

Α-Ψ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι αληθείς οι επόμενες προτάσεις:

- 1) Ισχύει ότι $\alpha + 2 \geq \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2) $\alpha > 0$ και $\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
- 3) Αν $\alpha > 0$ τότε $2\alpha < 5\alpha$
- 4) Αν $\alpha < 0$ τότε $2\alpha > 5\alpha$
- 5) $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha < \alpha^2$
- 6) $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha > \alpha^2$
- 7) $\alpha < -1 \Rightarrow \alpha^2 > -\alpha$
- 8) $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \alpha^2 < -\alpha$
- 9) Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\alpha^9 < \beta^9$
- 10) Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\alpha^8 > \beta^8$
- 11) $\alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- 12) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- 13) $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- 14) $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
- 15) Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha\beta\gamma < 1$, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μικρότερος του 1.
- 16) Αν $\alpha < -2$ και $\beta < -4$ τότε $\alpha\beta > 8$
- 17) Αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\alpha}$
- 18) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha}$
- 19) Αν $\alpha < -1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^3} > -\frac{1}{\alpha^2}$
- 20) $(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$
- 21) Αν $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{\alpha}$
- 22) Αν $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^{-2} > 1$
- 23) Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha > -\beta \Rightarrow \alpha > 0$
- 24) Ισχύει ότι $\alpha^2 - 4\alpha + 6 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ψευδείς οι επόμενες προτάσεις:

1) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2\alpha \geq \alpha$

2) $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta \geq 0$

3) $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

5) $\alpha^2 > \alpha\beta \Rightarrow \alpha > \beta$

6) $x < y < 6 \Rightarrow xy - y^2 < 0$

7) Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq \alpha$

8) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \alpha < \beta$

9) Αν $\alpha, \beta \neq 0$, $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$

10) Αν $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$

11) Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $(\alpha - \beta)^4 (\alpha - 1)^5 (1 - \beta) < 0$

12) Αν $\alpha\beta \neq 0$ με $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

13) Ισχύει ότι $x^2 + (x^2 - x)^2 > 0$

14) $(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$

15) Αν $\alpha < 1 \Rightarrow \alpha^2 < 1$

16) Αν $\alpha > -1 \Rightarrow \alpha^2 > 1$

17) Αν $\alpha < \beta < 5 \Rightarrow \alpha\beta > 0$

18) Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \Rightarrow (\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \text{ ή } (\alpha > \delta \text{ και } \gamma > \beta)$$

19) Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$$

20) Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\alpha + \gamma > \beta + \delta \Rightarrow (\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \text{ ή } (\alpha > \delta \text{ και } \gamma > \beta)$$

21) Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$$

22) Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha\beta\gamma > 1$, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μεγαλύτερος του 1.