

Επιμέλεια: Σακαρικός Ευάγγελος  
108 Θέματα - 24/1/2015

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## §1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

## §1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

## §1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

#### 1) ΑΣΚΗΣΗ 2-18603      §1.1 - §1.2 - §1.3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AG}$  και  $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}$

- α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{DE}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$ .  
(Μονάδες 13)
- β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{DE}$  και  $\overrightarrow{BG}$  είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

#### 2) ΑΣΚΗΣΗ 2-18604      §1.1 - §1.2 - §1.3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ σημεία τέτοια ώστε:  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AD}$  και  $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{AG}$

- α) Να γράψετε τα διανύσματα  $\overrightarrow{EZ}$  και  $\overrightarrow{ZB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AD}$ .  
(Μονάδες 13)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ζ και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

#### 3) ΑΣΚΗΣΗ 2-20054      §1.1 - §1.2 - §1.3

Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση  $5\overrightarrow{PL} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
- β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει  $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$ , όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.  
(Μονάδες 15)

#### 4) ΑΣΚΗΣΗ 2-22518      §1.1 - §1.2 - §1.3

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  και τυχαίο σημείο Ο. Αν  $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$ ,  $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$  και  $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$ , τότε:

- α) να εκφράσετε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AG}$  συναρτήσει των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$   
(Μονάδες 13)
- β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 4ο****5) ΑΣΚΗΣΗ 4-22561** §1.1 - §1.2 - §1.3

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$ . Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$  και  $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  (Μονάδες 8)

β)  $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$  και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  το  $\overrightarrow{EB}$ .

(Μονάδες 12)

γ) τα σημεία Ε, Ζ, Β είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

**§1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ****ΘΕΜΑ 2ο****6) ΑΣΚΗΣΗ 2-18605** §1.4

Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$  και  $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$ , όπου  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{BG}$ . (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

**7) ΑΣΚΗΣΗ 2-20055** §1.4

Θεωρούμε τα σημεία  $A(\alpha + 1, 3)$ ,  $B(\alpha, 4)$  και  $\Gamma(-4, 5\alpha + 4)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BG}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha$ , τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) Αν  $\alpha = 1$ , να βρείτε αριθμό  $\lambda$  ώστε  $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB}$ . (Μονάδες 7)

**8) ΑΣΚΗΣΗ 2-20061** §1.4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4,3) και Δ(2,3)

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β. (Μονάδες 16)

**9) ΑΣΚΗΣΗ 2-20071** §1.4

Θεωρούμε τα σημεία  $A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2)$  και  $B(5\alpha + 1, -\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$

α) Να γράψετε το  $\overrightarrow{AB}$  συναρτήσει του  $\alpha$  και να βρείτε το  $\alpha$  ώστε  $|\overrightarrow{AB}| = 10$ .

(Μονάδες 12)

β) Έστω  $\alpha = 2$ . Να βρείτε σημείο Μ του άξονα  $x'x$  ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. (Μονάδες 13)

**10) ΑΣΚΗΣΗ 2-20148** §1.4

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$  και  $\vec{\gamma} = (7, 3)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  είναι μη συγγραμμικά ανά δύο. (Μονάδες 10)
- β) Να γραφεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 4ο****§1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ****ΘΕΜΑ 2ο****11) ΑΣΚΗΣΗ 2-18556** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  (Μονάδες 8)
- β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  (Μονάδες 7)

**12) ΑΣΚΗΣΗ 2-18558** §1.5

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι:  $\overline{AB} = (-4, -6)$  και  $\overline{AG} = (2, -8)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overline{AM}$ , όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία. (Μονάδες 10)
- γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ. (Μονάδες 8)

**13) ΑΣΚΗΣΗ 2-18581** §1.5

Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία:  $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$  (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  (Μονάδες 15)

**14) ΑΣΚΗΣΗ 2-18598** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$  και  $\overline{AG} = (1, 6)$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$  (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα  $\overline{AB}$  και  $\overline{AG}$  να είναι κάθετα. (Μονάδες 9)
- γ) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το διάνυσμα  $\overline{BG}$ . (Μονάδες 8)

**15) ΑΣΚΗΣΗ 2-20050** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1,7)$  και  $\vec{\beta} = (2,4)$ .

- α) Να βρεθεί η προβολή του  $\vec{a}$  πάνω στο  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να αναλύσετε το  $\vec{a}$  σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 15)

**16) ΑΣΚΗΣΗ 2-20052** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{a}| = 1$ ,  $(\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$  και  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$

- α) Να υπολογίσετε τα  $\vec{a}^2$  και  $|\vec{\beta}|$  (Μονάδες 6)  
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{a} + 2\vec{\beta}$  (Μονάδες 9)  
 γ) Να βρείτε την προβολή του  $\vec{a} + 2\vec{\beta}$  στο διάνυσμα  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 5)

**17) ΑΣΚΗΣΗ 2-20053** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}| = 4$  και  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -8$

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$  (Μονάδες 10)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} + 2\vec{a} = \vec{0}$ . (Μονάδες 15)

**18) ΑΣΚΗΣΗ 2-20056** §1.5

Έστω  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα με  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$   $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{5\pi}{6}$  και  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ .

- α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$ . (Μονάδες 16)  
 β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u}$ . (Μονάδες 9)

**19) ΑΣΚΗΣΗ 2-20057** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε τα εξής:

- α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  και κατόπιν την τιμή της παράστασης  $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{\beta})$  (Μονάδες 10)  
 β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{a} - 2\vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} + 2\vec{a}$ . (Μονάδες 15)

**20) ΑΣΚΗΣΗ 2-20058** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$  και  $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$ . Να υπολογίσετε:

- α) τη γωνία  $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$  (Μονάδες 10)  
 β) το διάνυσμα  $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{a}$  (Μονάδες 15)

**21) ΑΣΚΗΣΗ 2-20059** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 3)$  και  $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$  για τον οποίο τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v} = (x^2, x-1)$  είναι κάθετα. (Μονάδες 15)

**22) ΑΣΚΗΣΗ 2-20069** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -3)$  και  $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

- α) Να βρείτε την προβολή του  $\vec{\alpha}$  πάνω στο  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να αναλύσετε το  $\vec{\alpha}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 15)

**23) ΑΣΚΗΣΗ 2-20070** §1.5

Έστω  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν  $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ ,  
 $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .  $\vec{\alpha}$  (Μονάδες 12)  
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ . (Μονάδες 13)

**24) ΑΣΚΗΣΗ 2-22505** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ ,  $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{u} \perp \vec{v}$   
 και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$

- α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$  (Μονάδες 12)  
 β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{u} - 3\vec{v}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  είναι αντίρροπα και ότι  $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$  (Μονάδες 13)

**25) ΑΣΚΗΣΗ 2-22519** §1.5

Έστω  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right) \text{ και } \vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \mu \in \mathbb{R}$$

- α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  ως συνάρτηση του  $\mu$ . (Μονάδες 10)  
 β) Αν  $\mu = 2$ , τότε:  
 i. να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (3, -4)$  και ότι το  $\vec{\alpha}$  είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)  
 ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  (Μονάδες 5)

**26) ΑΣΚΗΣΗ 2-22524** §1.5

Έστω  $\vec{\alpha} = (2, -3)$  και  $\vec{\beta} = (-5, 1)$  δύο διανύσματα.

- α) Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}}$  (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  (Μονάδες 12)

**27) ΑΣΚΗΣΗ 2-22527** §1.5

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

- β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και  $\overline{AB} = \vec{\alpha}$ ,  $\overline{AD} = \vec{\beta}$ . Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος  $\sqrt{3}$ , να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. (Μονάδες 13)

**28) ΑΣΚΗΣΗ 2-22530** §1.5

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε  $\overline{AB} = (-1, 4)$  και  $\overline{AG} = (3, 6)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. (Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 4ο****29) ΑΣΚΗΣΗ 4-18606** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{OA} = (4, -2)$  και  $\overline{OB} = (1, 2)$ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\overline{OA}$  και  $\overline{OB}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 4)
- β) Αν  $\Gamma(\alpha, \beta)$  είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:
- να αποδείξετε ότι:  $\overline{AB} = (-3, 4)$  και  $\overline{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$  (Μονάδες 5)
  - να αποδείξετε ότι:  $4\alpha + 3\beta = 10$  (Μονάδες 6)
  - αν επιπλέον τα διανύσματα  $\overline{OG}$  και  $\overline{AB}$  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 10)

**30) ΑΣΚΗΣΗ 4-18616** §1.5

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$

και  $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$

- α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  (Μονάδες 3)
- β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:
- να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$  (Μονάδες 6)
  - να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$  (Μονάδες 8)
  - να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα. (Μονάδες 8)



**31) ΑΣΚΗΣΗ 4-18618** §1.5

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$  και  $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$  (Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$  (Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι:  $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$  (Μονάδες 7)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> :

## Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

### §2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ §2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

#### 1) ΑΣΚΗΣΗ 2-18575 §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$  και  $B(5,6)$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος  $\epsilon$  του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την  $y = -x + 7$  (Μονάδες 15)

#### 2) ΑΣΚΗΣΗ 2-18584 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$ ,  $\epsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$  και το σημείο A της  $\epsilon_1$  που έχει τετμημένη το 4.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία  $\epsilon_1$  (Μονάδες 10)
- γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών  $\epsilon$  και  $\epsilon_2$ , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B. (Μονάδες 10)

#### 3) ΑΣΚΗΣΗ 2-18587 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$  και  $\epsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο M. Αν οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τέμνουν τον άξονα  $y'y$  στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B (Μονάδες 10)
- β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος  $\overline{MK}$  (Μονάδες 15)

#### 4) ΑΣΚΗΣΗ 2-18589 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : 8x - y - 28 = 0$  και  $\epsilon_2 : x - y + 1 = 0$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$  (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  έχουν εξίσωση την:  $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Μονάδες 15)

**5) ΑΣΚΗΣΗ 2-18592** §2.1 - §2.2Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$ 

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$   
(Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων. (Μονάδες 7)

**6) ΑΣΚΗΣΗ 2-18595** §2.1 - §2.2Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$ 

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$   
(Μονάδες 8)
- β) Αν η ευθεία  $\varepsilon_1$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο Β και η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο Γ, τότε:
- i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 8)
- ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την  $3x - 4y - 12 = 0$  (Μονάδες 9)

**7) ΑΣΚΗΣΗ 2-18600** §2.1 - §2.2Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon_1$  που τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία Α(3,0) και Β(0,6) αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_1$  (Μονάδες 8)
- β) Αν  $\varepsilon_2$  είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$ , τότε να βρείτε:
- i) την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_2$  (Μονάδες 9)
- ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  (Μονάδες 8)

**8) ΑΣΚΗΣΗ 2-18601** §2.1 - §2.2

Έστω Μ(3,5) το μέσο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(1,1).

- α) Να βρείτε:
- i) τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 6)
- ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα  $x'x$  έτσι, ώστε να ισχύει  $(KA) = (KB)$ . (Μονάδες 12)

**9) ΑΣΚΗΣΗ 2-18602** §2.1 - §2.2Δίνεται η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $y + x = 1$  και το σημείο Α(2,-4).

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ( $\varepsilon$ ). (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ( $\varepsilon$ ). (Μονάδες 15)

**10) ΑΣΚΗΣΗ 2-20060** §2.1 - §2.2

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, -1)$  και  $\vec{\beta} = (3, 0)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$  (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\frac{\vec{u}^2}{5}$  και διέρχεται από το σημείο  $A(1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$  (Μονάδες 15)

**11) ΑΣΚΗΣΗ 2-20063** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο M και  $A(1, -2)$ ,  $M(-2, 5)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος AB, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες x'x και y'y (Μονάδες 15)

**12) ΑΣΚΗΣΗ 2-20065** §2.1 - §2.2

Δίνεται η ευθεία ε :  $x + y + 2 = 0$  και το σημείο  $A(5, 1)$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta_1$ , η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta_2$ , η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών  $\eta_1$  και  $\eta_2$  και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

**13) ΑΣΚΗΣΗ 2-20066** §2.1 - §2.2

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία  $A(3, 1)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(2, 4)$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 18)

**14) ΑΣΚΗΣΗ 2-20068** §2.1 - §2.2

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $A(-5, 4)$ ,  $B(-1, 6)$ ,  $\Gamma(4, 1)$  και σημείο M της πλευράς AB για το οποίο ισχύει  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{AB}$ . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M. (Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο M έχει συντεταγμένες  $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ , να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, M. (Μονάδες 10)

**15) ΑΣΚΗΣΗ 2-20072** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο  $A(6, -1)$  εκτός της (ε).

Έστω  $M(2, 1)$  η προβολή του A στην (ε). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ε). (Μονάδες 12)

**16) ΑΣΚΗΣΗ 2-20073** §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία  $A(2,3)$ ,  $B(-1,5)$  και  $\Gamma(-2,-4)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)  
 β) Να βρείτε το συμμετρικό  $\Delta$  του  $B$  ως προς το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$ . (Μονάδες 10)  
 γ) Τι σχήμα είναι το  $AB\Gamma\Delta$ ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 7)

**17) ΑΣΚΗΣΗ 2-22517** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τα σημεία  $A(6,\mu)$  και  $B(\mu+2, \mu+1)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ , τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ . (Μονάδες 15)  
 β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\mu$ , το σημείο  $\Gamma(4,2)$  περιέχεται στην ευθεία  $AB$ . (Μονάδες 10)

**18) ΑΣΚΗΣΗ 2-22520** §2.1 - §2.2

Έστω  $A(-1,1)$ ,  $B(2,0)$  και  $\Gamma(-1,3)$  τρία σημεία του επιπέδου.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x,y)$  ώστε:  
 $3\overline{AM}^2 - 5\overline{BM}^2 + 2\overline{\Gamma M}^2 = 0$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: 5x - 3y + 1 = 0$ . (Μονάδες 15)  
 β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από το μέσο  $K$  του τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 10)

**19) ΑΣΚΗΣΗ 2-22525** §2.1 - §2.2

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  οι πλευρές του  $AB$  και  $AD$  βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις  $\varepsilon_1: 2x + y + 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: x - 2y + 6 = 0$  αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο  $K(-1,-2)$ , τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$  και να αποδείξετε ότι  $\Gamma(0,-6)$ . (Μονάδες 12)  
 β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $\Gamma\Delta$  και τις συντεταγμένες της κορυφής  $\Delta$ . (Μονάδες 13)

**20) ΑΣΚΗΣΗ 2-22531** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε την εξίσωση  $(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (1)

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 10)  
 β) Αν  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 4ο****21) ΑΣΚΗΣΗ 4-18612** §2.1 - §2.2

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 7)  
 β) Αν  $\varepsilon_1: x + y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: x + y - 4 = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης  $\varepsilon$  των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . (Μονάδες 8)  
 γ) Αν  $A$  είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon_1$  με τεταγμένη το 2 και  $B$  σημείο της ευθείας  $\varepsilon_2$  με τεταγμένη το 1, τότε:

- i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B (Μονάδες 2)  
 ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας  $\varepsilon$  έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

**22) ΑΣΚΗΣΗ 4-20147** §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία  $A(\lambda+1, \lambda-1)$ ,  $B(2,2)$  και  $\Gamma(4,6)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)  
 β) Αν το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ, να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  (Μονάδες 8)  
 γ) Για  $\lambda = 4$ , να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

**23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22562** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τα σημεία  $A(-2t+6, 0)$ ,  $B(0, 4t-2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. (Μονάδες 5)  
 β) Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)  
 γ) Αν  $(AB) = d$ , να αποδείξετε ότι  $d^2 \geq 20$  και κατόπιν να βρείτε τα Α, Β ώστε η απόσταση (ΑΒ) να είναι ελάχιστη. (Μονάδες 10)

**24) ΑΣΚΗΣΗ 4-22563** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε το σημείο  $M(-3,-2)$  και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.

- α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  της ευθείας είναι αρνητικός. (Μονάδες 10)  
 β) Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.  
 i. Να αποδείξετε ότι  $E(\lambda) \geq 12$  για κάθε  $\lambda < 0$  (Μονάδες 10)  
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν. (Μονάδες 5)

**25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22564** §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τις εξισώσεις  $\varepsilon_\lambda : (\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y - \lambda + 3 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις  $(\varepsilon_\lambda)$  παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 10)  
 β) Έστω  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq 2$ . Αν η  $(\varepsilon_\lambda)$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A(\alpha, 0)$  και  $B(0, \beta)$  αντίστοιχα, τότε:  
 i. να εκφράσετε τα  $\alpha, \beta$  συναρτήσει του  $\lambda$ . (Μονάδες 5)  
 ii. να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$ . (Μονάδες 10)

**26) ΑΣΚΗΣΗ 4-22565** §2.1 - §2.2

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)  
 Έστω  $\varepsilon_1 : x + y = 1$  και  $\varepsilon_2 : x + y = 3$  οι δυο ευθείες.

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα σημεία Α, Β ώστε  $(AB) = 2$ . (Μονάδες 10)

**27) ΑΣΚΗΣΗ 4-22574** §2.1 - §2.2Θεωρούμε σημεία  $M(\alpha, \alpha+1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ 

- α) Να δείξετε ότι κινούνται στην ευθεία  $y = x + 1$ . (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε το συμμετρικό  $M'(\alpha', \beta')$  του Μ ως προς την ευθεία  $x - 2y = 2$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να δείξετε ότι το  $M'$  κινείται, για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$ , στην ευθεία  $x - 7y - 17 = 0$  (Μονάδες 5)
- δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες. (Μονάδες 5)

**§2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ****ΘΕΜΑ 2ο****28) ΑΣΚΗΣΗ 2-20062** §2.3Δίνονται τα σημεία  $A(1, -2)$  και  $B(2, 3)$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από τα σημεία Α, Β. (Μονάδες 11)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της  $\varepsilon$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα. (Μονάδες 14)

**29) ΑΣΚΗΣΗ 2-20140** §2.3Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία  $A(3, 2)$ ,  $B(-3, 1)$  και  $\Gamma(4, 0)$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. (Μονάδες 16)

**30) ΑΣΚΗΣΗ 2-22506** §2.3Θεωρούμε τα σημεία  $A(\alpha, 0)$  και  $B(0, \beta)$ , όπου  $\alpha \cdot \beta > 0$  και  $\alpha \neq \beta$ 

- α) Να αποδείξετε ότι  $AB: y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$  (Μονάδες 7)
- β) Αν  $\varepsilon$  είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  και είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ, τότε:
- i) να βρείτε την εξίσωση της  $\varepsilon$ . (Μονάδες 9)
- ii) αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο Κ και τον άξονα  $y'y$  στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι  $(OKL) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}$ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

**31) ΑΣΚΗΣΗ 2-22521** §2.3

Θεωρούμε τα σημεία  $A(\lambda+1, 2\lambda)$ ,  $B(2-\lambda, 4)$  και  $\Gamma(-1, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ , τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 10)
- β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ισχύει  $(AB\Gamma) = 3$ .
- i. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = 2$ . (Μονάδες 10)
- ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\overrightarrow{\Gamma A}$ ,  $\overrightarrow{\Gamma B}$  όταν  $\lambda = 1$ . (Μονάδες 5)

**32) ΑΣΚΗΣΗ 2-22522** §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$  θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  και τα σημεία  $A(2,0)$  και  $B(6,-3)$ .

- α) Να προσδιορίσετε σημείο  $\Gamma$  της ευθείας  $\varepsilon$  ώστε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη  $B\Gamma$ . (Μονάδες 15)
- β) Έστω  $\Gamma(1,12)$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 10)

**33) ΑΣΚΗΣΗ 2-22523** §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$  θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon: y = x + \kappa - 1$ , όπου  $\kappa$  θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

- α) Να βρείτε με τη βοήθεια του  $\kappa$ , τα σημεία τομής  $A$ ,  $B$  της ευθείας με τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ . (Μονάδες 13)
- β) Αν ισχύει  $(OAB) < 2$  να αποδείξετε ότι  $\kappa = 2$ . (Μονάδες 12)

**34) ΑΣΚΗΣΗ 2-22529** §2.3

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$  και το σημείο  $A(-2,1)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το  $A$  δεν ανήκει στην  $(\varepsilon)$  και να βρείτε την απόστασή του από αυτή. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην  $(\varepsilon)$  και απέχουν από το  $A$  απόσταση ίση με 3 μονάδες. (Μονάδες 15)

**35) ΑΣΚΗΣΗ 2-22532** §2.3

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα ( $\Delta$ ), Λευκοχώρι ( $\Lambda$ ) και Κακουρέϊκα ( $K$ ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες  $\Delta(-2,2)$ ,  $\Lambda(2,-1)$  και  $K(-1,-10)$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από τα χωριά Δόξα ( $\Delta$ ) και Λευκοχώρι ( $\Lambda$ ). (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την απόσταση του  $K$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα. (Μονάδες 9)

**36) ΑΣΚΗΣΗ 2-22537** §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $A(\lambda-1, \lambda+2)$  και  $B(\mu+3, \mu)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  κινούνται στις ευθείες  $\varepsilon_1: y = x + 3$  και  $\varepsilon_2: y = x - 3$  αντίστοιχα. (Μονάδες 12)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . (Μονάδες 13)



**37) ΑΣΚΗΣΗ 2-22538** §2.3

Δίνονται τα σημεία  $A(0,2)$ ,  $B(1,5)$  και  $\Gamma(t-1,3t-2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$ . (Μονάδες 7)  
 β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου  $\Gamma$  από την ευθεία  $AB$  καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ανεξάρτητα του  $t$ . (Μονάδες 18)

**ΘΕΜΑ 4ο****38) ΑΣΚΗΣΗ 4-18609** §2.3

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$ ,  $\overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ , όπου  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq -2$ , και  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$

- α) Να αποδείξετε ότι  $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$  (Μονάδες 7)  
 β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το διάνυσμα  $\overline{AM}$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$  (Μονάδες 8)  
 γ) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 10)

**39) ΑΣΚΗΣΗ 4-18610** §2.3

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους  $M$  (Μονάδες 7)  
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  το σημείο  $M$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$  (Μονάδες 7)  
 γ) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε:  
 i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\zeta$  που διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία  $AB$  (Μονάδες 5)  
 ii) αν  $K$  είναι τυχαίο σημείο της ευθείας  $\zeta$ , να αποδείξετε ότι  $(KAB) = \frac{9}{4}$  (Μονάδες 6)

**40) ΑΣΚΗΣΗ 4-18611** §2.3

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$  και τα σημεία  $A(-2,4)$  και  $B(2,6)$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου  $M$  της ευθείας  $\varepsilon$  το οποίο ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$  (Μονάδες 7)  
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $MAB$  (Μονάδες 8)  
 γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K(x,y)$  για τα οποία ισχύει  $(KAB) = (MAB)$  ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:  $x - 2y - 5 = 0$  και  $x - 2y + 25 = 0$  (Μονάδες 10)

**41) ΑΣΚΗΣΗ 4-18613** §2.3

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$ , με  $\lambda$  διαφορετικό του 0.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

- β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ. (Μονάδες 13)

**42) ΑΣΚΗΣΗ 4-18614** §2.3

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$   
(Μονάδες 5)
- β) Αν η ευθεία  $\varepsilon_1$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο Β και η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο Γ, τότε:
- i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ  
(Μονάδες 5)
- ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ  
(Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ(x,y) για τα οποία ισχύει  $(ΚΒΓ) = (ΑΒΓ)$  ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.  
(Μονάδες 10)

**43) ΑΣΚΗΣΗ 4-18615** §2.3

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία  $\varepsilon : y = x$  με  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  και  $x_1 < x_2$ . Αν το σημείο  $M(3,5)$  είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

- α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. (Μονάδες 13)
- β) να αποδείξετε ότι  $(ΟΑΒ) = 4$ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)
- γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ(x,y) για τα οποία ισχύει  $(ΚΑΒ) = 2(ΟΑΒ)$  ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:  $x - y - 2 = 0$  και  $x - y + 6 = 0$   
(Μονάδες 7)

**44) ΑΣΚΗΣΗ 4-18617** §2.3

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και  $\varphi \in [0, \pi]$  η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση  $(\vec{\alpha}\vec{\beta} + 12)x + (\vec{\alpha}\vec{\beta} - 12)y - 5 = 0$  (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\varphi \in [0, \pi]$ . (Μονάδες 3)
- β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$   
(Μονάδες 7)
- γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}$   
(Μονάδες 7)
- δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$   
(Μονάδες 8)

**45) ΑΣΚΗΣΗ 4-18620** §2.3

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$ ,  $\varepsilon_2 : (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και το σημείο  $A(2, -1)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι ευθείες τέμνονται. (Μονάδες 7)
- β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Α, να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 10)
- γ) Έστω  $\lambda = 2$  και Β, Γ τα σημεία που οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνουν τον άξονα  $y'y$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.  
(Μονάδες 8)

**46) ΑΣΚΗΣΗ 4-18621** §2.3

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon: 2κx - (1+κ)y + 1 - 3κ = 0$  και  $\zeta: (1+3κ)x + (κ-1)y + 2 - 6κ = 0$ , όπου  $κ \in \mathbb{R}$

- α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $κ$ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ( $\varepsilon$ ) και ( $\zeta$ ). (Μονάδες 15)

**47) ΑΣΚΗΣΗ 4-18622** §2.3

Δίνονται τα σημεία  $A\left(1, \frac{-3}{2}\right)$ ,  $B(2, -1)$  και  $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{B\Gamma}$  (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$  το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  έτσι, ώστε  $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$  (Μονάδες 6)
- δ) Για την τιμή του  $\mu$  που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι  $(OB\Gamma) = 1$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 3)

**48) ΑΣΚΗΣΗ 4-18623** §2.3

Δίνονται τα σημεία  $A(3,4)$ ,  $B(5,7)$  και  $\Gamma(2\mu+1, 3\mu-2)$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$  και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του  $\mu$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι:
- το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δεν εξαρτάται από το  $\mu$ . (Μονάδες 5)
  - για κάθε τιμή του  $\mu$  το σημείο  $\Gamma$  ανήκει σε ευθεία  $\varepsilon$ , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 7)
- γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του  $\mu$ ; (Μονάδες 5)

**49) ΑΣΚΗΣΗ 4-22568** §2.3

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $M(x,y)$ ,  $A(-1,3)$  και  $B(2,-1)$  ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν  $(MAB) = 4$ .

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του  $M$  είναι δυο ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την απόσταση των  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  είναι η μεσοπαράλληλη των  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; (Μονάδες 12)

**50) ΑΣΚΗΣΗ 4-22571** §2.3

Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(-3,4)$  και  $\Gamma(2\lambda+1, 1-\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σταθερό. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή  $\Gamma$  κινείται σε ευθεία παράλληλη στην  $AB$ . (Μονάδες 6)

- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την ΒΓ. (Μονάδες 7)

**51) ΑΣΚΗΣΗ 4-22577** §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_\lambda : x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Μ. (Μονάδες 7)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$  (Μονάδες 8)  
 γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το Ο. (Μονάδες 10)

**52) ΑΣΚΗΣΗ 4-22588** §2.3

Θεωρούμε τα σημεία Α(2,2), Β(-1,0) και Γ(0,2).

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,y) ώστε  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{GM}^2 = 3$  είναι η ευθεία  $\varepsilon : x - 2y + 1 = 0$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε:  
 i. Σημείο Κ στον άξονα x'x ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα y'y. (Μονάδες 10)  
 ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y'y. (Μονάδες 5)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

## §3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

### ΘΕΜΑ 2ο

#### 1) ΑΣΚΗΣΗ 2-22507 §3.1

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$  (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(0,-5)$  και ακτίνα  $\rho = 3$ . (Μονάδες 12)
- β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. (Μονάδες 13)

#### 2) ΑΣΚΗΣΗ 2-22508 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε κύκλο  $C$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3,10)$  και έχει κέντρο το  $K(4,8)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$ , και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που διέρχεται από τα σημεία  $O$  και  $K$ . (Μονάδες 13)
- β) Από τα σημεία του κύκλου  $C$  να βρείτε τις συντεταγμένες:
- i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
  - ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)

#### 3) ΑΣΚΗΣΗ 2-22533 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x,y)$ ,  $B(3,2)$  και  $\Gamma(1,0)$ . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη  $B\Gamma$ , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι το  $A$  κινείται στον κύκλο  $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ . (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του  $A$ , ώστε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι και ισοσκελές. (Μονάδες 12)

#### 4) ΑΣΚΗΣΗ 2-22534 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $K(2,-1)$  και  $A(-6,5)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο  $K$  που διέρχεται από το  $A$ , έχει εξίσωση  $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$ . (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο  $C$  στο σημείο  $A$  και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του  $C$ . (Μονάδες 13)

#### 5) ΑΣΚΗΣΗ 2-22536 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(3,-2)$  και την ευθεία  $\epsilon: x+y+1=0$ . Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 10)
- β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\epsilon$ . (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 4ο****6) ΑΣΚΗΣΗ 4-22557** §3.1

Έστω η εξίσωση:  $(x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy η εξίσωση (1) όταν  $\lambda = 2$  και τι όταν  $\lambda = 6$ ; (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda$  από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
- γ) Καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6), να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. (Μονάδες 8)

**7) ΑΣΚΗΣΗ 4-22558** §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τον κύκλο  $C_1: x^2 + y^2 = 4$  και μία τυχούσα διάμετρό του AB με  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ .

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει  $x_2 = -x_1$  και  $y_2 = -y_1$ ; (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $N(\kappa, \lambda)$  για τα οποία ισχύει  $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = 5$  είναι ο κύκλος  $C_2: x^2 + y^2 = 9$ . (Μονάδες 12)
- γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει:  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ . (Μονάδες 8)

**8) ΑΣΚΗΣΗ 4-22581** §3.1

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 4$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 8)
- β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x'x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. (Μονάδες 7)
- γ) Το σημείο  $M(2, -1)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M. (Μονάδες 10)

**9) ΑΣΚΗΣΗ 4-22584** §3.1

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \quad (1) \text{ και } (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0 \quad (2), \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)
- γ) Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $\lambda$ , ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2). (Μονάδες 7)

**10) ΑΣΚΗΣΗ 4-22586** §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$ , ο κύκλος διέρχεται από την αρχή  $O$ . (Μονάδες 10)
- β)** Έστω  $C$  ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν  $\alpha = 2$  και  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο  $C$  σε σημείο  $A$  διαφορετικό από το  $O$ .
- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του  $A$  συναρτήσει του  $\lambda$ . (Μονάδες 10)
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο  $M$  του τμήματος  $OA$  κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το  $O$ . (Μονάδες 5)

**11) ΑΣΚΗΣΗ 4-22587** §3.1

Σε καρτεσιανό σύστημα  $Oxy$ , θεωρούμε τα σημεία  $M(x,y)$ ,  $A(-25,0)$  και  $B(-1,0)$  για τα οποία ισχύει  $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  ανήκει στον κύκλο  $C: x^2 + y^2 = 25$ . (Μονάδες 10)
- β)** Θεωρούμε το σημείο  $\Sigma(7,1)$ .
- i. Να εξετάσετε αν το σημείο  $\Sigma$  βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου  $C$ . (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο  $\Sigma$  προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

**12) ΑΣΚΗΣΗ 4-22589** §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $M(x,y)$ ,  $A(-2,0)$  και  $B(2,0)$  ώστε να ισχύει  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 3\overline{AM} \cdot \overline{BM}$

- α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  είναι ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 20$  (Μονάδες 10)
- β)** Έστω  $\Gamma, \Delta$  σημεία του κύκλου  $C$  ώστε  $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$
- i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  και η αρχή των αξόνων  $O$ , είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
- ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta}$  όταν το  $M$  κινείται στον κύκλο. (Μονάδες 5)

**13) ΑΣΚΗΣΗ 4-22590** §3.1

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , με  $\lambda \neq 5$ , παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν  $\lambda = 5$ . (Μονάδες 12)
- β)** Έστω  $C_1, C_2$  οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν  $\lambda = 3$  και  $\lambda = 9$  αντίστοιχα.
- i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. (Μονάδες 7)

### §3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

#### ΘΕΜΑ 2ο

#### 14) ΑΣΚΗΣΗ 2-22511 §3.2

Θεωρούμε την παραβολή  $C: y^2 = 4x$  και την κατακόρυφη ευθεία  $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$ , όπου  $p$  είναι η παράμετρος της παραβολής  $C$ .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει την παραβολή  $C$  στα σημεία της  $B$  και  $\Gamma$ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των  $B$  και  $\Gamma$ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  της παραβολής  $C$  στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.

(Μονάδες 10)

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  ανήκει στη διευθετούσα της  $C$ .

(Μονάδες 5)

#### 15) ΑΣΚΗΣΗ 2-22512 §3.2

Δίνεται η εξίσωση:  $y^4 - 16x^2 = 0$  (1)

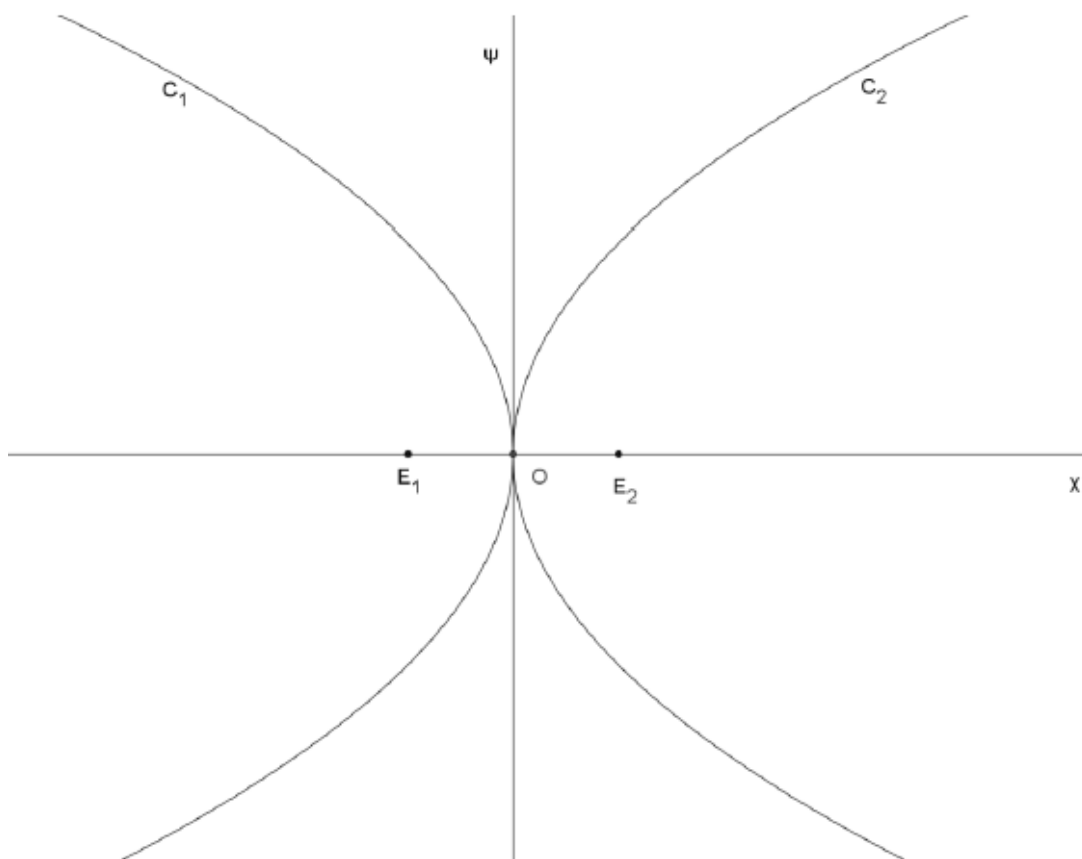
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές  $C_1: y^2 = 4x$  και  $C_2: y^2 = -4x$  και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. (Μονάδες 13)

β) Αν  $E_1$  και  $E_2$  είναι οι εστίες των παραβολών  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $E_1E_2$ . (Μονάδες 12)

#### 16) ΑΣΚΗΣΗ 2-22514 §3.2

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές  $C_1: y^2 = -2px$  και  $C_2: y^2 = 2px$  οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία  $E_1$  και  $E_2$  αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων  $E_1$  και  $E_2$  είναι ίση με 4 μονάδες.





- α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές  $C_1$  και  $C_2$ . (Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $E_1E_2$ . (Μονάδες 10)

#### **ΘΕΜΑ 4ο**

##### **17) ΑΣΚΗΣΗ 4-22559** §3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε κύκλο  $C_1$  ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\varepsilon: x - y - 1 = 0$ . Έστω επίσης  $A(5,3)$  και  $B(1,5)$  δύο σημεία του κύκλου  $C_1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$  (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής  $C_2$  που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου  $C_1$ . (Μονάδες 7)
- γ) Αν  $M_1$  και  $M_2$  είναι τα σημεία τομής των  $C_1$  και  $C_2$ , τότε:
- i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  της παραβολής  $C_2$  στα σημεία αυτά. (Μονάδες 5)
  - ii) να αποδείξετε ότι οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο  $C_1$  (Μονάδες 4)

##### **18) ΑΣΚΗΣΗ 4-22560** §3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία A(0,2) , B(-2,4) και Γ(0,6).

- α) Να αποδείξετε ότι  $C : x^2 + (y - 4)^2 = 4$  (Μονάδες 10)
- β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C. (Μονάδες 9)
- γ) Αν  $M_1$  και  $M_2$  είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$  (Μονάδες 6)

### **19) ΑΣΚΗΣΗ 4-23321** §3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία A(-2,-2) , B(0,-4) , την παραβολή  $y^2 = 4x$  και έστω M(x,y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$
  - $(MAB) \geq 3$  (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο. (Μονάδες 5)
- γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν M(1,-2). Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά AB του τριγώνου MAB. (Μονάδες 10)

## **§3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ**

### **ΘΕΜΑ 2ο**

### **20) ΑΣΚΗΣΗ 2-22509** §3.3

Δίνονται οι ελλείψεις  $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$  και  $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις  $C_1$  και  $C_2$  έχουν την ίδια εκκεντρότητα. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων  $C_1$  και  $C_2$  ανήκουν στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 = 8$  (Μονάδες 13)

### **21) ΑΣΚΗΣΗ 2-22510** §3.3

Δίνονται ο κύκλος  $C_1 : x^2 + y^2 = 20$  , η έλλειψη  $C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$  και η κατακόρυφη ευθεία  $\varepsilon : x = 4$  . Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον κύκλο  $C_1$  και την έλλειψη  $C_2$  αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ. (Μονάδες 11)
- β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του Γ και της έλλειψης  $C_2$  στο σημείο της Δ, καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. (Μονάδες 14)

**22) ΑΣΚΗΣΗ 2-22516** §3.3

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία  $E'(-\sqrt{5},0)$ ,  $E(\sqrt{5},0)$  και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. (Μονάδες 10)  
 β) Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει  $ME' = 2 \cdot ME$ , τότε:  
 i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και  $ME'$  και  $ME$ . (Μονάδες 9)  
 ii) να αποδείξετε ότι η γωνία  $E'ME$  είναι ορθή. (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4ο****23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22592** §3.3

Σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $M(x,y)$  για τα οποία ισχύει η ισότητα  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \frac{16}{9}(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = 0$ , όπου  $A(-3,0)$  και  $B(3,0)$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$  ανήκουν στον κύκλο  $C_1: x^2 + y^2 = 25$  (Μονάδες 11)  
 β) Αν  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι τα σημεία τομής του κύκλου  $C_1$  με τον άξονα  $x'$ , τότε:  
 i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης  $C_2$  η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$  και εστίες τα σημεία  $A$  και  $B$ . (Μονάδες 10)  
 ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο  $C_1$  και την έλλειψη  $C_2$ . (Μονάδες 4)

**§3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ****ΘΕΜΑ 2ο****24) ΑΣΚΗΣΗ 2-22515** §3.4

Μια έλλειψη  $C_1$  έχει εκκεντρότητα ίση με  $\frac{4}{5}$  και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$$C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι  $C_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  (Μονάδες 15)  
 β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη  $C_1$  και την υπερβολή  $C_2$  σε καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$ . (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 4ο****25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22591** §3.4

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα  $x'$  στα σημεία  $A'(-2,0)$ ,  $A(2,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(2\sqrt{5},2)$  είναι η  $C_1: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C_2$  με διάμετρο το τμήμα  $A'A$ . (Μονάδες 5)

- γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής  $C_1$  και του κύκλου  $C_2$  είναι οι ευθείες  $\varepsilon_1 : x = -2$  και  $\varepsilon_2 : x = 2$ . (Μονάδες 10)