

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- 1) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2015} - x^{2014} + \alpha x + \beta$
 Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε ο σταθερός όρος του $P(x)$ να είναι ίσος με 2016 και το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ να είναι 2017.
- 2) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού για το οποίο ισχύουν:
 $P(x) - P(x-1) = 2x-3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $P(0) = 2014$
- 3) Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $P(x+1) = x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 Να βρείτε το $P(x)$ αν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2.
- 4) Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ με άθροισμα συντελεστών ίσο με 4 για το οποίο ισχύει $P(2x+1) = 3P(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 α) Να βρείτε το σταθερό όρο του $P(x)$
 β) Να υπολογίσετε την τιμή $P(7)$
- 5) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς ρ_1, ρ_2 και 3 τέτοιους ώστε $\rho_1 \cdot \rho_2 = -2$.
 Να βρείτε τις τιμές των α, β .
- 6) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα:
 $P(x) = x^2 + 2$ και $Q(x) = \alpha(x-2)(x-3) + \beta(x+1)(x-2) + \gamma(x+1)(x-3)$
- 7) Να βρείτε ποια παράσταση πρέπει να αφαιρεθεί από τον διαιρετέο της διαίρεσης $(4x^4 + x^2 - 3x - 1) : (2x^2 + x)$ ώστε η διαίρεση να είναι τέλεια.
- 8) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^3 + x - 5) : (2x - 1)$
- 9) Να δείξετε ότι το $2016^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ είναι διαιρετέο δια 2015 και να βρείτε το πηλίκο.
- 10) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια του $(3x^3 - 6x^2 + 5x - 2)$ είναι το $(x^2 - x + 4)$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$

- 11) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2\alpha x^2 - 5\alpha x + 3\beta$ έχει παράγοντα το $(x-3)(x+2)$
- 12) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \alpha x - \beta$ έχει παράγοντα το $x^2 + 1$
- 13) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P^2(1) + P^2(2) = 2P(2) - 1$
 α) Να υπολογίσετε τις τιμές $P(1)$ και $P(2)$.
 β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-1)(x-2)$
- 14) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 1. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(P(x)) - x$ έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x-2$
- 15) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $x-2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = (2\alpha - \beta)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)x + 10$
- 16) Αν το υπόλοιπο $u(x)$ μιας διαίρεσης δύο πολυωνύμων $P(x):Q(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, ο βαθμός του $P(x)$ είναι 7 και ο βαθμός του $Q(x)$ είναι 4 τότε
 α) Να βρείτε το βαθμό του $u(x)$
 β) Να λύσετε την εξίσωση $z^y + 2yz = 5z^{\frac{2y}{3}}$ όπου y ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης $P(x):Q(x)$
- 17) Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 4 και διαιρούμενο με το $x+2$ αφήνει υπόλοιπο 1. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x+2)$
- 18) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\alpha - \beta)x^2 + \beta$.
 Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$
- 19) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\beta - 1)x + 6$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$
- 20) Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+2)(x^2 - 4x + 3)$

- 21) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+8$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^*$ το οποίο έχει δύο ακέραιες και περιττές ρίζες. Αφού αποδείξετε ότι $\beta=-8$ να βρείτε την τρίτη ρίζα του $P(x)$ σαν συνάρτηση του α .
- 22) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+\lambda x+\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το οποίο αν διαιρεθεί με το $Q(x)=x^2-4$ δίνει υπόλοιπο $u(x)=-5x+10$
 α) Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y=P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-5x+10$
- 23) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με ακέραιους συντελεστές για τα οποία ισχύουν $2P(0)-3Q(0)=0$ και $P(0)+Q(0)=5$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P^2(x)+Q^2(x)=0$ έχει το πολύ δύο ακέραιες ρίζες.
- 24) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές για το οποίο ισχύει $P(1) \cdot P(2)=3$ Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ να αποδείξετε ότι
 α) υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο ώστε $(\rho-1)(\rho-2)\Pi(1)\Pi(2)=3$
 β) ο αριθμός ρ δεν είναι ακέραιος.
- 25) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει

$$P(x+1) - P(x) = x^2 - 2x + 9 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-3x+2
- 26) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^{2013} + \beta x^{2015} - 2016$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
 α) Να εξετάσετε αν το $P(x)$ μπορεί να έχει παράγοντα το x^2-1
 β) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x) = P(x)+P(-x)$
 γ) Αν $P(2014)=-2012$, να βρείτε την τιμή $P(-2014)$
- 27) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3+3x^2+x+1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$
 Αν ο αριθμός $3\beta-4$ είναι ρίζα του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές των α, β .
- 28) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-5x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ τέτοιο ώστε
 $2P^2(0)+9P(0)=5$ και $P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)=0$ Να βρείτε τις τιμές των α, β .

29) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (x-2)^{2015} + x + 1$ και $Q(x) = -x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές των α, β αν γνωρίζετε ότι τα πολυώνυμα έχουν το ίδιο υπόλοιπο αν διαιρεθούν με το $x^2 - 4x + 3$

30) Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $f(x)$, 3^{ου} βαθμού, η οποία έχει παράγοντα το $x^2 + x + 1$, το άθροισμα των συντελεστών της είναι ίσο με 3 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + x^2 + x$

β) Να λύσετε την ανίσωση $(f(x) - 3)^3 + (f(x) - 3)^2 + f(x) > 3$

31) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

Το $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $x^2 - 4x + 3$ δίνει υπόλοιπο $3x - 5$. Το $Q(x)$ έχει

παράγοντα το $x - P(1) - P(3)$, ενώ το $Q(x) + \alpha$ έχει παράγοντα το $x - \frac{P(1) + P(3)}{2}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β

β) Να λύσετε την ανίσωση $Q(x) > 0$