

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2^{x-1} - 1)^x \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνήσια αύξουσα.

β) Να βρείτε το α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2,9)$.

γ) Αν $\alpha=3$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x+1) + f(-x)} - 4$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{3}\right)^x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f

i) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

ii) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\alpha=8$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x-1) = f(4-x) - f(2-x)$

γ) Αν $\alpha=4$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f(x+1) < \frac{15}{4}$

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (4 - \sqrt{15})^x$ και $g(x) = (4 + \sqrt{15})^x$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $4 - \sqrt{15}$ και $4 + \sqrt{15}$ είναι αντίστροφοι.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) \leq g\left(\frac{1}{5}\right)$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x < 2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,7)$ τότε:

α) να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β) να βρείτε τα σημεία που τέμνει η C_f τον άξονα $y'y$.

γ) να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

δ) να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 15) < 3$

ε) να λύσετε την εξίσωση $f((x+1)^{3x-5} - 1) = 1$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + e^{-x}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \sin x$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις α) $e^x \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) + e^{2x+1} = 2e^x - e^{-1}$

β) $3 \ln x^2 - \ln^2(-x) = 9$

γ) $\frac{\log(101 - 10^x)}{2 - x} = 1$

8) Έστω οι θετικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $\ln \alpha \ln \beta > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta + 1 > \alpha + \beta$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\alpha + \beta > e + 1$ να αποδείξετε ότι $\ln \alpha + \ln \beta > 1$

9) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\ln(x^2 + e)^{x-e}}{\ln x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} > 0$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) < 0$ και $f(x) > 1$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = e^{-1}$ και $f(x) = \ln 2$

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2 \ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x-1) \ln 2 + \ln \frac{2^x - 1}{2^x + 2}$

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + \ln(e^x+5) > 0$

13) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x}-2e^x+3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x-1)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+\alpha}+x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική

παράσταση περνάει από την αρχή των αξόνων.

- α) Να βρείτε την τιμή του α .
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(\ln e^3)$

15) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{\ln x} - \frac{1}{2}$ και $g(x) = \sqrt{\ln^2 x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(\sqrt{e})$
- ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(\sqrt{x})$

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- γ) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(2x-5) = -\ln 3$

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ και $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{f(x)}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g
- γ) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A_g = (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, e) \cup (e, +\infty)$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{4}f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$
- δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e^2)$ και $f(e^{\sqrt{e}})$
- ε) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $1 < 2f(x) < \ln 4$

19) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\ln x)$ και $g(x) = \ln(\ln x^2 - 1)$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x - \ln x$, $x > 0$

- α) Αν $0 < x < 1$, να δείξετε ότι $f(x) > e$
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1 - x + \ln^2 x$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > 1 - 2^{x+1} - x$
- δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\eta \mu \theta < \ln\left(\frac{e}{\eta \mu \theta}\right)$

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x + 2)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση.
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > e$ ισχύει $e^{\ln f(\beta+1) - \ln f(\beta)} > 3$
- γ) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(2, 16)$ να βρείτε το α .
- δ) Για $\alpha = e^2$ να λύσετε την ανίσωση $6f(x) - 8 > 16^x$