

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

α) $A = ||-x|+1|$, β) $B = |-x^2-1|-|x^2-2x+1|$

2) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |2x+1| + |3x-3| - |x-2|$ για $-\frac{1}{2} < x < 1$

β) $B = 2|x-3| - 4|x+3| + |2+|x||$ για $-3 < x < 0$

3) Να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς απόλυτα:

α) $A = -2x + 2|x-3|$

β) $B = |x+2| - |x-1|$

γ) $\Gamma = x + |2x-4| - 3|x+1|$

4) Αν $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{|\alpha|-1}{\alpha^2-1} - \frac{\alpha^2-|\alpha|}{\alpha^2-2|\alpha|+1}$

5) Έστω ότι $A = |x| + |x-6|$ και $B = |y| + |y-6|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $A \geq 6$

β) Αν $x+y=6$ τότε $A=B$

6) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |3x-12| - |8-2x| - |4-x|$

β) $B = ||x|+x| - |x-|x||$

7) Αν ισχύει ότι $|a+2b-3| + |b+1| = 0$ να βρείτε τους αριθμούς a, b

8) Αν ισχύει ότι $|2x-4| + |3x-y| = |2-x|$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y

9) Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$

β) $|\alpha+\beta|^2 - |\alpha-\beta|^2 = 4\alpha\beta$

γ) $(\alpha+|\alpha|) \cdot (\alpha-|\alpha|) = 0$

δ) Αν $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ τότε $\left| \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \right| < 1$

10) Να αποδείξετε ότι

α) $|2\alpha-\beta-3| + |\beta-2\alpha-1| \geq 4$

β) Αν $|\alpha-1| \leq 3$ και $|\beta+3| < 2$ τότε $|\alpha+\beta+2| < 5$

γ) Αν $|\alpha-\beta| \leq 1$ και $|\alpha-\gamma| \leq 1$, τότε $|\beta-\gamma| \leq 2$

11) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \neq 0$ ισχύει ότι:

α) $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| = \left| \alpha \right| + \frac{1}{\left| \alpha \right|}$ β) $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ γ) $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| > \left| \alpha \right|$ δ) $\left| \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$

12) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha|\beta| + |\alpha|\beta \leq \alpha\beta + |\alpha\beta|$

13) Να υπολογίσετε τον ακέραιο αριθμό x αν ισχύουν:

$|2x-1|=1-2x$ και $|x+1|=x+1$

14) Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ τότε ισχύει $|\beta - \gamma| < |\alpha - \delta|$

15) Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $|x| < 2$ τότε $|x+2| + |x-3| = 5$

β) Αν $|x| \leq 3$, $|y| \leq 4$ και $|z| \leq 6$ τότε $|x+2y+3z| \leq 29$

γ) Αν $|5\alpha-4\beta| \leq x$, $|5\beta-4\gamma| \leq y$ και $|5\gamma-4\alpha| \leq z$ τότε $|\alpha+\beta+\gamma| \leq x+y+z$

16) Αν $|3+2y| \leq 5$ και $|3-x| \leq 1$ να βρείτε

α) τα διαστήματα στα οποία παίρνουν τιμές τα x, y

β) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = 2x-3y$

17) Αν $|x-9| = 3|x-1|$ τότε να δείξετε ότι $|x|=3$

18) Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-1 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων i) $|x+2|$ ii) $|x-7|$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

19) Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και ισχύει $\frac{|\alpha|}{\beta} + \frac{\alpha}{|\beta|} = 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι. β) $|\alpha+\beta| < |\alpha-\beta|$

20) Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και ισχύει $|\alpha+2\beta| = |\alpha| + |2\beta|$ να αποδείξετε ότι:

α) Οι α, β είναι ομόσημοι. β) $|\alpha|\beta - \alpha|\beta| = 0$

21) Αν $|2\alpha+3\beta| < |3\alpha+2\beta|$ τότε να δείξετε ότι α) $\alpha \neq 0$ β) $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$