ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΤΑΞΗΣ Γ.Ε.Λ. ΕΡΕΤΡΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Τμήμα Β2 Ομάδα Α

18/11/2016

Ονοματεπώνυμο:

Άσκηση

Έστω $\vec{\alpha}$ = (3, –3) , $\vec{\beta}$ = (–2, 0) και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

i. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα. (Μ 5)

ii. Να βρεθούν, όπου ορίζονται, οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, καθώς και οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά με το θετικό ημιάξονα Οx. (Μ 10)

iii. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μ 15)

iv. Αν $\vec{\nu}$ = (3, 3), να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μ 15)

v. διάνυσμα $\vec{u}$, που έχει διπλάσιο μέτρο του $\vec{\beta}$ και είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$. (Μ 20)

- Έστω $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ οι διανυσματικές ακτίνες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ αντίστοιχα, να βρείτε:

vi. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μ 5)

vii. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$. (Μ 10)

viii. σημείο Ν του άξονα y'y, ώστε το τρίγωνο ΝΑΒ να είναι ισοσκελές (ΑΝ=ΒΝ). (Μ20)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΤΑΞΗΣ Γ.Ε.Λ. ΕΡΕΤΡΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Τμήμα Β2 Ομάδα Β

18/11/2016

Ονοματεπώνυμο:

<u>Άσκηση</u>

Έστω $\vec{\alpha} = (0, -3)$, $\vec{\beta} = (-4, -4)$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

i. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα. (Μ 5)

ii. Να βρεθούν, όπου ορίζονται, οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, καθώς και οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα αυτά με το θετικό ημιάξονα Οx. (Μ 10)

iii. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μ 15)

iv. Αν $\vec{v} = (4, 3)$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μ 15)

v. διάνυσμα $\vec{u}$, που έχει διπλάσιο μέτρο του $\vec{\alpha}$ και είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$. (Μ 20)

- Έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$ οι διανυσματικές ακτίνες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ αντίστοιχα, να βρείτε:

vi. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μ 5)

vii. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$. (Μ 10)

viii. σημείο Ν του άξονα x’x, ώστε το τρίγωνο ΝΑΒ να είναι ισοσκελές (ΑΝ=ΒΝ) (Μ 20)

.

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Ομάδα Α

$\vec{\alpha}$ = (3, –3) , $\vec{\beta}$ = (–2, 0) και $\vec{\gamma}$ = $\vec{\alpha}$ – 3$\vec{\beta}$

i. det($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) = 0 –(– 3)(–2) = – 6 ≠ 0 , άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα

ii. $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x} = \frac{-3}{3} = -1,$ οπότε αν φ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα Ox, θα ισχύει εφφ = –1 και επειδή η τετμημένη του $\vec{\alpha}$ είναι θετική και η τεταγμένη του αρνητική, φ =2π – $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{7\pi}{4}$

Ομοίως $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{-2} = 0,$ οπότε αν ω η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\beta}$ με τον άξονα Ox,θα ισχύει εφω = 0 , οπότε ω =π, δηλαδή το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο στον άξονα Ox.

iii. $\vec{\gamma}$ = $\vec{\alpha}$ – 3$\vec{\beta}$ οπότε $\vec{\gamma}$ = (3, –3) – 3(–2, 0) = (9, –3), άρα
$|\vec{\gamma}| = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

iv. $\vec{v}$ = (3, 3). Έστω $\vec{v}$ = κ$\vec{\alpha}$ +λ$\vec{\beta}$, όπου κ, λ $\in \mathbb{R}$, οπότε (3, 3) = κ(3, –3) +λ(–2, 0)

3 = 3κ – 2λ

3 = –3κ

Οπότε κ = – 1 και λ = -3 . Άρα $\vec{v}$ = –1$\vec{\alpha}$ –3$\vec{\beta}$

v. Είναι $\vec{u}$ = λ$\vec{\beta}$ με λ < 0, γιατί αντίρροπο του $\vec{\beta}$. Επίσης, $|\vec{u}| = |\lambda\vec{\beta}| = |\lambda||\vec{\beta}|$

Άρα, αφού $|\vec{u}| = 2|\vec{\beta}|$, οπότε $|\lambda|$ = 2 οπότε επειδή λ < 0, λ = – 2

Άρα, $\vec{u}$ = –2$\vec{\beta}$ = –2(–2, 0) = (4, 0)

vi. Είναι Α(3, –3), Β(–2, 0) και Γ(9, –3). Άρα, το μέσο Μ του ΑΒ είναι:

$$M\ (\frac{3+(-2)}{2}, \frac{-3+0}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$$

vii. $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ = (3– (–2), –3 –0) = (5, –3) και

$\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$ = (–2–9, 0 – (–3)) = (–11, 3)

viii. Έστω Ν(0, y) σημείο του άξονα y΄y, τέτοιο ώστε (AN) = (BN) $\Leftrightarrow$

$\sqrt{(0-3)^2 + (y+3)^2}$ = $\sqrt{(0+2)^2 + (y-0)^2}$ $\Leftrightarrow$ 9 + y^2 + 6y + 9 = 4 + y^2 $\Leftrightarrow$

y = $-\frac{7}{3}$. Άρα Ν(0, $-\frac{7}{3}$)

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Ομάδα Β

$\vec{\alpha}$ = (0, –3) , $\vec{\beta}$ = (–4, –4) και $\vec{\gamma}$ = 3$\vec{\alpha}$ – $\vec{\beta}$

i. det($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) = 0 –(–4)(–3) = – 12 ≠ 0 , άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα

ii. $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x} = \frac{-3}{0} = \delta\varepsilon\nu o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota,$ οπότε αν φ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα Οx , αφού το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει αρνητική τεταγμένη, θα είναι φ = $\frac{3\pi}{2}$, δηλαδή το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα Οy. Ομοίως $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-4} = 1,$ οπότε. αν ω η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\beta}$ με τον άξονα Οx, θα ισχύει εφω = 1 , δηλαδή ω = π + $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{5\pi}{4}$, επειδή η τετμημένη του $\vec{\beta}$ είναι αρνητική και η τεταγμένη του είναι επίσης αρνητική.

iii. $\vec{\gamma}$ = 3$\vec{\alpha}$ – $\vec{\beta}$ οπότε $\vec{\gamma}$ = 3(0, –3) – (–4, –4) = (4, –5), άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

iv. $\vec{v}$ = (4, 3). Έστω $\vec{v}$ = κ$\vec{\alpha}$ +λ$\vec{\beta}$, όπου κ, λ $\in \mathbb{R}$, οπότε (4, 3) = κ(0, –3) +λ (–4, –4)

4 = – 4λ

3 = –3κ – 4λ

Οπότε λ = – 1 και κ = $\frac{1}{3}$. Άρα $\vec{v}$ = $\frac{1}{3}$ $\vec{\alpha}$ –1$\vec{\beta}$

v. Είναι $\vec{u}$ = λ$\vec{a}$ με λ > 0, γιατί ομόρροπο του $\vec{a}$. Επίσης, $|\vec{u}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

Άρα, αφού $|\vec{u}| = 2|\vec{a}|$, οπότε $|\lambda|$ = 2 οπότε επειδή λ > 0, λ = 2

Άρα, $\vec{u}$ = 2$\vec{a}$ = 2(0, –3) = (0, –6)

vi. Είναι Α(0, –3), Β(–4, –4) και Γ(4, –5). Άρα, το μέσο Μ του ΑΒ είναι:

Μ $(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{-3+(-4)}{2}) = (-2, \frac{-7}{2})$

vii. $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ = (0+4, –3 – (–4)) = (4, 1) και

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ = (4– (–4), –5– (–4)) = (8, –1)

viii. Έστω Ν(x, 0) σημείο του άξονα x’x, τέτοιο ώστε (ΑΝ) = (ΒΝ) $\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-0)^2 + (0+3)^2}$ = $\sqrt{(x+4)^2 + (0+4)^2}$ $\Leftrightarrow$ 9 + x^2 = x^2 + 16x + 16 + 16 $\Leftrightarrow$

x = $-\frac{23}{16}$. Άρα Ν($-\frac{23}{16}$, 0)