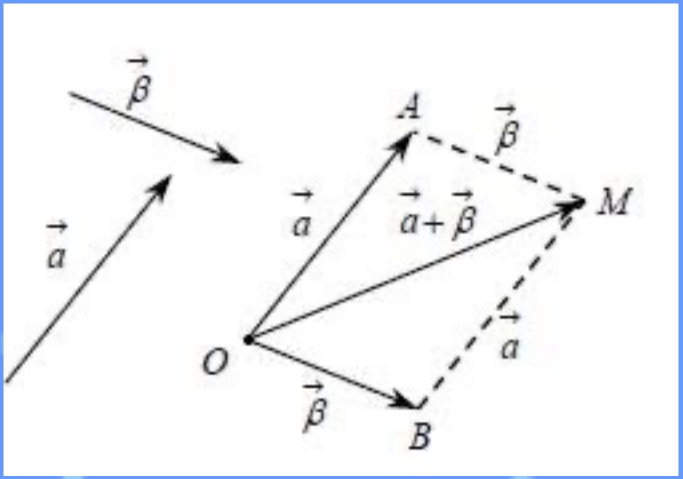
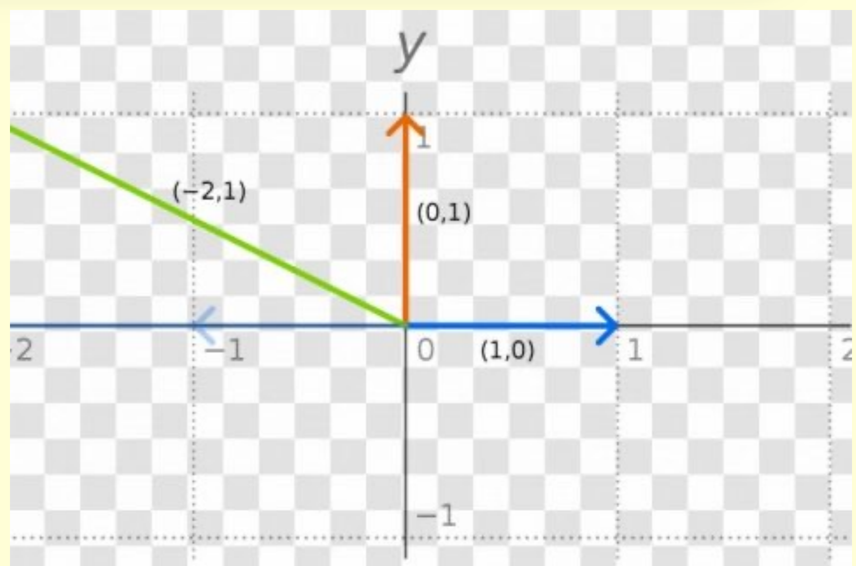
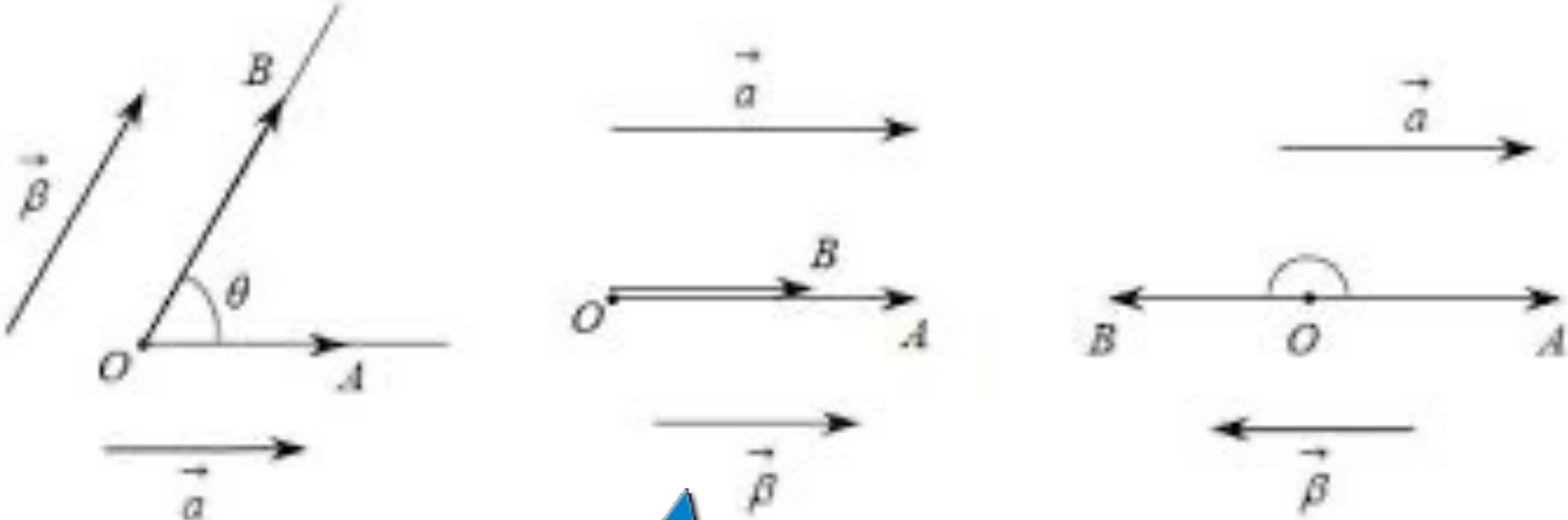
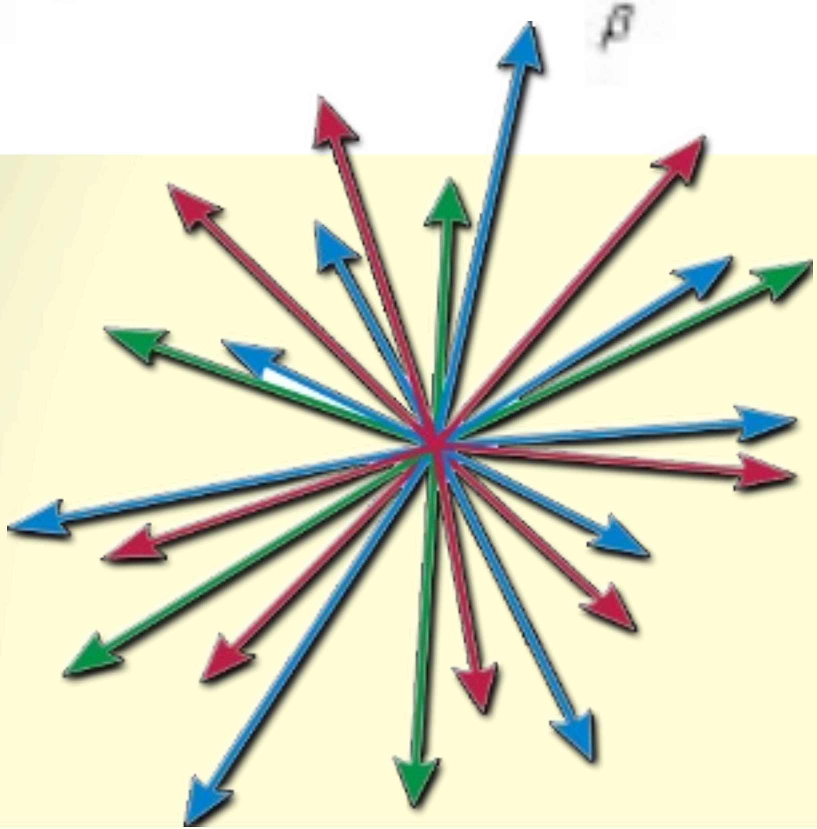
Διανύσματα

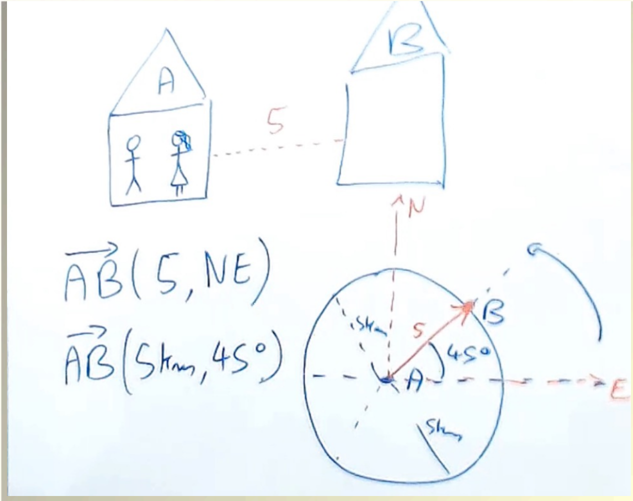


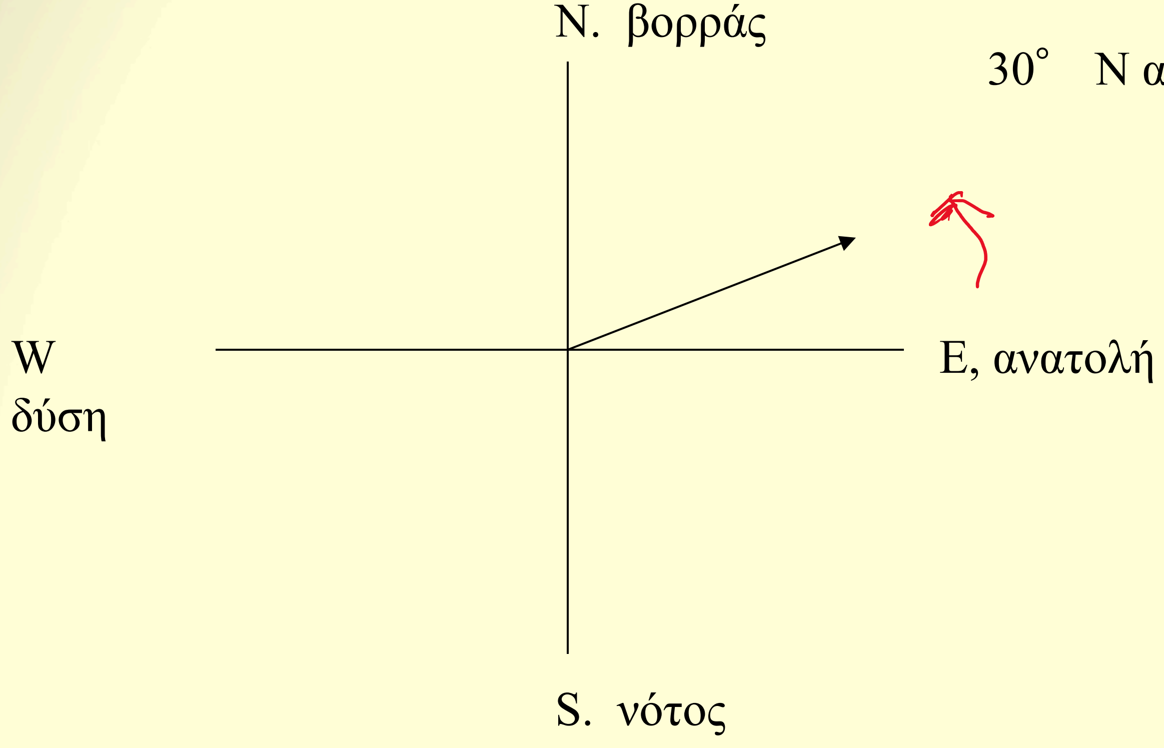

DNA


y
1
(−2,1)
(0,1)
2
−1
0
(1,0)
1
−1


$\vec{\beta}$
B
θ
O
A
$\vec{a}$
$\vec{a}$
B
O
A
$\vec{\beta}$
$\vec{a}$
B
O
A
$\vec{\beta}$

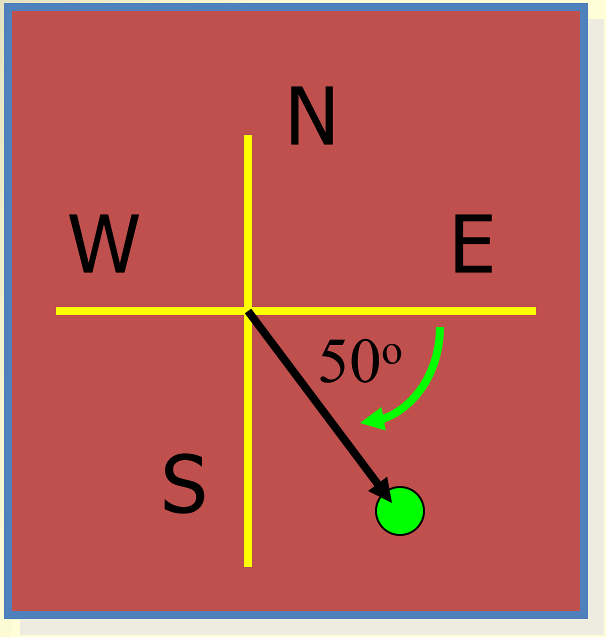


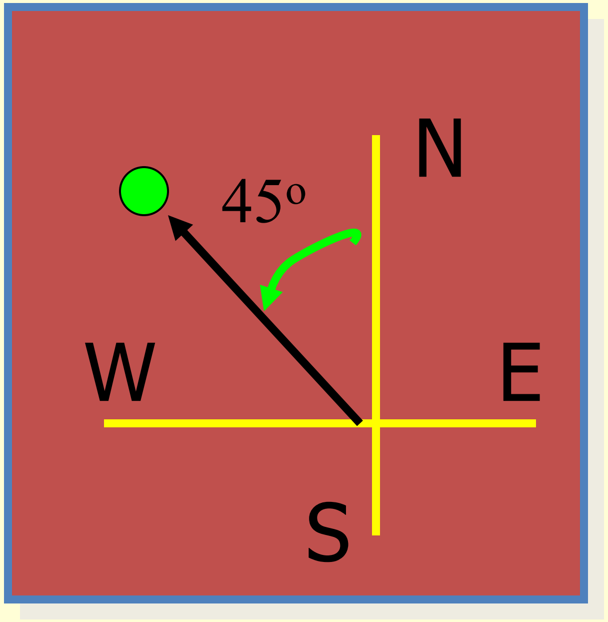

A
B
5
N
E
$\vec{AB}(5, NE)$
$\vec{AB}(5km, 45^\circ)$
5km
45°


N. βορράς
W
δύση
E, ανατολή
S. νότος

30° N από E

Καθορίζοντας τη διεύθυνση



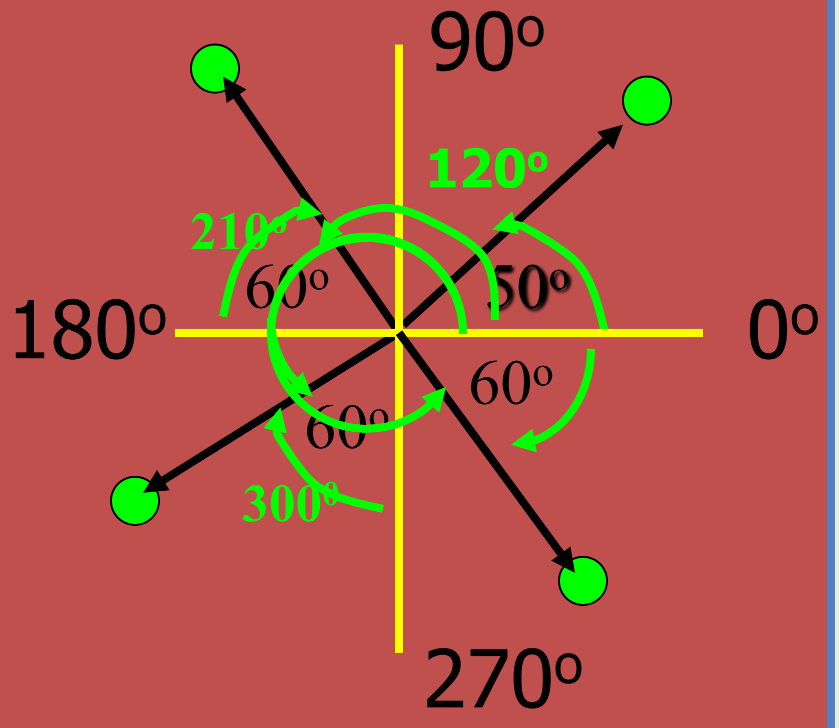


50^0 S από E

45^0 W από N

Διανύσματα και πολικές συντεταγμένες

Πολικές συντεταγμέ (R,θ) are given for each of four possible quadrants:



(R,θ) = 40 m, 50°

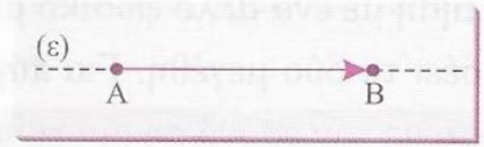
(R,θ) = 40 m, 120°

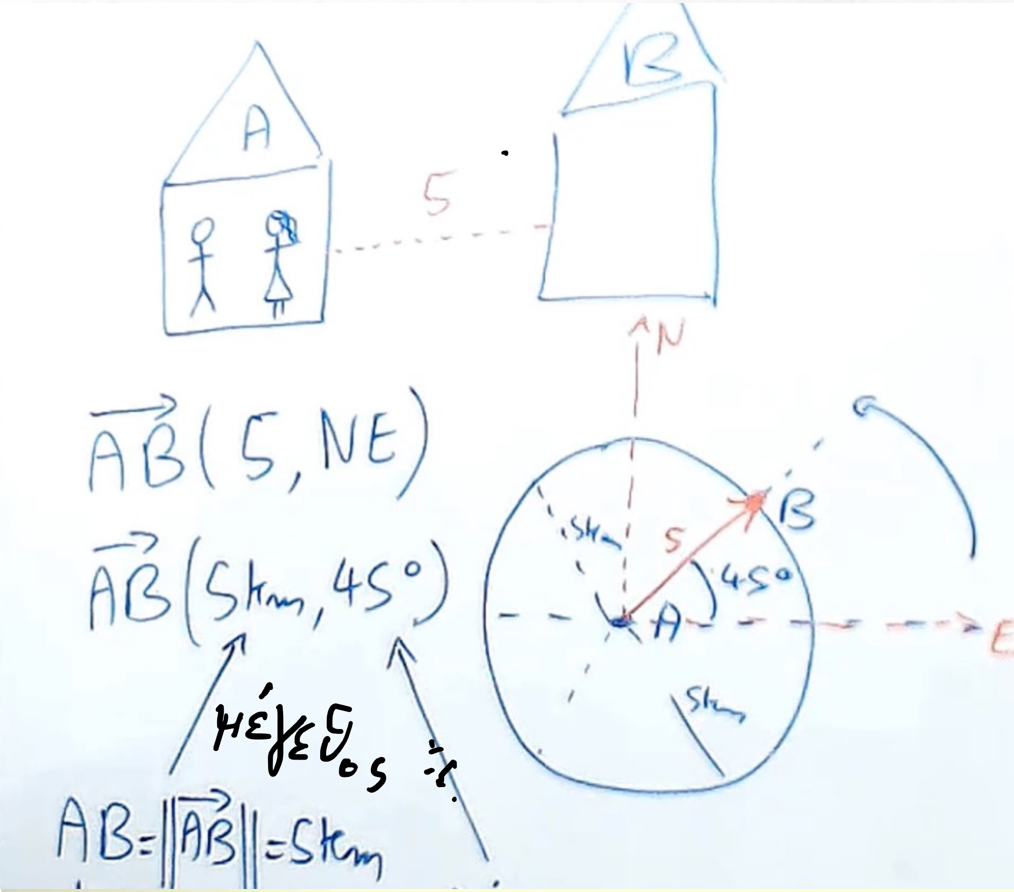
(R,θ) = 40 m, 210°

(R,θ) = 40 m, 300°

Διανύσματα

Εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB για το οποίο το A είναι η αρχή και το B το τέλος.



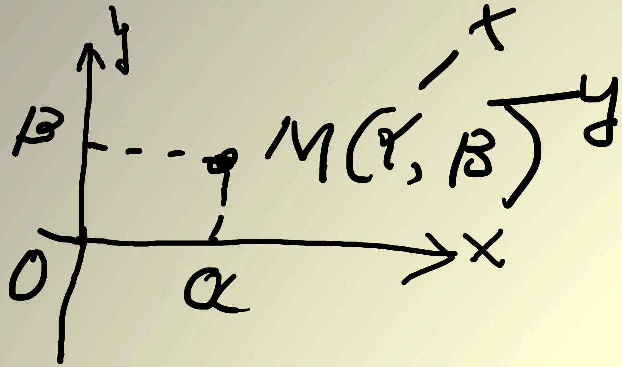


$\overrightarrow{AB}$ (5 km, 45°

Πολικές συντεταγμένες

κατεύθυνση

τιμή



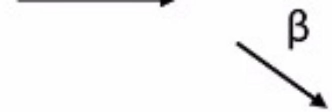
καρτεσιανές συντεταγμένες

$\alpha \rightarrow$ τετμημένη

$\beta \rightarrow$ τεταγμένη

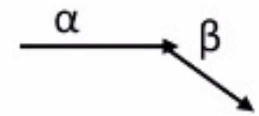
$(\alpha, \beta) \rightarrow$ συντεταγμένες

$M(x, y)$

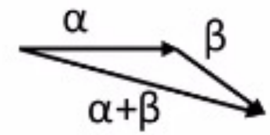


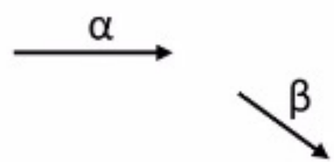
ΠΡΟΣΘΕΣΗ

1. Τα καθιστούμε διαδοχικά (η αρχή του ενός συμπίπτει με το πέρας του άλλου).

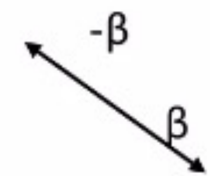


2. Το άθροισμα προκύπτει αν ενώσουμε τα άλλα δύο άκρα των διαδοχικών διανυσμάτων.

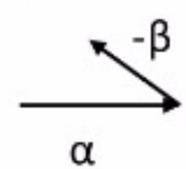




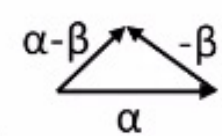
ΑΦΑΙΡΕΣΗ



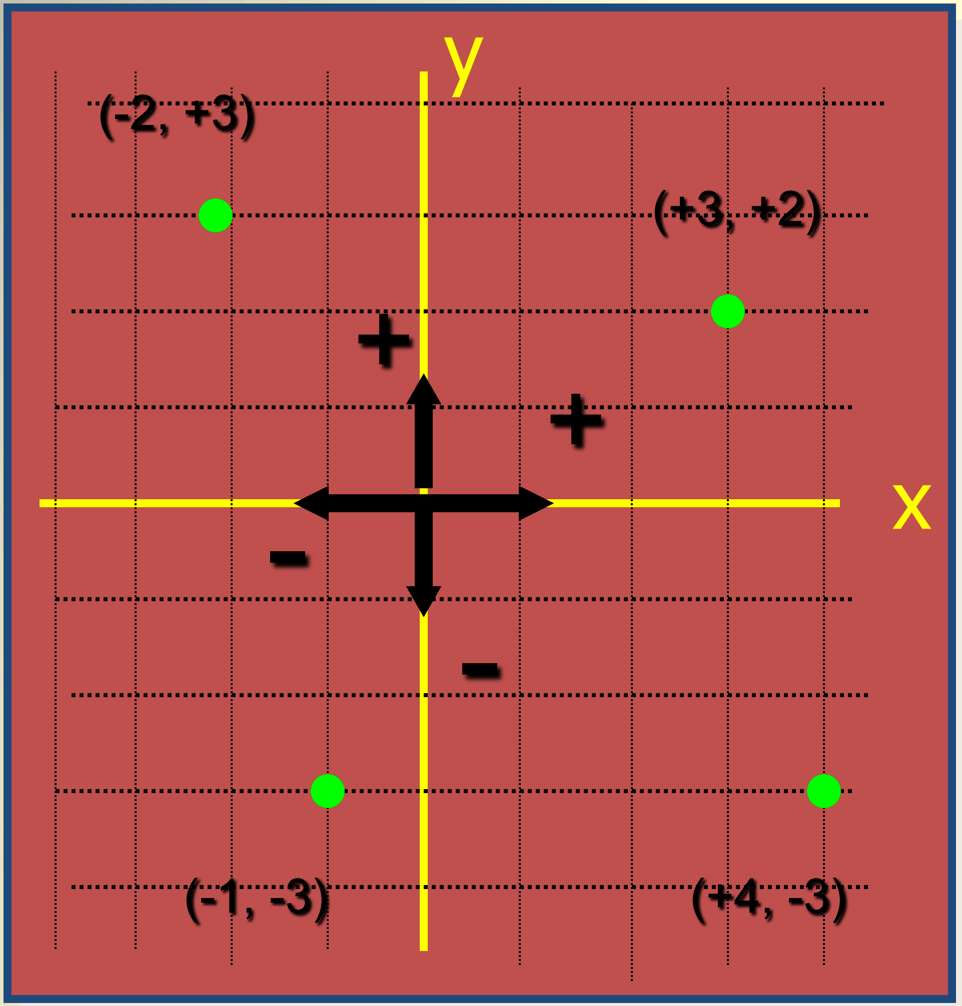
1. Καθιστούμε διαδοχικά το ένα διάνυσμα (α) <u>και το αντίθετο του δεύτερου</u> (-β).

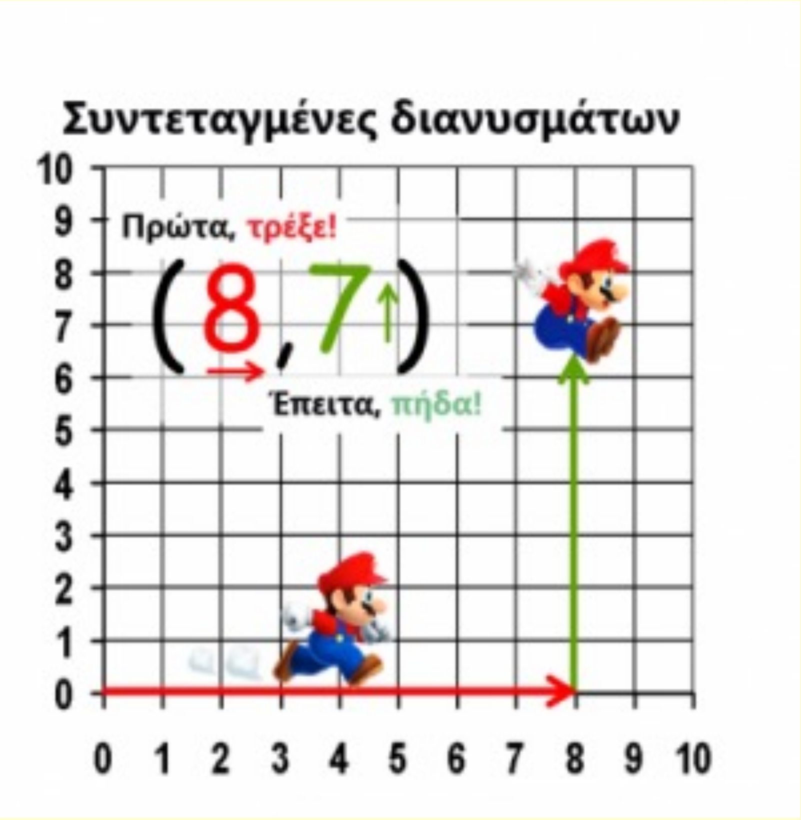


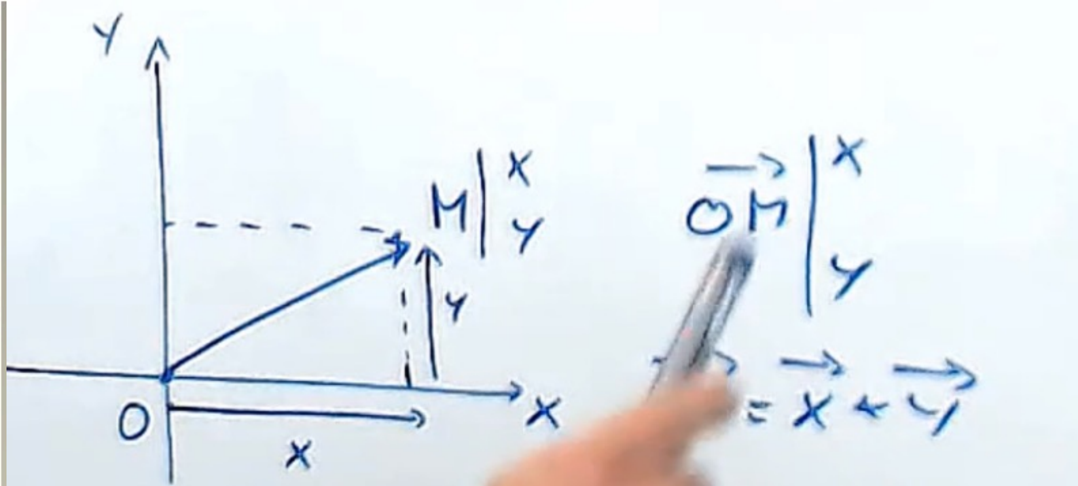
2. Η διαφορά προκύπτει αν ενώσουμε τα άλλα δύο άκρα των διαδοχικών διανυσμάτων.



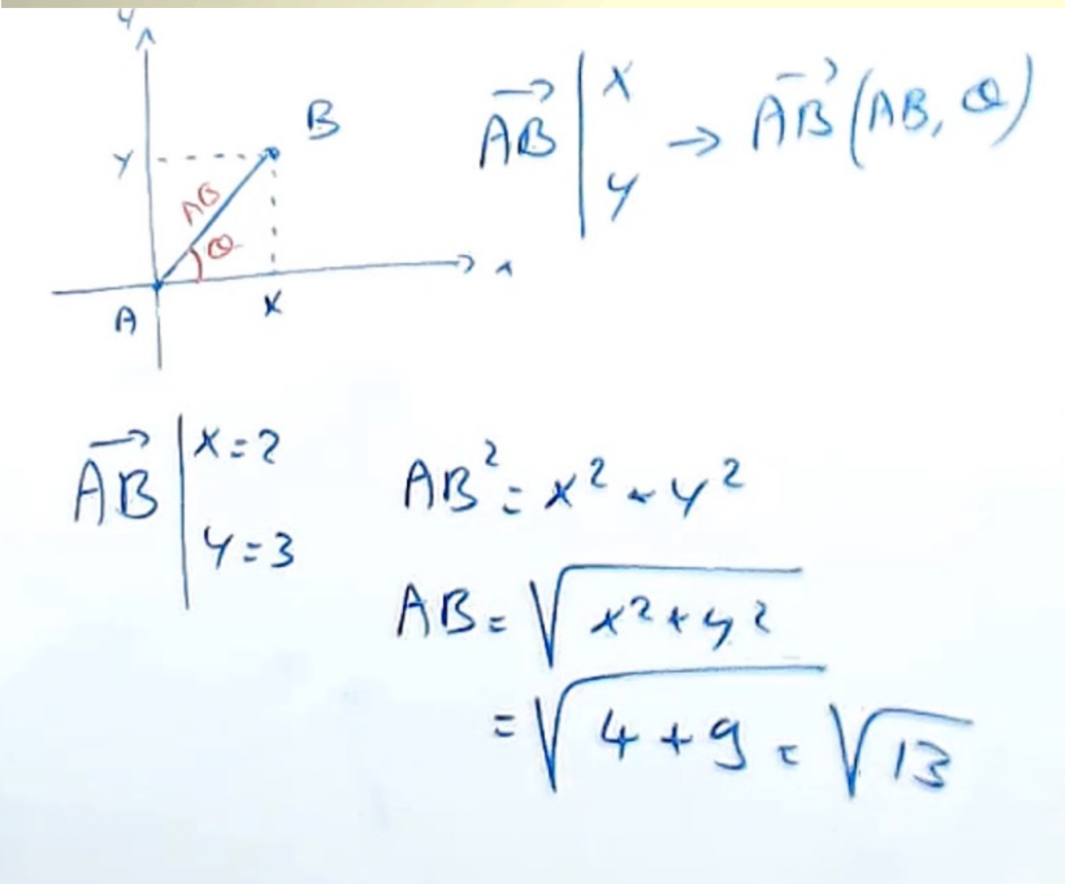
Καρτεσιανές συντεταγμένες





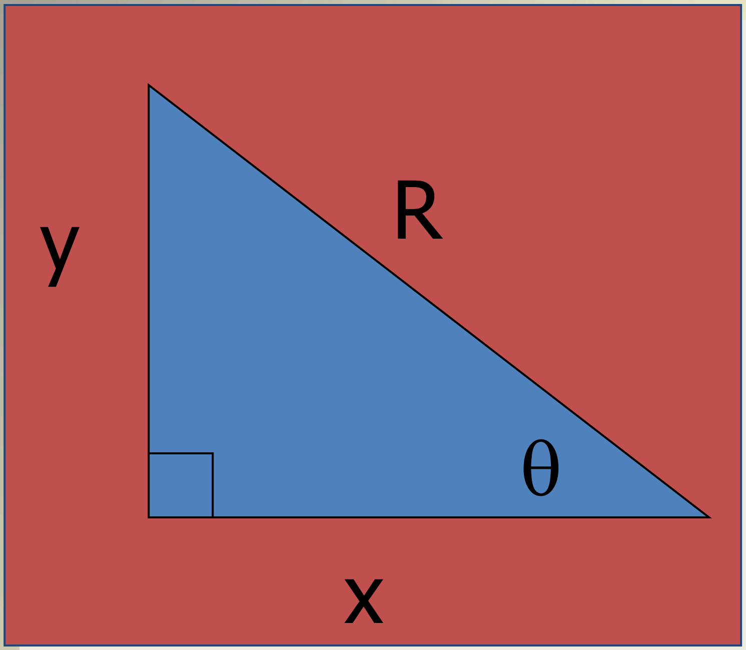


Καρτεσιανές συντεταγμένες



Πολικές συντεταγμένες

Καρτεσιανές συντεταγμένες



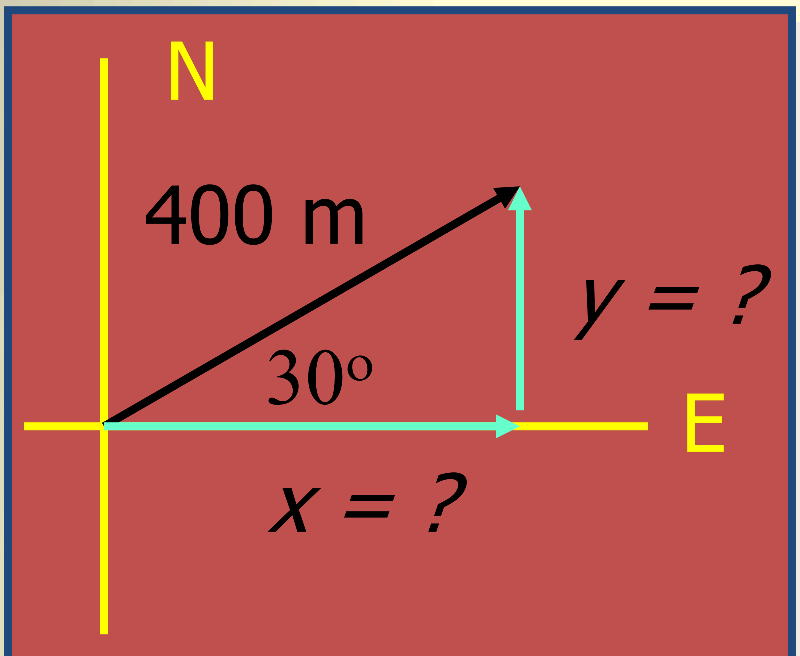
$$y = R \sin \theta$$

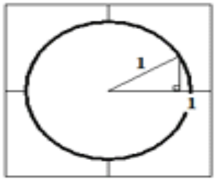
$$x = R \cos \theta$$

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

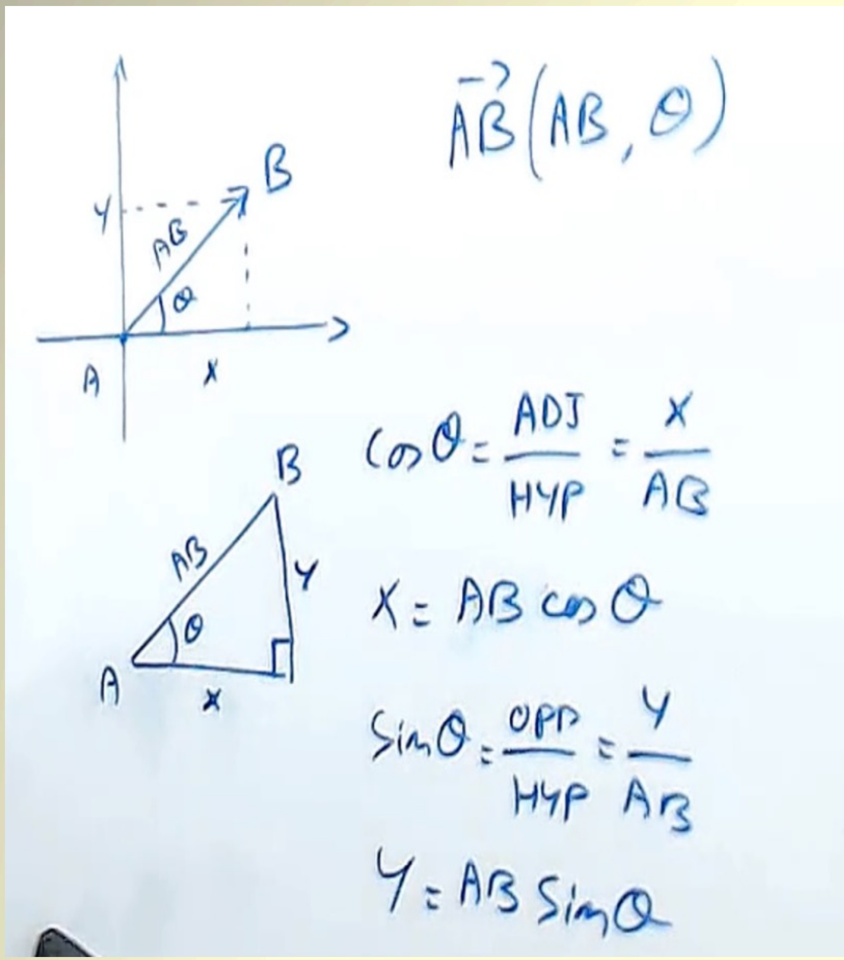
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

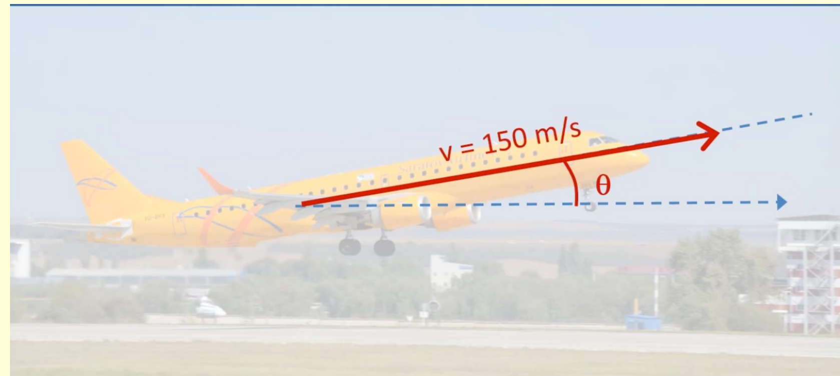




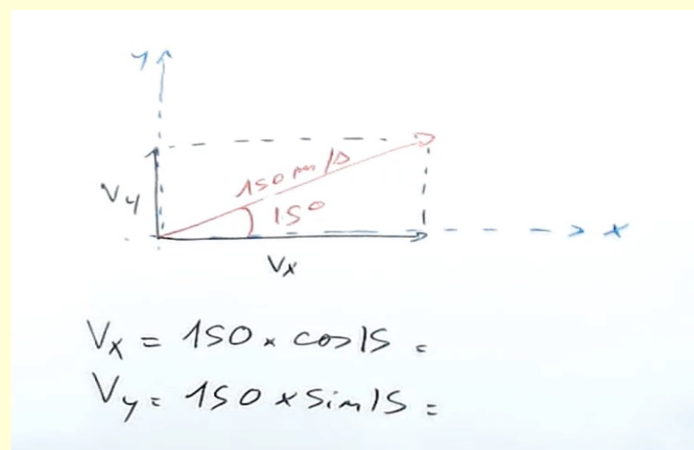
Unit Circle

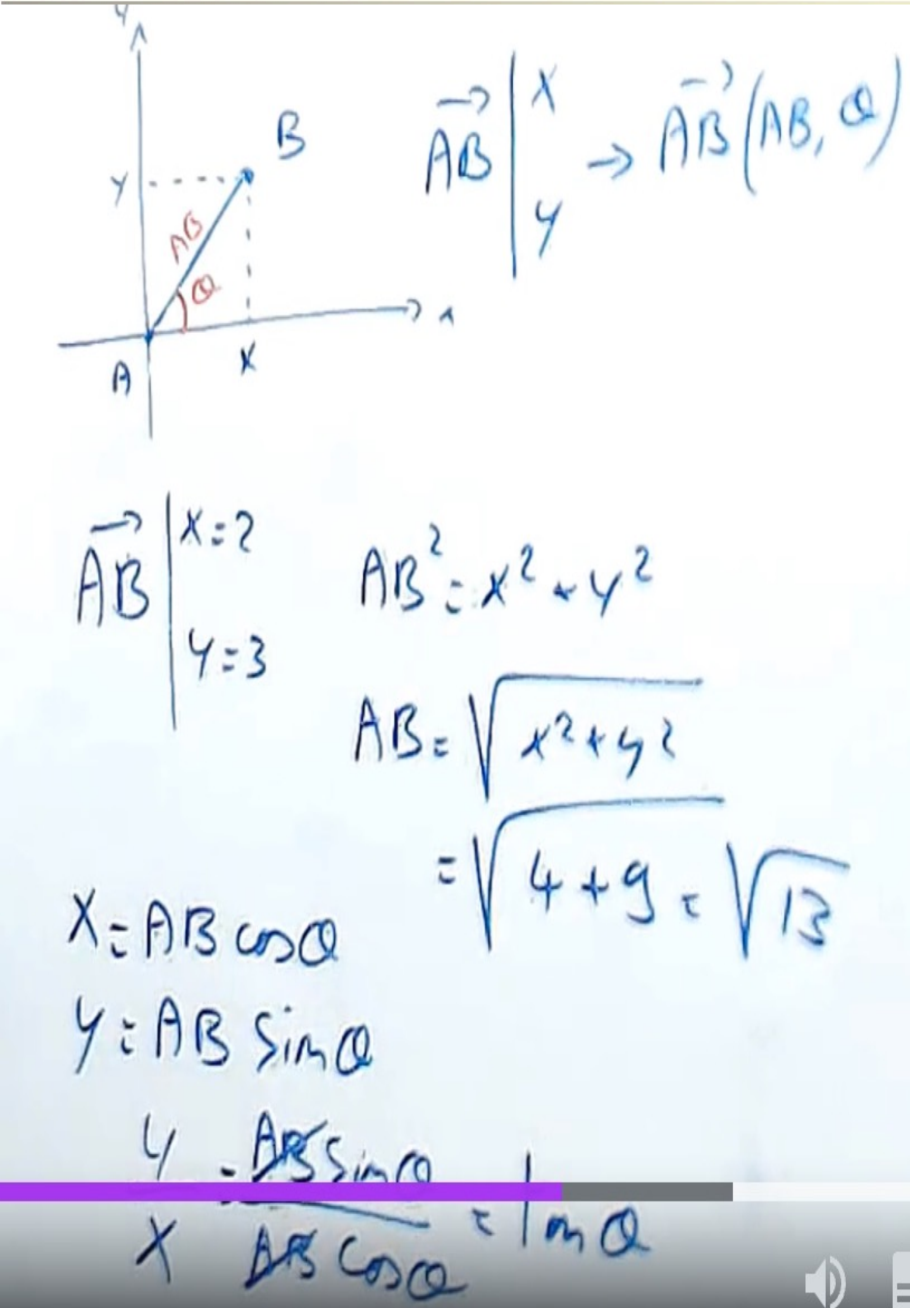
Από τις πολικές στις καρτεσιανές συντεταγμένες



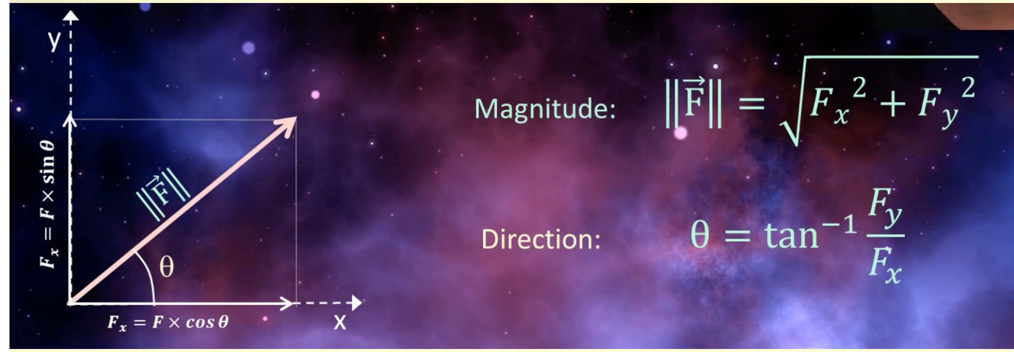


Ένα αεροπλάνο απογειώνεται με γωνία 15 μοιρών. Η ταχύτητα του είναι 150 m/s
Να υπολογισθεί η οριζόντια
και η κάθετη ταχύτητα

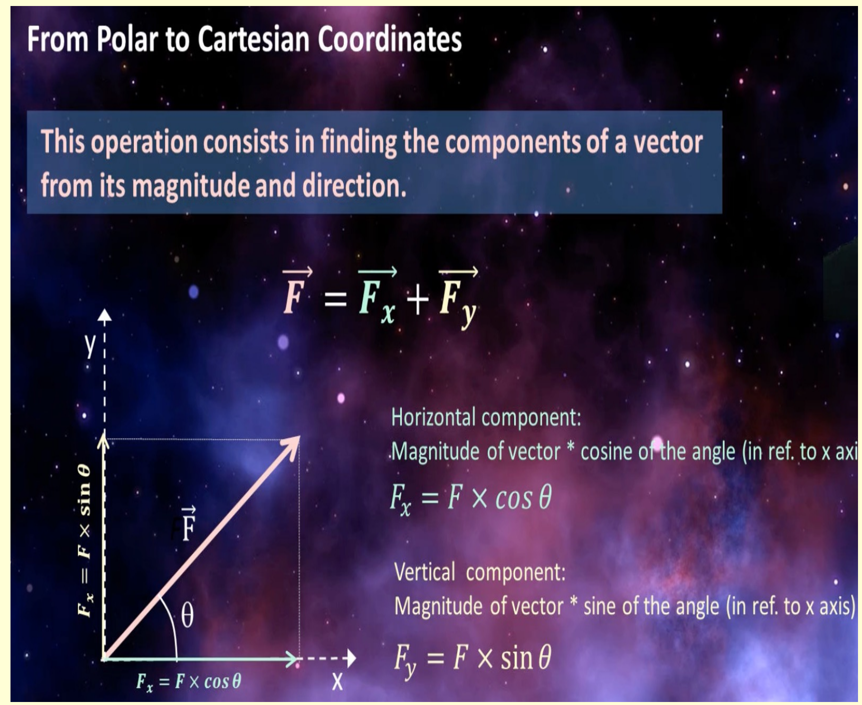




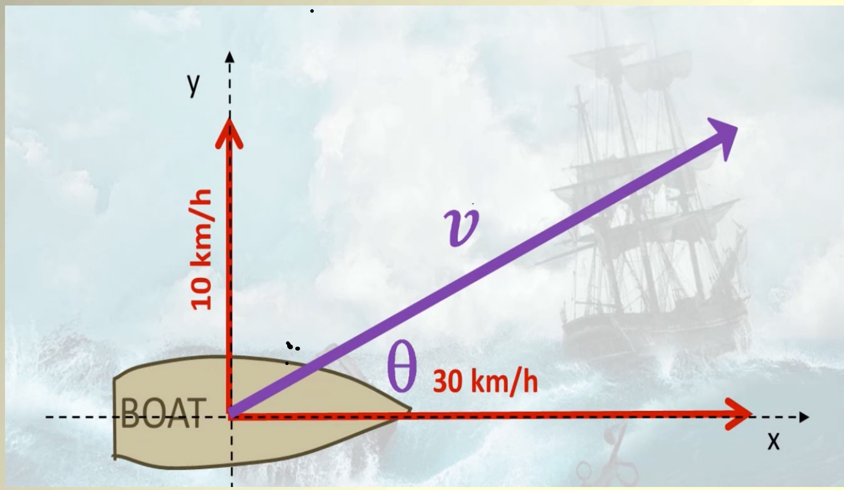
B
A
AB
x
y
AB | x, y → AB(AB, α)
AB | x = 2, y = 3
AB² = x² + y²
AB = √(x² + y²)
= √(4 + 9) = √13
X = AB cos α
y = AB Sin α
y / x = AB Sin α / AB Cos α = tan α

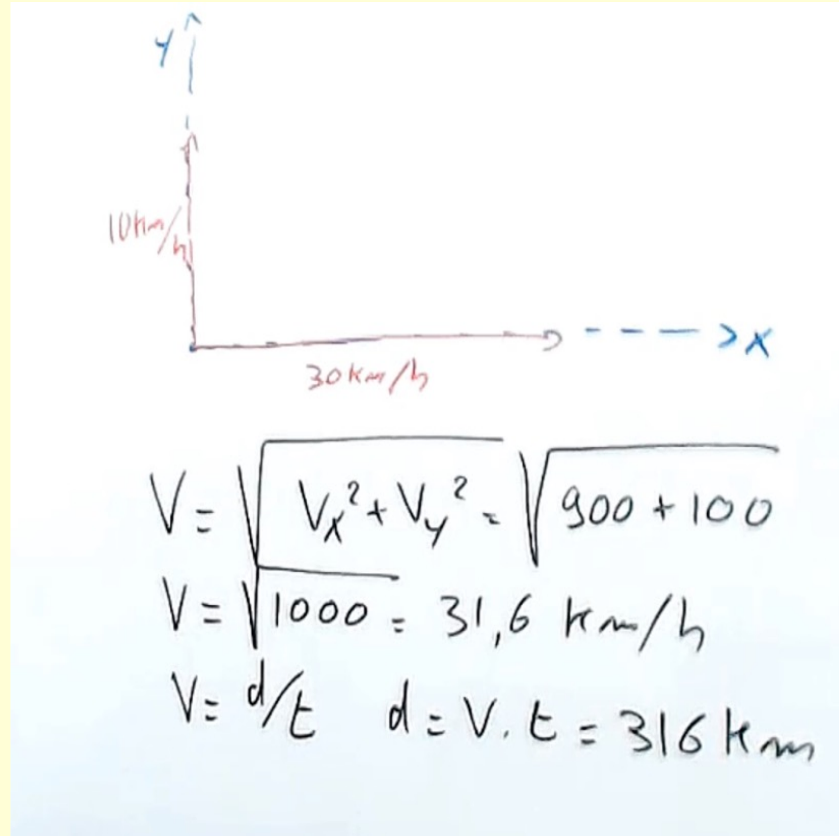


Magnitude: $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$
Direction: $\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$
$\|\vec{F}\|$
θ
$F_y = F \times \sin\theta$
$F_x = F \times \cos\theta$
x
y

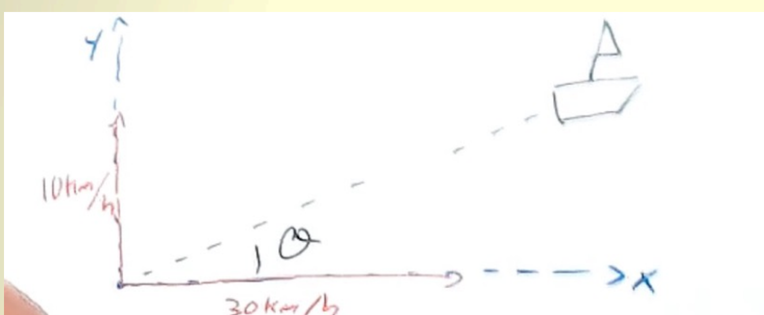


From Polar to Cartesian Coordinates
This operation consists in finding the components of a vector from its magnitude and direction.
$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$
Horizontal component:
Magnitude of vector * cosine of the angle (in ref. to x axi
$F_x = F \times \cos\theta$
Vertical component:
Magnitude of vector * sine of the angle (in ref. to x axis)
$F_y = F \times \sin\theta$
$\vec{F}$
θ
$F_y = F \times \sin\theta$
$F_x = F \times \cos\theta$
x
y



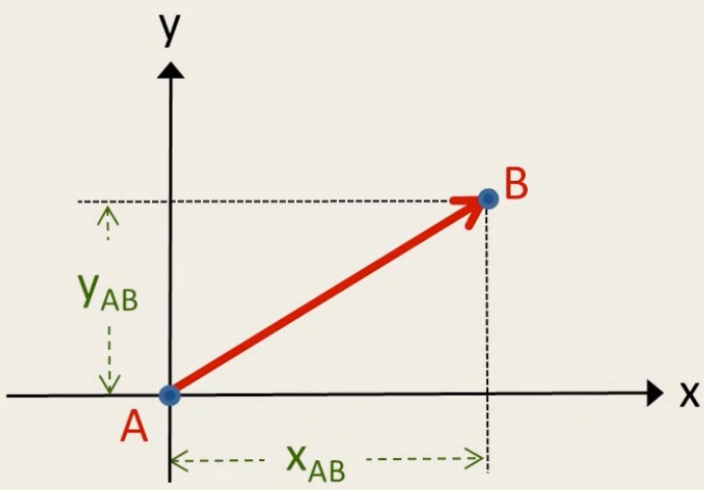


Μετά από 10 ώρες πόση απόσταση
θα καλύψει το πλοίο
και σε ποια κατεύθυνση

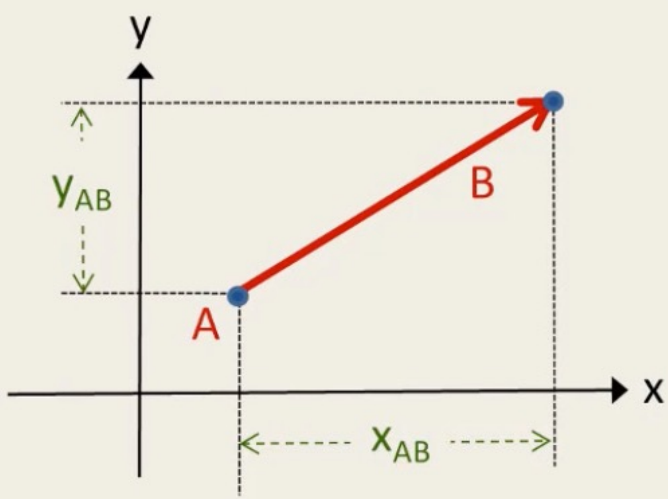


$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \qquad V_x = 30$$

$$V_y = 10$$



Cartesian Coordinates: x_{AB}, y_{AB}



Cartesian Coordinates: x_{AB}, y_{AB}

From Polar to Cartesian Coordinates

Magnitude (F)
Direction (θ)

$$F_x = \|\vec{F}\| \times \cos\theta$$

$$F_y = \|\vec{F}\| \times \sin\theta$$

Horizontal component (F_x)
Vertical component (F_y)

From Cartesian to Polar Coordinates

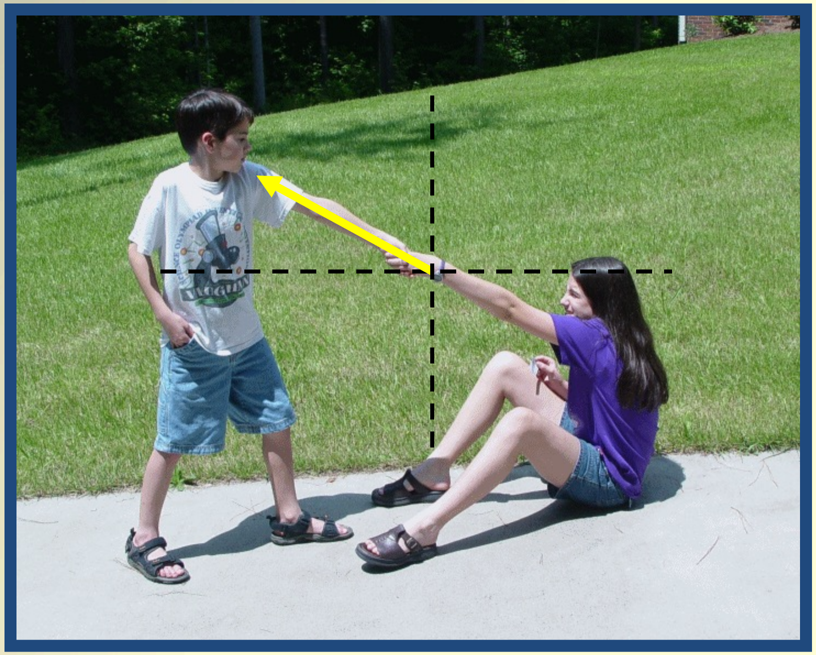
Horizontal component (F_x)
Vertical component (F_y)

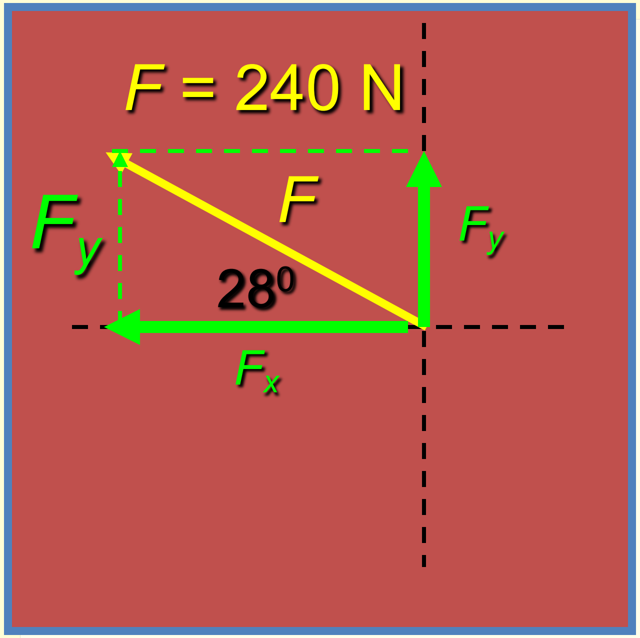
$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$

Magnitude (F)
Direction (θ)

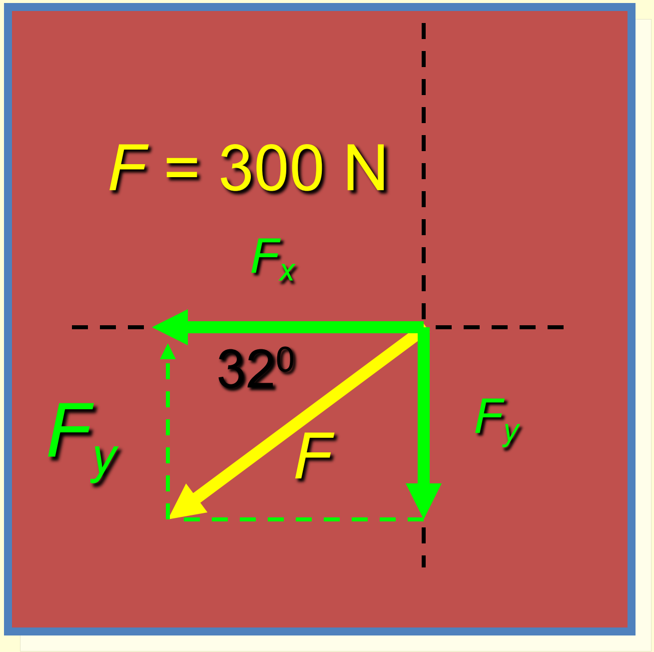
Να βρεθούν οι Fx και Fy όταν η κοπέλα κάθεται σε 28 μοίρες από το έδαφος





$F_x = -|(240\ \mathrm{N}) \cos 28^0| = -212\ \mathrm{N}$

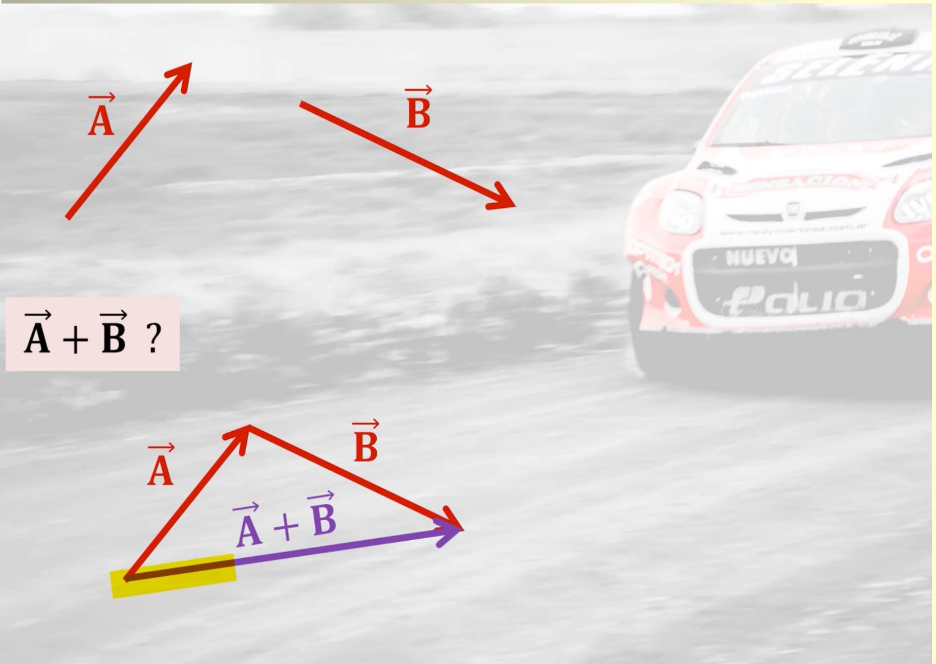
$F_y = +|(240\ \mathrm{N}) \sin 28^0| = +113\ \mathrm{N}$

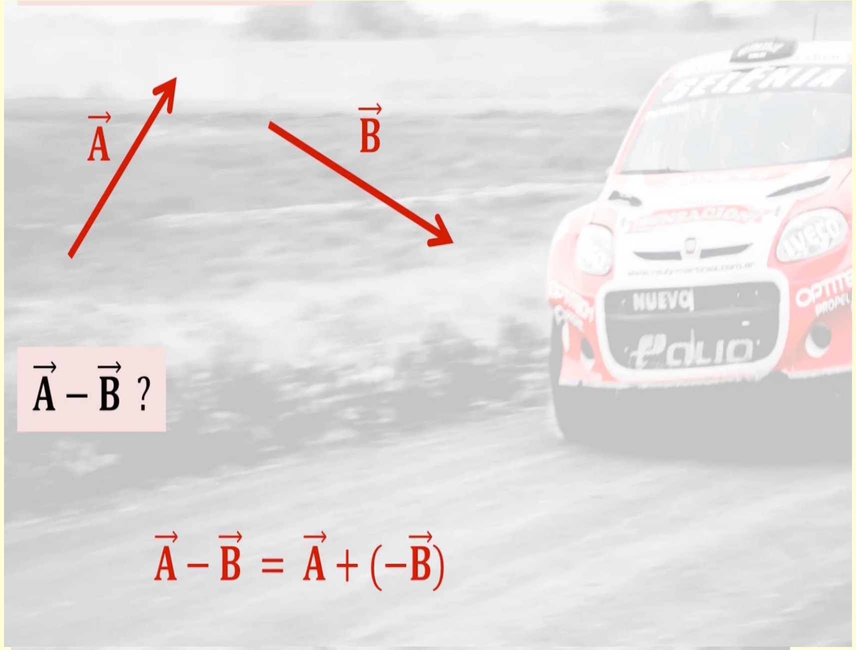


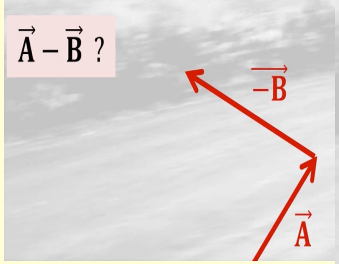
F_x = -|(300 N) cos 32^0| = -254 N

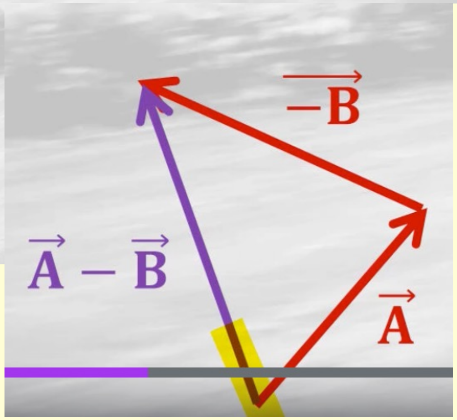
F_y = -|(300 N) sin 32^0| = -159 N

Άθροισμα διανυσμάτων, γραφική μέθοδος

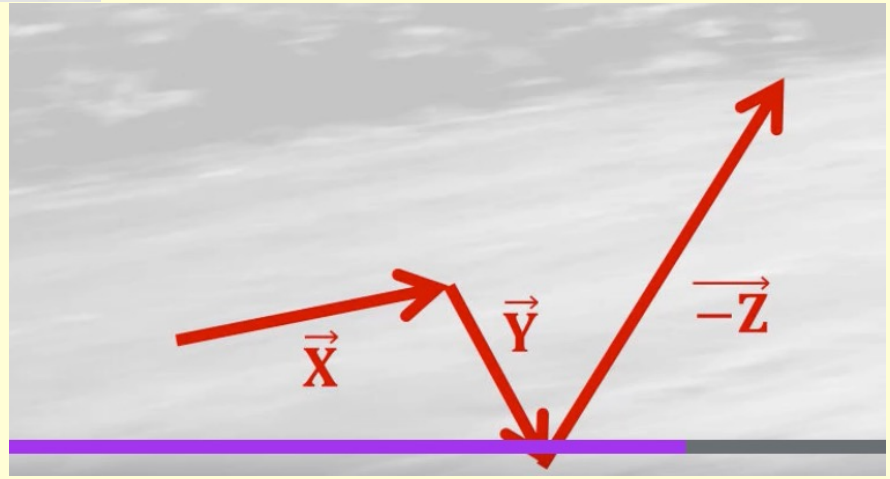


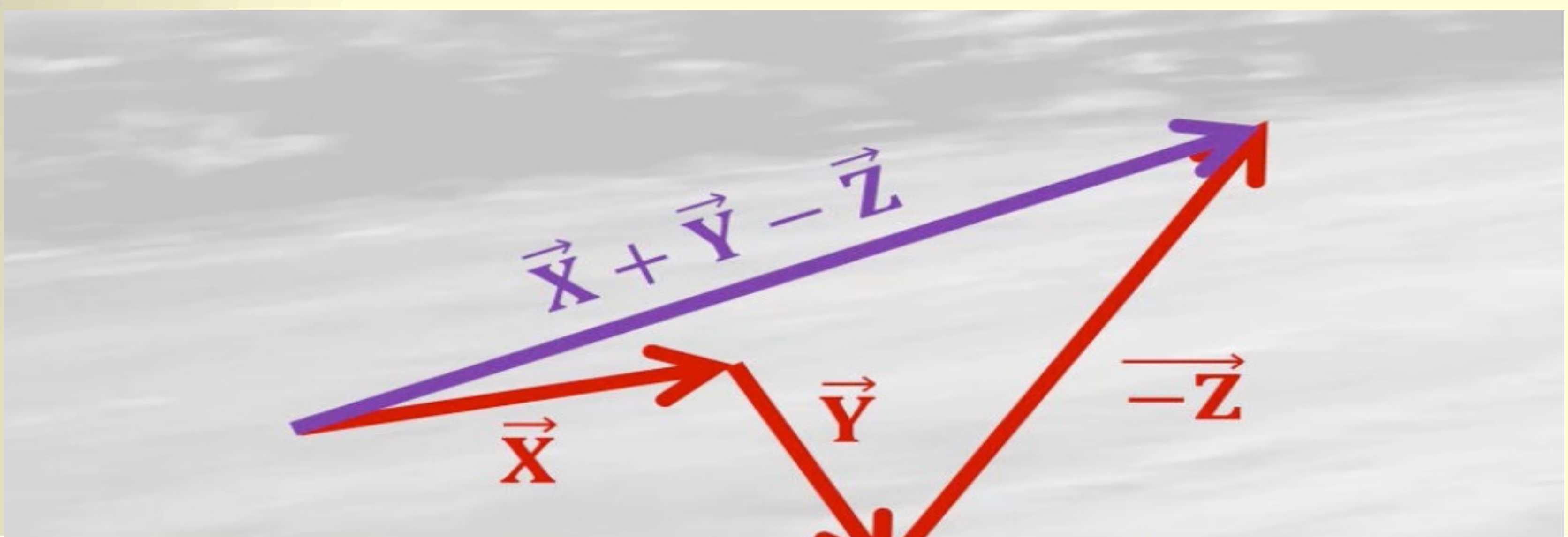


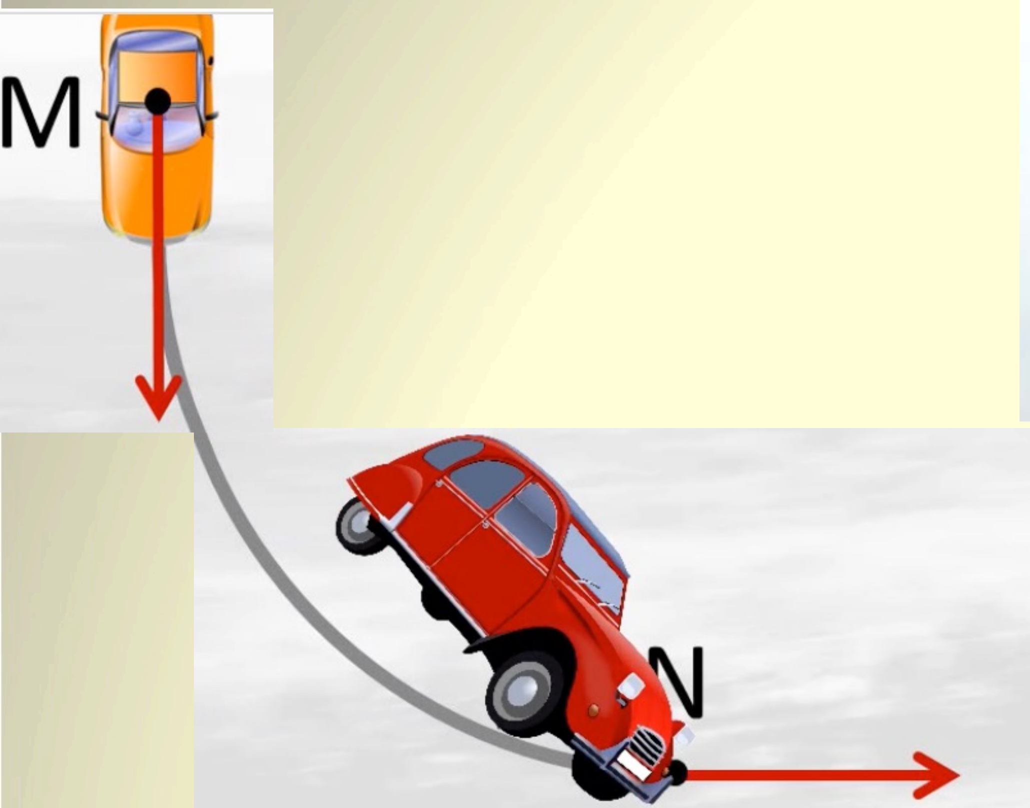


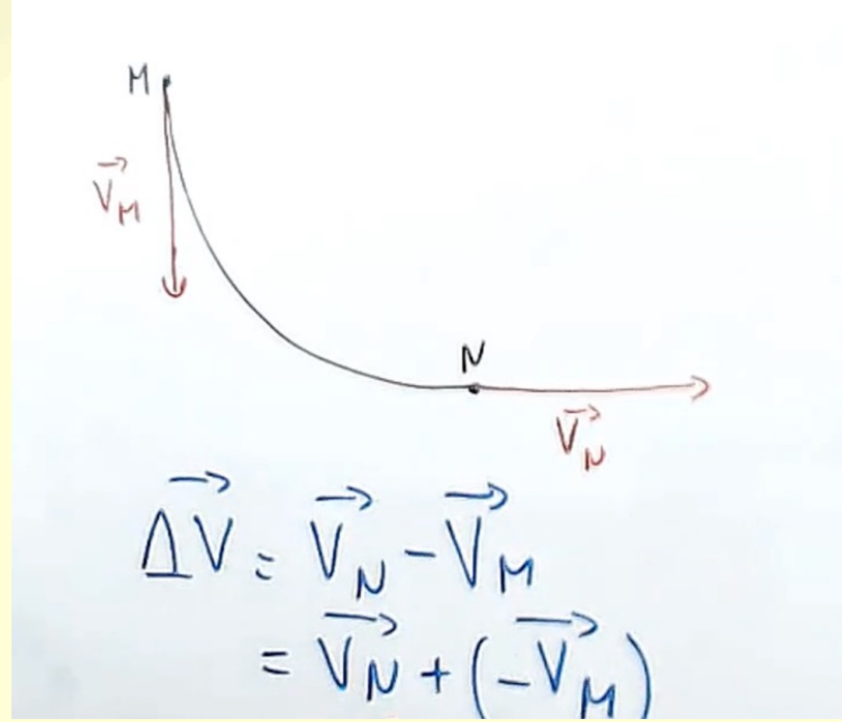


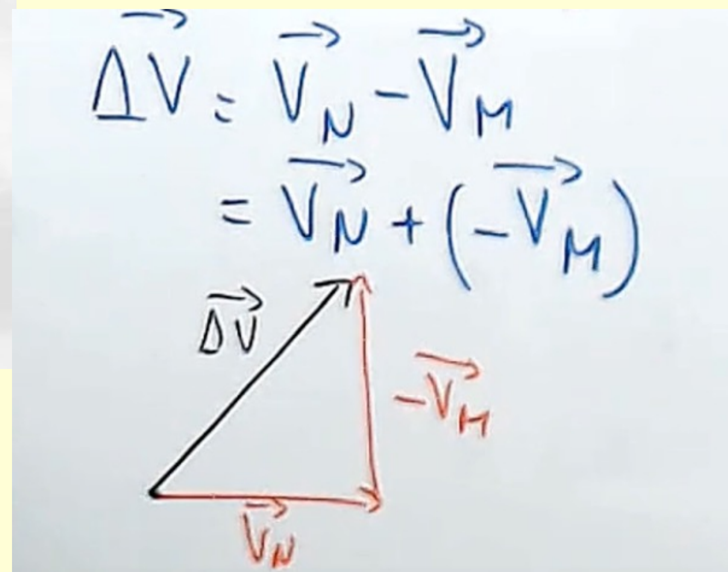
$$\vec{X} + \vec{Y} - \vec{Z}$$






M
N

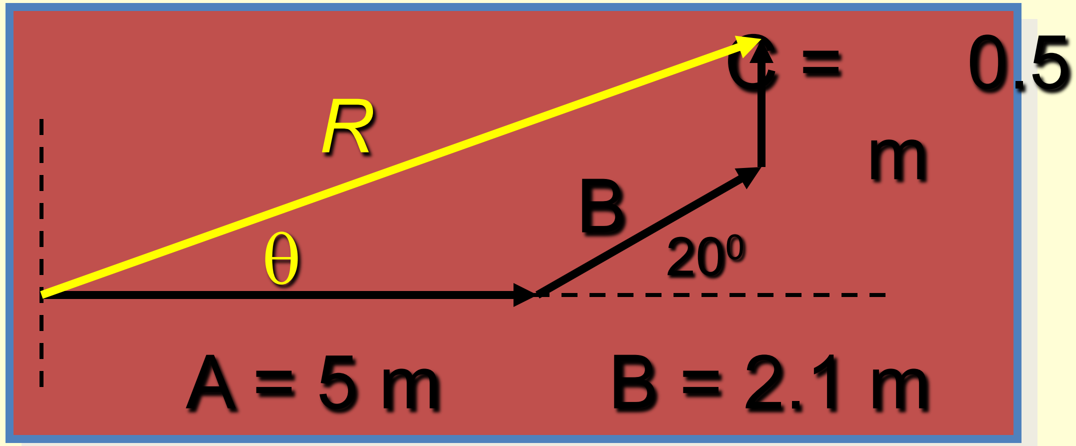

M
$\vec{V}_M$
N
$\vec{V}_N$
$\vec{\Delta V} = \vec{V}_N - \vec{V}_M$
$= \vec{V}_N + (-\vec{V}_M)$


$\vec{\Delta V} = \vec{V}_N - \vec{V}_M$
$= \vec{V}_N + (-\vec{V}_M)$
$\vec{\Delta V}$
$-\vec{V}_M$
$\vec{V}_N$

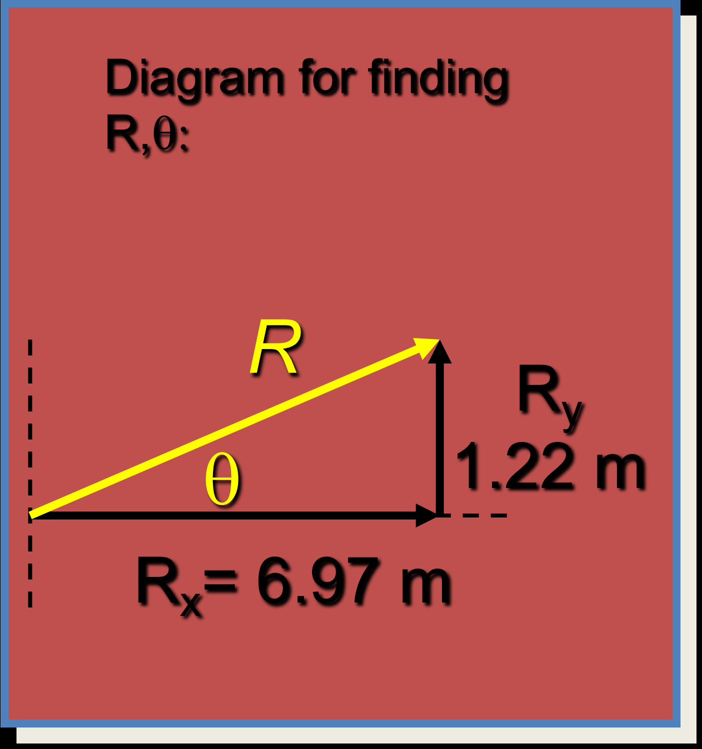
A = 5 m, 0^0

B = 2.1 m, 20^0

C = 0.5 m, 90^0



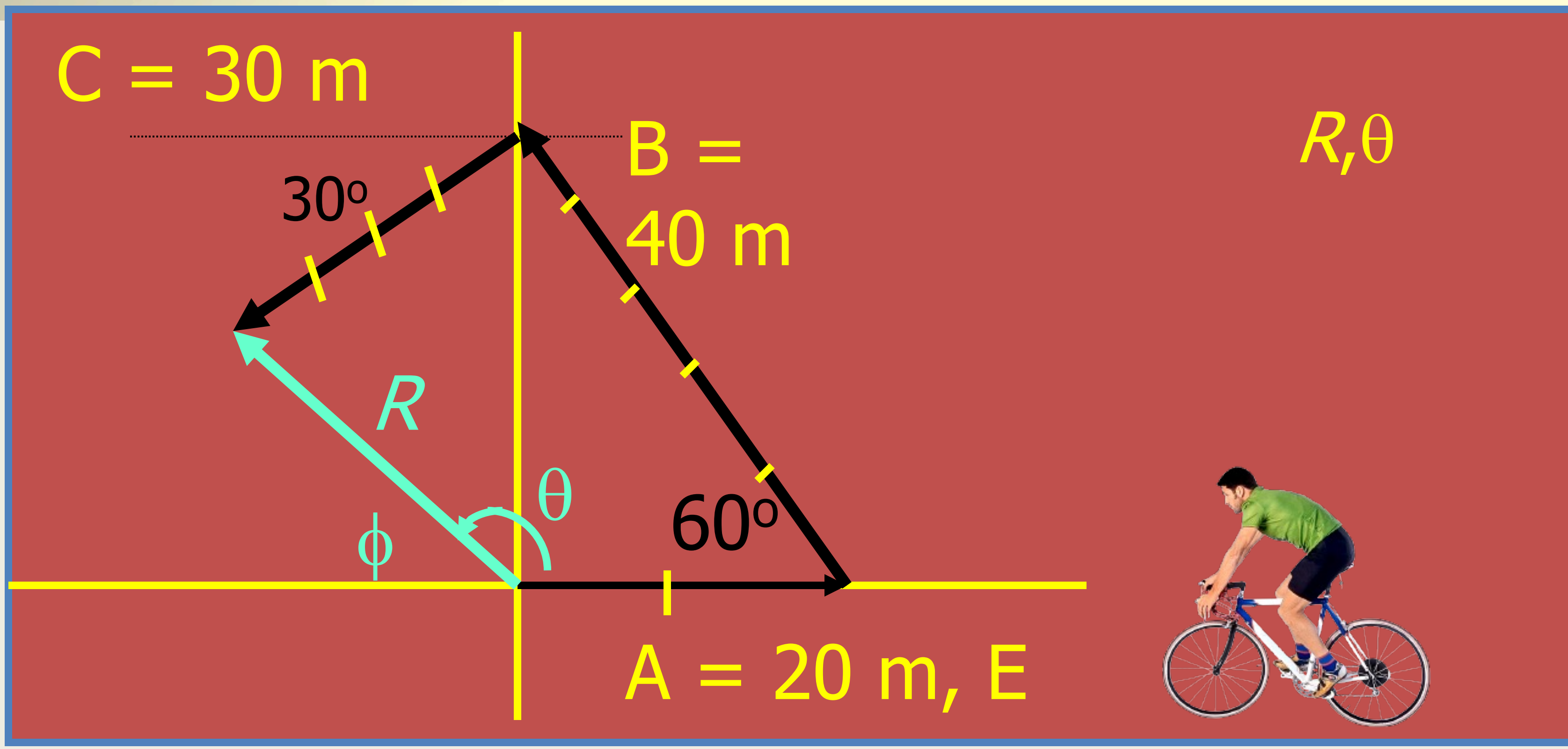
$$R = \sqrt{(6.97 \text{ m})^2 + (1.22 \text{ m})^2}$$



R = 7.08 m

$$\tan\phi = \frac{1.22 \text{ m}}{6.97 \text{ m}}$$

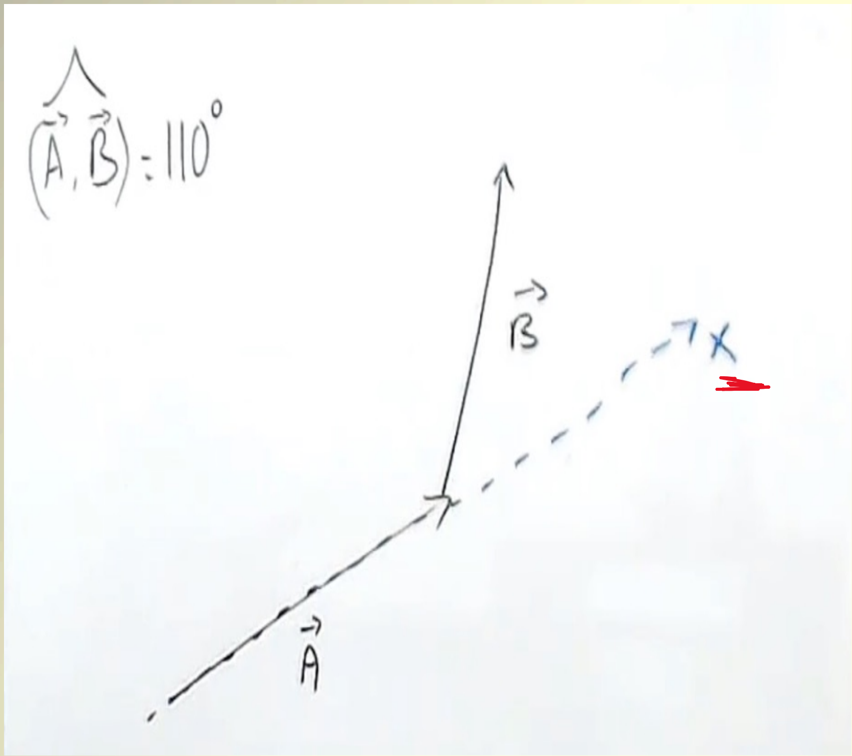
θ = 9.93^0 N. of E.

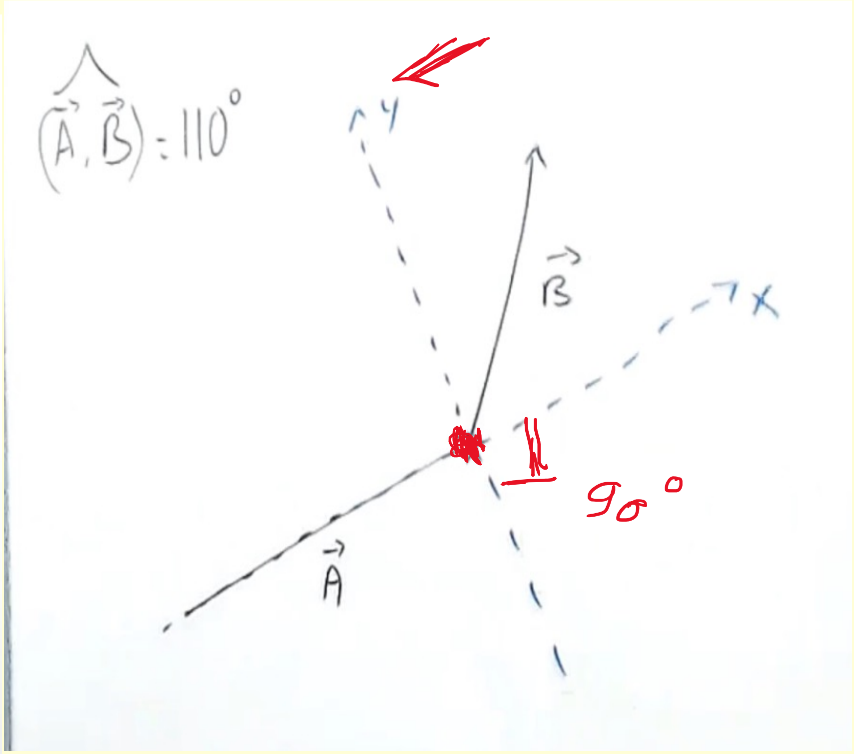


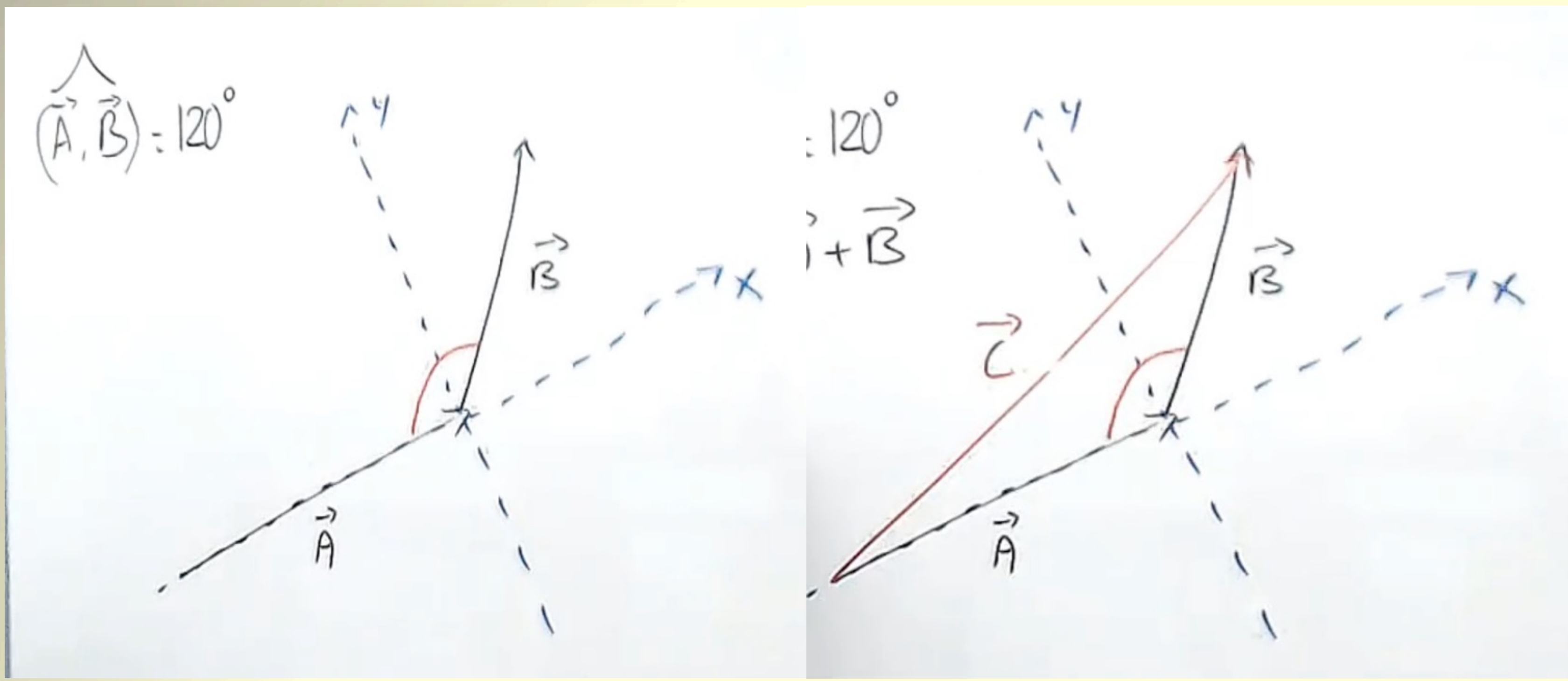
Let 1 cm = 10 m

$\boxed{R = (32.6 \text{ m}, 143.0^{o})}$

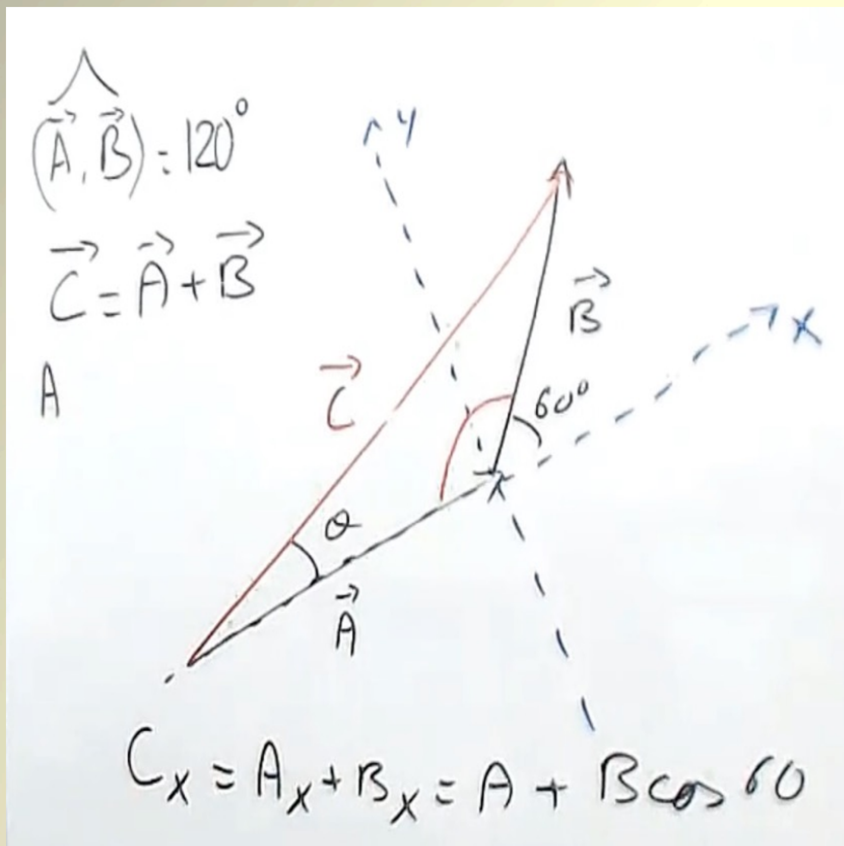
2η μέθοδος

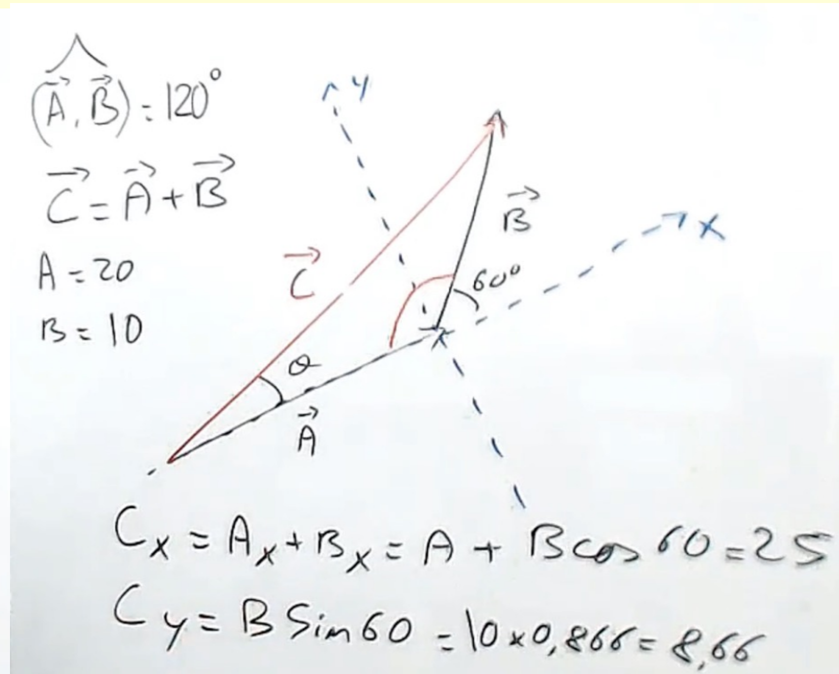






$\widehat{(\vec{A},\vec{B})} = 120°$
y
x
$\vec{B}$
$\vec{A}$
$: 120°$
$+ \vec{B}$
$\vec{C}$


(A, B) = 120°
C = A + B
A
y
x
B
C
60°
θ
A
Cx = Ax + Bx = A + B cos 60

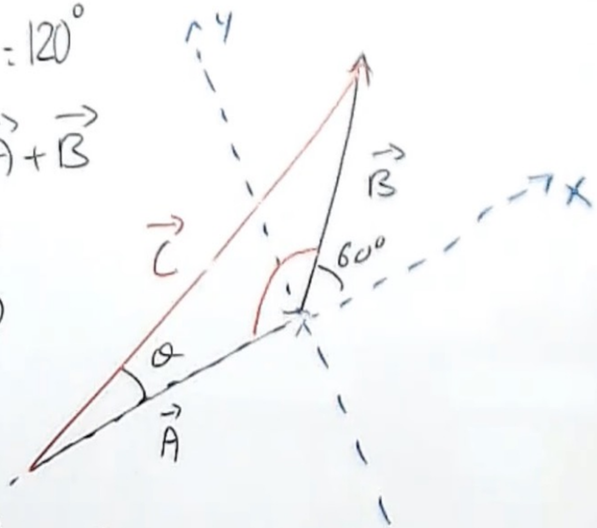

(A, B) = 120°
C = A + B
A = 20
B = 10
y
x
B
C
60°
θ
A
Cx = Ax + Bx = A + B cos 60 = 25
Cy = B Sin 60 = 10 × 0,866 = 8,66

$\widehat{(\vec{A},\vec{B})} = 120^\circ$

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$A = 20$

$B = 10$



$$C_x = A_x + B_x = A + B\cos 60 = 25$$

$$C_y = B\sin 60 = 10 \times 0,866 = 8,66$$

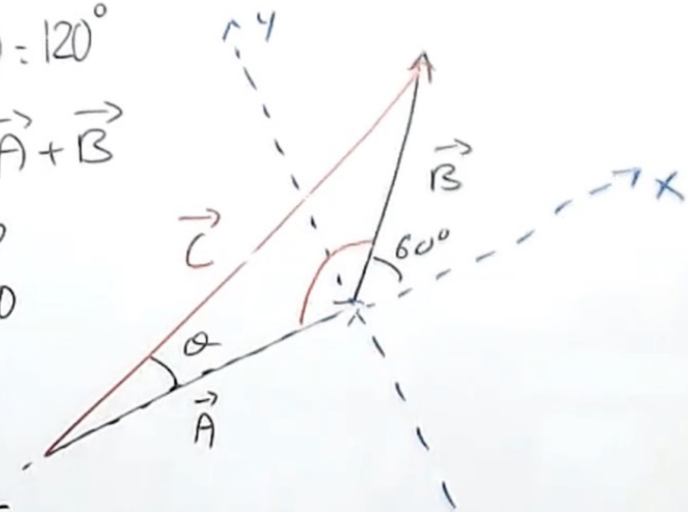
$$C = \sqrt{25^2 + 8,66^2} =$$

$\widehat{(\vec{A},\vec{B})} = 120^\circ$

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$A = 20$

$B = 10$

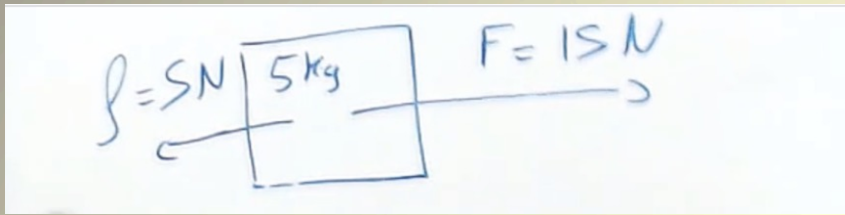


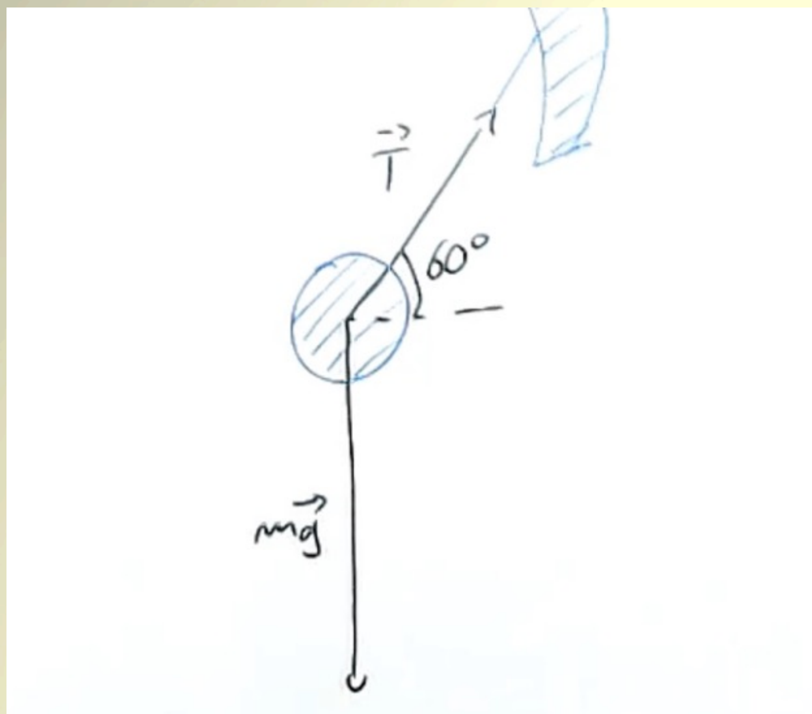
$$C_x = A_x + B_x = A + B\cos 60 = 25$$

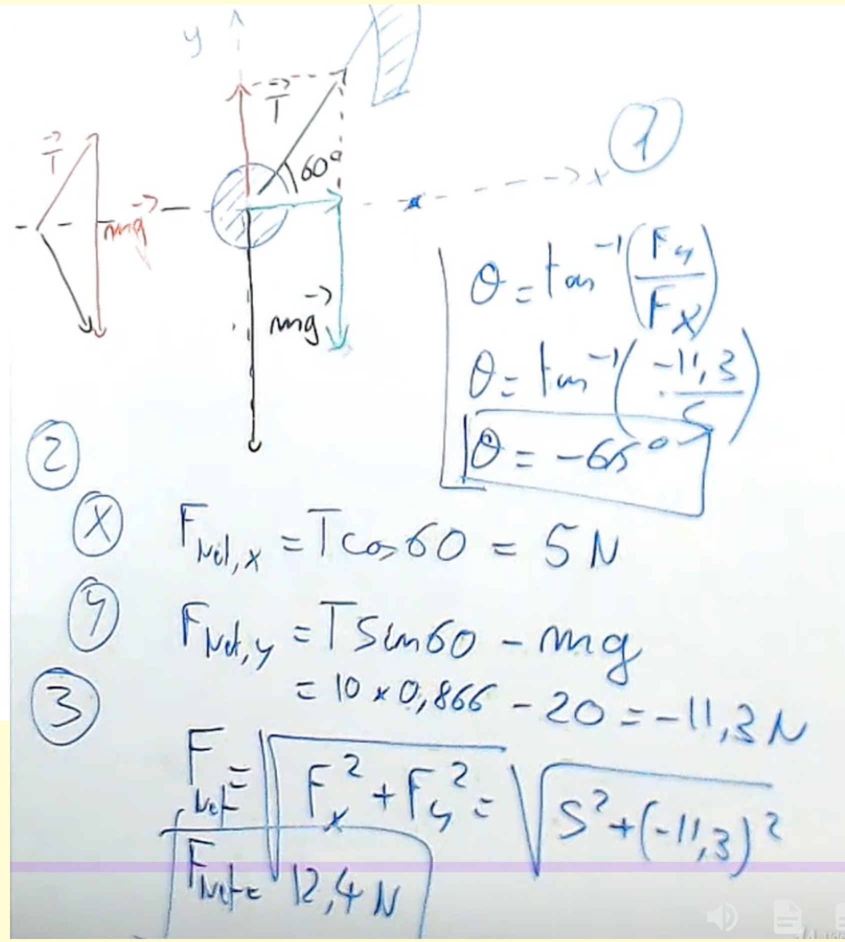
$$C_y = B\sin 60 = 10 \times 0,866 = 8,66$$

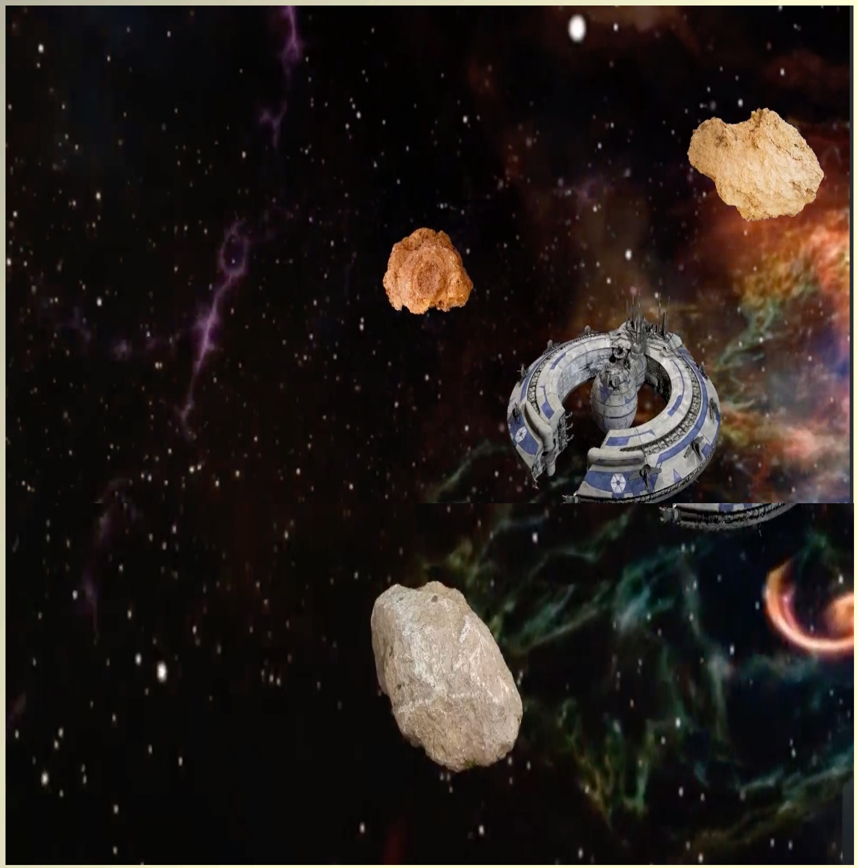
$$C = \sqrt{25^2 + 8,66^2} = 26,5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8,66}{25}\right) =$$


f = 5N
5kg
F = 15N


T
60°
mg


y
T
60°
x
mg
1
θ = tan⁻¹(Fy/Fx)
θ = tan⁻¹(-11,3/5)
θ = -65°
2
x F net,x = T cos 60 = 5 N
y F net,y = T sin 60 - mg
= 10 x 0,866 - 20 = -11,3 N
3
F net = √(Fx² + Fy²) = √(5² + (-11,3)²)
F net = 12,4 N



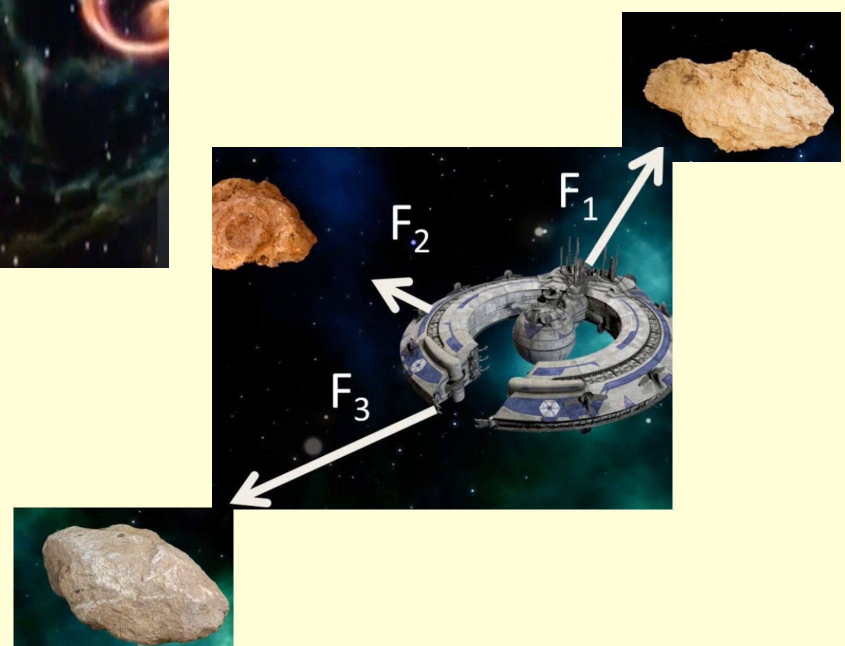
Ένα διαστημόπλοιο, προσπαθεί να ξεφύγει τη σύγκρουση με τα αστεροειδή. Αυτά ασκούν βαρυτικές δυνάμεις.

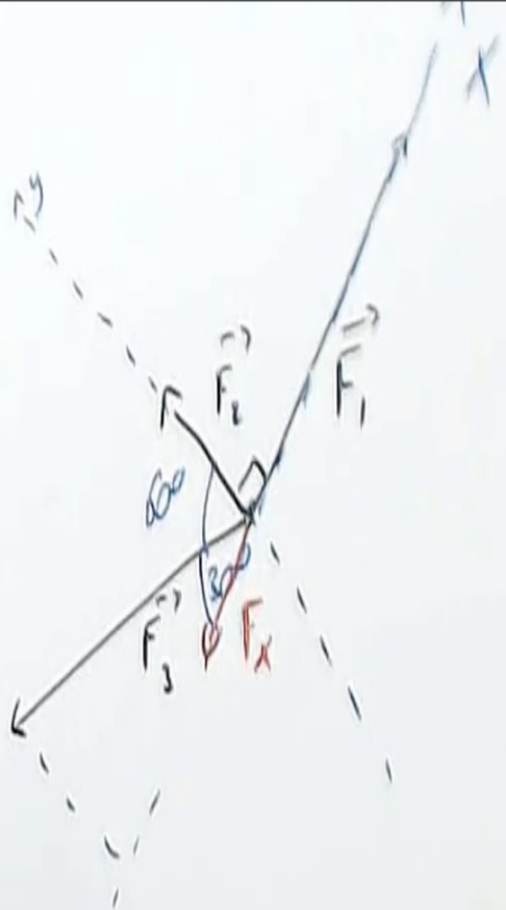
Το F1 είναι κάθετο του F2

Το F3 σχηματίζει γωνία 60 μοιρών με την F2.

F1=100 N, F2=500N F3=1500N

Ζητείται η συνολική δύναμη

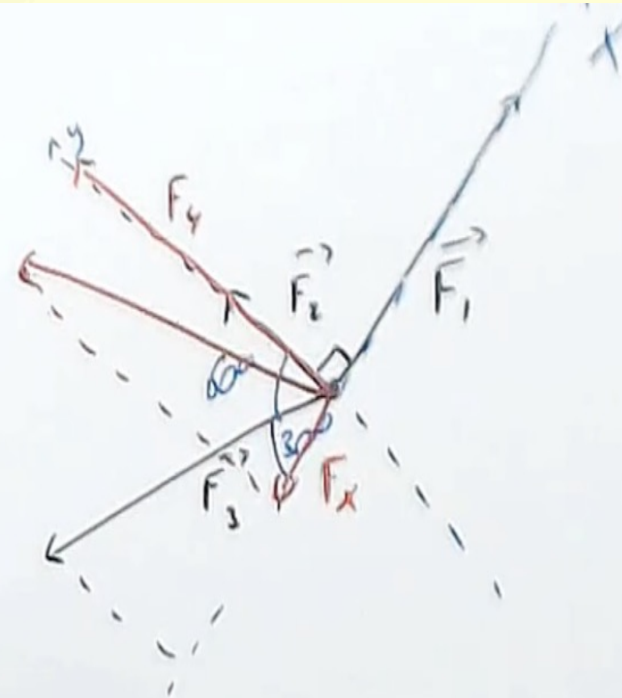




(x) $F_{Net,x} = +F_1 + 0 - F_3 \cos 30$

$= 1000 - 1500 \times 0{,}866$

$= -300\ N.$



(x) $F_{Net,x} = +F_1 + 0 - F_3 \cos 30$

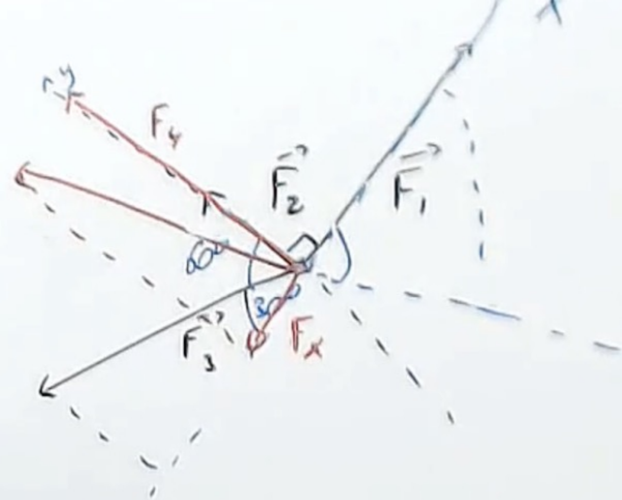
$= 1000 - 1500 \times 0{,}866$

$= -300\ N.$

(y) $F_{Net,y} = 0 + F_2 + F_3 \cos 60$

$= 0 + 500 + 1500 \times \frac{1}{2}$

$= 1250\ N$



(x) $F_{Net,x} = +F_1 + 0 - F_3 \cos 30$

$= 1000 - 1500 \times 0{,}866$

$= -300\ N.$

(y) $F_{Net,y} = 0 + F_2 + F_3 \cos 60$

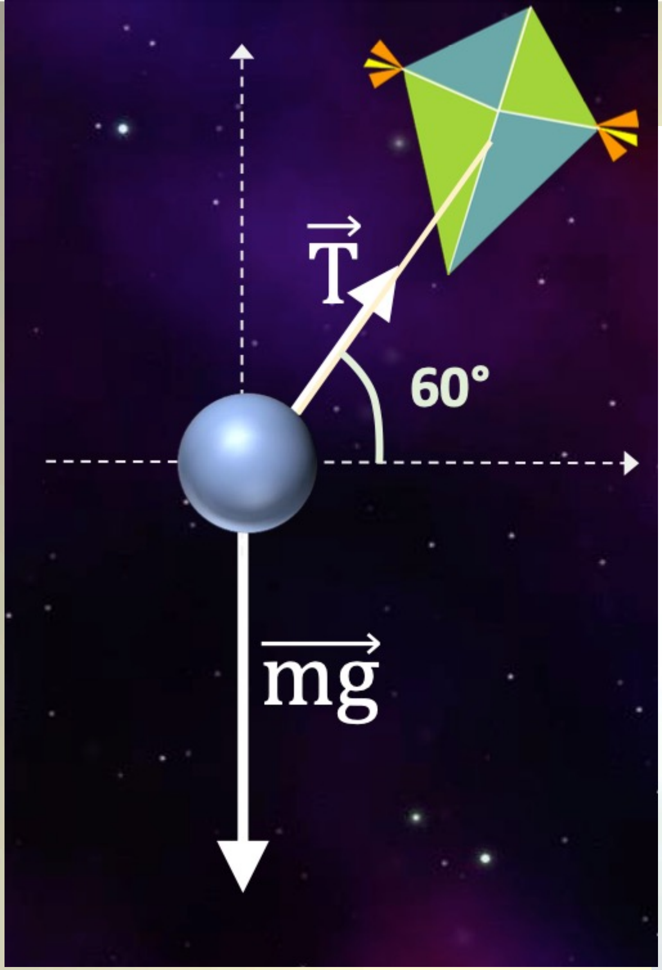
$= 0 + 500 + 1500 \times \frac{1}{2}$

$= 1250\ N$

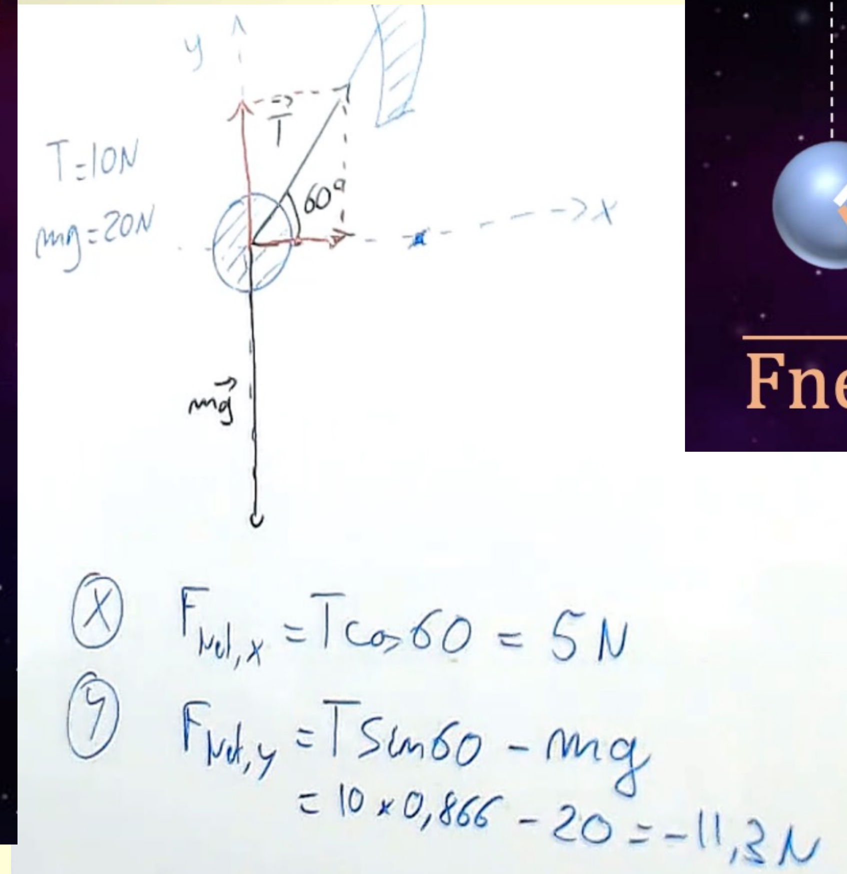
$F_{Net} = \sqrt{(-300)^2 + (1250)^2} \simeq 1300\ N$

$\theta = \tan^{-1}(F_y / F_x) = \tan^{-1}\left(\frac{1250}{-3\ldots}\right)$

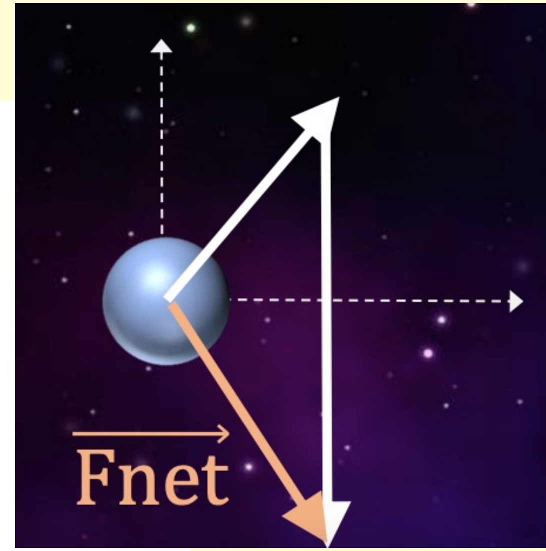
$\theta = -77°$



T
60°
mg



y
T
T=10N
mg=20N
60°
x
mg
X $F_{Net,x} = T\cos 60 = 5N$
Y $F_{Net,y} = T\sin 60 - mg$
$= 10 \times 0{,}866 - 20 = -11{,}3N$

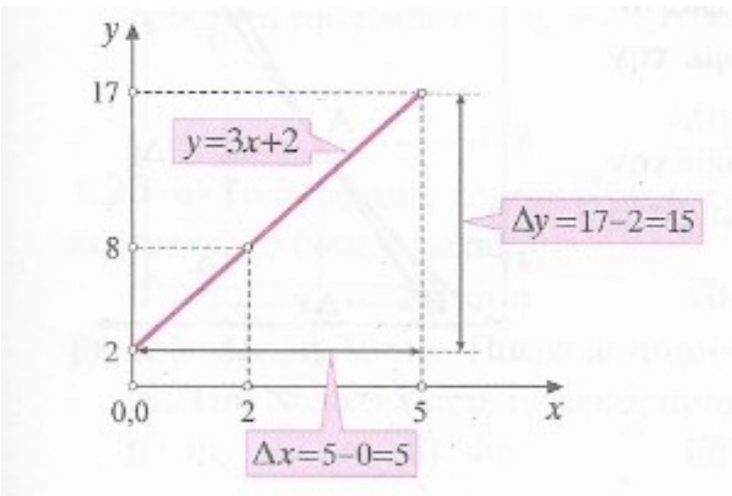


Fnet

Γραφικές παραστάσεις

$y = \alpha x + \beta$, όπου α και β σταθερές

$v = 5 + 2t$

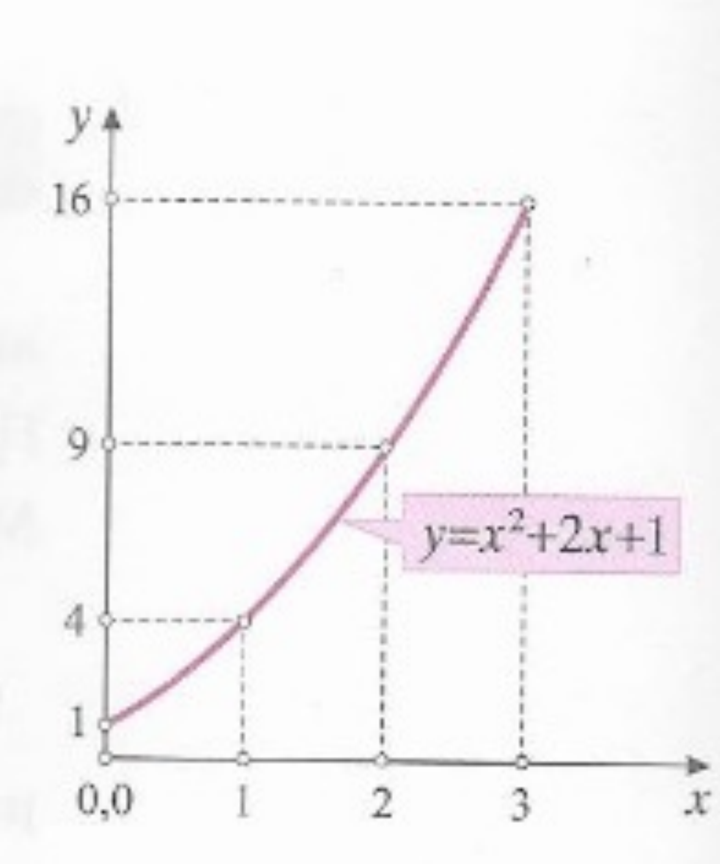


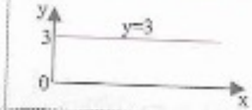
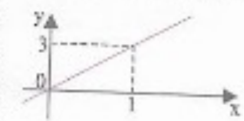
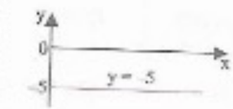
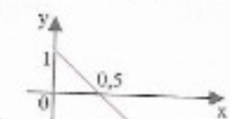
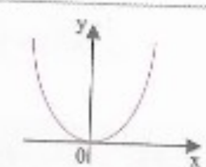
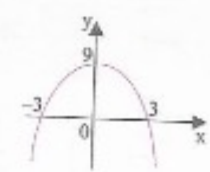
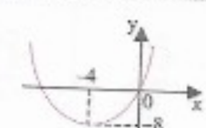
Πίνακας τιμών	
x	y
0	2
2	8
5	17

Μόνο στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ισχύει:

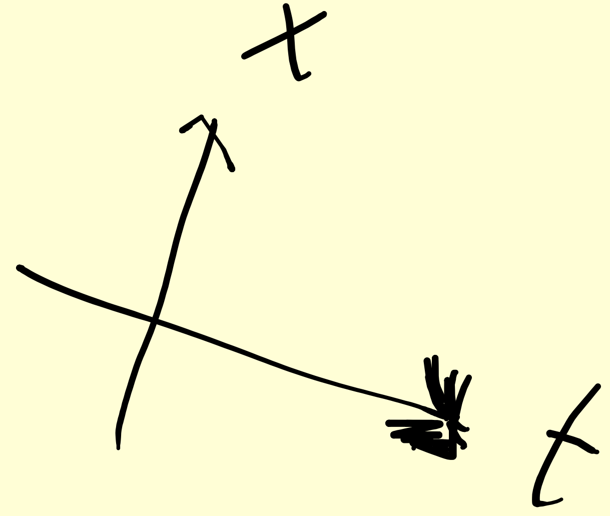
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon\varphi\phi$$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

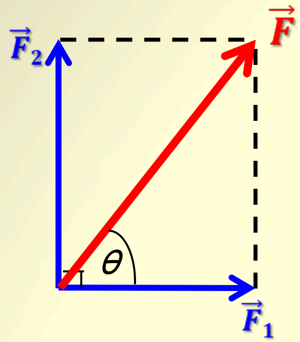


Συνάρτηση	Σχήμα	Παράδειγμα	Γραφική παράσταση
y = c	Ευθεία παράλληλη στον άξονα xx΄	y = 3	
		y = –5	
y = αx + β	ευθεία	y = 3x	
		y = x – 3	
		y = –2x + 1	
$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$	παραβολή	$y = 2x^2$	
		$y = -x^2 + 9$	
		$y = \frac{1}{2}x^2 + 4x$	

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$



Εύρεση της συνισταμένης δύο δυνάμεων που οι κατευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία 90^0.



«γραφικός» υπολογισμός συνισταμένης

$$\widehat{\varphi} = 90^o \longrightarrow \text{συν}\varphi = 0$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{F_2}{F_1}$$

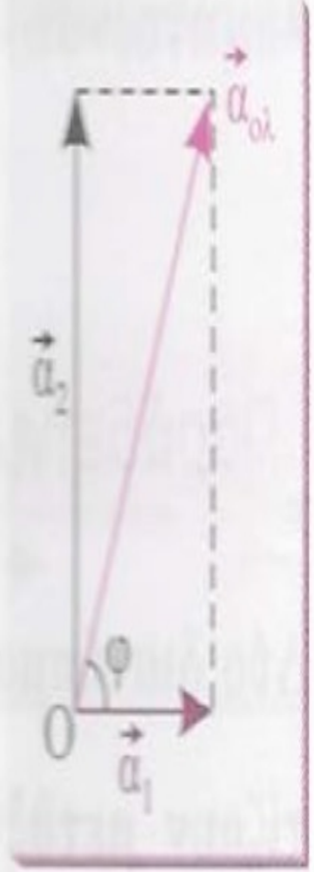
αλγεβρικός υπολογισμός του μέτρου της συνισταμένης

Έτσι έχουν προκύψει τα γνωστά αποτελέσματα:

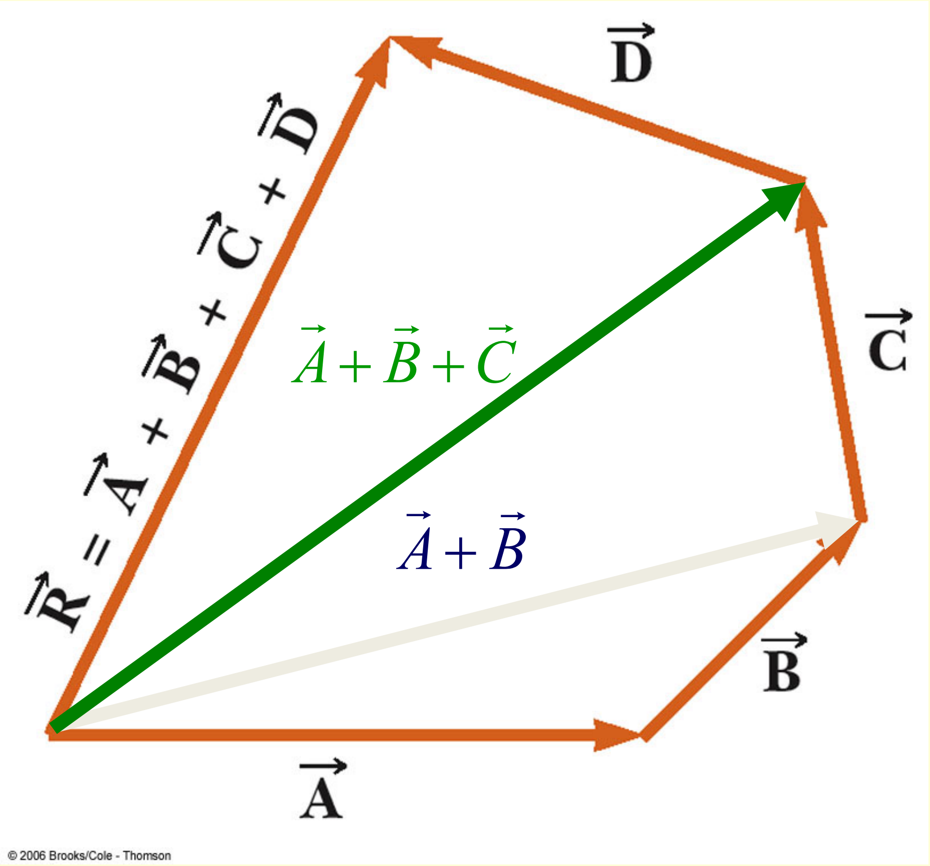
- σύνθεση δύο δυνάμεων ίδιας κατεύθυνσης ($\widehat{\varphi} = 0^0$) $\quad F = F_1 + F_2$
- σύνθεση δύο δυνάμεων αντίθετης κατεύθυνσης ($\widehat{\varphi} = 180^0$) $\quad F = |F_1 - F_2|$

Όταν $\theta = 90^o$, τα διανύσματα είναι όπως απεικονίζο-νται στο σχήμα (δ) με συνισταμένη $|\vec{\alpha}_{o\lambda}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$

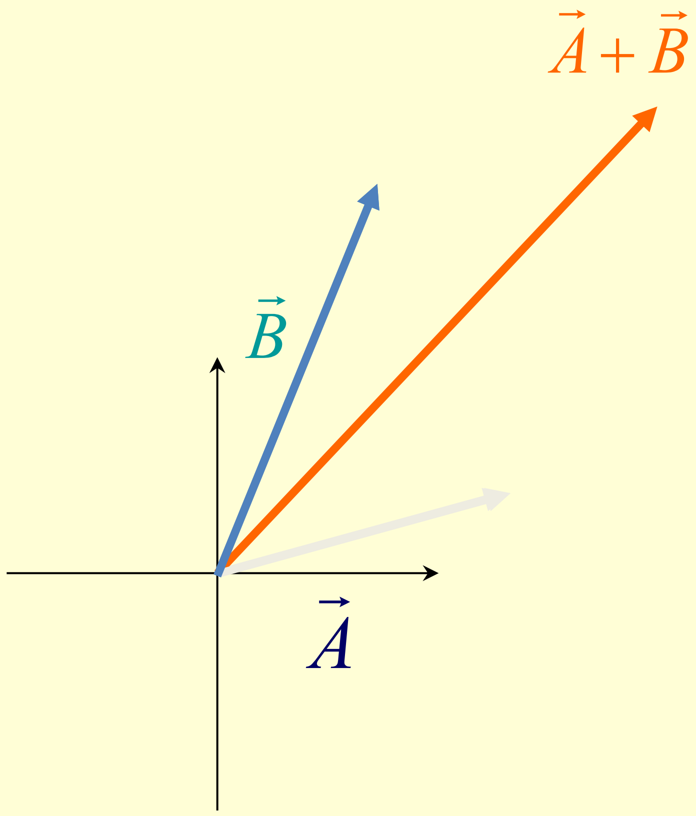
ή $|\vec{\alpha}_{o\lambda}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ ή $\alpha_{o\lambda} = 5$ μονάδες.



Άθροισμα γραφικά



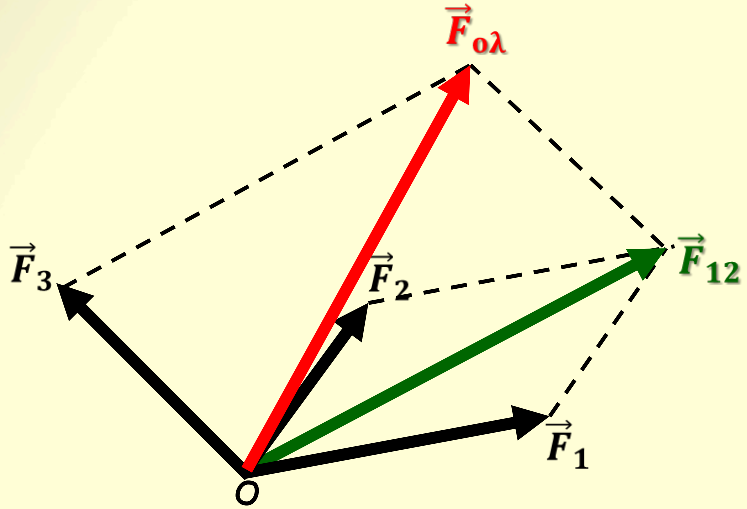
Άθροισμα διανυσμάτων γεωμετρικά



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

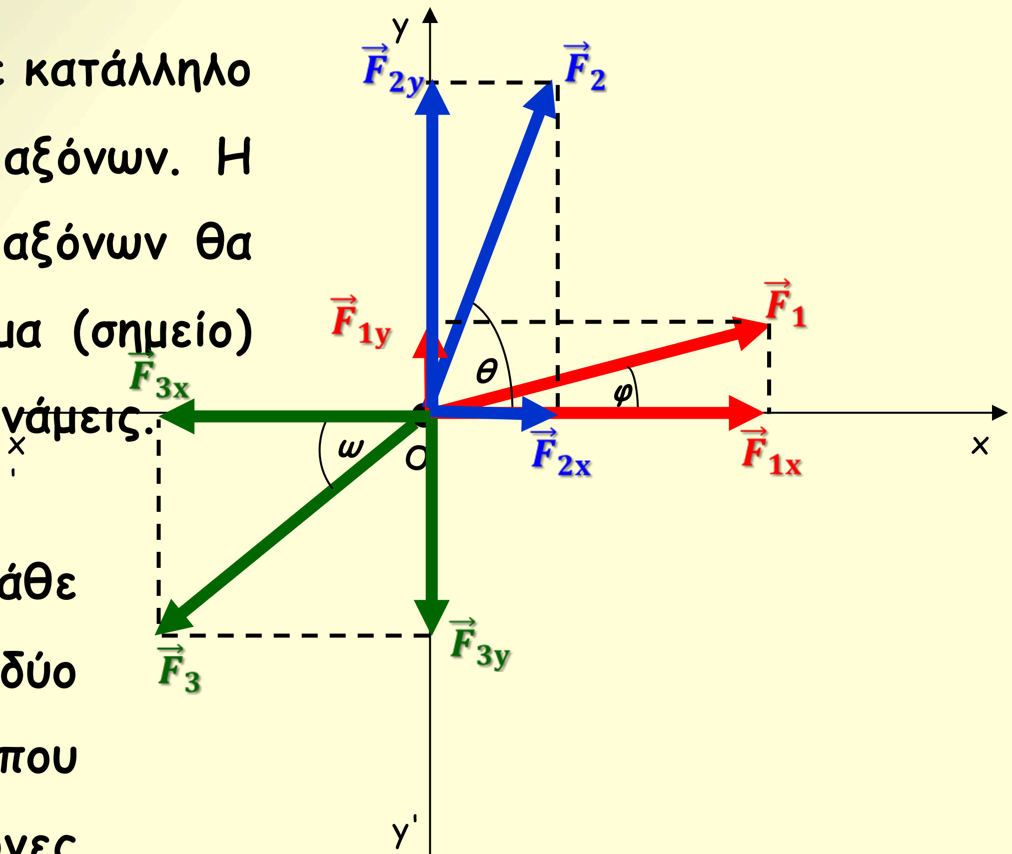
Σύνθεση πολλών (ομοεπίπεδων) δυνάμεων.

- **Με τη μέθοδο του « παραλληλογράμμου »**



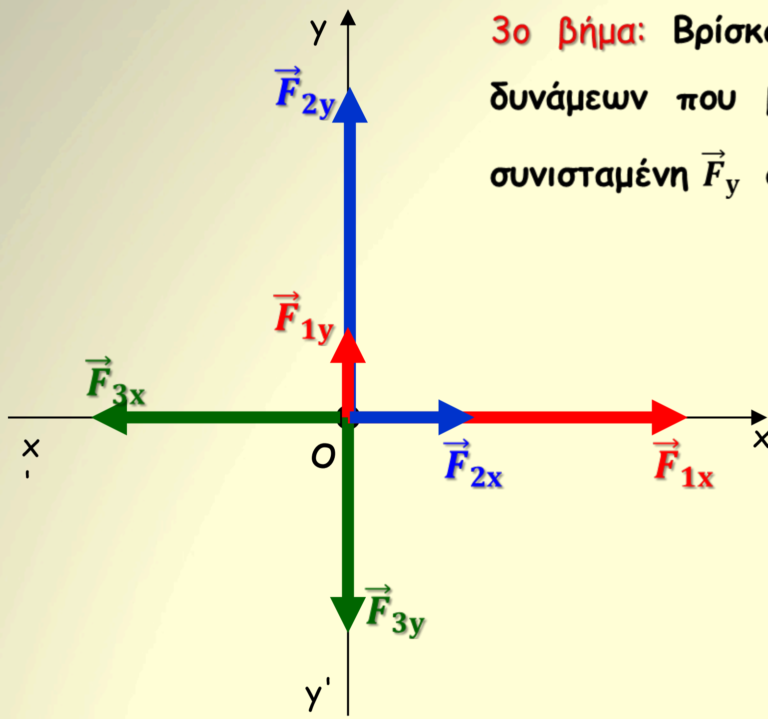
Αυτή η μέθοδος μας εξυπηρετεί στην εύρεση της συνισταμένης «γραφικά», όχι όμως στον εύκολο υπολογισμό του μέτρου της.

➢ Με το ορθογώνιο σύστημα αξόνων

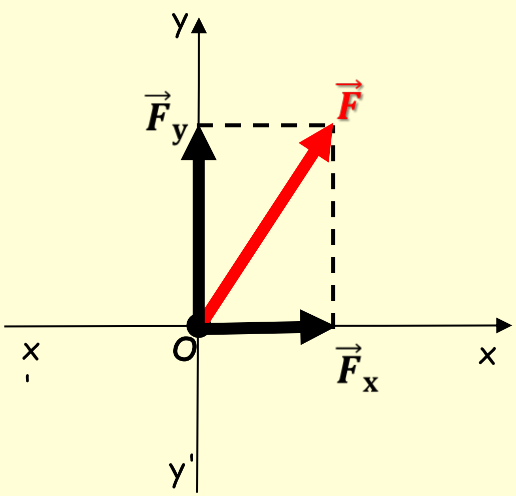


1ο βήμα: Σχεδιάζουμε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Η αρχή μέτρησης των αξόνων θα συμπίπτει με το σώμα (σημείο) στο οποίο δρουν οι δυνάμεις.

2ο βήμα: Αναλύουμε κάθε δύναμη σε δύο συνιστώσες που βρίσκονται στους άξονες x′x και y′y.



3ο βήμα: Βρίσκουμε τη συνισταμένη $\vec{F}_x$ όλων των δυνάμεων που βρίσκονται στον άξονα x′x και τη συνισταμένη $\vec{F}_y$ όλων των δυνάμεων στον άξονα y′y.

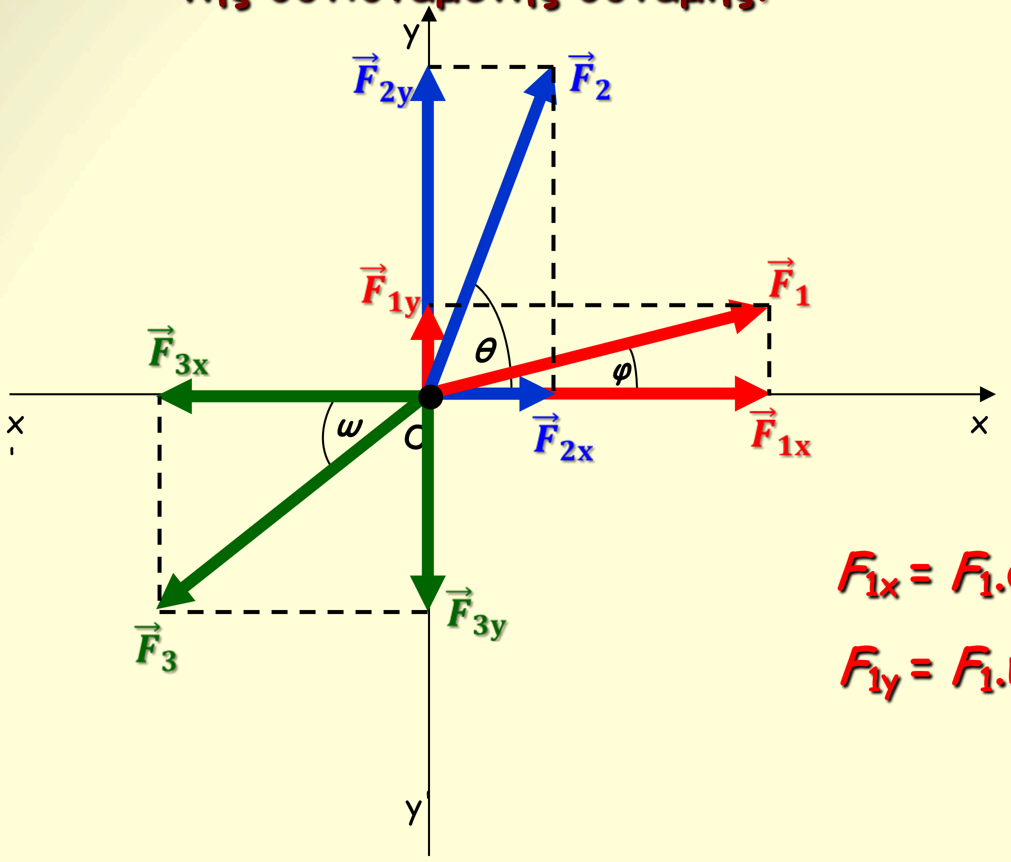


4ο βήμα: Βρίσκουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$. Η $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

Υπολογισμός του μέτρου και της κατεύθυνσης της συνισταμένης δύναμης.

$F_{2x} = F_2.συνθ$

$F_{2y} = F_2.ημθ$

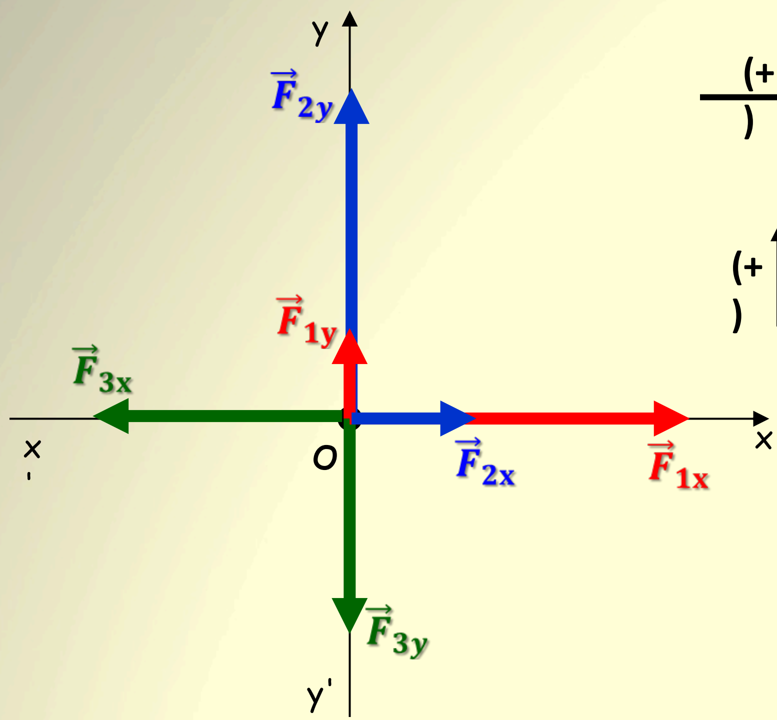


$F_{3x} = F_3.συνω$

$F_{3y} = F_3.ημω$

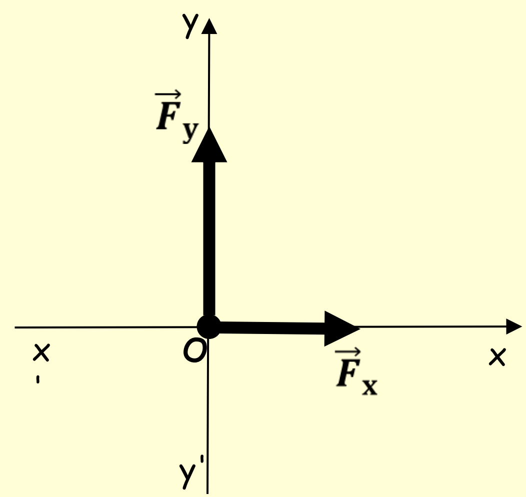
$F_{1x} = F_1.συνφ$

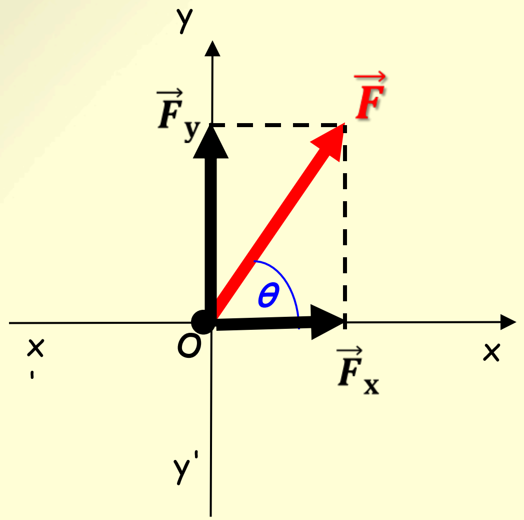
$F_{1y} = F_1.ημφ$



$(+)\rightarrow$ $$F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x}$$

$(+)\uparrow$ $$F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$





Το μέτρο της συνισταμένης $\vec{F}$ είναι $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

Η κατεύθυνση της συνισταμένης $\vec{F}$ βρίσκεται από τη γωνία θ

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x}$$