

## ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

#### Διανύσματα

##### Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

###### 2<sup>ο</sup> Θέμα

2 18603

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε επιπέδου τέτοια, ώστε  $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 5\vec{AG}$   
και  $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 2\vec{AG}$

- α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{DE}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$ . (Μονάδες 13)  
β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{DE}$  και  $\vec{BG}$  είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

2 18604

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ σημεία τέτοια ώστε:  $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AD}$ ,  $\vec{AZ} = \frac{2}{7}\vec{AG}$

- α) Να γράψετε τα διανύσματα  $\vec{EZ}$  και  $\vec{ZB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{AB}$  και  $\vec{AD}$ .  
(Μονάδες 13)  
β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ζ και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

2 20054

Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5\vec{PL} = 2\vec{PK} + 3\vec{PM}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)  
β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει:  
 $2\vec{AL} + 3\vec{BL} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$ , όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.  
(Μονάδες 15)

##### Συντεταγμένες στο επίπεδο

###### 2<sup>ο</sup> Θέμα

2 18605

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$  και  $\vec{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$ , όπου  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των  $\vec{AB}$  και  $\vec{BG}$ . (Μονάδες 12)  
β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ μπορεί να είναι κορυφές του τριγώνου.  
(Μονάδες 13)

2 20055

Θεωρούμε τα σημεία Α(α+1, 3), Β(α, 4) και Γ(-4, 5α+4), α ∈ ℝ.

- α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{BG}$ . (Μονάδες 8)  
β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)  
γ) Αν α=1, να βρείτε αριθμό λ ώστε  $\vec{AG} = \lambda \cdot \vec{AB}$  (Μονάδες 7)

**2 20061**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4,3) και Δ(2,3).

- α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)  
 β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β. (Μονάδες 16)

**2 20071**

Θεωρούμε τα σημεία Α(1+2α, 4α-2) και Β(5α+1, -α), α ∈ Ζ.

- α) Να γράψετε το  $\overrightarrow{AB}$  συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε  $|\overrightarrow{AB}| = 10$ . (Μονάδες 12)  
 β) Έστω α=2. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x'x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. (Μονάδες 13)

**2 20073**

Δίνονται τα σημεία Α(2,3), Β(-1,5) και Γ(-2,-4).

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)  
 β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)  
 γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 7)

**2 20148**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$  και  $\vec{\gamma} = (7,3)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  είναι μη συγγραμμικά ανά δύο. (Μονάδες 10)  
 β) Να γραφεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 15)

**Εσωτερικό γινόμενο****2° Θέμα****2 18556**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  (Μονάδες 8)  
 β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ. (Μονάδες 10)  
 γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ . (Μονάδες 7)

**2 18558**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι:  $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ ,  $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AM}$ , όπου ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)  
 β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία. (Μονάδες 10)  
 γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ. (Μονάδες 8)

**2 18581**

Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει:  $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$  (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  (Μονάδες 15)

**2 18598**

Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$  και  $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$  όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$  (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$  να είναι κάθετα. (Μονάδες 9)

γ) Για  $\kappa=1$ , να βρείτε το διάνυσμα  $\overrightarrow{BG}$ . (Μονάδες 8)

**2 20053**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$  (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$ . (Μονάδες 15)

**2 20056**

Έστω  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δυο διανύσματα με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5\pi}{6}$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ .

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$  (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u}$ . (Μονάδες 9)

**2 20070**

Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:  $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ ,

$2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  και το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ . (Μονάδες 13)

**2 20057**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$   $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και κατόπιν την τιμή της παράστασης:  $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$  (Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} + 2 \cdot \vec{\alpha}$ . (Μονάδες 15)

**2 20058**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$  και  $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$ . Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$  (Μονάδες 10)

β) το διάνυσμα  $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$  (Μονάδες 15)

**2 20059**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 3)$  και  $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$  για τον οποίο τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v} = (x^2, x - 1)$  είναι κάθετα. (Μονάδες 15)

**4<sup>ο</sup> Θέμα****4 18606**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{OA} = (4, -2)$  και  $\vec{OB} = (1, 2)$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 4)

β) Αν  $\Gamma(\alpha, \beta)$  είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\vec{AB} = (-3, 4)$  και  $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$  (Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι:  $4\alpha + 3\beta = 10$  (Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα  $\vec{OG}$  και  $\vec{AB}$  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ . (Μονάδες 10)

**4 18616**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$  και  $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  (Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$  (Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$  (Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

**4 18618**

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$  και

$|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$  (Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$$

i) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$  (Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι:  $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$  (Μονάδες 7)

### Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

**2 20050**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 7)$  και  $\vec{\beta} = (2, 4)$

α) Να βρεθεί η προβολή του  $\vec{\alpha}$  πάνω στο  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το  $\vec{\alpha}$  σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 15)

**2 20052**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 1, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ .

α) Να υπολογίσετε τα  $\vec{\alpha}^2$  και  $|\vec{\beta}|$  (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  στο διάνυσμα  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)

**2 20069**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -3)$  και  $\vec{\beta} = (1, \frac{1}{2})$

β) Να βρείτε την προβολή του  $\vec{\alpha}$  πάνω στο  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το  $\vec{\alpha}$  σε δυο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη με το  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 15)