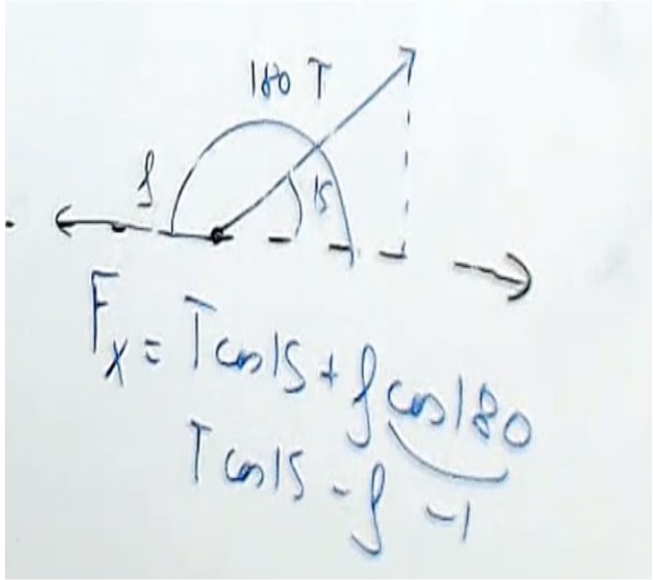
$$X = \frac{1{,}80}{\tan 20} =$$

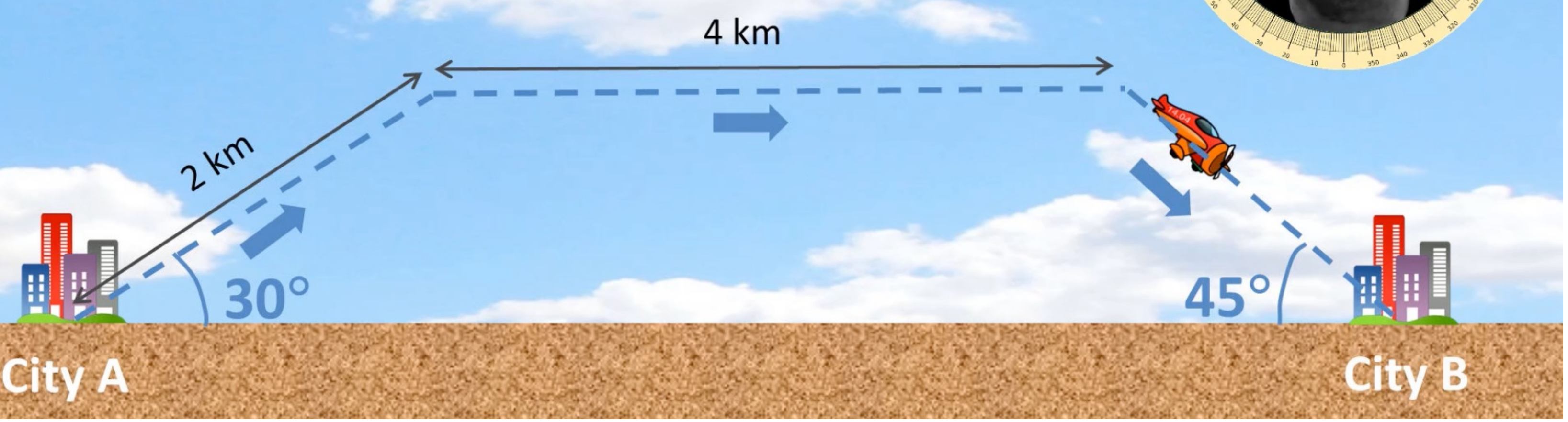
Το άλογο τραβάει το έλκηθρο μάζας 30Kg
Η τάση T είναι 300N
Δημιουργεί γωνία 15 μοιρών με το έδαφος
Η τριβή f είναι 150 N
Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του έλκηθρου

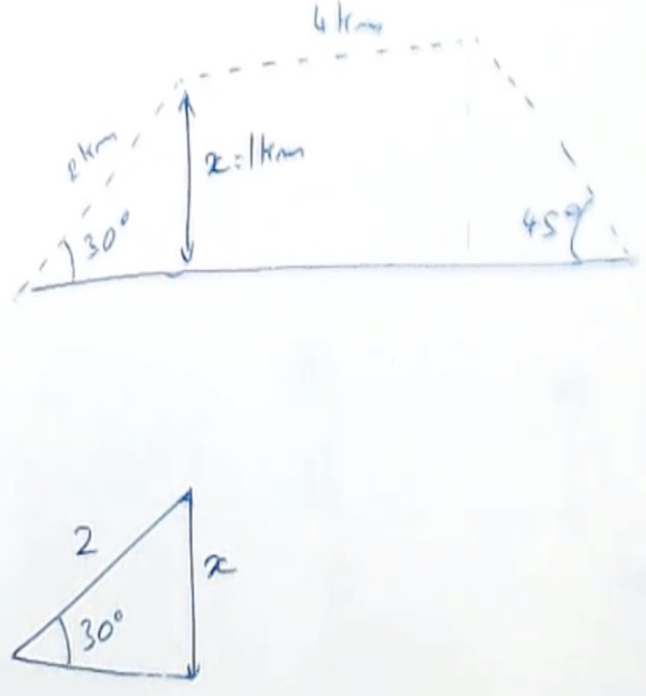












$$\sin 30 = \frac{x}{2}$$

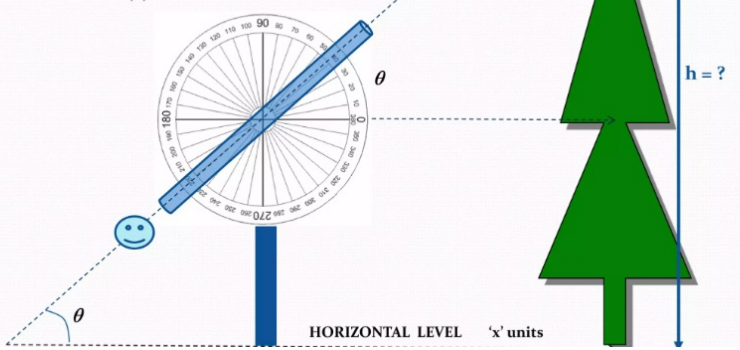
$$x = 2\sin 30 = 1\,\text{km}$$

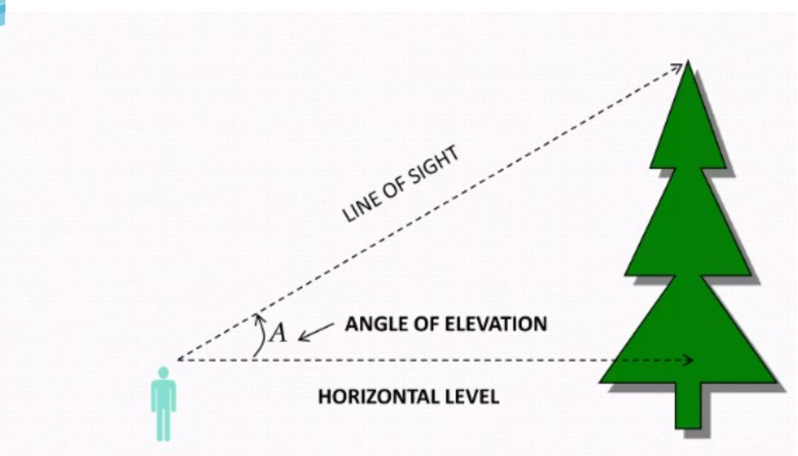
CLINOMETER

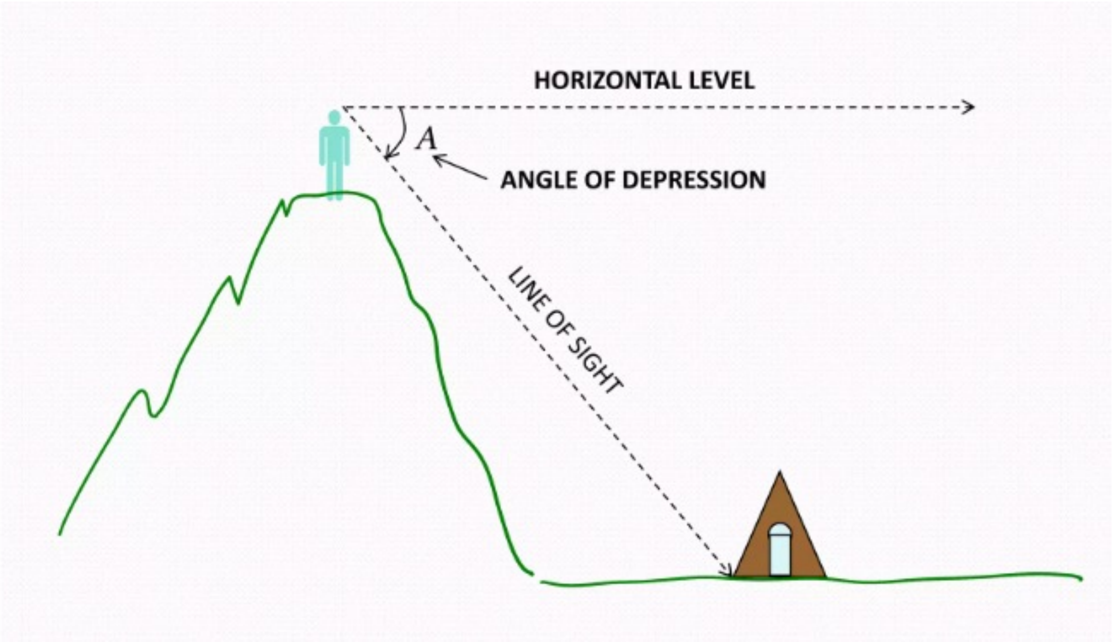
It is an instrument which is used to measure the height of distant objects using trigonometric concepts.

Here, the height of the tree using T. concepts,

h = tan **θ** *(x)







Σας ευχαριστώ που με υποφέρατε
Καλή σχολική χρονιά!